MATEMATICA EGIPCIA

MATERIA: SEMINARIO

PROFESOR: GUIDO VASSALLO

ALUMNAS: AYALA, SILVINA
WAGEMANS, BRIGIDA

CURSO: F-35. 4ª año . T.N.

1999

I.N.S.P. U.T.N.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El gran imperio egipcio se destacó por su cultura y lógica, la primera al ser de gran complejidad, solo podía desarrollarse en donde una gran cantidad de gente fuese capaz de convivir relativamente en paz y comodidad, compartiendo sus múltiples tareas y sus frutos; y se estimulase mutuamente.

Toda cultura es tan compleja que no puede ser obra de pequeños grupos, sino de millares de personas y ellos llegar a un acuerdo para vivir de manera pacifica y armoniosa.

A comienzos del III milenio a.c., los egipcios se encontraban en unas condiciones psicológicas, sociales y económicas perfectamente favorables para inventar las cifras y la escritura.

De hecho, la civilización egipcia estaba ya muy avanzada, fuertemente urbanizada y en plena expansión antes del año 3000 a.c.. por razones generalmente administrativas y comerciales, tomó poco a conciencia los límites "hombre-memoria" y el agotamiento de su cultura exclusivamente oral.

Cada vez fue mayor la necesidad de memorizar el pensamiento y la palabra, así como guardar de forma duradera el recuerdo de los recuentos y los inventarios, por lo que comprendió la necesidad de una escritura y una notación numérica, para superar estos problemas.

Aunque se incline a creer a los días del imperio antiguo como la época de la formación de las matemáticas egipcias, los primeros documentos hallados datan del imperio medio y comienzos del segundo milenio a.c., los documentos de este último período señalan un estado muy complicado de la manipulación aritmética, lo que lleva a pensar que los inicios fueron durante el imperio antiguo.

En estos, las insuficiencias teóricas de los medios de cálculo, especialmente, conllevan procedimientos prácticos, tablas extensas y difíciles que debieron necesitar una prolongada y lenta elaboración.

En los comienzos de la primera dinastía, el sistema de numeración con todos sus símbolos llegaba hasta el millón. En la cuarta dinastía se nos revela mensuraciones de campos logrados de la misma manera que en el papiro de Rhind, y el área del rectángulo se da también allí perfectamente. Así como también la unidad de medida de las áreas (hekat), con sus submúltiplos y las unidades de peso.

Durante la duodécima dinastía, fue la época que proporcionó documentos capitales y una técnica determinada, como por ejemplo, su uso del sistema fraccionario y proporcional.

Hemos elegido para trabajar en esta monografía, profundizar el tema de fraccionamiento egipcio, basándonos, especialmente, en el papiro de Rhind.

Capítulo 1

Breve reseña histórica

Egipto, o, *Egiptos*, fue llamado así por los griegos, en honor de uno de los hijos de Bell, de nombre *Egiptus*. Según Moisés, los egipcios descendían de Misraim, hijo de Cham, uno de los hijos de Noé por el cual, los hebreos dieron a este país el nombre de Misraim, como aún muchos árabes lo llaman. Los egipcios se enorgullecen de ser considerado el pueblo más antiguo del mundo y de poseer un gran número de inventores en artes y industrias.

El período histórico más antiguo de Egipto, llamado el Reino Antiguo, es una sucesión de seis dinastías (primera a sexta) que va desde el 3400 a. C., hasta el 2475 a. C., o sea casi un millar de años. La primera mitad de este período no es muy conocida, y cuando se habla del Reino Antiguo se piensa ante todo en la segunda mitad, (dinastías tercera a sexta, desde el 2980 a. C. hasta el 2475 a. C.) durante la cual fueron construidas las pirámides, maravillas arquitectónicas creadas por la mente del hombre, que elevaron a Egipto a su mayor esplendor, las más conocidas fueron las pirámides de *Khufu*, también conocido como Cheops; *Khafra,* conocido como Chefren; y Meukaura, conocido como Mycerinos. Durante este periodo la monarquía egipcia alcanzó con ellos la cima de su poder y de su prestigio.

La cultura prehistórica egipcia se desarrolló durante la última edad de piedra.

Los egipcios disfrutaron de gran reputación por su ciencia y sabiduria. Tenían dos tipos de escritura, la vulgar y la sagrada, formada ésta última por las esculturas representadas por animales y otras extrañas figuras, a las que se les dió el nombre de jeroglíficos. Los sacerdotes egipcios eran los únicos poseedores de las ciencias contemplativas y los encargados de enseñarlas.

La poligamia estaba permitida; los antiguos egipcios podían casarse hasta con sus hermanas, costumbre introducida por los reyes, para que las mujeres no quedaran privadas eternamente del gobierno.

Se acostumbraba embalsamar a los muertos, para preservarle de toda destrucción exterior.

El día comenzaba entre los egipcios a media noche. Los años eran lunares. Poseían un calendario anual.

Los egipcios eran muy supersticiosos, constituyeron sus principales divinidades, Amon, Ra, Anubis, Horus, Apis, Isis y Osiris, y objetos de su admiración el aire, la tierra y el fuego. Ellos representaron un papel importante para la Biblia.

La cultura egipcia se desarrollaba en los alrededores del río Nilo, poseían un gran desarrollo agrícola, cultivaban cebada, escanda y lino.

Capítulo 2

Jeroglíficos

2.1. INTRODUCCION

Los egipcios mediante la escritura representaban sus ideas. Los muros de los templos y de los palacios egipcios estaban cubiertos con estos caracteres enigmáticos, que durante tantos siglos fueron indescifrables, y posteriormente vinieron a ser como las páginas de un gran libro, desparramadas sobre las dos riberas del Nilo. Constituyó el sumario de los más importantes misterios de la naturaleza y de las invenciones más útiles del hombre.

Los egipcios que recibían esta educación, aprendían, primero la llamada escritura efiestolográfica, después la jerática, que empleaban los escribas sagrados, y por último la jeroglífica, que es ya, por medio de iniciales (simbólica). Entre los caracteres simbólicos unos representaban los objetos por imitación, otros por grupos y terceros sugerían la idea por medio de signos algebraicos.

Quedaba por determinar, cuál era la naturaleza de los signos jeroglíficos que no pertenecían al alfabeto fonético y esto fue lo hecho por Champollion en su "Compendio del sistema jeroglífico" publicado en 1824.

En el sistema jeroglífico egipcio se deben considerar en primer lugar dos cosas:

A- La forma material de los signos, la cual constituye tres especies de escritura: la jeroglífica, la jerática y la demótica,

A1-La escritura jeroglífica es aquella que se compone de signos representados por objetos del mundo físico, como animales, plantas, figuras geométricas, etc., cuyo trazo es lineal o bien enteramente terminado y aún colorido, según la importancia del monumento que lleva la inscripción. El número de estos signos es cerca de 800.

A2-La escritura jerática es un sistema abreviado, es decir, una abreviatura de un signo jeroglífico; por ejemplo, en lugar de la figura entera de un león se traza la parte posterior de esta y por la tanto esta abreviatura conservó el mismo valor que su escritura entera. Así la escritura jerática estaba compuesta del mismo número de signos que la escritura jeroglífica, de la que era una abreviación con respecto solamente a la forma de su signo.

A3-La escritura demótica se componía de los mismos signos que la jerática, solamente que el número de caracteres de la escritura demótica, empleado para el uso ordinario de la vida, era menor que la jerática.
Se ve que las tres especies de escrituras usadas simultáneamente en Egipto, en realidad no formaban más que una sola en teoría y que únicamente para la práctica se había adoptado una taquigrafía de signos primitivos, imitación fiel de los objetos naturales reproducidos por el dibujo y la pintura.

Estas tres especies de escritura eran de uso general, sin embargo, la jeroglífica se empleaba solamente para los monumentos públicos: pero los obreros se servían de ella para todos los usos más comunes, como se ve en los utensilios y los instrumentos de los profesionales más vulgares. La escritura jerática o sacerdotal, era la más particularmente usada por los sacerdotes que la empleaban en todo lo que dependía de sus atribuciones religiosas. La tercera especie, en fin, la escritura popular es la más fácil, servía para todos los casos.

Frecuentemente se encuentran las tres escrituras empleadas a la vez en un mismo manuscrito.

B- El valor particular de cada signo: tanto el figurativo, como el simbólico, o el fonético.

B1-Los signos figurativos expresan simplemente la idea de un caballo, de un león, etc., que se indican gráficamente por la misma figura. El sentido de estos caracteres no puede dar lugar a ninguna incertidumbre.

B2-Los signos simbólicos expresan una idea metafisica por la imagen de un objeto físico, cuyas cualidades tenían una analogía verdadera, según los egipcios, directa o indirecta, según la idea que debía expresar. Por ejemplo la abeja era el emblema simbólico de la idea de rey, dos brazos elevados o en alto la idea de ofrecer u ofrenda.

B3-Los signos fonéticos expresaban los sonidos de la lengua hablada, y en la escritura egipcia tenían las mismas funciones que las letras del alfabeto en la nuestra. El número de jeroglíficos fonéticos se eleva a cerca de 100 y predominan en los textos jeroglíficos.

2.2. LAS CIFRAS JEROGLIFICAS:

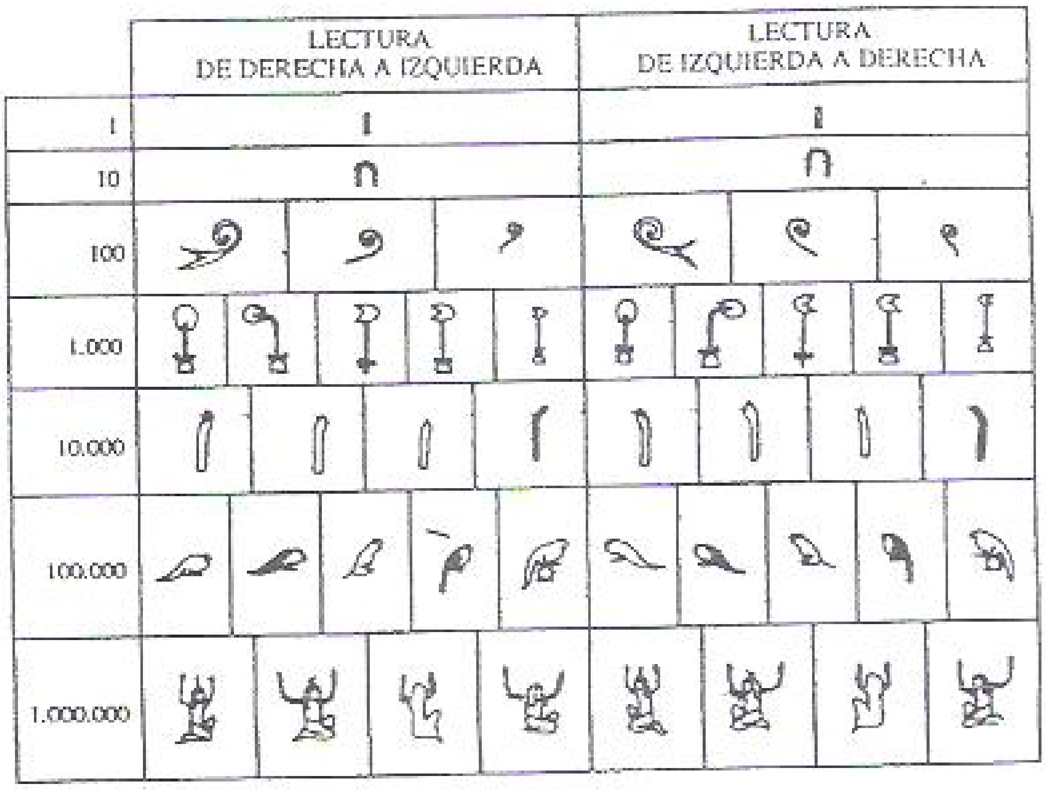
Los egipcios inventaron una escritura y un sistema de enumeración escrito, autóctono, desprovisto de toda influencia extraña. Los signos jeroglíficos que utilizaron se extrajeron de la fauna y flora nilótica, siendo esta la prueba que su escritura se desarrolló en el lugar, e incluso los instrumentos y utensilios que en ella figuran eran empleados en Egipto desde el neolítico antiguo.

Los egipcios reprodujeron sus cifras y jeroglíficos esculpiéndolos por medio de un martillo sobre monumentos de piedra.

La escritura estaba fundada sobre una base rigurosamente decimal.

Desde su aparición, la numeración escrita permitía la representación de números que podían alcanzar y sobrepasar el millón, ya que poseía un jeroglífico específico para indicar la unidad y cada una de sus potencias de 10= 10, $100=10^2$, $1.000=10^3$, $10.000=10^4$, $100.000=10^5$ y $1.000.000=10^6$.

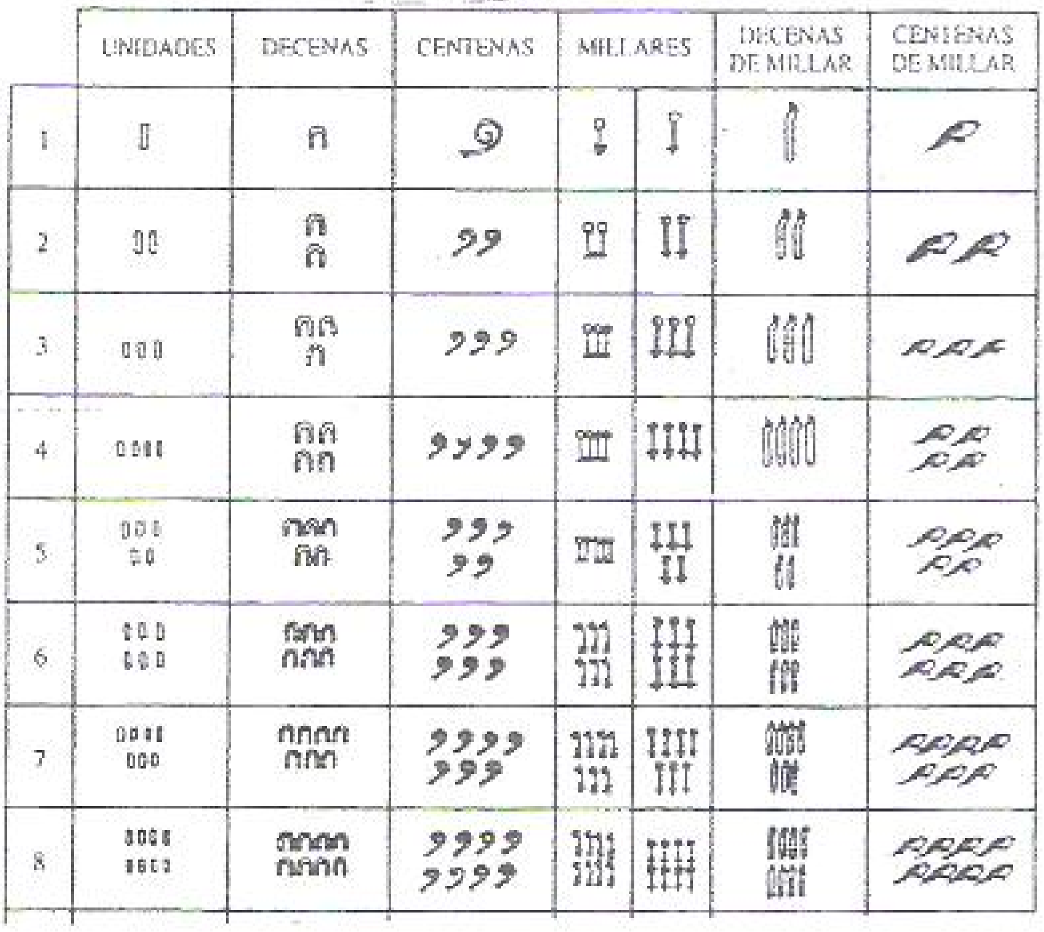
Al principio, los dibujos y agrupamiento de cifras fueron bastantes primitivos

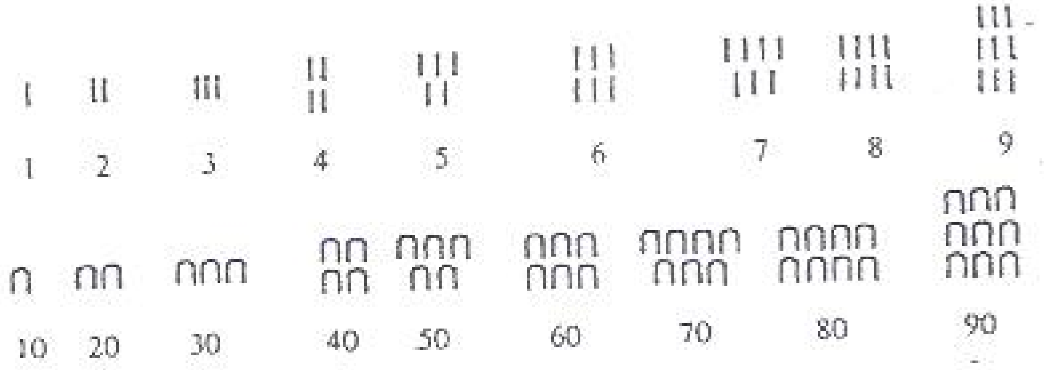


Las cifras cambian de orientación según el sentido de la lectura del texto.

Para representar un número deseado, los egipcios se limitaban a repetir la cifra de cada clase decimal tantas veces como hiciera falta. Y para ello, procedían en el orden de los valores decrecientes, a partir de la cifra de mayor potencia de 10 contenida en el número.

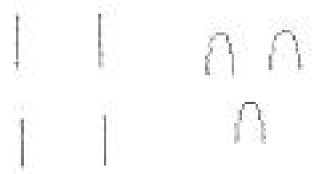
A partir del siglo XXVII a.c., el dibujo de estos jeroglíficos se hizo más minucioso y regular. Para evitar la aglomeración sobre una misma línea de muchas cifras de una misma clase de unidades; y a fin de facilitar al ojo del lector la suma de los valores correspondientes, a menudo se formaron pequeños grupos de dos, tres o cuatro signos idénticos sobre dos o tres líneas superpuestas:





Representación de unidades consecutivas de cada orden decimal de la numeración jeroglífica egipcia

Como podemos observar, este pueblo tenía como base al número 10, por lo tanto su sistema de numeración era decimal. La característica de esta numeración es la de ser aditiva, ya que se suman los valores de todos los símbolos colocados consecutivamente, como veremos en el siguiente ejemplo:

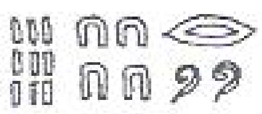


4 + 30 = 43

2.3. LAS FRACCIONES:

Para expresar las fracciones de números, los egipcios se servían en general de jeroglíficos de la boca, colocándola por encima del número que actúa como denominador.

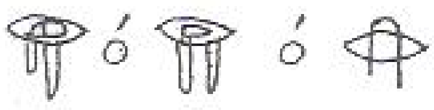
Cuando el denominador no cabría entero bajo el signo de la boca, escribía el excedente a continuación:



Ciertas fracciones, como 1/2, 2/3 y 3/4, eran representadas mediante signos especiales.

Para 1/2 se empleaba simplemente el jeroglífico siguiente:

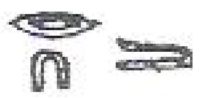
Para 2/3:



Para 3/4

A excepción de las dos últimas expresiones, los egipcios no conocieron fracciones de numerador distinto de la unidad.

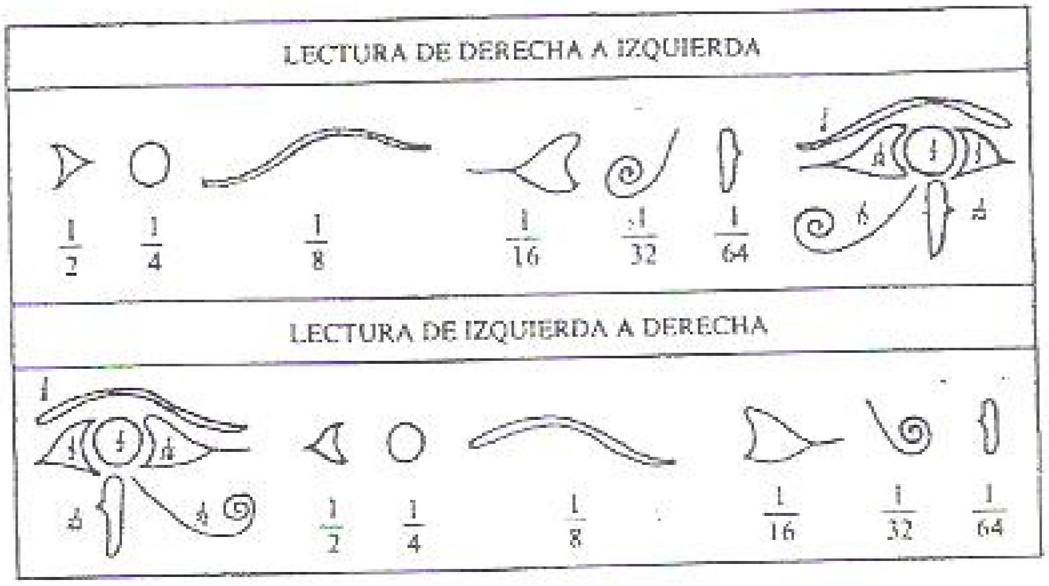
Para expresar por ejemplo, el equivalente de nuestra fracción 3/5, no escribían 1/5+1/5+1/5, si no que la descomponían en una suma de fracciones con 1 como numerador: 3/5=1/2+1/10



Para las medidas de capacidad, los egipcios se servían de una curiosa notación, diferente de la precedente, que permitía indicar fracciones. Esta notación empleaba las diferentes partes del ojo pintado del Dios-Halcón *Horus*:

Como los submúltiplos más usuales eran sucesivamente, el medio, el cuarto, el dieciseisavo, el treintadosavo y el sesentaicuatroavo. Esta notación consistía en descomponer el *oudjat* (ojo egipcio) en seis partes, después en atribuir a cada una de ellas una de las seis fracciones: 1/2, 1/4, 1/8, 1/32 y 1/64.

Es decir:



2.4. LA NOTACIÓN RÁPIDA DE LOS ESCRIBAS EGIPCIOS:

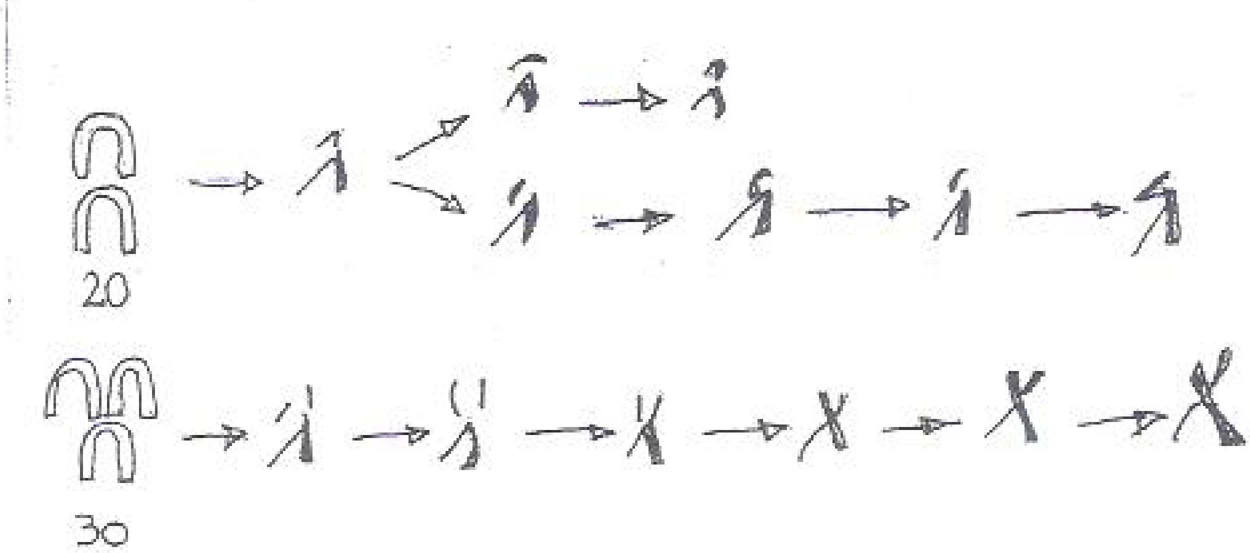
Los egipcios artesanos de la piedra usaban el sistema jeroglífico esencialmente para indicar los números enteros sobre sus diversas inscripciones monumentales. Pero este sistema no era el que los escribas empleaban habitualmente. Para sus diversas cuentas, enumeraciones, inventarios, informes y testamentos, igual que en sus documentos administrativos, jurídicos, económicos, literarios, mágicos, religiosos, matemáticos y astronómicos, se sirvieron frecuentemente de la notación llamada hierática.

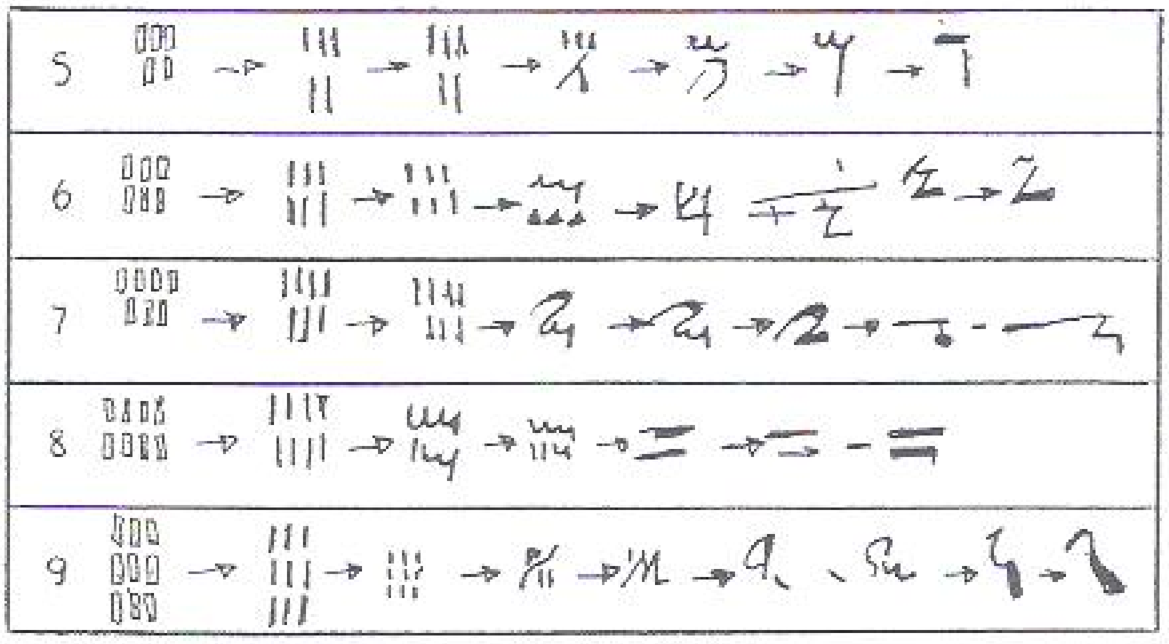
De hecho, los minuciosos dibujos de los jeroglíficos respondían a fines decorativos, tenían un carácter solemne y se prestaban bastante mal a una notación rápida.

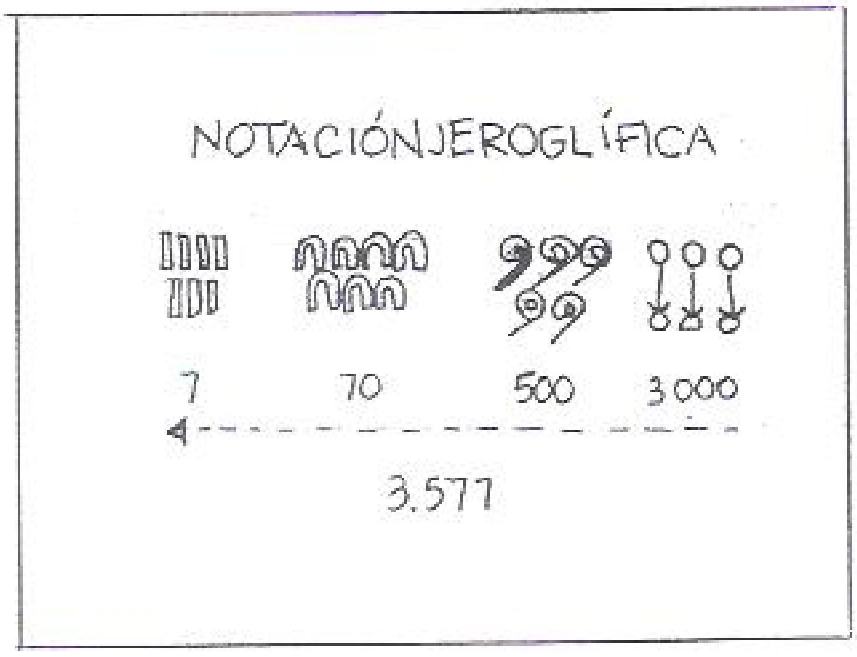
También los escribas, desde la época de las primeras dinastías fueron simplificando el trazo hasta desembocar en auténticos signos cursivos, a los que los autores dieron el nombre de signos hieráticos.

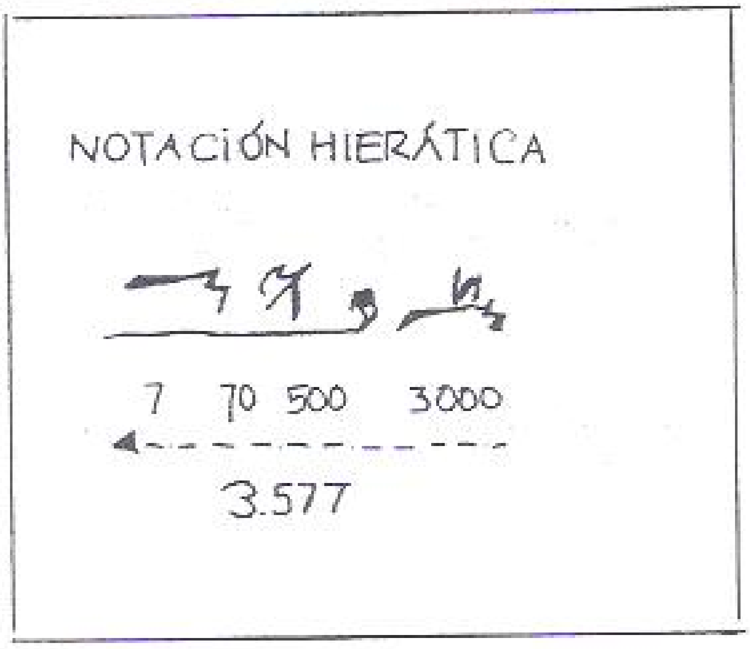
De la misma manera, las cifras hieráticas para 20 y 30 se distinguían de la decena por uno o dos rasgos suplementarios.

A continuación se mostrará esto mediante unas figuras ilustrativas:

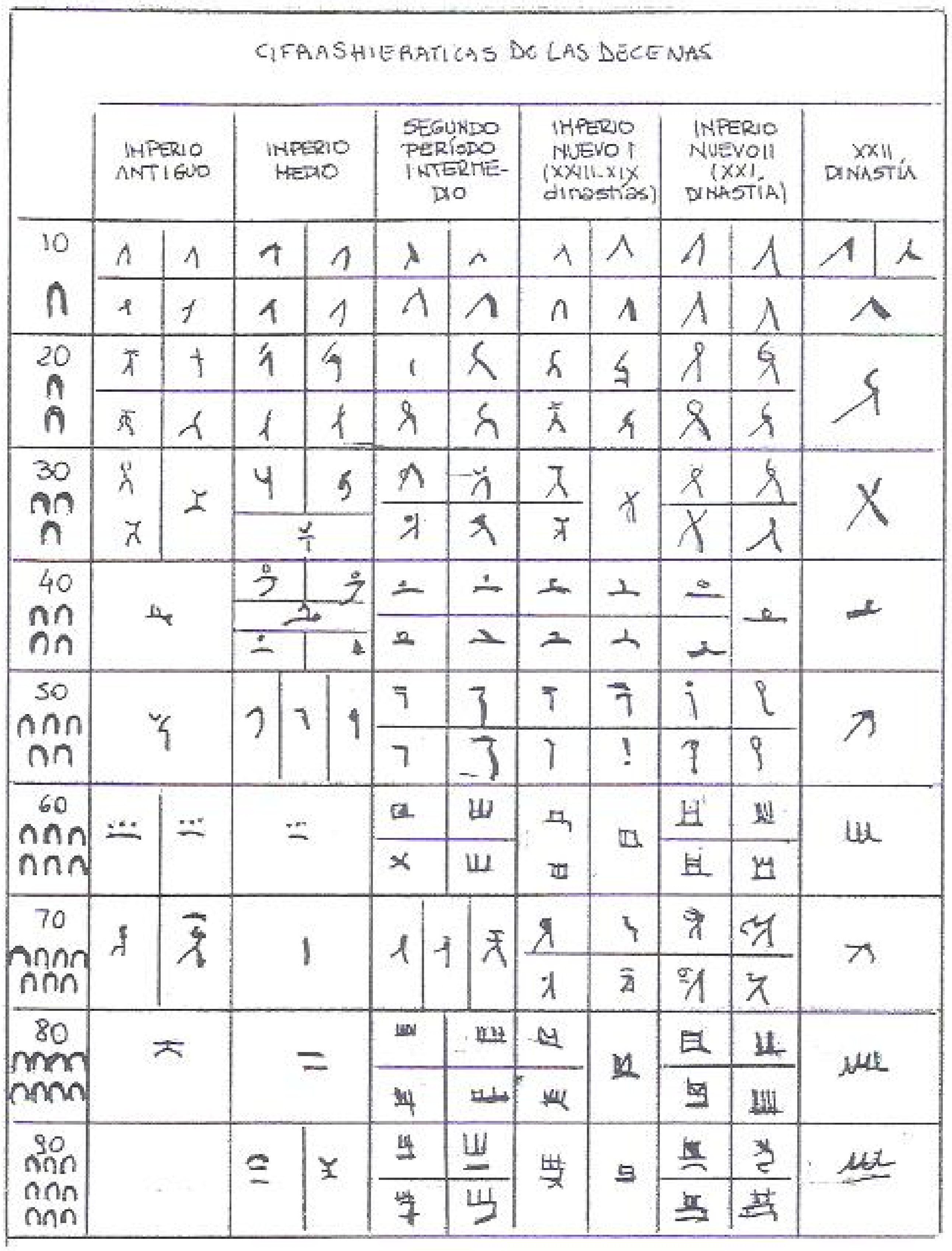


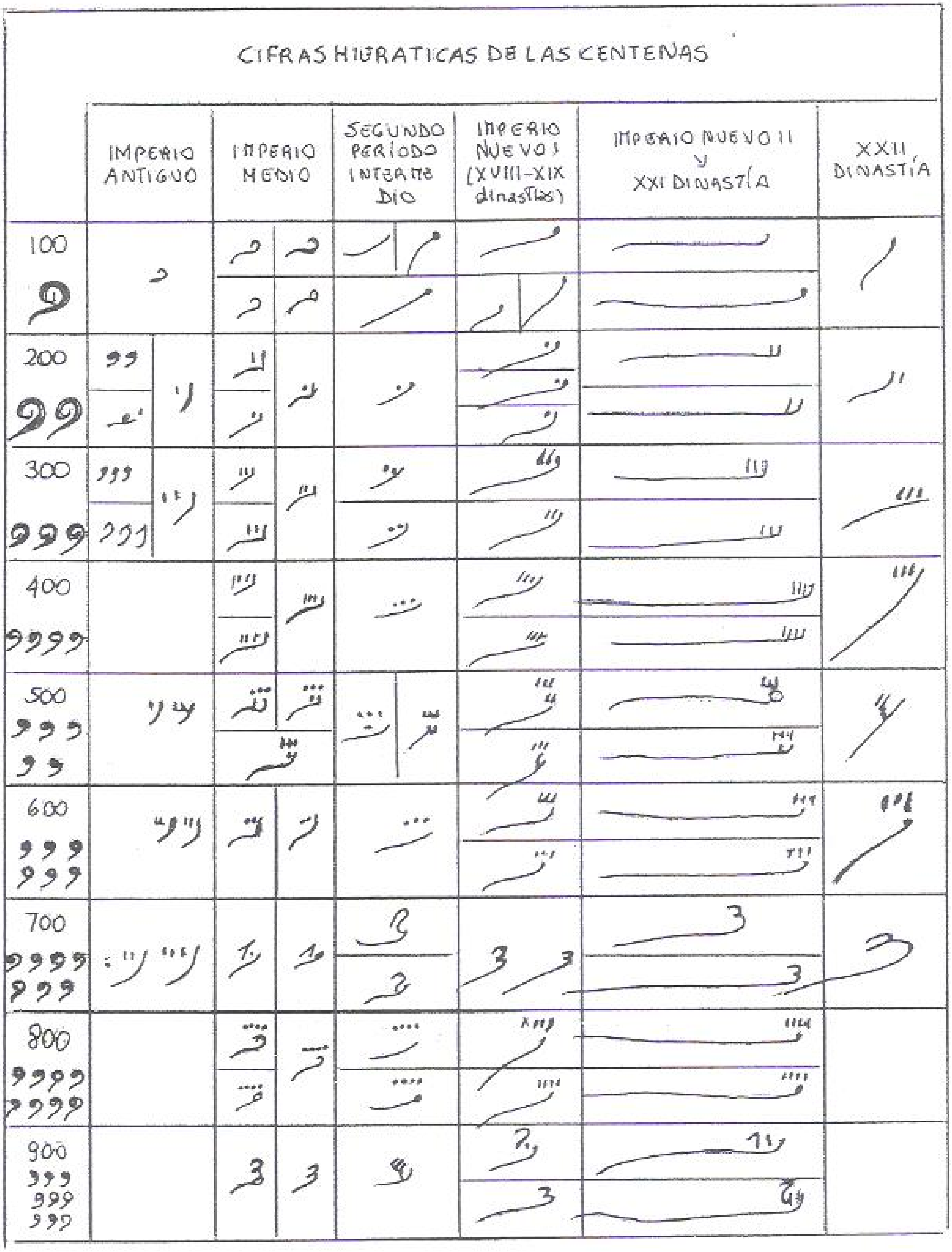

5
6
7
8
9

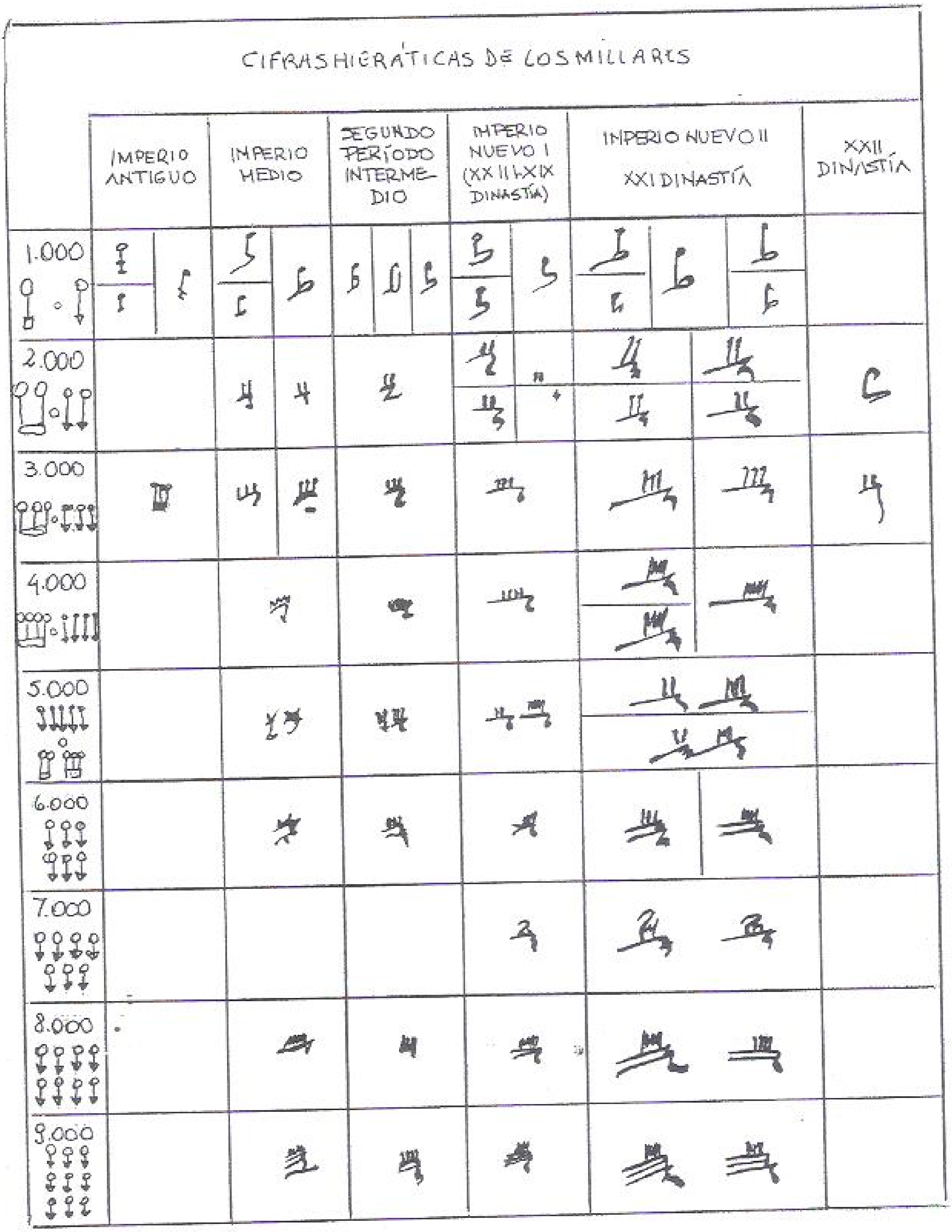

NOTACIÓNJEROGLÍFICA
7
70
500
3000
3.577


NOTACIÓN HIERÁTICA
7
70
500
3000
3.577

CIFRAS HIERÁTICAS DE LAS UNIDADES


CIFRASHIERATICAS DE LAS DECENAS
IMPERIO ANTIGUO
IMPERIO MEDIO
SEGUNDO PERÍODO INTERMEDIO
IMPERIO NUEVO I (XVIII-XIX dinastías)
IMPERIO NUEVO II (XXI DINASTÍA)
XXII DINASTÍA
10
20
30
40
50
60
70
80
90


CIFRAS HIERATICAS DE LAS CENTENAS
IMPERIO ANTIGUO
IMPERIO MEDIO
SEGUNDO PERÍODO INTERMEDIO
IMPERIO NUEVO I (XVIII-XIX dinastías)
IMPERIO NUEVO II Y XXI DINASTÍA
XXII DINASTÍA
100
200
300
400
500
600
700
800
900


CIFRAS HIERÁTICAS DE LOS MILLARES
IMPERIO ANTIGUO
IMPERIO MEDIO
SEGUNDO PERÍODO INTERMEDIO
IMPERIO NUEVO I (XX II L XIX DINASTÍA)
IMPERIO NUEVO II XXI DINASTÍA
XXII DINASTÍA
1.000
2.000
3.000
4.000
5.000
6.000
7.000
8.000
9.000

Capítulo 3
Operaciones matemáticas básicas

3.1. SUMA, RESTA, PRODUCTO Y DIVISION:

La suma y la resta no presentan dificultad alguna: para la primera, basta con superponer las representaciones cifradas de los números que se quieren sumar, y después agrupar (mentalmente) las cifras idénticas, reemplazando cada diez signos de una categoría por la cifra de la clase decimal inmediatamente superior.

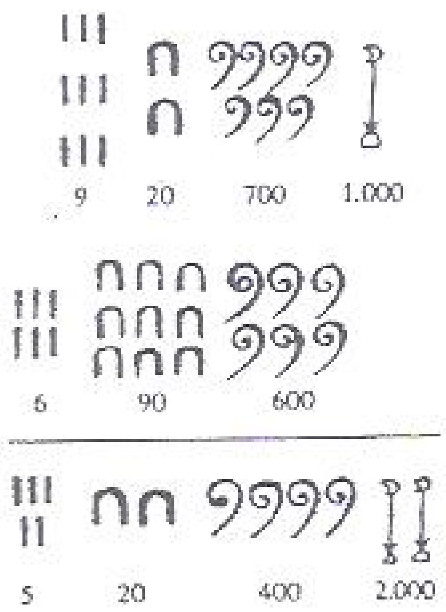
Por ejemplo, para sumar los números 1.729 y 696 se superponen las representaciones cifradas correspondientes. Después se agrupan mentalmente las barras verticales, las asas, las espirales y las flores de loto. A continuación, cada diez trazos se reemplazan por un asa; diez asas, por una espiral; diez espirales, por una flor de loto, y así sucesivamente.

Reemplazando todas las operaciones, obtenemos el siguiente resultado:

1.729

+ 696

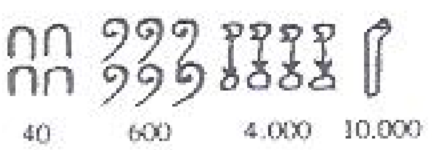
= 2.425



Los egipcios también sabían obtener inmediatamente el resultado de la multiplicación o de la división de un número por 10: bastaba con remplazar en la escritura del número correspondiente cada símbolo por la cifra de su décuplo en el primer caso y por el de su décima parte en el otro.

El número (=1.464)multiplicado por 10:

queda automáticamente sustituido por el siguiente(=14.640):



Pero para la multiplicación o la división de los demás números procedían de otra manera; como no sabían multiplicar o dividir directamente más que por dos, solían hacer duplicaciones sucesivas (o series de multiplicaciones por dos).

Efectuaremos las multiplicaciones como ejemplo:
128 por 12:

Base 1	12 multiplicador
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1536

84 por 15:

Base 1	15 multiplicador
2	30
[4	60]
8	120
[16	240]
32	480]
[64	960]

Pero como el multiplicando 84 no aparece esta vez en la columna de la izquierda, prosigue la duplicación hasta el momento en que obtiene un número más grande que 84. Así se detiene en 64, en la columna de la izquierda, y busca en ella los números cuya suma sea igual a 84.

1	15
2	30
[4	60]
8	120
[16	240]
32	480
[64	960]

Sumando los números marcados obtenemos:

$$84 \times 15 = 960 + 240 + 60 = 1260$$

369 por 19:

[1	19]
~~2~~	38
4	76
8	152
[16	304]
[32	608]
[64	1216]
128	2432
[256	4864]

Pero se detiene en 256 en la columna de la izquierda, pues la duplicación siguiente daría 512, que es una cifra superior al multiplicando 369. Luego buscando en esta misma columna los números cuya suma proporcione el multiplicando 369 y realizando la suma correspondiente obtenemos el resultado buscado.

$$369 \times 19 = 4864 + 12160 + 6080 + 304 + 19 = 7011$$

La multiplicación egipcia es, de esta manera, relativamente simple y puede hacerse sin recurrir a las tablas de multiplicar.

La división se hace, igualmente, siguiendo las duplicaciones consecutivas, pero el procedimiento se efectúa en sentido inverso.

1476 /12:

Para ello, plantea la operación, como si fuera una multiplicación por 12, escribiendo el número 1 en la columna de la izquierda y 12, el divisor, en la columna de la derecha. Después duplica sucesivamente cada uno de los números:

[1	12]
[2	24]
4	48
[8	96]
[16	192]
[32	384]
[64	768]

Se detiene en 768 en la columna de la derecha, pues la duplicación siguiente proporcionaría un número superior al dividendo 1476. Luego realiza múltiples ensayos en la columna de la derecha para encontrar los números que sumados, den este dividendo.

$$1476 / 12 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 123$$

Naturalmente, este método sólo se puede aplicar cuando el dividendo es un múltiplo del divisor. Pero cuando la división no es exacta, se recurre a las fracciones del número siguiendo unos procedimientos.

Los métodos de cálculo egipcio de los faraones tuvieron el mérito de evitar a los calculadores recurrir a la memoria: para multiplicar o dividir, basta con saber sumar y multiplicar por dos. Sin embargo, carecieron de flexibilidad y de unidad, eran lentos y muy complejos en comparación con nuestros medios actuales.

Seguidamente, mostraremos dos programas confeccionados en Pascal, donde desarrollamos estos dos últimos métodos aquí analizados.

3.2. PROGRAM MULTIPLICACION (I.O):

(*Este programa multiplica números naturales como lo hacían los Egipcios*)

```
uses crt,printer;
type
vector= array[01..30] of longint;
vectorb= array[01..30] of boolean;
var
a,b,c,x,y,d,r,m,n,aux: longint;
vecta,vectb:vector;
marca:vectorb;
archivo:text;

procedure inicializar (var vecta,vectb:vector;var marca:vectorb);
(* Este procedure inicializa con ceros a dos vectores y con false a otro *)
var
z:longint;
begin
for z:=1 to 40 do
begin
vecta[z]:=0;
vectb[z]:=0;
marca[z]:=false;
end;
end;

procedure cargar (var x,a,b:longint;var vecta,vectb:vector);
(* Este procedure carga a dos vectores en sus primeros lugares, carga a ambos con un 1 en
uno, y con el número mayor de los números de entrada en el otro. Luego los va recorriendo,
y los completa con duplicaciones de los casilleros anteriores, hasta que el contenido del
vector que comienza con 1, sea menor o igual que el dato de entrada más pequeño*)
var
y,c,z:longint;
begin
z:=1;
x:=0;
vecta[z]:=1;
vectb[z]:=b;
while (vecta[z] <= a) do
begin
z:=z+1;
vecta[z]:=2*vecta[z-1];
x:=x+1;
end;
for z:=2 to x do
begin
vectb[z]:=2*vectb[z-1];
```

```
end;
end;

procedure calcular (var n,x,a,b:longint;var vecta,vectb:vector;var marca:vectorb);
(* Este procedure recorre a los dos vectores ya cargados y hace las operaciones necesarias
con sus contenidos, hasta obtener la solución buscada *)
var
z,m,r:longint;
begin
m:=0;
n:=0;
z:=x;
r:=a-vecta[z];
if (r=0) then
begin
marca[z]:=true;
n:=vectb[z];
end
else
begin
m:=m+vecta[z];
n:=n+vectb[z];
marca[z]:=true;
while (r<>0) do
begin
if (vecta[z] <= r) then
begin
m:=m+vecta[z];
n:=n+vectb[z];
marca[z]:=true;
r:=a-m;
end
else
begin
z:=z-1;
end;
end;
end;
end;

procedure muestra (var vecta,vectb:vector;var muestra:vectorb; var a,b,x,n:longint);
(* Este procedure muestra en pantalla y provoca la salida por impresora *)
var
z:integer;
izq,der,fin: char;
begin
for z:=1 to x do
begin
```

```
if (marca[z]=true) then
begin
izq:='#';
der:='*';
end
else
begin
izq:=' ';
der:=' ';
end;
writeln (izq,vecta[z]:6,vectb[z]:20,der:3);
writeln (lst,'     ',izq,vecta[z]:6,vectb[z]:20,der:3);
end;
writeln (lst);
writeln (lst,'     ','Sumando todos los números marcados con "#", se obtiene: ',a);
writeln (lst,'     ', 'y, sumando los que están marcados con "*", se llega al resultado');
writeln (lst);
writeln (lst,'     ',a,'*',b,'= ', n);
end;


BEGIN (*del programa principal*)
clrscr;
textcolor (7);
aux:=0;
writeln (lst);
writeln (lst);
writeln ('     ','MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES');
writeln (lst,'     ','MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES');
writeln (lst,'      ********************** *********** **    *************
***************');
writeln;
writeln (lst);
writeln ('     ','Ingrese un número natural: ');
write (lst,'     ','Ingrese un número natural: ');
readln (a);
writeln (lst, a);
write ('     ','Ingrese otro número natural: ');
write (lst,'     ', 'Ingrese otro número natural: ');
readln (b);
writeln (lst, b);
writeln (lst);
writeln (lst);
if (a>b) then     (* procedimiento para asegurar la entrada de los datos en los vectores *)
begin
aux:=a;
a:=b;
b:=aux;
```

```
end;
inicializar(vecta,vectb,marca);
cargar(x,a,b,vecta,vectb);
calcular(n,x,a,b,vecta,vectb,marca);
textcolor (7);
muestra (vecta,vectb,marca,a,b,x,n);
writeln ('pulse enter para salir');
readln;
writeln (lst);
writeln (lst);
writeln (lst,'
''************************************************************************
'
*******************');
writeln (lst);
writeln (lst);
End.
```

3.2.1. EJEMPLOS DEL PROGRAMA.

```
MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 128
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 12


      1                 128
      2                 256
#     4                 512  *
#     8                1024  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 12
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

12*128= 1536

******************************************************************
```

```
MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 84
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 15


#     1                  84  *
#     2                 168  *
#     4                 336  *
#     8                 672  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 15
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

15*84= 1260

******************************************************************
```

```
MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1234
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 4286


      1                  4286
#     2                  8572  *
      4                 17144
      8                 34288
#    16                 68576  *
     32                137152
#    64                274304  *
#   128                548608  *
    256               1097216
    512               2194432
#  1024               4388864  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 1234
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

1234*4286= 5288924

******************************************************************



MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 14895
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 325


#     1                 14895  *
      2                 29790
#     4                 59580  *
      8                119160
     16                238320
     32                476640
#    64                953280  *
    128               1906560
#   256               3813120  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 325
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

325*14895= 4840875

******************************************************************
```

```
MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 5400
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 2300


      1                 5400
      2                10800
#     4                21600  *
#     8                43200  *
#    16                86400  *
#    32               172800  *
#    64               345600  *
#   128               691200  *
    256              1382400
    512              2764800
   1024              5529600
#  2048             11059200  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 2300
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

2300*5400= 12420000

******************************************************************
```

```
MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 16
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 3680


      1                 3680
      2                 7360
      4                14720
      8                29440
#    16                58880  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 16
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

16*3680= 58880

******************************************************************
```

```
MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 123
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 321
```

```
#     1            321  *
#     2            642  *
      4           1284
#     8           2568  *
#    16           5136  *
#    32          10272  *
#    64          20544  *
```

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 123
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

123*321= 39483

****

MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 9800
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 9800

```
        1          9800
        2         19600
        4         39200
#       8         78400  *
       16        156800
       32        313600
#      64        627200  *
      128       1254400
      256       2508800
#     512       5017600  *
#    1024      10035200  *
     2048      20070400
     4096      40140800
#    8192      80281600  *
```

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 9800
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

9800*9800= 96040000

****

MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 1

```
#     1                    1  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 1
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

1*1= 1

*****************************************************************



MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 100
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 300


      1                    300
      2                    600
#     4                   1200  *
      8                   2400
     16                   4800
#    32                   9600  *
#    64                  19200  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 100
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

100*300= 30000

*****************************************************************



MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1234
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 6453


      1                   6453
#     2                  12906  *
      4                  25812
      8                  51624
#    16                 103248  *
     32                 206496
#    64                 412992  *
#   128                 825984  *
    256                1651968
    512                3303936
#  1024                6607872  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 1234
```

```
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

1234*6453= 7963002

*****************************************************************



MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 12
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 16


       1                   16
       2                   32
#      4                   64   *
#      8                  128   *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 12
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

12*16= 192

*****************************************************************



MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 27489
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 425


#      1                27489   *
       2                54978
       4               109956
#      8               219912   *
      16               439824
#     32               879648   *
      64              1759296
#    128              3518592   *
#    256              7037184   *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 425
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

425*27489= 11682825

*****************************************************************
```

```
MULTIPLICACION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
************** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1047
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 46


      1                  1047
#     2                  2094  *
#     4                  4188  *
#     8                  8376  *
     16                 16752
#    32                 33504  *

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE: 46
Y, SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*", SE LLEGA AL RESULTADO

46*1047= 48162

*****************************************************************
```

3.3. PROGRAM DIVISION (I.O);

(*Este programa divide números naturales como lo hacían los Egipcios*)

```
uses crt,printer;
type
vector= array[01..30] of longint;
vectorb= array[01..30] of boolean;
var
a,b,c,x,y,d,r,m,n,aux,z: longint;
vecta,vectb:vector;
marca:vectorb;
archivo:text;

procedure inicializar (var vecta,vectb:vector;var marca:vectorb);
(* Este procedure inicializa a dos vectores con ceros y a otro con false *)
var
□
z:longint;
□
begin
□
for z:=1 to 40 do

begin
vecta[z]:=0;
vectb[z]:=0;
marca[z]:=false;
end;
end;

procedure cargar (var x,a,b:longint;var vecta,vectb:vector);
(* Este procedure carga a dos vectores. a uno lo comienza con un 1 y al otro lo inicializa
con el dato de entrada menor. Va generando en ellos duplicaciones sucesivas hasta que el
vector que contiene el dato menor llegue a ser menor o igual que el otro dato *)
var
y,c,z:longint;
begin
z:=1;
x:=0;
vecta[z]:=1;
vectb[z]:=a;
while (vectb[z] <= b) do
begin
z:=z+1;
vectb[z]:=2*vectb[z-1];
x:=x+1;
end;
```

```
for z:=2 to x do
begin
vecta[z]:=2*vecta[z-1];
end;
end;

procedure muestra (var vecta,vectb:vector;var marca:vectorb;var a,b,x,n:longint);
(* Este procedure muestra por pantalla y provoca salida por impresora. Para esto recorre dos
vectores y, si el casillero correspondiente a sus posiciones está marcado con un "true" en un
tercer vector, lo emite *)
var
z:integer;
izq,der,fin:char;
begin
for z:=1 to x do
begin
if (marca[z]=true)then
begin
izq:='#';
der:='*';
end
else
begin
izq:=' ';
der:=' ';
end;
writeln (izq,'     ',vecta[z]:6,vectb[z]:20,der);
writeln (lst,'     ',izq,vecta[z]:6,vectb[z]:20,der);
end;
writeln(lst);
writeln(lst,'     ', 'Sumando todos los números marcados con "#", se obtiene el   resultado');
writeln (lst,'     ','y sumando los que están marcados con "*": ',a);
writeln (lst);
writeln (lst,'     ',b,' / ',a,' = ', n);
writeln ('     ',b,' / ',a,' = ', n);
end;

BEGIN (*de programa principal*)
clrscr;
textcolor (7);
aux:=0;
writeln ('     ', 'DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES');
writeln (lst,'     ','DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES');
writeln (lst,'     ','********** ********** **** ************ **************');
writeln (lst);
writeln;
writeln ('     ','Ingrese un número natural: ');
readln (a);
```

```
writeln (lst,'     ','Ingrese un número natural: ', a);
write ('     ','Ingrese otro número natural: ');
readln (b);
writeln (lst,'     ','Ingrese otro número natural: ',b);
if (a>b) then
begin
aux:=a;
a:=b;
b:=aux;
end;
inicializar(vecta,vectb,marca);
cargar(x,a,b,vecta,vectb);

(* el procedimiento que sigue, calcula la solución. para esto recorre ambos vectores y opera
con sus contenidos siguiendo algunas condiciones *)

m:=0;
n:=0;
z:=x;
r:=b-vectb[z];
if (r=0) then
begin
marca[z]:=true;
n:=vecta[z];
muestra(vecta,vectb,marca,a,b,x,n);
end
else
begin
m:=m+vectb[z];
n:=n+vecta[z];
marca[z]:=true;
while (r<>0) and (z>0) do
begin
if (vectb[z] <= r) then
begin
m:=m+vectb[z];
n:=n+vecta[z];
marca[z]:=true;
r:=b-m;
end
else
begin
z:=z-1;
end;
end;
if (z=0) then
begin
writeln('     ','El resultado de la división no es un número natural');
```

```
writeln (lst,'     ','El resultado de la división no es un número natural');
end
else
begin
muestra (vecta,vectb,marca,a,b,x,n);
end
end;
writeln ('Pulse enter para salir');
readln;
writeln (lst);
writeln (lst);
writeln (lst,'
***************************************************************************
**********************');
writeln (lst);
writeln (lst);
END.
```

3.3.1. EJEMPLOS DEL PROGRAMA.

```
DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1476
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 12
#     1                  12*
#     2                  24*
      4                  48
#     8                  96*
#    16                 192*
#    32                 384*
#    64                 768*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 12

1476 / 12 = 123

******************************************************************
```

```
DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 124
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 2
      1                   2
#     2                   4*
#     4                   8*
#     8                  16*
#    16                  32*
#    32                  64*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 2

124 / 2 = 62

******************************************************************
```

```
DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1476
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 12
#     1                      12*
#     2                      24*
      4                      48
#     8                      96*
#    16                     192*
#    32                     384*
#    64                     768*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 12

1476 / 12 = 123

******************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 768
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 12
      1                      12
      2                      24
      4                      48
      8                      96
     16                     192
     32                     384
#    64                     768*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 12

768 / 12 = 64

******************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 10000
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 100
      1                     100
      2                     200
#     4                     400*
      8                     800
     16                    1600
#    32                    3200*
#    64                    6400*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 100
```

```
10000 / 100 = 100

*****************************************************************

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 201865
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 235
#     1                   235*
#     2                   470*
      4                   940
#     8                  1880*
#    16                  3760*
     32                  7520
#    64                 15040*
    128                 30080
#   256                 60160*
#   512                120320*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 235

201865 / 235 = 859

*****************************************************************

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 4840875
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 325
#     1                   325*
#     2                   650*
#     4                  1300*
#     8                  2600*
     16                  5200
#    32                 10400*
     64                 20800
    128                 41600
    256                 83200
#   512                166400*
   1024                332800
#  2048                665600*
#  4096               1331200*
#  8192               2662400*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 325

4840875 / 325 = 14895

*****************************************************************
```

```
DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 5288924
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 4286
      1                    4286
#     2                    8572*
      4                   17144
      8                   34288
#    16                   68576*
     32                  137152
#    64                  274304*
#   128                  548608*
    256                 1097216
    512                 2194432
#  1024                 4388864*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 4286

5288924 / 4286 = 1234

*******************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 12420000
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 2300
      1                    2300
      2                    4600
      4                    9200
#     8                   18400*
#    16                   36800*
     32                   73600
     64                  147200
    128                  294400
#   256                  588800*
    512                 1177600
#  1024                 2355200*
   2048                 4710400
#  4096                 9420800*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 2300

12420000 / 2300 = 5400

*******************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 58880
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 16
      1                      16
```

```
        2                    32
        4                    64
        8                   128
       16                   256
#      32                   512*
#      64                  1024*
      128                  2048
      256                  4096
#     512                  8192*
#    1024                 16384*
#    2048                 32768*
```

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 16

58880 / 16 = 3680

****

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 16
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 4

```
        1                    4
        2                    8
#       4                   16*
```

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 4

16 / 4 = 4

****

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 9800
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 9800

```
#       1                 9800*
```

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 9800

9800 / 9800 = 1

****

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 30000
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 30

```
       1                    30
       2                    60
       4                   120
#      8                   240*
      16                   480
#     32                   960*
#     64                  1920*
#    128                  3840*
#    256                  7680*
#    512                 15360*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 30

30000 / 30 = 1000


*****************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 12
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 5
EL RESULTADO DE LA DIVISION NO ES UN NUMERO NATURAL


*****************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 47
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 23
EL RESULTADO DE LA DIVISION NO ES UN NUMERO NATURAL


*****************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 89
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 26
EL RESULTADO DE LA DIVISION NO ES UN NUMERO NATURAL


*****************************************************************


DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 101
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 24
EL RESULTADO DE LA DIVISION NO ES UN NUMERO NATURAL
```

```
*******************************************************************

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 2
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 5
EL RESULTADO DE LA DIVISION NO ES UN NUMERO NATURAL

*******************************************************************

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 6
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 9
EL RESULTADO DE LA DIVISION NO ES UN NUMERO NATURAL

*******************************************************************

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 5
#      1                    1*
       2                    2
#      4                    4*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 1

5 / 1 = 5

*******************************************************************

DIVISION EGIPCIA DE NUMEROS NATURALES
******** ******* ** ******* *********

INGRESE UN NUMERO NATURAL: 1
INGRESE OTRO NUMERO NATURAL: 8
       1                    1
       2                    2
       4                    4
#      8                    8*

SUMANDO TODOS LOS NUMEROS MARCADOS CON "#", SE OBTIENE EL RESULTADO
Y SUMANDO LOS QUE ESTAN MARCADOS CON "*": 1

8 / 1 = 8
```

Capítulo 4

Papiros

4.1.INTRODUCCIÓN

Archibald ha catalogado unos treinta y seis documentos originales referentes a la matemática egipcia: están escritos en egipcio, copto y griego, y sus fechas van desde el 3500 a. C. hasta el 1000 d. C. Los documentos anteriores al 1000 a. C. solo son dieciséis, y dos de ellos son tan extensos y completos que eclipsan a todos los demás.

Se presentan en forma de rollos de papiro, llamados respectivamente, papiro Golenishchev (en Moscú) y el papiro de Rhind (en Londres). El Golenishchev es el más viejo, data de la XIII Dinastía (que comenzó en 1788). El papiro de Rhind se remonta al siglo XII pero declara que es copia de un documento más antiguo de la XII Dinastía. Y de ahí que pueda decirse, de estos tratados, que representan la misma época, la XII Dinastía (2000-1788), o aproximadamente el siglo XIX. El período que se extiende entre los siglos XX a XVII (cuatro siglos) señaló el clímax científico de Egipto, mientras que el período que le sigue inmediatamente, desde el XVI al XII, hizo lo propio con su clímax político, por hallarse entonces Egipto a la cabeza de un imperio mundial.

El papiro de Rhind fue escrito por un escriba que se nombra a sí mismo en el párrafo de introducción.

El papiro de Ajmim es uno de los cuatro documentos más recientes sobre la matemática egipcia. Fue escrito entre el siglo VI y el IX de nuestra era. En este papiro la matemática egipcia podía estar influida ampliamente por la matemática griega.

4.2. EL PAPIRO DE KAHUN Y EL TEOREMA DE PITAGORAS:

Los fragmentos del papiro de Kahum plantean una cuestión teñida de prejuicios de las que debemos desembarazarnos antes de seguir adelante, ya que se ha expuesto de manera arbitraria y, hasta ahora, tuvo importante lugar en la historia de la ciencia. Se refiere al teorema de Pitágoras. Un fragmento contiene efectivamente una tabla de cuatro cuadrados que se representan cada uno como una suma de otros dos cuadrados. Y estas cuatro igualdades están obtenidas, dos por sucesivas duplicaciones de los números 3, 4, 5:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \text{ y } 12^2 + 16^2 = 20^2$$

y las otra dos por demediaciones sucesivas de estos mismos números:

$$(1+1/2)^2 + 2^2 = (2+1/2)^2$$

$$\text{y} \qquad (3/4)^2 + 1 = (1+1/4)^2$$

Podría, pues, tratarse de los cuadrados de dimensiones de lados de triángulos rectángulos proporcionales al triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5.

Según cree Cantor, estaríamos ante un conocimiento de algunos casos particulares del famoso teorema de Pitágoras. ¿Habría sido conocido antes en su generalidad? No lo parece, ya que aquí no tenemos otra cosa que múltiplos y submúltiplos de un triángulo rectángulo particular (sin duda, el primero que se conoció y el más sencillo). Si en el papiro no se menciona este triángulo, es porque era tan conocido que tal cita parecía ociosa: se mencionan únicamente los resultados de la doble duplicación y de la doble división por dos realizadas sobre él y que proporcionaban algo menos conocido y más nuevo.

El estudio de algunas escenas representadas en los monumentos egipcios y que presentan al rey sosteniendo en la mano unas estacas y una cuerda, condujo a Cantor a concluir que se trataba de la orientación y de la construcción de templos, gracias a la propiedad conocida del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5.

Pero para orientar y edificar un templo, es decir, para trazar perpendiculares en el terreno, no es necesario recurrir al triángulo. Basta (observaba Milhaud) tender con la cuerda dos oblicuas iguales a partir de la recta en la que se quiere levantar la perpendicular, y unir el punto de intersección de estas dos oblicuas con el centro de esta recta. Parece que el triángulo rectángulo debió de completar más tarde el primer procedimiento y, sobre todo, servir en las elevaciones del terreno. Resultaba particularmente valioso para precisar métricamente las relaciones de determinadas partes de la construcción con respecto al conjunto o para asegurar el trazado de la perpendicular exacta en la dirección de la plomada en el espacio, es decir, para construir planos horizontales paralelos a la base, pero de una altura dada. Sin duda se debió emplear antes en astronomía, para la determinación de la altura de los astros por encima del horizonte, y para la hora.

Extremadamente difícil resulta, sin duda, concluir por todo esto, a no ser por una hipótesis muy osada ya que nada la justifica, que se trata de alguna propiedad del triángulo rectángulo en relación con el teorema de Pitágoras. Más bien parece que nos encontramos en presencia de multiplicaciones o de divisiones de números y de fracciones que constituyen la casi totalidad del contenido del papiro de Kahun, y ante dos observaciones, donde la primera de estas observaciones es que un cuadrado resulta la suma de los otros dos, y la segunda observación dice que al dividir o multiplicar las raíces de tal cuadrado se obtienen números que guardan la misma relación entre sí.

A nuestro juicio, y ateniéndonos estrictamente a los documentos que nos han llegado, se trataría más de una propiedad aritmética que de una propiedad geométrica.

Además, en ningún otro fragmento matemático egipcio se habla para nada de datos relativos al teorema de Pitágoras. El mismo papiro de Kahun no contiene ninguna otra indicación que pueda hacer pensar en eso.

Es, sobre todo aritmético, y los cuadrados a los que nos referimos se vuelve a encontrar en la solución de un problema relativo a una medida de capacidad.
Como manual operatorio encontramos allí:

- Una tabla de solución de las fracciones cuyo denominador es impar y está comprendido entre 3 y 21, y cuyo ~~denominador~~ es 2, en suma de fracciones cuyo numerador es la unidad.
- La multiplicación: (1/3+1/12)*9
- La división de 10 por 8, cuyo resultado se expresa por un número fraccionario: 13 2/3 + 1/12. la expresión fraccionaria 2/3 + 1/6 se substrae seguidamente nueve veces sucesivas de este resultado.
- Un problema muy sencillo que se reduce a la solución de la ecuación: $x/2-x/4 = 5$

Hasta aquí se trata de operaciones aritméticas bastante sencillas, que nos muestran con claridad que nunca se manejaban fracciones cuyo numerador era superior a la unidad (con excepción de 3/2) y que no se sabia dividir sino por medio de substracciones sucesivas.

- Finalmente llegamos a dos problemas relativos a medida de capacidad: Uno consiste en determinar la capacidad de un recipiente cilíndrico de 12 codos de diámetro y 8 de altura. El otro es más confuso; el texto no está completo: se trata de determinar el contenido de un HENU (medida de capacidad de 29.2 pulgadas cúbicas) de recipientes de forma paralelepípeda cuyos lados de base están en una relación dada. Se relaciona, si queremos, con la geometría. La solución de este problema es donde encontramos la tabla de los cuadrados que recuerdan el teorema de Pitágoras. Los lados están en las relaciones: 3/4 a 1, 6 a 8, 1 1/2 a 2, 12 a 16. Se establecen correctamente los cuadrados que resultan de la suma de los cuadrados de los lados. Evidentemente, el egipcio había observado de una manera completamente empírica que, para tales relaciones y en los casos que se examinan, la suma de los cuadrados da un cuadrado, la suma de dos áreas, da un área única.

Ahora bien, sabemos que la propiedad del triángulo 3, 4 y 5 fue conocida en Oriente desde muy temprano, y dadas las relaciones del mundo Oriental, especialmente de cercano Oriente con Egipto, parece imposible que no pasara algún indicio a este último país.

Tampoco debe olvidarse que Aristóteles atribuye de manera formal la difusión de los conocimientos científicos de los egipcios a la sólida organización de un conjunto sacerdotal que disponía de tiempo holgado y lo dedicaba a trabajos intelectuales en cierta manera desinteresados. No cabe duda que en los mismos conocimientos que demuestran los documentos que nos han llegado, los sacerdotes egipcios fueran capaces de darse cuenta, y hasta de descubrir, la importancia del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 y deducir de él ciertas consecuencias. Pero lo cierto es que, en esos mismos documentos, no se hace alusión ninguna a esta propiedad geométrica, cuya importancia fue considerable en los posteriores desarrollos de la matemática y de la ciencia.

Podemos afirmar que los egipcios conocieron la propiedad aritmética excepcional de los cuadrados 3, 4 y 5 y que sabian utilizarla por el método de proporcionalidad. Y, de la misma manera que en las aproximaciones caldeas de la medida de la diagonal de un rectángulo todo esto significó un paso hacia el descubrimiento atribuido a Pitágoras.

4.3.1. EL PAPIRO DE RHIND:

Según el escriba o copista, fue redactado en el mes cuarto de la época de la inundación del año 33 del reinado del rey de los Hicsos Aussere Apophis (entre 1788 y 1580 a.c.). Contiene a su vez, cálculo, métrica, geometría y problemas de aritmética.

E.Peet lo divide en: una introducción, que contiene las tablas de soluciones de las fracciones de numerador 2; y tres libros: aritmética, mensuración (métrica) y problemas de aritmética. Divide, a su vez, el segundo libro en tres partes: volúmenes y capacidades cúbicas, áreas y ángulos de inclinación.

El libro primero contiene la división de números diversos de panes en raciones iguales entre 10 hombres, dos grupos de cálculos que conllevan, uno la adición de fracciones, otro su substracción, la solución aritmética, por ensayos, de ecuación de primer grado *(hau)* y división de panes en proporciones desiguales.

El libro segundo establece en la primera parte la capacidad de recipientes cilíndricos, paralelepípedos rectangulares, la expresión correcta de 1/10, 1/20... hasta 1/100 de 100 cuádruplos hekat (la gran unidad de capacidad) en múltiplos enteros y submúltiplos usuales del hekat.

En la segunda parte encontramos una comparación entre el área del círculo y la del cuadrado, las áreas del rectángulo, del círculo, del triángulo, del triángulo truncado, de un trapecio, y la división de una superficie determinada y conocida de tierra en campos que tengan lados iguales. Este problema, aunque mucho más sencillo (aquí no se trata sino de divisiones de números a la primera potencia), recuerda el papiro de Berlín, en donde encontramos el primer ejemplo dado por el papiro de Kahun, de un cuadrado igual a la suma de los otros dos, y que Cantor tomó por un anticipo particular del teorema de Pitágoras.

La tercera y última parte del libro geométrico trata del tan discutido y difícil problema del ángulo de inclinación de una pirámide, del *se-ket (skd)*, y de un problema semejante, quizá para el cono.

Dadas la altura vertical de una pirámide y una dimensión relativa a la base de ésta, se trata de encontrar un ángulo de inclinación. Eisenlohr había creído que se trataba de determinar el ángulo de la arista de una pirámide sobre la diagonal del cuadrado de base.

Entonces el *skd (se-ket)* daría el coseno de ese ángulo, cuya medida no sería de utilidad práctica. El ángulo que se trata de establecer es el que servirá a un albañil en la construcción de la pirámide para tallar las piedras que deben revestir la cara externa. Y la fórmula que se da en el problema, es decir, la relación de la mitad de una longitud perteneciente a la base con una longitud dependiente de la altura de la pirámide, nos da precisamente ese ángulo, si se toma para esas dos longitudes el lado de la base y la altura.

El libro tercero contiene problemas de división (panes de cebada) según proporciones desiguales, los valores proporcionales de metales preciosos, una división en progresión aritmética, una progresión geométrica (de razón 7, con la unidad por primer termino), algunos cálculos de conversión de trigo en pan o de cebada en cerveza y la conversión de algunas fracciones usuales de *hekat (*gran unidad de medida de las áreas) en *henu* (otra medida de capacidad que valía 1/10 de *hekat*); además, la división de raciones anuales en porciones diarias, el cálculo de un rebaño entero según el número de cabezas de ganado que representa una fracción conocida, el cálculo de los fragmentos de cuentas, algunos fragmentos ininteligibles y algunas indicaciones de fechas utilizadas para fechar el papiro.

4.3.2. THE RHIND PAPYRUS 2/N TABLE

One of the most puzzling episodes in the history of human thought is the 2000-year reign of Egyptian unit fractions. We can, at least in part, reconstruct the arithmetical manipulations involved, but the underlying reason or motive for expressing fractional quantities as sums of unit fractions remains mysterious. Was it simply a cumbersome style of writing that persisted for so many centuries just out of deference to traditional forms, or did it express an actual way of thinking that has since been forgotten?

At the beginning of almost every general history of mathematics we find a description of how the ancient Egyptians operated with fractions almost exclusively in terms of UNIT fractions. For example, instead of saying 2/5 of my land was flooded, they would say 1/3 + 1/15 of my land was flooded. One of the earliest written records from ancient Egypt (transcribed circa 1650 BC from a source believed to date from around 1850 BC or earlier) is known as the Rhind Mathematical Papyrus, and contains a table expressing fractions of the form 2/n as sums of two, three, or four unit fractions with distinct denominators.

The table covers 2/n for n up to 101, although the fractions with"even" denominators, e.g., 2/4, 2/6, etc, are omitted, showing that they clearly perceived the obvious equivalence of these with the reduced forms 1/2, 1/3, etc.

The first entry in the table is 2/3, to which they assigned the expression 1/2 + 1/6. Every other table entry of the form 2/(3k) is assigned the expression 1/2k + 1/6k, which suggests they consciously treated all denominators divisible by 3 as a single family, just as all denominators divisible by 2 were implicitly treated as a single family.

Of the remaining table entries, the next is 2/5, to which they assigned the expression 1/3 + 1/15. All but one of the remaining denominators in the table that are divisible by 5 are assigned a simple multiple of this expression, i.e., for 2/(5k) they used 1/3k + 1/15k. Similarly they assigned 1/4 + 1/28 to the table entry 2/7, and then "seived out" all the remaining denominators divisible by 7 using expressions of the form 1/4k + 1/28k.

Finally, they assigned 1/6 + 1/66 to the table entry 2/11 and then used 1/6k + 1/66k for 2/11k with k=5.

The prime 11 seems to be where they stoped this procedure, which is consistent with that fact that the table extended only to denominators up to 101, so all the composites are seived out by the primes less than 11. It's remarkable that the Egyptians of 1850 BC (and probably much earlier) had already developed this crude version of the "Sieve of Eratosthenes", and seemed to have a grasp of the difference between prime and composite numbers.

Admittedly the seive is not perfect, at least not according to our present understanding. For one thing, the number 55 should have been seived out as a multiuple of 5, but for some reason they chose to treat it as a multiple of 11. Also, the composite numbers 35, 91, and 95 were evidently not treated as composites, but were assigned unique representations. Nevertheless, the overall impression is very strong that they consciously seived out the multiples of the smaller primes up to the square root of the largest denominator in the table, and then treated the remaining primes with unique representations.

As we've seen, for each of the small primes 3,5,7,11 the Egyptians expressed 2/p as a sum of two unit fractions using the simple formula

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{(p+1)/2} + \frac{1}{p(p+1)/2} \qquad (1)$$

(The same formula also applies to the expression they assigned to 2/23, although it may be coincidental.) Once these primes, and their multiples, have been resolved, the table entries for the remaining prime denominators suggest that the Egyptians determined the representations by using the identity

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{2a-p}{ap} \qquad (2)$$

where "a" is just some nice round number a p/2. To find the remaining terms, you partition the quantity 2a - p into one, two, or three distinct parts such that each part is a divisor of a.

(That's why it's good to choose a nice round number for a, so it has lots of divisors.) For example, with n=89 we chose a=60, which gives the difference 31. Thus, we need to express 31 as a sum of three or fewer distinct integers each of which divides 60. One such partition is 31 = 15 + 10 + 6, which leads to the representation that appears in the Rhind Papyrus for 2/89:

$$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$$

On this basis, it's possible to summarize the 2/n table in the Rhind Papyrus by giving the values of a, b, (c, (d)) for each prime p such that 2/p = 1/a + 1/b + (1/c + (1/d)). These values are presented in the table below.

TABLE 1: Summary of Rhind Papyrus 2/n Representations

p	2a-p	a	b	c	d	Also covers these
3	1	2	6			all multiples of 3
5	1	3	15			25, 65, 85
7	1	4	28			49, 77
11	1	6	66			55
23	1	12	276			
13	3	8	52	104		
17	7	12	51	68		
19	5	12	76	114		
31	9	20	124	155		
37	11	24	111	296		
41	7	24	246	328		
47	13	30	141	470		
53	7	30	318	795		
59	13	36	236	531		
67	13	40	335	536		
71	9	40	568	710		
97	15	56	679	776		
29	19	24	58	174	232	
43	41	42	86	129	301	
61	19	40	244	488	610	
73	47	60	219	292	365	
79	41	60	237	316	790	
83	37	60	332	415	498	
89	31	60	356	534	890	

exceptional cases:

35	25	30	42		
91	49	70	130		
95	25	60	380	570	
101	1111	606	101	202	303

This table raises two obvious questions. First, assuming the Egyptians used something like formula (2) to determine their general unit fraction representations for 2/p where p is a "large" prime, how did they select the value of "a" and the partition of 2a - p from the available possibilities? Remarkably, if you examine all the possibilities using a computer, and limit yourself to just the three and four-term representations where the smallest number x in the partition of 2a-p is greater than 1, then in most cases the expression appearing in the Rhind Papyrus is the one for which a/x is minimized.

For example, the only possible solutions for p=43 are

			partition of 2n-p			
p	a	2a-p	x	y	z	a/x
43	24	5	2	3		12
43	28	13	2	4	7	14
43	30	17	2	15		15
43	30	17	2	5	10	15
43	36	29	2	9		18
43	42	41	6	14	21	7

and the representation appearing the Rhind Papyrus is the one with a/x = 7. In all, the Egyptians used the solution with the minimum a/x for the "large" primes

13, 17, 19, 29, 31, 37, 41, 43, 59, 67, 73, 79, 83, 97

whereas they missed it for the primes

47, 53, 61, 71, 89

In these "missed" cases they missed the minimums by 2, 6, 1, 3, and 1 respectively.

Another interesting fact that appears from a review of all the possible representations for each prime is that p=29 is the first prime for which there is no three-term representation of 2/p (with the restrictions noted above). Thus, it's not surprising that 2/29 is the first entry in the Rhind Papyrus where a four-term representation is used.

The second major question raised by Table 1 is how to explain the four exceptional cases. The first three are the composites 35, 91, and 95, that for some reason were not seived out like the rest of the composites. From out point of view the case 2/95 = 2/(5*19) should have been seived out by the small prime p=5, giving it a representation of 1/3k + 1/15k with k=19. Instead, we find that its representation was evidently based on the "large" prime p=19, i.e., it is of the form 1/12k + 1/76k + 1/114k with k=5.

The cases 2/35 and 2/91 are even more unusual, and in a sense these are the most intriguing entries in the table. These are the only two composites whose representations are not simple multiples of the representations of one of their prime factors. Remarkably, in these two cases it appears the Egyptians reverted from the normal multiplicative decomposition to what might be called a "harmonic-airthmetic" decomposition.

Recall that the ancient Greeks had definitions for various kinds of "means", including the

Arithmetic Mean: $A(p,q) = (p+q)/2$

Geometric Mean: $G(p,q) = \mathrm{sqrt}(pq)$

Harmonic Mean: $H(p,q) = 2/(1/p + 1/q)$

It's believed the Greeks inherited these definitions from the Babylonians, but it's certainly possible the Egyptians also knew them. In particular, the Harmonic Mean certainly LOOKS Egyptian, given their affinity for unit fractions.

In any case, notice that $G(p,q)$ is not only the geometric mean of p and q, it's also the geometric mean of $A(p,q)$ and $H(p,q)$. In other words, for any p,q we have

$$G = \mathrm{sqrt}(pq) = \mathrm{sqrt}(AH)$$

which follows simply because $pq = AH$. In other words, AH gives an alternative decomposition of the composite number pq. This leads to the formula

$$\frac{2}{pq} = \frac{2}{A(p,q)\,H(p,q)} = \frac{2}{p+q}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \qquad (3)$$

where of course the leading factor on the right is a unit fraction because p+q is even. This formula yields the Rhind Papyrus representations

$$\frac{2}{5*7} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

and

$$\frac{2}{7*13} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

Thus we can say that every composite entry in the Rhind Papyrus 2/n table is based on a decomposition of n into its prime factors.

In most cases the simple geometric decomposition pq was used, but in two cases they used the arithmetic-harmonic decomposition A*H.

This leaves only the final entry in the 2/n table, which gives

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

This entry can actually be constructed by formula (2) with a=606 and the partition 1111 = 202 + 303 + 606, but it seems to stand out from the other table entries due to the fact that it's a simple multiple of 1/n. This entry may have been just a formality, suggesting that for any n not covered in the table (i.e., larger than 100), we can use the four-term expansion

$$2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/6n \qquad (4)$$

so this effectively "completes" the table, allowing us to say that it provides a unit fraction representation of 2/n for ALL integers n.

Interestingly, formula (4) can be seen as an illustration of the "perfectness" of the number 6, in the sense that the sum of the divisors equals double the number, i.e., 1+2+3+6 = 12 = 2*6.

In summary, the 2/n table of the Rhind Papyrus, which dates from more than a thousand years before Pythagoras, seems to show an awareness of prime and composite numbers, a crude version of the "Sieve of Eratosthenes", a knowledge of the arithmetic, geometric, and harmonic means, and of the "perfectness" of the number 6. This all seems to suggest a greater number-theoretic sophistication than is generally credited to the ancient Egyptians. Whether they originated these ideas or borrowed them, perhaps from the Babylonians, is unclear.
(We shouldn't overlook the possibility that the Babylonians borrowed them from the Egyptians.)

4.3.3. LA TABLA 2/N DEL PAPIRO DE RHIND. (traducción)

Uno de los episodios más enigmáticos en la historia del pensamiento humano es los 2000 años del reinado de las fracciones de los egipcios.

Podemos, al menos, reconstruir las complicadas manipulaciones aritméticas, pero la razón fundamental o motivo para expresar cantidades fraccionales, como por ejemplo la suma de unidades fraccionales continúa en el misterio. ¿Era simplemente un estilo molesto que persistió por centurias justamente fuera del acatamiento de las formas tradicionales, o expresarón un camino actual del pensamiento que había sido olvidado?

Al comienzo de la historia de las matemáticas encontramos una descripción de como los egipcios ancianos operaban con fracciones casi exclusivamente en temas de unidades fracciónales. Por ejemplo, en lugar de decir 2/5 de mi tierra estaban inundadas, ellos habrían dicho 1/3 + 1/15 de mi tierra estaba inundada. Uno de los primeros registros escritos por los ancianos egipcios (transcripto cerca de 1650 a. C. según una fuente confiable), es conocido como el papiro matemático de Rhind y contiene una tabla que expresa fracciones de la forma 2/n en total de dos, tres o cuatro unidades fraccionarias con diferente denominador.
La tabla incluye 2/n para n arriba de 101, si bien las fracciones con "inmutables" denominadores, ej. , 2/4, 2/6, etc., son omitidos por la obvia equivalencia de estos con sus reducciones 1/2, 1/3, etc.

La primera inscripción en la tabla es 2/3, que lo han asignado con la expresión 1/2 + 1/6. Cada dos tablas en la inscripción 2/(3k) son asignadas la expresión 1/2k + 1/6k, la que sugiere que ellos conscientemente trataron con todos los dominadores divisibles por 3 como una simple familia, justamente como los otros denominadores divisibles por 2 estaban tomados como una flia. simple.

De las restantes inscripciones de la tabla, la siguiente es 2/5, que ellos asignaron la expresión 1/3 + 1/15. Todos menos uno de los restantes denominadores en la tabla son divisibles por 5 esta asignado por un múltiplo simple de esta expresión, ej. Para 2/(5k) ellos utilizaban 1/3k + 1/15k. Similarmente asignaban 1/4 + 1/28 para la inscripción 2/7, y así sucesivamente todos las expresiones restantes divisibles por 7 usando expresiones como 1/4k + 1/28k.

Finalmente asignaron 1/6 + 1/66 para la inscripción 2/11 y usaron 1/6k + 1/66k para 2/11k con k=5.

El primo 11 parece que es donde ellos pararon su procedimiento, el que es congruente con el hecho que la tabla alcanza solo a los denominadores superiores a 101, entonces todos los compuestos están protegidos por los primos como el 11. Es remarcable que los egipcios de 1850 a. C. (probablemente mucho antes) hayan realmente desarrollado su versión de la " criba de Eratostenes", y pareció que tenían comprensión de la diferencia entre los primos y los números compuestos.

Admitiendo que el (seive) no es perfecto, y no acuerda con nuestro entendimiento presente. Para una cosa el número 55 debería haber estado (seived) como un múltiplo de 5, por alguna razón ellos escogieron tratarlo como un múltiplo de 11. También, los números compuestos 35, 91, y 95 no eran tomados como compuestos, pero eran asignados con representaciones singulares. Sin embargo la impresión total era tan fuerte que tomaban conscientemente los múltiplos de los primos más pequeños sobre la raíz cuadrada del denominador más largo de la tabla, y luego a los primos resultantes le asignaban representaciones singulares.

Como hemos visto, para cada uno de los primos pequeños 3, 5, 7 y 11 los egipcios expresaban 2/p como la suma de dos unidades fraccionarias usando la formula:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{(p+1)/2} + \frac{1}{p(p+1)/2} \qquad (1)$$

(La misma formula también se aplicaba a las expresiones asignadas para 2/23, aunque debe de ser coincidencia.). Una vez que estos primos y sus múltiplos han sido resueltos, las partes de la tabla para los restantes denominadores primos sugiere que los egipcios determinaron las representaciones de estos usando la identidad.

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{2a - p}{ap} \qquad (2)$$

Donde "a" es justamente algún número adecuado rondando a p/2. para encontrar los términos restantes, deben dividir la cantidad 2 a - p en uno, dos, o tres partes diferentes de las que cada una de ellas es un divisor de a. (esto es el por qué es bueno escoger el número adecuado que este alrededor para a, entonces tiene muchos divisores.) Por ejemplo, con n=89 escoge a=60, el que nos da una diferencia de 31. de este modo, nosotros debemos expresar 31 como la suma de tres o unos pocos números enteros, cada uno de los cuales son divisores de 60. una división semejante es 31 = 15 + 10 + 6, el que aparece en las representaciones del papiro de Rhind, para 2/89:

$$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$$

Sobre este fundamento, es posible resumir la tabla 2/n en el papiro de Rhind dando los valores de a, b, (c, (d)) para cada primo tal que 2/p = 1/a + 1/b + (1/c + (1/d)). Estos valores están representados en la tabla debajo.

TABLA I: Resumen de las representaciones 2/n del papiro de Rhind.

p	2a-p	a	b	c	d	Abarca también a
3	1	2	6			todos múltiplos de 3
5	1	3	15			25, 65, 85
7	1	4	28			49, 77
11	1	6	66			55
23	1	12	276			
13	3	8	52	104		
17	7	12	51	68		
19	5	12	76	114		
31	9	20	124	155		
37	11	24	111	296		
41	7	24	246	328		
47	13	30	141	470		
53	7	30	318	795		
59	13	36	236	531		
67	13	40	335	536		
71	9	40	568	710		
97	15	56	679	776		
29	19	24	58	174	232	
43	41	42	86	129	301	
61	19	40	244	488	610	
73	47	60	219	292	365	
79	41	60	237	316	790	
83	37	60	332	415	498	
89	31	60	356	534	890	

casos excepcionales:

35	25	30	42

91	49	70	130		
95	25	60	380	570	
101	1111	606	101	202	303

Esta tabla produce dos preguntas obvias. La primera, asumiendo que los egipcios hayan usado algún tipo de fórmula para determinar sus representaciones de unidades fraccionarias generales para 2/p donde p es un primo "largo", ¿cómo seleccionaron el valor de "a" y la división de 2 a - p de las posibilidades disponibles?. Notablemente si se examinan todas las posibilidades utilizando una computadora, en donde justamente las representaciones de tres o cuatro términos donde el número x más pequeño en la división de 2 a - p sea más grande que 1, luego en la mayoría de los casos la expresión que aparece en el papiro de Rhind es una por las cuales a/x es minimizado.
por ejemplo la única solución posible para p=43 es:

DIVISIÓN DE 2N - P

p	a	2a-p	x	y	z	a/x
---	---	-----	----	----	----	-----
43	24	5	2	3		12
43	28	13	2	4	7	14
43	30	17	2	15		15
43	30	17	2	5	10	15
43	36	29	2	9	18	18
43	42	41	6	14	21	7

y las representaciones que aparecen en el papiro son la única en la que a/x = 7. en todo, los egipcios usaron la solución con el mínimo a/x para los primos "largos"

13, 17, 19, 29, 31, 37, 41, 43, 59, 67, 73, 79, 83, 97

puesto que ellos han perdido esto para los primos

47, 53, 61, 71, 89

En estos "casos perdidos" ellos perdieron los mínimos de 2, 6, 1, 3, y 1 respectivamente.

Otro hecho interesante que aparece de un repaso de todas las representaciones posibles para cada primo es que p=29 es el primer primo para el cual no hay tres representaciones del termino 2/p (con sus debidas restricciones). De este modo, no es sorprendente que 2/29 sea la primera inscripción en el papiro en donde son usadas cuatro representaciones.

La segunda pregunta es como explicar los cuatro casos excepcionales. Los primeros tres son los compuestos 35, 91 y 95 no estaban como el resto de los compuestos. Desde su punto de vista el caso 2/95 = 2/ (5* 19) debería haber visto por el primo pequeño p=5, dándole una representación de 1/3k + 1/15k con k=19. en cambio, encontramos que estas representaciones estaban basadas evidentemente en los primos grandes p=19, ej. , Esto esta en la forma 1/12k + 1/76k + 1/114k con k=5.

Los casos 2/35 y 2/91 son incluso más inusuales, y en un sentido estas son las inscripciones más intrigantes en la tabla. Estos son los únicos dos compuestos cuyas representaciones no son múltiplos simples de uno de estos factores primos. Notablemente en estos dos casos los egipcios revirtieron desde descomposición multiplicativa normal hasta que deberían estar nombradas como una descomposición aritmética armoniosa.

Recordemos que los ancianos griegos tuvieron definiciones para varios tipos de métodos, incluyendo el

Método aritmético: A (p, q) = (p + q) /2
Método geométrico:G (p, q) = sqrt (pq)
Método armonioso: H (p, q) = 2/ (1/p + 1/q)

Se cree que los griegos heredaron estas definiciones de los babilonios, pero es ciertamente posible que también hayan tenido conocimiento de los egipcios. En particular, el método armonioso tiene apariencia egipcia, dada su afinidad por fracciones unitarias.

En algún caso, la noticia que G (p, q) no es solo el método geométrico de p y q, es también el método geométrico de A(p, q) y H(p, q). en otras palabras, por cada p, q tenemos

G = sqrt(pq) = sqrt(AH)

que sigue simplemente porque pq = AH. En otras palabras, AH da una descomposición alternativa del número compuesto pq. Esto conduce a la formula:

$$\frac{2}{pq} = \frac{2}{A(p,q)\,H(p,q)} = \frac{2}{p+q}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \qquad (3)$$

En donde por supuesto el factor de la derecha es una fracción unitaria porque p+q es eterno. Esta formula da como resultado las representaciones del papiro de Rhind.

$$\frac{2}{5*7} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

Y

$$\frac{2}{7*13} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

De este modo podemos decir que cada inscripción compuesta del papiro está basada en una descomposición de n en sus factores primos. en la mayoría de los casos la descomposición geométrica simple pq era usada, pero en dos casos ellos usaron la descomposición aritmetica-armoniosa A*H.

Esto solo deja la inscripción final en la tabla 2/n, el que da:

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Esta inscripción puede estar actualmente construida por la segunda fórmula con a=606 y la división 1111 = 202 + 303 + 606, pero se nota que para entender las otras inscripciones de la tabla debido a que el hecho de ser un múltiplo simple de 1/n, esta inscripción debería haber tenido formalidad, sugiriendo que para cualquier n no incluido en la tabla (por ej. el 100) podemos usar la expansión de los cuatro términos

$$2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/6n \qquad (4)$$

entonces efectivamente "se completa" la tabla, diciendo que la representación de 2/n proviene de las representaciones de las fracciones unitarias de todos los integrantes de n.
La cuarta fórmula puede estar vista como una ilustración de la perfección del número 6, en el sentido que la suma de los divisores equivalentes al doble del número, por ej. 1+2+3+6 = 12 =2*6.

En resumen, la tabla 2/n del papiro de Rhind, que data desde hace más de 1000 años antes que Pitágoras, se ve como una mezcla de números primos y compuestos, una versión cruda de la criba de Erastótenes, el conocimiento del método geométrico, aritmético y armonioso, y la perfección del número 6. Esto también sugiere una gran teoría de la sofisticación de los números que es generalmente crédito de los ancianos egipcios.

Quizá ellos originaron estas ideas o las copiaron de los babilonios, no está claro de quién provienen.

(También deberíamos estudiar la posibilidad que los babilonios la hayan copiado de los egipcios.)

4.3.4. PROBLEMAS DEL PAPIRO DE RHIND

El papiro de Rhind comienza con una tabla de reducción de fracciones de la forma 2/(2n+1), donde n toma todos los valores enteros de 2 a 50, en sumas de fracciones de numerador uno ej: 2/5 = 1/3 +1/15 o 2/7 = 1/4 +1/28

La misma publicación de esta tabla a comienzos del libro es típica de su naturaleza semiteórica, semipráctica. El escriba (o su predecesor desconocido) ya había alcanzado experimentalmente cierta dosis de abstracción y encontró ventajoso ponerla al principio.

Siguen cuarenta problemas aritméticos referentes a la división de 1,2, ...9 por 10, la multiplicación de fracciones, problemas de complemento (completar 2/3 1/30 a 1 ; la respuesta correcta es 1/5 1/10), problemas de cantidad (una cantidad y su 1/7 sumadas dan 19 ¿cuál es la cantidad?; la respuesta es 16 1/2 1/8), división por fracciones, división de la medida de hekat, división de panes en progresión aritmética. Esos problemas conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por supuesto, no aparecen ecuaciones en el papiro, pero encontramos símbolos que indican la adición y la sustracción, y hasta uno para representar la incógnita.

Problema 40.

Dividir 100 panes entre 5 Hombres de tal manera que los panes recibidos estén en progresión aritmética y que 1/7 de la suma de las tres partes mayores sea igual a la suma de las dos partes menores. ¿Cuál es la diferencia entre las partes ?.
Proceder así: Toma la diferencia de las partes 5 1/2. Entonces las cantidades que recibirán los cinco hombres serán:
23 17 1/2 12 6 1/2 *1. Total* 60
Tantas veces como sea necesario multiplicar 60 *para dar* 100. *Tantas veces será necesario multiplicar estos términos para obtener los de la serie verdadera.*

1	60
2/3	40

El total, 12/3, *multiplicando por* 60 *da* 100.
Multiplicar por 12/3.

23	se convierte en	38 1/3
17 1/2	"	29 1/6
12	"	20
6 1/2	"	10 2/3 1/6
1	"	1 2/3
60	"	100 Total

Problema 4:

Divide 7 panes entre 10 *hombres. Cada hombre reciba* 2/3 1/30
Comprobación. Multiplica 2/3 1/30 *por* 10 *el resultado es* 7

Has así:	1	2/3 1/30
	2	1 1/3 1/15
	4	2 2/3 1/10 1/30
	8	5 1/2 1/10

Total de panes, lo cual es correcto.

Los problemas 41 a 60 tratan de la determinación de áreas y volúmenes; y los problemas 61 a 84, de cuestiones varias. El área de un triángulo se obtiene multiplicando su base por la mitad de su lado. Lo cual es correcto sólo para triángulos angostos. El volumen de un granero cilíndrico de diámetro d y altura h se dice que es $(d - 1/9\ d)^2\ h$. Esta es la aproximación notablemente buena para el área del círculo $0.7902\ d^2$ en lugar de $0.78554\ d^2$, lo cual equivale a hacer π igual a 3.14.

No existe razón alguna para creer que los egipcios conocieran el teorema de Pitágoras, excepto la indirecta sugerida antes con motivo del papiro de Berlín

4.3.5. HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

….Nous sommes en mesure de parler avec plus de certitude de l' arithmétique des Egiptiens. On est parvenu á déchiffrer il y a environ trente ans un papyrus (') hiératique faisant partie de la collection Rhind conservée au British Museum, et sa lecture a jeté une grande lumiére sur leurs connaissances mathématiques.

Le manuscrit a été écrit par un pretre du nom de Ahmes á une époque qui, suivant les Egyptologistes remonterait á bien plus de mille ans avant J.C. Et l' on croit que c' est la copie corrigée d' un traité qui lui serait antérieur de plus d' un millier d' années. L'ouvrage est intitulé "intruction pour connaitre toutes les choses secrétes" et consiste en une collection de problémes d' arithmétique et de géométrie; les réponses sont données mais généralement sans l' indication des procédes au sommaire de régles et de questions familiéres aux pretres.

La premiére partie traite de la réduction des fractions de la forme 2/(2n+1) en somme de fraction ayant toute l' unité pour numérateur : par exemple Ahmes établit que 2/29 est la somme de 1/24, 1/58, 1/174 et 1/232 ; que 2/97 est la somme de 1/56, 1/679 et 1/776.

Dans tous les exemples "n: est inférieur á 50. Il n' avait probablement aucune régle pour former les fractions composantes et las réponses données représentent las résultats réunis des expériences des auteurs qui le précédérent; il a cependant indiqué sa méthode dans un seul cas particuliere car, aprés avoir avancé que 2/3 est la somme de 1/2 et de 1/6 il ajoute que, par suite, les deux tiers d' un cinquiéme sont égaux a la somme de la moitié d' un cinquiéme et du sixiéme d' un cinquiéme, c' est-á-dire á 1/10+1/30.

On peut expliquer qu' on ait attaché une telle importance aux fraction par ce fait que dans les temps anciens, leur application présentait de grandes difficultés. Les Egyptiens et les Grecs simplifiaient le probléme en réduisant chaque fraction en une somme de plusieurs autres ayant toutes l' unité pour numérateur, de telle sorte qu'ils n' avaient á considérer que les divers dénominateurs:

Les fractions 2/3 et 3/4 faisaient seules exception á cette régle. Cette facon de procéder fut pratiquée chez les Grecs jusqu´au sixiéme siécle de notre ére. Les Romains de leur coté, conservaient généralement le dénominateur constant et égal á 12, et traduisaient (aproximativement) chaque fraction en un certain nombre de douziémes. Les Babyloniens firent en un certain nombre de douziémes. Les Babyloniens firent la meme chose en astronomie mais en employant soixante comme dénominateur constant, et c´est d' eux, avec les Grecs comme intermédiaires, que nous vient la division moderne du degré en soixante parties égales. Ainsi, soit d´une maniére, soit d´une autre, on évitait la difficulté provenant du changemant simultané du numérateur et du dénominateur.

Apres avoir considéré les fractions, Ahmes continue par quelques exemples ayant trait aux opérations fondamentales de l´arithmétique. Pour la multiplication il semble avoir procédé par additions répétées. Ainsi dans un exemple numérique oú il se propose de multiplier un certain nombre, soit a, par 13, il multiplie d´abord par 2, ce qui lui donne 2a, puis il double le résultat et obtient ainsi 4 a, il double encore ce dernier résultat ce qui lui donne 8 a, et enfin il additionne les trois nombres a, 4 a et 8 a. La division était problablement aussi effectuée au moyen de soustractions successives, mais comme il donne rarement l´explication du procédé par lequel il est arrive au résultat, on ne peut rien dire de certain á ce sujet. Aprés ces exemples, Ahmes expose la solution de quelques équations numérique simples. Il dit par exemple "inconnue, son septiéme, son tout, cela fait dix-neuf" ce qui signifie quil se propose de trouver un nombre tel qu´en y ajoutant son septiéme, on trouve dix-neuf comme somme, il donne comme réponse 16 + 1/2 + 1/8, résultat exact.

La partie arithmétique du papyrus montre que l´auteur avait quelque idée du symbolisme algégrique. La quantité inconnue est toujours représentée par le symbole qui signifie un monceau, un tas; l´addition est indiquée par une paire de jambes se déplacant en avant, la soustraction par une paire de jambes se déplacant en arriére ou encore par des fléches; et l´'égalité a pour signe.

La derniére partie du livre contient divers problémes de géométrie sur lesquels nous reviendrons plus loin. Il termine l' ouvrage par quelqes questions arithmético- algébriques dont deux se repportent aux progressions arithmétiques et semblent indiquer qu'il connaissait la maniére de sommer ces séries.....

4.3.6. HISTORIA DE LAS MATEMATICAS. (traducción)

...Hablaremos con moderación acerca de la certitud de la aritmética de los egipcios.

Hemos llegado a descifrar (hace aproximadamente 30 años), un papiro hierático que es una parte de la colección Rhind conservado en el Museo Británico, y su contenido nos proporcionó una gran luz sobre sus conocimientos matemáticos.

El manuscrito fue escrito por un sacerdote llamado Ahmes en una época, que según los Egiptólogos, remontaría a más de 1000 años a.C., y creen que es la copia corregida de un tratado que sería anterior a más de 1 millar de años.

El título de la obra es "Instrucciones para conocer todas las cosas secretas" y consiste en una colección de problemas de aritmética y de geometría, las respuestas están dadas pero, generalmente, sin la indicación de procedimientos o de someras reglas y de preguntas familiares a los sacerdotes.

La primera parte trata de la reducción de fracciones de la forma $\frac{2}{2n+1}$ en sumas de fracciones teniendo todas la unidad por numerador: por ejemplo Ahmes establece que 2/29 es la suma de 1/24, 1/58, 1/174, 1/232; y que 2/97 es la suma de 1/56, 1/679 y 1/776.

En todos los ejemplos "n" es inferior a 50. No había, probablemente, ninguna regla para formar las fracciones compuestas y las respuestas dadas representan los resultados reunidos de experiencias de autores que le preceden; él ha indicado, sin embargo, su método en un solo caso particular pues, después de decir que 2/3 es la suma de 1/2 y de 1/6, él agrega que los 2/3 de 1/5 es igual a la suma de la mitad de 1/5 y de un 1/6 de 1/5, es decir: 1/10 + 1/30 = 2/3. 1/5

Podemos explicar que le hemos dado una cierta importancia a las fracciones porque, en la antigüedad, su explicación presentaba grandes dificultades.

Los Egipcios y los Griegos simplificaban el problema reduciendo cada fracción en una suma de muchas fracciones, teniendo todas la unidad por numerador, de tal manera que ellos no tenían que considerar otra cosa que los diversos denominadores:

Las fracciones 2/3 y 3/4 eran sólo las excepciones a esta regla.

Esta manera de preceder fue practicada por los griegos hasta el VI siglo de nuestra era.

Los Romanos, por otro lado, conservaron generalmente el denominador constante e igual a 12, y tradujeron aproximadamente cada fracción en números equivalentes a 1/12.

Los Babilonios hicieron lo mismo en astronomía pero empleando 60 como denominador constante, y es de ellos, con los Griegos como intermediarios, que nos viene la división moderna de un grado en 60 partes iguales. En fin, sea de una manera o de otra, hemos evitado la dificultad proveniente del cambio simultáneo de numerador y de denominador.

Después de haber considerado la fracción, Ahmes continúa con algunos ejemplos con operaciones fundamentales de la aritmética.

Para la multiplicación él parece haber procedido por adiciones repetidas. Así, en un ejemplo numérico donde él propone multiplicar números por 13, él multiplica primero por 2 que le da "2 a", luego él duplica el resultado y obtiene "4 a", él lo duplica todavía y le da "8 a", y, en fin, él suma los tres números "a", "4 a", y "8 a".

La división era probablemente también efectuada por muchas sustracciones sucesivas, pero como él da raramente la explicación del proceso por el cual llega al resultado, no podemos decir nada seguro sobre este tema.

Después de estos ejemplos, Ahmes expone la solución de algunas ecuaciones numéricas simples. Él dice por ejemplo "inconnue son septieme, son tout, cela fait dix-neuf" que significa que se propone encontrar un número tal que sumándole su séptima parte, nos da 19 como suma ($n + 1/7\ n = 19$), y da como respuesta $16 + 1/2 + 1/8$, resultado exacto. ($\cap = 16 + 1/2 + 1/8$).

La parte aritmética del papiro muestra que el escriba tenía alguna idea de simbolismo algebraico. La cantidad no conocida era siempre representada por un símbolo que significa un "montón", una "pila"; la suma está indicada por un par de brazos desplazándose hacia adelante, la resta por un par de brazos desplazándose hacia atrás o por flechas, y la igualdad por un signo.

La última parte del libro contiene diversos problemas de geometría sobre los que hablaremos luego. El termina la obra con algunas preguntas aritmético-algebraicas donde dos se transportan a progresiones aritméticas y parecen indicar que él conocía la manera de sumar estas series…

4.4. LOS PAPIROS DE MOSCÚ Y DE BERLIN

El papiro de Moscú tampoco contiene nada que se refiera al triángulo rectángulo y al teorema de Pitágoras. Sin embargo, trata problemas geométricos más complejos. Pero estos problemas no muestran cuidado ninguno de organización racional de la matemática.

Los cinco problemas geométricos que aparecen resueltos en el papiro de Moscú son soluciones concretas de proposiciones aisladas, útiles cada una a un punto de vista práctico particular, pero sin enlace entre sí. Encontramos allí la determinación correcta del volumen de una pirámide truncada de base cuadrada y la determinación, igualmente correcta, de la longitud de los lados de un cuadrilátero cuando conocemos la relación de estos lados con el área del cuadrilátero. Otros dos problemas se refieren al área del triángulo, según un método. Otros catorce problemas se relacionan con el cálculo aritmético.

Los fragmentos del papiro de Berlín continúan en el mismo círculo y en los mismos tipos científicos que el de Moscú: dividir un cuadrado de 100 codos cuadrados en dos cuadrados de tal manera que sus lados sean como 1 es a 3/4. Extracciones de raíces idénticas a las del papiro de Kahun:

$$1^2 * (3/4)^2 = (1+1/4)^2$$

La solución es un cuadrado de 8 codos de lado y un cuadrado de 6 codo:

$$64 + 36 = 100$$

y

8 es a 6/4 como 1 es a 3

También aquí vemos claramente que se trata de un problema aritmogeométrico concreto: la división de un área en una suma equivalente a dos áreas. Un segundo problema implica la solución correcta de la extracción de la raíz cuadrada de 6 1/4, a saber, 2 1/2.

4.5. EL PAPIRO DE AJMIM

Este papiro nos ofrece tablas para hacer pasar fracciones con numeradores del 1 al 15 (y ya no únicamente de numerador 2) a fracciones que tengan como numerador la unidad. En las tablas del papiro de Ajmim aparecen elementos que no se encuentran en el papiro de Rhind: fórmulas, es decir, reglas fijas, para reducir una fracción en fracciones que tengan por numerador la unidad. A estas tablas se agregan unos cincuenta problemas del mismo género de aquellos que hay en el Imperio Medio, aunque aquí se acentúa más la técnica de la solución.

4.5.1 THE AKHMIN PAPYRUS

One relatively late document on Egyptian unit fractions is known as the Akhmin Papyrus, apparently written around 400 AD. Considering that the material in the Rhind Papyrus dates from 1850 BC (or earlier), this shows that the use of unit fractions persisted for a remarkably long time.

It appears that by the time the Akhmin Papyrus was written there was a fairly sophisticated criterion for the selection of the table entries. To expand N/P, check the smallest solutions where exactly k denominators are divisible by P using the congruences

k	congruence modulo P
1	$Na = 1$
2	$Nab = a + b$
3	$Nabc = ab + ac + bc$
4	$Nabcd = abc + abd + acd + bcd$

with $0 < d$, and take the one with the smallest maximum value. For example, to find the best expansions of n/17 we have the following choices for (a,b,c,d):

n	k=1	k=2	k=3	k=4
2	(9)	(3,4)*	(2,5,6)	(1,2,3,6)
3	(6)	(4,5)	(1,3,4)*	(1,2,5,6)
4	(13)	(3,8)	(1,4,5)*	(1,2,3,7)
5	(7)	(2,4)*	(2,3,5)	(1,2,5,7)
6	(3)*	(1,7)	(1,2,4)	(1,2,3,5)
7	(5)	(1,3)*	(3,4,7)	(1,4,5,6)
8	(15)	(1,5)*	(2,4,6)	(2,3,5,6)
9	(2)*	(3,6)	(3,4,5)	(1,2,4,6)
10	(12)	(1,2)*	(1,3,6)	(1,3,4,5)
11	(14)	(3,7)	(2,3,4)*	(1,2,4,7)
12	(10)	(2,6)	(2,4,5)	(1,2,3,4)*
13	(4)*	(3,5)	(1,2,6)	(1,2,4,5)
14	(11)	(1,4)*	(1,3,5)	(2,3,4,6)
15	(8)	(2,3)*	(1,2,7)	(2,4,5,6)
16	(16)	(2,5)	(1,2,3)*	(1,5,6,7)

The asterisks mark the solutions with the smallest maximum term.

The remarkable thing is that the asterisks also mark the expansions of n/17 appearing in the Akhmin Papyrus. It's a perfect match.

Clearly whoever wrote that papyrus was organizing the solutions in a way that is consistent with the method I've described.

Applying this same analysis to the n/19 table in the Akhmin Papyrus gives the results

```
 n    k=1       k=2       k=3       k=4
---  -----     -----     -------   ---------
 2   (10)+    (4,6)*    (1,5,6)   (1,2,3,6)     2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16
entry # -  8 12 22  9  3  5 19  1  2 11 14  7 10  4  6
```

Using this method the hardest expansion to find would be 4/17, because you have to check down to the 22nd entry in the meta-table (A=20,B=29), but it isn't particularly laborious. With a little practice you could probably do it in your head. (Notice that you can take A and B modulo p, so the 22nd entry with p=17 is equivalent to A=3,B=12, and obviously 4(3)-12 = 0.)

Actually to cover all of the n/19 expansions they would have needed a meta-table going up to the 6's. (I've just shown it up to the 5's.)

4.5.2. EL PAPIRO DE AJMIM. (traducción)

Un documento relativamente reciente de las unidades fraccionarias de los egipcios, es conocido como el Papiro de Ajmim aparentemente escrito cerca del 460 a. C.. Considerando que el material en el Papiro de Rhind data del 1850 a.C. (o anteriormente), esto muestra que el uso de fracciones unitarias persiste por un tiempo notablemente largo.

Parece que por el tiempo en el cual el papiro de Ajmim fue escrito, había un criterio sofisticado e imparcial sobre la selección de las inscripciones en la tabla. para desarrollar N/P, hay que comprobar la más pequeña de las soluciones donde exactamente denominadores k son divisibles por P usando las congruencias:

k	congruencia módulo P
1	Na = 1
2	Nab = a + b
3	Nabc = ab + ac + bc
4	Nabcd = abc + abd + acd + bcd

Con 0<d, y tomar el máximo de menor valor. Por ejemplo, para encontrar la mejor expresión de n/17, tenemos las siguientes opciones de (a,b,c,d):

n	k=1	k=2	k=3	k=4
2	(9)	(3,4)*	(2,5,6)	(1,2,3,6)
3	(6)	(4,5)	(1,3,4)*	(1,2,5,6)
4	(13)	(3,8)	(1,4,5)*	(1,2,3,7)
5	(7)	(2,4)*	(2,3,5)	(1,2,5,7)
6	(3)*	(1,7)	(1,2,4)	(1,2,3,5)
7	(5)	(1,3)*	(3,4,7)	(1,4,5,6)
8	(15)	(1,5)*	(2,4,6)	(2,3,5,6)
9	(2)*	(3,6)	(3,4,5)	(1,2,4,6)
10	(12)	(1,2)*	(1,3,6)	(1,3,4,5)
11	(14)	(3,7)	(2,3,4)*	(1,2,4,7)
12	(10)	(2,6)	(2,4,5)	(1,2,3,4)*
13	(4)*	(3,5)	(1,2,6)	(1,2,4,5)
14	(11)	(1,4)*	(1,3,5)	(2,3,4,6)
15	(8)	(2,3)*	(1,2,7)	(2,4,5,6)
16	(16)	(2,5)	(1,2,3)*	(1,5,6,7)

Los asteriscos marcan las soluciones con el máximo del término más pequeño. Lo más notable, es que los asteriscos también marcan las expansiones de n/17 aparecidas en el papiro de Ajmim Es una combinación perfecta. Claramente, quien haya escrito el papiro, organizó las soluciones en el camino que consiste en el método descripto.

Aplicando los mismos análisis para la tabla n/19, en el papiro de Ajmim dan los resultados:

n k=1 k=2 k=3 k=4
--- ----- ----- ------- --------
2 (10)+ (4,6)* (1,5,6) (1,2,3,6) **2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16**

inscripción # - 8 12 22 9 3 5 19 1 2 11 14 7 10 4 6

Usando este método la difícil expansión para encontrarla debería ser 4/17, porque tienes que verificar la inscripción 22 en la meta-tabla (A=20; B=29), pero no es particularmente laborioso, con un poco de práctica podrías, probablemente, hacerlo en tu cabeza. (Atención: puedes tomar A y B módulo p, entonces la inscripción 22 con p=17 es equivalente a A=3 y B=12, obviamente 4(3) -12 = 0.)

Actualmente, para cubrir todas las expansiones de n/19, deberías haber necesitado una meta-tabla subiendo del sexto (justamente mostré arriba del quinto).

Capítulo 5

El cálculo de las fracciones

La parte más sobresaliente y más avanzada también de la matemática egipcia es el cálculo de fracciones. La razón de ello es que se da allí un método general de expresión impuesto por la necesidad de formular el resultado de todo fraccionamiento con solo la unidad como numerador. Unicamente se dan dos excepciones para 2/3 y para 3/4 (aunque esta fracción se empleaba muy raramente), que se enunciaban de acuerdo con una expresión que se encuentra con frecuencia en otros lugares: las "dos partes", las "tres partes". En la escritura, ambas operaciones se representaban con un signo propio cada una, signo que nada tiene que ver con el método general para expresar cualquier otra fracción.

La tradición nos plantea dos problemas de importancia para apreciar el nivel que había alcanzado la matemática egipcia.

En primer lugar se trata de saber si la matemática egipcia no pudo elevarse a la concepción de fracciones con cualquier clase de numeradores (tomar los 2 o los 3 séptimos de algo) y nunca pensó sino en un tanto único (o si no hay en eso otra cosa que un procedimiento gráfico). En el primer caso, cuantas veces se presenta en el numerador un número diferente a la unidad, sólo se trataría de la indicación de una división no efectuada y, por tanto, de un problema a resolver. Jamás se trataría de una verdadera fracción. De esto se seguiría que la matemática egipcia no poseyó todavía un verdadero cálculo fraccional ni tuvo la concepción general de las fracciones; toda operación sobre las fracciones, a consecuencia de la sola existencia de fracciones con numerador 1, no sería, en suma, sino una operación sobre enteros.

Hultsch señala que de la manera tradicional de escribir los egipcios las fracciones no puede deducirse que su concepción de las fracciones dejara de ser general. El empleo muy antiguo de las fracciones 2/3 y 3/4 y el hecho de que en el papiro de Rhind se obtengan varias veces, sin intermediarios, los 2/3 de un número (problemas números 32, 37, 61, etc.) parecen darle la razón. Corrientemente 1/14 x 2 se evalúa de manera correcta, sin intermediarios, en 1/7, y 2/3 x 2, en 1 + 1/3. Así pues parece que la concepción de las fracciones de denominador 2 haya sido "perfectamente clara" . Los problemas números 17 y 18 nos muestran que 1/6 + 1/18 están concebidos directamente con el valor de 2/9 en el cálculo. El hecho que los egipcios redujeran toda multiplicación y toda división a doblar o a partir en dos no los expondría en modo alguno a encontrar en sus cálculos fracciones con numeradores más elevados.

Poseían el instrumento necesario a su objeto y en toda su extensión.
Lo que no puede ponerse en duda a la vista de los problemas que acabamos de señalar y del sentido de proporcionalidad que hemos señalado, es que ya desde la época original del papiro de Rhind llegaron a pensar por separado y aparte un cierto número de tantos (fracciones que tienen por numerador la unidad) tomados en conjuntos, por ejemplo, 12/27.

Los egipcios tuvieron un método general, por lo mismo que supieron reducir por medio de divisiones sucesivas del numerador por 2, toda fracción a una suma de fracciones que tuvieran por numerador ya la unidad ya 2.

Por ejemplo:

$7/27 = 2/27 + 2/27 + 2/27 + 1/27$ ó $3/24 = 2/24 + 1/24$

Entonces resulta que fracciones que tienen 2 en el numerador se reducen por una simple división por 2 a un tanto si el denominador es número par: $2/24 = 1/12$; si el denominador es impar: 2/27, hay que reducir la fracción en tantos . Parece que los egipcios no dudaron de la posibilidad universal o general de esta operación, y tenían razón. ¿ Pero tuvieron un procedimiento único para efectuarla?

No lo parece. No encontramos formulada ninguna regla general de esta clase y todos los intentos realizados para reconstituir una, como el de Eisenlohr, han fracasado. El mismo hecho de que uno de los documentos capitales descubiertos en los testimonios matemáticos egipcios (papiro de Rhind, papiro de Kahun) sea una tabla de divisiones por 2, es decir, de la expresión de fracciones con numerador 2, ya que tales fracciones no tienen más numerador que la unidad, parece ser prueba que no existía método general conocido. Por medio de intentos, de tanteos, se llegaría a los resultados que eran necesarios en la práctica, conservados en tablas trasmitidas en los manuales matemáticos. Bastaba leer allí los resultados a medida que el cálculo lo requería.

Sin embargo, aún fue necesario que tales ensayos hubieran dado buen resultado una primera vez, pues, en efecto, los resultados se obtenían por un método bastante regular y general de tanteos. Peet observa que todos los números empleados en los cálculos para la reducción de fracciones a partes alícuotas, excepto 2 : 42 y 56 que son múltiplos de 7, contienen 2, 3 y 10 como factores.

Esta excepción confirma el empirismo de la técnica. Algunos resultados de la división por 7 debieron ser hallados por tanteos marginales, quizá a causa de la antigua importancia sagrada del número 7.

Hemos de encontrar una progresión de razón 7 la única progresión geométrica de todo cuanto nos ha llegado de la matemática egipcia. Y está en un problema que recuerda lo folclórico.

Estos factores 2, 3 y 10, son precisamente los divisores que sabían manejar los egipcios (la división por 3 se realizaba en dos tiempos: por 2/3, para la que tenían una regla general, y luego por 2). En general comenzaban por 2/3, es decir, por 3, a menos que el dividendo propuesto no admitiera los factores 10 (o $5 = 10/2$) que sabían manejar por su mismo grafismo: bastaba cambiar los signos numéricos.

Describamos ahora la serie de operaciones egipcias tal como las encontramos en el papiro de Rhind. Después trataremos de interpretarlas.

Se trata, pues, por ensayos sucesivos de los factores precitados, de dividir el denominador dado hasta llegar a un cociente comprendido entre 1 y 2.

Se busca el primer cociente inferior a 2 y, por lo general, se manejan los divisores 2 y 2/3 (es decir, 3), de manera que se llegue al mayor cociente inferior a 2 y se agote la mayor parte del dividendo. Este cociente expresa un cierto número de partes del divisor dado. En nuestra algoritmia escribiríamos una fracción cuyo numerador sería precisamente igual al denominador de la fracción propuesta. Sea, por ejemplo, calcular 2/19.

La cifra 19 nos da primero, por divisiones sucesivas por 2/3 ó 2, un primer término 1 $1/2 + 1/12$, o en total 1/12 de 19 (hoy diríamos 19/12).

Entonces queda por hallar el 1/19 del resto: las fracciones que hace falta agregar al cociente ya obtenido para hallar 2: en nuestra algoritmia 5/12, que los egipcios expresaban en tantos.

Estos complementos del primer término, para llegar a 2, entran en el tipo de esos cálculos de "complemento" (*skm*), de los que el papiro de Rhind nos ofrece ejemplos como adición y substracción de fracciones. Aquí se trata de hallar la diferencia entre el cociente 1 1/2+1/12 y 2, o, más simplemente, entre 1/2+1/12 y 1.

El resultado correctamente enunciado es u 1/4 + 1/6 (que traduce en tantos nuestros 5/12).

Observemos que parece, sin duda, que se haya pensado 3/12 y 2/12 lo que da inmediatamente, ya que se sabe manejar las fracciones 2 y 3: 1/4 + 1/6.
En los cálculos de fracciones con numerador 2 y denominador impar no se nos dice cómo se halla esta diferencia.

Sólo se encuentra lo que los egipcios llamaban precisamente los cálculos de complemento, que reproducen algunas de las fracciones utilizadas en la tabla: particularmente todo el grupo segundo de tales cálculos de complemento tratan de expresar la diferencia entre fracciones simples (1/2 + 1/12) y la unidad de tantos. La primera parte agrega fracciones mas complejas a su mitad, a su cuarto, a su tercio y a su sexto, etc. (siempre por factores 2 y 2/3, los únicos que manejaron los egipcios), con el fin de encontrar una fracción simple: 1/2, 1/9, 2/3, 1/4, 1/6, 1/8, 1/12, 1/16, y una vez la unidad. Es evidente que tenemos aquí los procedimientos de elaboración de tabla o, si se quiere, una serie de ensayos empíricos cuyo objeto es permitir precisamente realizar nuestros cálculos de complemento.

Para hallar el complemento que se necesita, los egipcios no tenían si no tomar aquellos que le eran necesarios o proceder por medio de tanteos empíricos del mismo genero. Si procedían unas veces por divisiones únicamente de 2 y, con mas frecuencia, uniendo a esta la división por 2/3, es decir, por 3, lo hacían para llegar a un cociente cuyo complemento pudieran encontrar facilmente, ya en sus tablas, ya por tanteos personales.
Como hemos dicho, de manera general, los egipcios buscaban el cociente mas próximo de 2, porque siendo mas pequeña la diferencia que tenían que completar la encontraban con mayor facilidad en sus tablas o de modo personal: esto les proporcionaba el empleo previo de tal factor, salvo en ciertos casos en los que no usaban la división por 3/2 (por ejemplo, 2/7).

Para enunciar la solución bastaba tomar la primera fracción hallada 1/12, y agregarle después las fracciones formadas multiplicando los denominadores de las fracciones de complemento por el denominador de la fracción propuesta 2/19, sea:

$$\frac{1}{19*4}+\frac{1}{6*19}=\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$$

El resultado de 2/19 está enunciado correctamente: 1/12 + 1/76 + 1/114.

El método es vacilante y burdo, pero, pese a todo, llevando como destrera su tradición gráfica, los egipcios descubrieron que toda fracción de numerador 2 podía expresarse en una suma de fracciones que solo admitían por numerador la unidad.

Esta ley es en cierto modo inductiva. Fue la consecuencia de un cúmulo de resultados empíricos muy complejos casi siempre. Lo demuestran los que encontramos en el papiro de Rhind:

2/61= 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610;
2/89= 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890, etc.

A nuestro juicio, los egipcios pensaron la fracción: una vez que dividieron una manzana en 15 partes podían de manera empírica saber tomar varias de ellas, 2 , 3, 4... y, por tanto, 2/15, 3/15, 4/15. Aquí es donde parece que operaron mentalmente en numerosos cálculos que nos han llegado. Pero tales operaciones nunca se escriben. Es que los egipcios no sabían ni probablemente podían todavía operar sobre un numero complejo que, en verdad es una relación entre dos números. En la aprehensión de lo cualitativo en cuantitativo, la fracción sigue siendo un número aislado, un tanto que expresa su denominador.

1/n constituye una nueva unidad en una especie de nueva aplicación de un método bastante primitivo de falsa posición. Gracias a esto se operará con el igual que se opera con los demás números, es decir, con enteros. Se trata de un entero dentro del cálculo operatorio. No se operará con el par, con la relación que forma con su numerador, sino con el número simple análogo a todos los demás; de ahí la necesidad de reducir siempre la fracción en tantos. Mientras los numeradores sean pares, esta reducción se efectúa facilmente por el manual operatorio de demediación. En cuanto se llega a un numerador impar se reduce la expresión fraccionaria a un tanto, más una serie de fracciones con numerador 2. Si el denominador es par, nada mejor: todas estas fracciones se reducen a tantos por demediación del denominador. Los egipcios sabían muy bien que 12/24 era = 1/2. Si el denominador es impar, volvemos entonces al problema que resuelve la tabla y a cálculos que permiten establecerlos.

Los cálculos de 2/n, siendo n impar son los medios de hallar siempre tantos, es decir estas unidades en cierta medida aún cualitativas, ya que no se quiere operar con la relación escrita. Dicho de otra manera, se piensa, en bloque la relación, pero no se pueden explicitar las operaciones sobre esta relación, sobre el par que establece entre dos números y se la reduce expresándola por números corrientes con los que el espíritu sabe actuar, operar clara e distintamente.

Es muy difícil reconstituir una manera de pensar que no se encuentra expresada en ningún sitio y necesitamos tratar de representarnos sólo por las particularidades del resultado. Pero si nuestra hipótesis (por gratuita que sea, a causa de tal ausencia total de documentación sobre el proceso mental) se aproximase a la realidad tendríamos ahí los límites de la mentalidad matemática egipcia en su esfuerzo, ya tan avanzado para reducir lo cualitativo a cuantitativo.

Volvamos ahora al conjunto del cálculo estando de acuerdo con algunos estudiosos en que allí no hay ni unidad técnica, ni utilización o aplicación de algún procedimiento metódico general claramente percibido y explícito.

Para ser más concretos, operemos sobre una fracción dada: 2/19.

Para empezar no olvidemos que se trata de dividir el numerador 2 por un número impar, sea 19. El procedimiento egipcio consistirá en hacer decrecer este número hasta 2 por una serie de divisiones con ayuda únicamente de los factores que se sabían manejar entonces: 10 y 5, 3 (2/3 y 2), 2. Es decir se trata de multiplicar el dividendo no sucesivamente por 2, sino por 1/2 ó 2/3, sucesivamente, o sea, 1/2, 1/4, 1/8, etc., o 2/3, 1/3, 1/6, etc., ya que toda división se reduce a una multiplicación. Hacer decrecer es emplear el procedimiento que hace crecer o aumentar, pero sirviéndose entonces de fracciones y ya no de enteros, de tal manera que el resultado es una disminución o decrecimiento. En efecto, las operaciones se escriben igual que para la multiplicación ordinaria. Sólo que en vez de anotar frente a los productos sucesivos los factores 2,4,8,16, se anotan los factores 1/2, 1/4, 1/8, etc, o 2/3, 1/3, 1/6, 1/12, etc.

Las fracciones que escribe el egipcio frente a los resultados de estas divisiones expresan el estado en que se encuentra su división, la escala de decrecimiento o disminución

de 19. Cada una de estas fracciones sucesivas nos da el resultado que logramos en el fraccionamiento del número impar propuesto, de 19.
Sea:
2/3, 1/3, 1/6, 1/12, etc.

Los denominadores de estas fracciones son los números que, multiplicados por los resultados de las divisiones escritas enfrente (los cocientes), reproducen el número impar que es nuestro divisor de origen:

1	19	
2/3	12	2/3
1/3	6	1/5
1/6	3	1/6 etc.

Si se trata de un número par, como, por ejemplo, dividir 2 por 24, procedería de acuerdo con este método de la siguiente manera que nos ayuda a comprender su inspiración general:

1	24
2/3	16
1/3	8
1/6	4
1/12	2

Escribiría 1/12 es el tanto buscado. 2/24 expresado en tantos da, efectivamente, 1/12. Con un número impar como divisor, por ejemplo 19 en la reducción de 2/19 a tantos, procedería de la misma manera.

Pero surgió una dificultad.

El calculista egipcio se dio cuenta de que a lo largo de sus tanteos y ensayos iba más allá de 2 sin poder alcanzar ni este número que le daría la respuesta buscada, ni detenerse en él. Sabía que después de descender por debajo de 2 tenía una respuesta por defecto.

Por ejemplo, sea 1/12 que multiplicado por 1 1/12+1/12 da menos de 2.

Lo escribe así y le falta hallar el complemento de su respuesta, es decir, hay que agregar 1 a 1/2+1/12 para hallar 2, y hay que añadir al cociente 1 1/12 para que la multiplicación por 19 reproduzca 2.

¿De qué manera procederá el egipcio para este complemento?. Por lo general lo tiene en sus tablas. Pero el papiro nos ofrece en otro sitio el medio de elaborar tales tablas por ensayos o tanteos empíricos, o de hallar de manera personal el resultado.

Ya vimos aquí que es de 1/4+1/6. Ahora bien el calculista debe hallar las fracciones que, multiplicadas por 19, le vuelvan a dar ese 1/4+1/6, o si prefiere debe dividir por 19 estas dos cantidades fraccionarias. Sabe que basta multiplicar los denominadores por este número, así:

$$\frac{1}{4*19}=\frac{1}{76} \qquad \frac{1}{6*19}=\frac{1}{114}$$

Los dos tantos 1/76+1/114 añadidos al tanto ya encontrado por defecto 1/12, constituyen la respuesta buscada:

2/19 = 1/12+1/76+1/114

De esta manera llega a expresar su fracción 2/19 en una suma en tantos.

Observemos que de una manera corriente, implícita, utiliza la regla general por la cual una fracción es dividida por el número que multiplica su denominador. No creemos exagerado insistir sobre este punto que muestra hasta que concepción racional y lógica de la fracción habían llegado los egipcios. Es verdad que no resulta extraordinario que se llegue a pensar que para dividir uno de los pedazos de una manzana cortada en 3, es decir, 1/3 de manzana, por 2, hay que cortar el trozo en 2, por tanto, multiplicar el número de los trozos por 2, etc. El empirismo conduce a la regla. Pero, al mismo tiempo, conduce a la lógica de la operación.

Encontramos de nuevo todas estas operaciones en el trabajo que exige al calculador el papiro a que nos referimos. Reproduzcamos su traducción tomándola de Peet.

Divide 2 por 19 (2/19):

1 1/2+1/12 1/4 es 1/76 1/6 es 1/11

Procede de esta manera:

(División clásica por 3 en 2 tiempos)

1	19
2/3	12 2/3
1/3	6 1/3

(División por 2)

1/6	3 1/6
1/12	1 1/2+1/12

(Complemento para llegar a 2)

resto 1/4+1/6

(Cálculo para hallar los complementos de la solución, es decir las fracciones que deben agregarse a 1/12).

1	19	
2	38	
4	76	1/4
	resto 1/6	
1/2	19/38	
4/6	76/114	1/6

La multiplicación por 6 está efectuada clásicamente por la adición de los resultados de la multiplicación por 2 y luego por 4.

En el fondo, todos los esquemas de este trabajo o ejercicio, en la parte del papiro que estudiamos que trata de la reducción de fracciones a tantos, todos los paradigmas nos ofrecen el mismo movimiento de pensamiento, burdo, lento, pero lógico, exacto y seguro.

A veces hay procedimientos de abreviación utilizando o aplicando diagramas o partes de diagramas ya descubiertos, el calculador del papiro de Rhind subraya este procedimiento de un " ya encontrado" respecto del resultado que incorpora tal como aparece.

Se da cuenta, pues, de la generalidad de sus resultados y de sus procedimientos. Posee plenamente el sentido de la asociatividad, de la distributividad y de la conmutatividad. Que es tanto como decir que tiene plena conciencia del privilegio de la cantidad, de la homogeneidad, por decirlo así, de su isotropía y de su continuidad (*lato sensu*). Y esto es lo que se traducirá de manera verdaderamente creadora en este principio de proporcionalidad.

5.1. UNIT FRACTION PARTITIONS

Hello number theorists! I have a problem that you might be able to help me with. Consider the Diophantine equation

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a(i)} = \frac{1}{k}$$

with n, k, and a(0..n) integers 0. I have observed that, for n held constant, the amount of unordered solution sets for a increases generally (but not uniformly) as k increases. Can the amount of solutions for a be generalized in terms of k when n equals, say, 2?
For n=2, here is the amount of solutions for 0&ltk<25:

3 10 21 28 36 57 42 70 79 96 62 160
59 136 196 128 73 211 80 292 245 157 93 366

(Scott Aaronson)

When n equals 2 this asks for the number of partitions of 1/k into three unit fractions. I think a complete answer to this question will be difficult, because it includes as a special case the unproved conjecture (of Erdos and Straus) that 4/k can always be expressed as a sum of three unit fractions. (Clearly any such expression can be divided through by 4 to give 1/k as a sum of three unit fractions.) According to Richard Guy's Unsolved Problems in Number Theory, "there is a good account of this problem in Mordell's book, where it is shown that the conjecture is true, except possibly in cases where n is congruent to 1^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, or 23^2 mod 840." Also, it's been verified numerically for all k < 10^8.

Of course, we can account for many of the partitions of 1/k simply in terms of the partitions of 1/j where j divides k. For example, of the 366 partitions of 1/24, only 164 are "primitive" in the sense that the gcd of the three denominators is 1. Letting U(n) denote the number of 3-part unit fraction partitions of n, the non-primitive partitions of 1/24 can be counted by inclusion-exclusion as follows

$$U(24/2) + U(24/3) - U(24/6) = 160 + 70 - 28 = 202$$

In general, the number of 3-part partitions of 1/k can be grouped according to the greatest common divisor (gcd) of their denominators.

The results are summarized in the table below. (For reasons of space I've shown only gcd's up to 21.)

gcd of denominators

ESQ ("a")

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1	1	1																		
2	4	1	2	1	1	1															
3	8	4	1	3	2	1	1	0	1												
4	11	4	2	1	3	2	1	1	1	1	0	1									
5	13	6	6	1	1	3	2	1	0	1	1	0	0	0	1						
6	20	8	4	4	1	1	6	3	2	2	1	1	1	1	1	0	0	1			
7	12	8	4	4	3	1	1	3	2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
8	20	11	10	4	3	2	1	1	4	3	2	2	1	1	0	1	1	1	0	1	0...
9	28	10	8	2	6	4	1	1	1	4	3	3	1	1	2	0	0	1	1	0	1...
10	34	13	6	6	4	6	2	1	2	1	5	3	2	2	2	1	1	0	0	1	1...
11	20	10	7	6	2	4	1	0	0	0	1	3	2	1	1	0	1	0	0	0	0...
12	55	20	11	8	9	4	5	4	2	1	2	1	9	6	3	3	2	2	2	2	1...
13	19	11	5	0	3	1	5	3	1	0	1	0	1	3	2	0	0	0	0	1	0...

Letting G(k,j) denote the number of 3-part unit fraction partitions of 1/k whose denominators have a gcd of j, we have

$$G(kn,jn) = G(k,j)$$

It follows that, for example, the sum of G(24,2j) for j=1,2,... is equal to the sum of G(12,j) for j=1,2,..., which equals U(12) = 160.

Similarly the sum of G(24,3j), j=1,2,... is just equal to U(8) = 28.

Then by inclusion-exclusion we know that the sum of G(24,j) for all j divisible by either 2 or 3 is given by

$$U(12) + U(8) - U(4) \quad = \quad 160 + 70 - 28 \quad = \quad 202$$

By the same approach we see that there are 285 non-primitive partitions of 1/30, given by

$$U3(15) + U3(10) + U3(6) - U3(5) - U3(3) - U3(2) + U3(1)$$

$$= \quad 196 + 96 + 57 - 36 - 21 - 10 + 3 \quad = \quad 285$$

Once the non-primitive partitions have been accounted for, the remaining partitions counted by the terms G(k,j) for j < 3k and j coprime to k. For example, there are 55 primitive partitions of 1/12, and there are 9 primitive partitions of 5/12, and 5 of 7/12, and so on.

It might seem at first that the above table implies no solution of 4/13, because there are no primitive solutions for 1/13 with gcd of 4. However, there are solutions with gcd=8 and gcd=20, so we can multiply these by 4 to express 4/13 as a sum of three unit fractions.

However, the table also shows that there are no 3-part partitions of 1/11 with gcd of 8, 16, 24, or 32. It follows that 8/11 cannot be expressed as a sum of three unit fractions.

Another approach is based on the fact that for any positive integer k there exists a least integer D(k) such that the partitions of 1/k into three unit fractions correspond to the partitions of D(k)/k into three divisors of D(k). For example, we have D(1)=12 because the 3-part unit fraction partitions of 1/1 correspond to the partitions of 12 into three divisors of 12:

$$12 \;=\; 6+4+2 \;=\; 6+3+3 \;=\; 4+4+4$$

Similarly, we have D(2) = 2520 because the 3-part unit fraction partitions of 1/2 correspond to the partitions of 1260 into exactly three divisors of 2520:

```
1260 = 840 + 360 +  60
       840 + 315 + 105
       840 + 280 + 140
       840 + 252 + 168
       840 + 210 + 210
       630 + 504 + 126
       630 + 420 + 210
       630 + 315 + 315
       504 + 504 + 252
       420 + 420 + 420
```

The first few values of D(k) are 12, 2520, 65520, 3603600, ... It may be easier to express these in terms of the exponents in their prime factorizations:

```
 k  exponents of D(k)          (Esq. "ь")
--  ---------------------------------
 1  21
 2  3211
 3  421101
 4  422111
 5  52211110001
 6  5322111100001
 7  6221101101
 8  54211111000110000001
 9  53211111011001000001
10  63212111011000001001
11  43211111001001000101
12  642212111111101010011000000000000001
13  53221110101000100100 11
14  73221111111111110001110000010100000000000000001
15  8532211111011110100111000000000000000000000000000001
16  642211211101100010001110000000001
17  342111111111010100001110001000000000000000000000000000000000000001
18  7423111211111110110011100000000100000000101
19  742111111110010000101110100000100000000000001
20  743221111111111111111111110110000000000000000000100...   (421)
```

It's clear that $D(k)$ is always divisible by $k+1$. Also, it appears that $D(k)$ is always divisible by $q = k^2 + k + 1$. Moreover, if q is a prime, then it is the largest prime dividing $D(k)$. In any case, the largest prime divisor of $D(k)$ is no greater than q.

Another interesting approach is to place the original equation

$$1/k = 1/a + 1/b + 1/c \qquad (1)$$

in "dimensionless" form by simply multiplying through by k:

$$1 = x + y + z \qquad (2)$$

where $x=k/a$, $y=k/b$, and $z=k/c$. Equation (1) is just the equation of a diagonal plane in 3D space, and we are looking for rational points on this plane whose numerators divide k. We could try rotating this plane into a 2D space to simplify things (although the rotation might not preserve rationality).

Interestingly, if we make the substitutions

$$X = a/k - 1 \qquad Y = b/k - 1 \qquad Z = c/k - 1$$

then the original equation (1) becomes

$$XYZ - X - Y - Z = 2 \qquad (3)$$

This equation seems to arise in many different problems. Here the only effect of k is to determine which of the rational solutions of (3) give integer values of a,b,c according to

$$a = (X+1)k \qquad b = (Y+1)k \qquad c = (Z+1)k$$

In other words, k just "scales up" the rational solutions of (2), resulting in a certain number of them being integers. If k=1 then the only integer solutions (a,b,c) correspond to the positive integer solutions (X,Y,Z) of (3), namely

(1,2,5) (1,3,3) (2,2,2)

For k=2 we can accept half-integer solutions of (3), and so on. In effect this is a way of "stratifying" the rational solutions of an equation. It could probably be applied to other equations as well, i.e., given an equation with finitely many positive integer solutions, count the numbers of rational solutions whose common denominators divide k=1,2,3,...

Still another approach is to lower our ambitions and determine the number of 2-part unit fraction partitions of 1/k. Since this case was passed over in the original poster's problem statement, I assume the solution is well known. However, I don't find the corresponding sequence in Sloane's Encyclopedia, so maybe it's worth covering this admittedly simple case. Let U2(N) denote the number of distinct partitions of 1/N into exactly two unit fractions (not counting order). The first several values of U2(N) for N = 1, 2, 3,... are

1 2 2 3 2 5 2 4 3 5 2 8 2 5 5 5 2 8 ...

Clearly U2(N) depends only on the exponents in the prime factorization of N. In general, if N has the factorization

$$N = (p1^{\wedge}a1)(p2^{\wedge}a2)\ldots(pt^{\wedge}at)$$

then

$$U2(N) = \frac{(2\,a1 + 1)(2\,a2 + 1)\ldots(2\,at + 1) + 1}{2}$$

Incidentally, if N is square-free the above formula reduces to (3^t + 1)/2. This sequence of numbers (1,2,5,14,41,122,365,...) does appear in Sloane's Encyclopedia, although I don't know if the reference relates this sequence to the numbers of partitions of 1/N into two unit fractions for square-free integers N with t prime divisors.

The function U2(N) is formally similar to the number-of-divisors function tau(N), although U2 is not multiplicative. We could generalize this to give the family of functions

$$F\_j(N) = \frac{(j\,a1 + 1)(j\,a2 + 1)\ldots(j\,at + 1) + (j-1)}{j}$$

We know that F_1(N) gives the number of divisors of N, and F_2(N) gives the number of 2-part unit fraction partitions of N. I'm not sure what, if anything, is counted by F_3(N).

5.2. PARTICIONES DE FRACCIONES UNITARIAS (traducción)

Considerando la ecuación Diofantina en la que n, k, y a (0..n) integran 0. Se ha observado que para que n se mantenga constante, la solución no ordenada se establece para que a aumente generalmente (pero no de manera uniforme) a medida que k aumenta. ¿Puede la cantidad de soluciones para a generalizarse en términos de k cuando n es igual a 2, por ejemplo ?
Para que n = 2, aquí presentamos la cantidad de soluciones para 0&ltk<25:

3	10	21	28	36	57	42	70	79	96	62	160
59	136	196	128	73	211	80	292	245	157	93	366

(Scott Aaronson)

Cuando n iguala a dos esto requiere un número de particiones de 1/k en fracciones de 3 unidades. Creo que una respuesta completa para esta cuestión será difícil, porque incluye como un caso especial la conjetura no comprobada de que 4/k siempre puede expresarse como una suma de fracciones de tres unidades.
(Obviamente una expresión de esta naturaleza puede dividirse por 4 para dar 1/k como una suma de fracciones de tres unidades). De acuerdo con los problemas no resueltos de la teoría de los números de Richard Guy "hay una buena explicación de este problema en el libro de Mordell, donde se demuestra que la conjetura es verdadera, excepto posiblemente en los

casos en que n es congruente con 1^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, o 23^2 mod 840". Así mismo, esto se ha verificado numéricamente para todas las k <10^8.

Podemos justificar muchas de las particiones de 1/k simplemente en términos de las particiones de 1/j en que j divide a k. Por ejemplo, de las 366 particiones de 1/24, sólo 164 son "primitivas" en el sentido de que el mdc de los 3 denominadores es 1. Si se permite que U(n) denote el número de las particiones de fracciones unitarias de 3 partes de n, las particiones no primitivas de 1/24 pueden contarse por la inclusión-exclusión del siguiente modo:

U(24/2) + U (24/3) - U(24/6) = 160 + 70 - 28 = 202

En general, el número de particiones en 3 partes de 1/k puede agruparse de acuerdo con el máximo común divisor de sus denominadores.
Los resultados se resumen en la tabla siguiente.

(ver Esq."a")

Si se permite que G(k,j) denote el número de las particiones de fracciones unitarias de 3 partes de 1/k cuyos denominadores tienen un máximo común divisor de j, tenemos G(kn,jn) = G(k,j).

De esto se desprende, por ejemplo, que la suma de G(24,2j) para j = 1,2,... es igual a la suma de G(12,j) para j = 1,2,..., que es igual a U(12) = 160

Del mismo modo, la suma de G(24,3j), j = 1,2,... es exactamente igual a U(8) = 28.

Luego por inclución-exclución sabemos que la suma de G(24,j) para todo j divisible ya sea por 2 o por 3 se da así:

U(12) + U(8) - U(4) = 160 + 70 - 28 = 202

Por el mismo método observamos que existe 285 particiones no primitivas de 1/30, que se da del siguiente modo:

U3(15) + U3(10) + U3(6) - U3(5) - U3(3) - U3(2) + U3(1)
= 196 + 96 + 57 - 36 - 21 - 10 + 3 = 285

Una vez que las particiones no primitivas han sido justificadas, las particiones restantes contadas por los términos G(k,j) para j<3k y j co-primo de k. Por ejemplo, existen 55 particiones primitivas de 1/12, y existen 9 particiones primitivas de 5/12, y 5 de 7/12, etc. Podria parecer a primera vista que la tabla anterior implica que no hay solución de 4/13, porque no hay soluciones primitivas para 1/13 con máximo común divisor 4. Sin embargo, existen soluciones con máximo común divisor = 8 y máximo común divisor = 20, de manera que podemos multiplicarlos por 4 para expresar 4/13 como una suma de fracciones de tres unidades. Sin embargo, la tabla también demuestra que no existen particiones de 3 partes de 1/11 con máximo común divisor de 8, 16, 24, ó 32.

De ahí se desprende que 8/11 no puede expresarse como una suma de fracciones de tres unidades.

Otro método se basa en el hecho de que para cualquier entero positivo k existe un entero menor D(k) de manera tal que las particiones de 1/k en tres fracciones unitarias corresponden a las particiones de D(k)/k en tres divisores de D(k). Por ejemplo, tenemos

D(1) = 12 por que las particiones de fracciones unitarias de 3 partes de 1/1 corresponden a las particiones de 12 en tres divisores de 12:

$12 = 6 + 4 + 2 = 6 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4$

De manera similar, tenemos que D(2) = 2520 por que las particiones de fracciones unitarias de tres partes de 1/2 corresponden a las particiones de 1260 en exactamente tres divisores de 2520:

1260 =	840	+ 360	+	60	
	840	+ 315	+	105	
	840	+ 280	+	140	
	840	+ 252	+	168	
	840	+ 210	+	210	
	630	+ 504	+	126	
	630	+ 420	+	210	
	630	+ 315	+	315	
	504	+ 504	+	252	
	420	+ 420	+	420	

Los primeros valores de D(k) son 12,2520,65520,3603600,...Puede ser más fácil expresar esto en términos de los exponentes en sus factorizaciones primas:
K exponentes de D(k). (USA ESQ ("5"))

Está claro que D(k) es siempre divisible por k+1. También, se demuestra que D(k) es siempre divisible por q = k^2 + k + 1. Así mismo, si q es un número primo, entonces es el número primo más grande que divide D(k). En todo caso, el divisor primo mayor de D(k) no es mayor que q.

Otro método interesante es colocar la ecuación original

$$1/k = 1/a + 1/b + 1/c \qquad (1)$$

"sin dimensión", multiplicándolo simplemente por k:

$$1 = x + y + z \qquad (2)$$

mientras que x = k/a, y = k/b, y z = k/c. La ecuación (1) es justamente la ecuación de un plano diagonal en espacio tridimensional, y buscamos obtener puntos racionales en este plano cuyos numeradores dividan a k. Podemos intentar rotando este plano a un espacio bidimencional para simplificar las cosas (aunque la rotación podría no preservar la racionalidad).

Lo que resulta interesante es que si realizamos las substituciones

$X = a/ k - 1 \qquad Y = b/k - 1 \qquad Z = c/k-1$

Entonces la ecuación original (1) se convierte en

$$XYZ - X - Y - Z = 2 \qquad (3)$$

Esta ecuación parece surgir en muchos problemas diferentes. Aquí el único efecto de k es determinar cual de las soluciones racionales de (3) da valores enteros de a, b, c de acuerdo con

a = (X + 1) k b = (Y + 1)k c = (Z + 1)k

En otras palabras, k sólo "escala hacia" las soluciones racionales de (2) , derivando en que cierta cantidad de ellos son enteros. Si k = 1 entonces las únicas soluciones enteras (a, b, c) corresponden a las soluciones enteras positivas (X, Y, Z) de 3, a saber

(1, 2, 5) (1, 3, 3) (2, 2, 2)

Para k = 2 podemos aceptar soluciones de medio enteros de (3), etc. En efecto, esto es un modo de "estratificar" las soluciones racionales de una ecuación.

Probablemente podría aplicarse a otra ecuación también, es decir, dada una ecuación con muchas soluciones finitamente enteras positivas, contar los números de las soluciones racionales cuyos denominadores comunes dividen k = 1, 2, 3...

Otro método es reducir nuestras expectativas y determinar el número de particiones de fracciones unitarias de 2 partes de 1/k. Dado que este caso se pasó por alto en el enunciado del problema original, asumo que la solución es bien conocida. Sin embargo, no encuentro la secuencia correspondiente en la Enciclopedia de Sloane, entonces puede ser que valga la pena tratar este caso evidentemente simple.

Permitamos que U2(N) denote el número de particiones distintas de 1/N en exactamente dos fracciones unitarias (no en orden). Los primeros valores de U2(N) para N = 1, 2, 3, ... son

1 2 2 3 2 5 2 4 3 5 2 8 2 5 5 5 2 8......

Claramente U2(N) depende sólo de los exponentes en la factorización prima de N. En general, si N tiene la factorización

N = (p1^a1) (p2^a2)......(pt^at)

Entonces

$$U2(N) = \frac{(2a1 + 1)\ (2\ a2 + 1).....(2\ at + 1) + 1}{2}$$

De manera incidental, si N es square-free la fórmula anterior se reduce a (3^t + 1)/2. Esta secuencia de números (1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, ...) no aparece en la enciclopedia de Sloane, aunque no puedo saber si la referencia relaciona esta secuencia con los números de particiones de 1/N en dos fracciones unitarias para enteros square-free N con los divisores primos t.

La función U2(N) es formalmente similar a la función del número de divisores tau (N), aunque U2 no es multiplicativo. Podríamos generalizar esto para dar la familia de funciones

$$Fj(N) = \frac{(j\,a1 + 1)\ (j\,a2 + 1) \ldots (j\,at + 1) + (j - 1)}{J}$$

Sabemos que F1(N) da el número de divisores de N y F 2(N) da el número de particiones de fracciones unitarias de 2 partes de N. No estoy seguro sobre qué es lo que se cuenta con F3(N), si es que se cuenta algo.

5.3. MINIMIZING THE DENOMINATORS OF UNIT FRACTION EXPANSIONS

For any proper fraction n/d let f(n,d) denote the least integer k such that n/d can be expressed as a sum of distinct unit fractions with denominators less than or equal to kd. For example, we have f(31/311) = 10, because 31/311 can be expressed as a sum of distinct unit fractions with denominators no greater than 3110, but not with any smaller max denominator. I'm seeking a reference, proof, or counter-example for the conjecture that $f(n,d) < 2\ln(d) + 1$.

The proposition would certainly be false if the +1 was omitted, because we have f(7,19) = 6, whereas 2*ln(19) equals only 5.89.

On the other hand, with the +1 term the proposition is true for all d < 4831. For example, the formula correctly asserts that the fraction 43/4021 can be expressed as a sum of distinct unit fractions with greatest denominator 68357.

It certainly appears that highest values of max{f(n,d)} are nearly linear as a function of log(d), and on probabilistic grounds it's easy to see that the relation should be of this form. I'd like to know if the asymptotic slope is really 2, or if something steeper is required.

David Eppstein wrote:

The best result in this direction that I know of is H. Yokota, Denominators of Egyptian fractions, J. Num. Th. 28 (1988) 258-271

According to the abstract...it proves that, in your notation, f(n,d) <= (log d)^(3/2 + epsilon), where epsilon goes to zero as d goes to infinity.

Thanks for the reference. Yokota has published additional papers on Egyptian fractions since 1988, including one in 1990 with G. Tenebaum in which they further refined the upper bound on f(n,d). They trace heir work back to a conjecture of Bleicher and Erdos in 1976 that for every epsilon 0 there is a constant C such that

$$f(n,d) < C \log(n)^{(1+\epsilon)}$$

which is similar to, but less restrictive than, my conjecture that f(n,d) < 2 log(d) + 1.

However, I've found a counter-example to my conjecture. The unit fraction expansion of 5/6947 with the smallest maximum denominator is

$$\frac{1}{6947}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{19}\right)+\frac{1}{3640}+\frac{1}{5187} \qquad (a)$$

so we have f(5,6947) = 19, whereas my conjectured upper bound is 2 log(6947) + 1 =

18.692.. If we define D(d) as max{f(n,d)|0 < n < d} then the smallest values of d for each D(d)<20 are listed below:

D(d)	smallest d	D(d)	smallest d
1	2	11	271
2	3	12	419
3	5	13	521
4	11	14	751
5	13	15	1423
6	19	16	2273
7	41	17	4021
8	37	18	5659
9	89	19	6947
10	179		

It's interesting to consider why it's impossible to express every simple fraction of the form n/19 (for example) as a sum of distinct unit fractions with max denominator of 5*19 or less. The reason can be explained in terms of the first five reciprocals (mod 19). These five numbers are

$$
\begin{aligned}
1/1 &= 1 \\
1/2 &= 10 \\
1/3 &= 13 \qquad \text{(mod 19)} \\
1/4 &= 5 \\
1/5 &= 4
\end{aligned}
$$

In order to express every fraction n/19, n = 1 to 18, as a sum of unit fractions with denominators no larger than 5*19 we would need to be able to express each n from 1 to 18 as a sum (mod 19) of the above five numbers, i.e., 1, 10, 13, 5, 4, without repetition. The possible sums of these numbers (mod 19) are

```
sums of one:     1 10 13 5  4
sums of two:    11 14  6 5  4 15 14 18 17 9
sums of three:   5 16 15 0 18 10  9  8  0 3
sums of four:   13  4  1 9 10
sums of five:   14
```

The numbers 2, 7, and 12 do not appear, so these are the numerators n such that the expansion of n/19 requires a denominator of at least 6*19.

Obviously it's a simple matter to recursively generate the sums of the reciprocals (mod p) of the first k integers, for k=1,2,... until finding a solution. Roughly speaking, if we treat the sums of random samples, we would expect to need O(log(p)) samples to get any particular residue modulo p, so this immediately leads us to suppose that we could expand any simple fraction n/p into a sum of unit fractions with greatest denominator roughly O(p log(p)).

The 1976 paper of Bleicher and Erdos concludes "with a numerical example which illustrates that the algorithms to date [for expanding fractions into sums of unit fractions minimizing the largest denominator] leave something to be desired." They note that the Fibonacci-Sylvester algorithm yields an expansion with huge denominators (although there seems to be a typo in the actual values printed in the paper). In contrast, Erdos's algorithm gives

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{180} + \frac{1}{1452} + \frac{1}{4354} + \frac{1}{8712} + \frac{1}{87120} \qquad \text{(Esq. 1)}$$

They also noted that the continued fraction algorithm gives a shorter expansion with smaller denominators

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{1225} + \frac{1}{3477} + \frac{1}{7081} + \frac{1}{11737} \qquad \text{(Esq. 2)}$$

Then they compare this with the algorithm described in their paper,which gives

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{30} + \frac{1}{242} + \frac{1}{363} + \frac{1}{1210} + \frac{1}{3630} \qquad \text{(Esq. 3)}$$

They then applied "ad hoc" methods to get "a good short expansion"

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{42} + \frac{1}{70} + \frac{1}{330} + \frac{1}{5082} \qquad \text{(Esq. 4)}$$

and then another expansion "which while longer has denominators considerably smaller than any of the others"

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{42} + \frac{1}{70} + \frac{1}{726} + \frac{1}{770} + \frac{1}{1815} \qquad \text{(Esq. 5)}$$

It's interesting that, at recently as 1976, people evidently weren't familiar with the simple recursive algorithm for finding the unit fraction expansion with the absolute smallest max denominator.

As David Eppstein has pointed out, since 121 is composite the recursive algorithm can be applied to (1/11)(5/11) to give the almost trivial expansion 5/121 = 1/33 + 1/121 + 1/363. This makes it rather surprising that 5/121 was selected by Erdos and Bleicher to exemplify a "hard" fraction, especially considering that this method was apparently used to construct the tables of unit fractions in the Akhmin Papyrus, c. 500 AD.

By the way, I've done some more checking and found that the lowest order fraction n/d such that D(d)/d = 20 is 1097/14939, which expands 7to 1/14939 times

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}\right) \qquad \text{(b)}$$

plus a remainder of 41/560 = 1/14 + 1/560. Interestingly this is back in agreement with my original conjecture that D(d)/d < 2 log(d) + 1.

Another interesting point is that the only four numerators for which f(n,14939) equals 20 are 1097, 1927, 13235, and 14065. Notice that both pairs differ by 830. Evidently these are the only four numbers that can't be expressed as sums in terms of the reciprocals of the first 20 integers modulo 14393.

The above article alludes to a recursive method for expanding a simple fraction n/p into a sum of distinct unit fractions by forming the sums of the reciprocals of the first k integers modulo the prime numerator p. The first sum that equals the denominator n yields an expansion of the form

$$\frac{n}{p} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{x1}+\frac{1}{x2}+ .. +\frac{1}{xj}\right) + \frac{u}{v} \qquad \text{(C)}$$

where 0 < x1 < x2 ... < xj <= k and v is not divisible by p. I said that this method gives the expansion with the least possible max denominator, p*xj. Of course, this assumes the remainder u/v can be expanded into a sum of unit fractions with max denominator less than p*xj, which is ordinarily the case, because v can only be a product of divisors of the x's, each of which is smaller thanroughly log(p).

David Eppstein wrote:

I am not convinced however that this idea necessarily always gives the expansion with the minimum denominator... It gives some multiples of 1/p together with a remaining term in which no factors of p appear.

But how do we know that remaining term has a good expansion?

You're right, there are cases in which the remainder of the first solution produced by the recursive formula requires a denominator greater than p*xj in its expansion. For example, if we search recursively for an expansion of 3/2221 the first solution is occurs with k=11, namely

$$\frac{3}{2221} = \frac{1}{2221}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{27720} \qquad \text{(d)}$$

but in this case p*xj = 24431, which is less than the remainder's denominator of 27720. What we've shown is that the greatest denoninator in an expansion of 3/2221 must be at least 24431, and need be no greater than 27720. To determine if there is an expansion with max denominator between 24431 and 27720 we must proceed to the next solution in the recursion, which occurs at k=13:

$$\frac{3}{2221} = \frac{1}{2221}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{2730} \qquad \text{(e)}$$

This shows that the next smallest possible value of p*xj is 28873, and no later expansion in the recursion sequence can have a lesser max denominator than this. Therefore, the preceeding solution is optimum.

In general, this method of determining the optimum (least max denominator) expansion consists of recursively generating the solutions in increasing order of p*xj until finding one for which the remainder can be expanded with a max denominator less than p*xj.

This almost always occurs on the first solution, but if it doesn't the process continues until such a remainder is found.

Roughly speaking you will always find solutions with k less than O[log(p)^(1+delta)], and the recurrence involves 2^k trials, so the number of trials is very roughly on the order of p. This approach is even more efficient for finding the limiting expansion for ALL the numerators for a given denominator p, becauase this can be computed in essentially the same time required to solve for a single numerator.

Of course the above algorithm applies only to expanding fractions with prime denominators. From the standpoint of determining the upper bound on max denominators this is not a serious limitation because the greatest values of (max denom in expansion)/(denom) are known to occur for prime denominators. However, it could be a limitation in carrying out the above algorithm in cases were the remainder u/v is non-trivial. Fortunately the fact that v is necessarily the product of many distinct small primes implies that it's usually quite easy to find a robust expansion of u/v simply by partitioning u into divisors of v.

5.4. MINIMIZACIÓN DE LOS DENOMINADORES DE LAS EXPANSIONES FRACCIONARIAS: (traducción)

Para cualquier fracción adecuada n/d, se debe permitir que f(n,d) denote el entero k menor de manera tal que n/d pueda expresarse como suma de fracciones unitarias distintas con denominadores menores o iguales a kd. Por ejemplo, tenemos f (31/311) = 10, porque 31/311 puede expresarse como suma de fracciones unitarias distintas con denominadores que no son mayores a 3110, pero no con cualquier denominador máximo menor. Estoy buscando una referencia, prueba o ejemplo contrario para la hipótesis de que f(n,d)<2 1n(d) + 1.

La propuesta sería ciertamente falsa si el + 1 se omitiera, porque tenemos f(7,19) = 6, mientras que 2* 1n(19) sólo iguala a 5.89. Por otra parte, con el término + 1 la proposición es verdadera para toda d<4831.Por ejemplo, la fórmula correctamente afirma que la fracción 43/4021 puede expresarse como una suma de fracciones unitarias distintas con denominador máximo 68357.

Ciertamente parece que los valores más altos de max{f(n,d)} son casi lineales como función de log(d), y basándonos en la probabilidad, es fácil ver que la relación deberá ser de este modo. Me gustaría saber si la pendiente asintótica es realmente 2 , o si se requiere una pendiente mayor.

David Eppstein escribió:

"El mejor resultado que conozco en esta dirección es:

H. *YoKota*, Denominadores de fracciones egipcias,

J. Num Th 28 (1988) 258-271

De acuerdo con el abstracto prueba que, en su anotación, F(n,d)<=(log d)^(3/2 + épsilon), Donde épsilon va a cero como d va al infinito.

Gracias por las referencias. YoKota ha publicado trabajos complementarios en fracciones Egipcias desde 1988, incluyendo una en 1990 con G. Tenebaum en la que ellos refinaron el límite superior en f(n,d). Su trabajo se basa en una conjetura de Bleicher y Erdos en 1976 que por cada épsilon o existe una c constante como

$$F(n,d)<C \log(n)^{(1 + \text{épsilon})}$$

Que es similar a, pero menos restrictiva que, mi conjetura de que $f(n,d)<2 \log(d)+1$

Sin embargo, he encontrado un ejemplo contrario a mi conjetura. La expansión de la fracción de 5/6947 con el denominador máximo menor es

(ver a)

de manera que tenemos f(5,6947) = 19, mientras que el límite superior en mi conjetura es 2 log (6947) + 1 = 18.692..Si definimos D(d) como max $\{f(n,d) \ / \ 0 < n < d\}$ entonces los valores menores de d para cada D (d) <20 son los que se enumeran a continuación:

D(d)	menor d	D(d)	menor d
1	2	11	271
2	3	12	419
3	5	13	521
4	11	14	751
5	13	15	1423
6	19	16	2273
7	41	17	4021
8	37	18	5659
9	89	19	6947
10	179		

Resulta interesante considerar por qué es imposible expresar cada fracción simple de la forma n/19 (por ejemplo) como una suma de fracciones unitarias distintas con denominador máximo de 5*19 o menos. La fracción puede explicarse en términos de los primeros cinco recíprocos (mod 19). Estos cinco números son

$$\begin{aligned} 1/1 &= 1 \\ 1/2 &= 10 \\ 1/3 &= 13 \qquad (\text{mod } 19) \\ 1/4 &= 5 \\ 1/5 &= 4 \end{aligned}$$

Para expresar cada fracción n/19, n = 1 a 18, como una suma de fracciones unitarias con denominadores no mayores que 5*19 nosotros necesitaríamos poder expresar cada n de 1 a 18 como una suma (mod 19) de los cinco números anteriores, es decir, 1, 10, 13, 5, 4, sin repetición. Las sumas posibles de estos números (mod 19) son

Suma de 1:	1	10	13	5	4					
Suma de 2:	11	14	6	5	4	15	14	18	17	9
Suma de 3:	5	16	15	0	18	10	9	8	0	3
Suma de 4:	13	4	1	9	10					
Suma de 5:	14									

Los números 2, 7, y 12 no aparecen, entonces estos son los numeradores n tales que la expansión de n/19 requiere un denominador de al menos 6*19.

Obviamente, es simple generar de manera recursiva las sumas de los recíprocos (mod p) de los primeros enteros k, para k = 1,2,... hasta encontrar una solución, En términos generales, si nosotros tratamos las sumas de muestras aleatorias, esperaríamos necesitar muestras 0 (log (p)) para obtener cualquier residuo particular de modulo p, entonces esto inmediatamente nos conduce a suponer que podríamos expandir cualquier fracción simple n/p a una suma de fracciones con un denominador mayor aproximado a 0 (p log (p)).

El trabajo de Bleicher y Erdos de 1976 llega a la conclusión de que "con un ejemplo numérico que ilustra que los algoritmos a la fecha (para expandir fracciones a sumas de fracciones unitarias minimizando el denominador mayor) deja algo que desear".

Ellos notan que el algoritmo Fibonacci-Sylvester da una expansión con enormes denominadores (aunque esto parece ser un tipo en los valores reales en el trabajo).
Por el contrario, el algoritmo de Erdos da

(ver Esq. 1)

Ellos también notaron que el algoritmo de fracción continuada da una expansión menor con denominadores menores.

(ver Esq. 2)

Entonces comparan esto con el algoritmo descripto en su trabajo, que da

(ver Esq. 3)

Entonces aplicaron métodos "ad hoc" para obtener " una buena expansión corta"

(ver Esq. 4)

Y luego otra expansión "que aunque sea más larga tiene denominadores considerablemente menores que cualquiera de las otras"

(ver Esq. 5)

Resulta interesante que, tan recientemente como 1976, la gente evidentemente no estaba familiarizado con el algoritmo simple recursivo para encontrar la expansión de las fracciones unitarias con el menor denominador máximo absoluto.

Como Davis Eppstein ha señalado, dado que 121 es compuesto el algoritmo recursivo puede ser aplicado a (1/11) (5/11) para dar la expansión casi trivial 5/121 = 1/33 + 1/121 + 1/363. Esto hace que sea bastante sorprendente que 5/121 fue seleccionado por Erdos y Bleicher para ejemplificar una fracción "dura", especialmente considerando que este método fue aparentemente utilizado para construir tablas de fracciones en el papiro Akhmin, en el 500 DC.

A propósito, he realizado algunas verificaciones más y encontré que la fracción en orden menor n/d tal que D(d)/d = 20 es 1097/14939, que se expande 1/14939 veces

(ver b)

Más un resto de 41/560 = 1/14 + 1/560. Es interesante que esto concuerda con mi conjetura original de que D(d)/d < 2log(d) + 1.

Otro punto interesante es que los únicos cuatro numeradores para los cuales f(n,14939) es igual a 20 son 1097, 1927, 13235, y 14065. Noten que ambos pares difieren por 830. Evidentemente estos son los únicos cuatro números que no pueden expresarse como sumas en términos de los recíprocos de los primeros 20 módulos enteros 14393.

El articulo anterior alude a un método recursivo para expandir una fracción simple n/p en una suma de fracciones distintas formando las sumas de los recíprocos de los primeros enteros k modulan el numerador primo p. La primera suma que iguala el denominador n da una expansión de la forma

(ver c)

donde 0<x1<x2... <xj<=k y v no es divisible por p. Dije que este método de la expansión con el denominador máximo menor posible, p*xj. Por supuesto, esto supone que el resultante u/v puede ser expandido en una suma de fracciones unitarias con el denominador máximo menor que p*xj, que es lo que generalmente sucede, porque v puede sólo ser un producto de divisores de las x, cada una de las cuales es menor que el aproximado log(p).

David Eppstein escribió:

"No estoy convencido, sin embargo, de que esta idea necesariamente siempre da la expansión con el denominador mínimo...Da algunos múltiplos de 1/p junto con un término remanente en el cual no aparecen factores p. Pero cómo sabemos que el término restante tiene una expansión buena?"

Está bien, existen casos en los que el restante de la primera solución producida por la formula recursiva requiere un denominador mayor que p*xj en su expansión. Por ejemplo, si buscamos recursivamente una expansión de 3/2221 la primera solución es la que ocurre con k = 11, a saber

(ver d)

Pero en este caso p*xj = 24431, que es menor que el denominador de 27720 del restante. Lo que hemos demostrado es que el denominador mayor en una expansión de 3/2221 debe ser por lo menos 24431, y es necesario que no sea mayor que 27720.

Para determinar si existe una expansión con denominador mayor entre 24431 y 27720 debemos proceder para que la próxima solución en la recursión, que ocurre en k = 13:

(ver e)

Esto demuestra que el próximo valor menor posible de p*xj es 28873 y ninguna expansión posterior en la secuencia de recursión puede tener un denominador máximo menor que este. Por lo tanto, la solución precedente es óptima.

En general, este método para determinar la expansión óptima (denominador máximo menor) consiste en generar recursivamente las soluciones en orden ascendente de p*xj hasta que se encuentre uno para el cual el restante puede ser expandido con un denominador máximo menor que p*xj. Este caso siempre ocurre en la primera solución, pero de lo contrario, el proceso continúa hasta que se encuentra un restante.

En términos generales usted siempre encontrará soluciones con k menor que 0 (log(p))^(1+ delta), y la recurrencia incluye las pruebas 2^k, de manera que el número de intentos está muy cerca del orden de p. Este método es aun más eficiente para encontrar la expansión limitadora para todos los numeradores de un denominador p dado, porque esto puede ser computado en esencialmente el mismo tiempo requerido para resolver un numerador único.

Por supuesto que el algoritmo anterior se aplica solamente a la expansión de fracciones con denominadores primos. Desde el punto de vista de la determinación del limite superior en los denominadores máximos esto no es una limitación seria porque los valores más grandes de (denominador máximo en expansión) / (denom) se sabe que ocurren para denominadores primos. Sin embargo, podría ser una limitación en llevar a cabo el algoritmo anterior en casos en que el restante u/v no es trivial.

Afortunadamente, el hecho de que v es necesariamente el producto de muchos primos pequeños distintos implica que es por lo general bastante fácil encontrar una expansión importante de u/v simplemente particionando u en divisores de v.

5.5. PROGRAMA PARA SEPARAR FRACCIONES:

Hemos realizado un programa que da como resultado el fraccionamiento con sólo la unidad como numerador (excepto el 2/3).

Para confeccionarlo nos hemos basado en las siguientes reglas:

- Para las fracciones del tipo 2/n, siendo "n" primo, y $n \leq 101$, el programa utiliza la tabla del papiro de Rhind.
- Para las fracciones del tipo 2/n, siendo "n" par, simplifica directamente.
- Para las fracciones del tipo 2/n, siendo "n" impar y no primo, utiliza la siguiente fórmula: 2/n = 2/(a.b) (siendo "a" el primer primo menor que cumpla esta condición).
- Las fracciones pueden simplificarse. (Los egipcios lo hacían por proporción).
- Para descomponer una fracción del tipo a/b, siendo $a \geq 3$, utiliza la siguiente fórmula: $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{a-1}{b}$. En el caso en que no pueda simplificarse la fracción $\frac{a-1}{b}$, el programa busca una fracción equivalente hasta cumplirse que : $\frac{a-1}{b} * \frac{n}{n}$ tal que $\frac{(a-1)*n-1}{bn}$ pueda simplificarse. Una vez hallada la fracción equivalente que busca, la descompone en $\frac{1}{bn} + \frac{(a-1)*n-1}{bn}$.

- Si el numerador es mayor que el denominador, lo expresa como número mixto.
- Los términos son decrecientes.
- No repite fracciones.

Como los egipcios preferían igualdades con menor número de sumandos, elegimos estas reglas porque nos parecieron las más adecuadas para que esto se cumpla.

5.5.1 PROGRAM FRACCIONAR (i,o);

```
(* Este programa descompone fracciones según nuestro criterio de como lo hacían los Egipcios *)

uses crt,printer;
type
   vector= array [01..25] of integer;
var
  vecta,vectb,vecpri:vector;
  a,b,z,c,m,n: integer;
  j:char;
  archivo:text;
  marca:boolean;

function mcd (x,y:integer):integer;
(* Esta función determina el mcd de dos números *)
var
z:integer;
begin
   repeat
        z:=x mod y;
        x:=y;
        y:=z;
   until (z=0);
   mcd:=x;
end;

function primo(vectb:vector;z:integer):boolean;
(* Esta función determina si un número es primo o no (hasta 101) *)
var
c,l,r:integer;
j:boolean;
begin
   primo:= true;
   c:=1;
   j:=true;
   while (c<vectb[z]-1) and (j) do
```

```
        begin
            c:=c+1;
            r:=mcd(vectb[z],c);
            if(r<>1) then
                j:=false;
        end;
    primo:=j;
end;

procedure cargavecpri(var vecpri:vector;var vb:integer;vb1:integer);
(* Procedure que es utilizado por el procedure inicializar *)
begin
    vecpri[vb]:=vb1;
    vb:=vb+1;
end;

procedure inicializar (var vecta,vectb,vecpri:vector);
(* Este procedure inicializa con ceros a los dos vectores numerador y denominador, y carga
a otro con números primos *)
var
d:integer;
begin
    for d:=1 to 25 do
        begin
            vecta[d]:=0;
            vectb[d]:=0;
        end;
   d:=1;
   cargavecpri(vecpri,d,3);
   cargavecpri(vecpri,d,5);
   cargavecpri(vecpri,d,7);
   cargavecpri(vecpri,d,11);
   cargavecpri(vecpri,d,13);
   cargavecpri(vecpri,d,17);
   cargavecpri(vecpri,d,19);
   cargavecpri(vecpri,d,23);
   cargavecpri(vecpri,d,29);
   cargavecpri(vecpri,d,31);
   cargavecpri(vecpri,d,37);
   cargavecpri(vecpri,d,41);
   cargavecpri(vecpri,d,43);
   cargavecpri(vecpri,d,47);
   cargavecpri(vecpri,d,53);
   cargavecpri(vecpri,d,59);
   cargavecpri(vecpri,d,61);
   cargavecpri(vecpri,d,67);
   cargavecpri(vecpri,d,71);
   cargavecpri(vecpri,d,73);
```

```
    cargavecpri(vecpri,d,79);
    cargavecpri(vecpri,d,83);
    cargavecpri(vecpri,d,89);
    cargavecpri(vecpri,d,97);
    cargavecpri(vecpri,d,101);
end;

procedure xx1 (var vecta,vectb:vector;var z:integer;vb1,vb2:integer);
(* Procedure que es llamado desde el procedure "tabla" *)
begin
    vectb[z]:=vb1;
    z:=z+1;
    vecta[z]:=1;
    vectb[z]:=vb2;
end;

procedure xx2(var vecta,vectb:vector;var z:integer; vb1,vb2,vb3:integer);
(* Procedure que es llamado desde el procedure "tabla"*)
begin
    vectb[z]:=vb1;
    z:=z+1;
    vecta[z]:=1;
    vectb[z]:=vb2;
    z:=z+1;
    vecta[z]:=1;
    vectb[z]:=vb3;
end;

procedure xx3(var vecta,vectb:vector;var z:integer; vb1,vb2,vb3,vb4:integer);
(* Procedure que es llamado desde el procedure "tabla" *)
begin
    vectb[z]:=vb1;
    z:=z+1;
    vecta[z]:=1;
    vectb[z]:=vb2;
    z:=z+1;
    vecta[z]:=1;
    vectb[z]:=vb3;
    z:=z+1;
    vecta[z]:=1;
    vectb[z]:=vb4;
end;

procedure simplificar (var vecta,vectb:vector; var z,c:integer);
(* Este procedure simplifica fracciones (primera posibilidad)*)
begin
    vecta[z]:=vecta[z] div c;
    vectb[z]:=vectb[z] div c;
```

```
end;

procedure tabla (var vecta,vectb:vector;var z:integer);
(* Este procedure hace de "tabla del papiro de Rhind", descompone fracciones del tipo *)
(* 2/n, siendo n primo ( hasta el 101 inclusive) *)
begin
    vecta[z]:=1;
    case vectb[z] of
        3: xx1(vecta,vectb,z,2,6);
        5: xx1(vecta,vectb,z,3,15);
        7: xx1(vecta,vectb,z,4,28);
        11: xx1(vecta,vectb,z,6,66);
        13: xx1(vecta,vectb,z,8,52);
        20: xx3(vecta,vectb,z,24,58,174,232);
        23: xx1(vecta,vectb,z,12,276);
        17: xx2(vecta,vectb,z,12,51,68);
        19: xx2(vecta,vectb,z,12,76,114);
        31: xx2(vecta,vectb,z,20,124,155);
        37: xx2(vecta,vectb,z,24,111,296);
        41: xx2(vecta,vectb,z,24,246,328);
        43: xx3(vecta,vectb,z,42,86,129,301);
        47: xx2(vecta,vectb,z,30,141,470);
        53: xx2(vecta,vectb,z,30,318,795);
        59: xx2(vecta,vectb,z,36,236,531);
        61: xx3(vecta,vectb,z,40,244,488,610);
        67: xx2(vecta,vectb,z,40,335,536);
        71: xx2(vecta,vectb,z,40,568,710);
        73: xx3(vecta,vectb,z,60,219,292,365);
        79: xx3(vecta,vectb,z,60,237,316,790);
        83: xx3(vecta,vectb,z,60,332,415,498);
        89: xx3(vecta,vectb,z,60,356,534,890);
        97: xx2(vecta,vectb,z,56,679,776);
        101: xx3(vecta,vectb,z,606,101,202,303);
    end;
end;

procedure separa (var vecta,vectb:vector;var z:integer;var vecpri:vector; var k:integer);
(* Este procedure descompone la fracción del tipo 2/n.k, siendo n primo *)
var
j,r,aux:integer;
begin
    r:=vectb[z] div vecpri[k];
    vectb[z]:=vecpri[k];
    aux:=z;
    tabla (vecta,vectb,z);
    for j:=aux to z do
       begin
          vectb[j]:=vectb[j] * r;
```

```
        end;
end;

procedure dos (var vecta,vectb:vector; var z:integer;var marca:boolean);
(* Este procedure es para todos los casos de fracciones con numerador 2, (segunda
posibilidad) *)
var
k,c,n,aux:integer;
begin
   if (primo(vectb,z)) then
      begin
         aux:=z;
         tabla (vecta,vectb,z);
         if (vectb[z] = vectb[aux]) then
           begin
              writeln ('E R R O R: ',vectb[z],' no est  en la tabla de números primos del
Papiro de Rhind');
              Writeln (lst);
            writeln (lst,'      E R R O R:  ',vectb[z],' no figura en la tabla de números primos
del Papiro de Rhind');
              vecta[z]:=1;
              marca:=false;
           end;
      end
   else
    begin
      K:=1;
      while (vectb[z] mod vecpri[k] <> 0) and (k < 25) do
         begin
            k:=k+1;
         end;
      if (k < 25) then
        separa(vecta,vectb,z,vecpri,k);
   end;
end;

procedure separemos (var vecta,vectb:vector;var z:integer);
(* Este procedure descompone la última fracción cuando su denominador no existe antes o
cuando su numerador no es 2*)
(* (tercera posibilidad) *)
var
aux:integer;
begin
   aux:=vecta[z];
   vecta[z]:=1;
   z:=z+1;
   vecta[z]:=aux-1;
   vectb[z]:=vectb[z-1];
```

```
end;

procedure calcular (var vecta,vectb:vector; var z:integer);
(* Este procedure calcula la fracción equivalente óptima y la devuelve descompuesta *)
(* (Se da este caso cuando no se dieron los tres casos anteriores) *)
var
x,y,c:integer;
begin
   x:= 2*vecta[z];
   y:= 2*vectb[z];
   c:= mcd (x-1,y);
   while (c=1)  do
       begin
          x:=x+vecta[z];
          y:=y+vectb[z];
          c:=mcd(x-1,y);
       end;
   vecta[z]:=x;
   vectb[z]:=y;
   separemos(vecta,vectb,z);
end;

procedure continuar (var vecta,vectb:vector;var z:integer);
(* Este procedure recorre las distintas posibilidades para descomponer la última fracción*)
var
c:integer;
begin
   c:= mcd(vecta[z],vectb[z]);
   if (c<>1) then simplificar(vecta,vectb,z,c)
   else
      if (vecta[z] = 2) and (vectb[z] <> 3) then dos(vecta,vectb,z,marca)
      else
         If (vectb[z-1] <> vectb[z]) then separemos(vecta,vectb,z)
         else
            calcular(vecta,vectb,z);
end;

procedure ordenar (var vectb:vector; var z:integer);
(* Este procedure ordena el vector denominador en forma creciente*)
var
aux,x,y:integer;
begin
   for x:=1 to z do
      begin
         for y:=(x+1) to z do
            begin
               if (vectb[y] < vectb[x]) then
                  begin
```

```pascal
                    aux:=vectb[x];
                    vectb[x]:=vectb[y];
                    vectb[y]:=aux;
                    aux:=vecta[x];
                    vecta[x]:=vecta[y];
                    vecta[y]:=aux;
                 end;
            end;
       end;
end;

procedure mostrar (var vecta,vectb:vector;var z,a,b:integer;marca:boolean);
(* Este procedure emite el resultado *)
var
x,y:integer;
begin
   if (marca) then
   begin
   y:=1;
   writeln;
   write(a,'/',b,' = ');
   writeln(lst);
   writeln (lst,'     La fracción dada queda expresada así: ');
   writeln(lst);
   write(lst,'     ',a,'/',b,' = ');
   if (vectb[1] = 1) then
     begin
        write(lst,vecta[y]);
        write(vecta[y]);
        y:=y+1;
        if (vecta[y] <> 0) then
          begin
             write (' + ');
             write (lst,' + ');
        end;
     end;
   for x:=y to z-1 do
       begin
        write (vecta[x],'/',vectb[x],' + ');
        write(lst,vecta[x],'/',vectb[x],' + ');
       end;
  if (vecta[y] <> 0) then
    begin
       write(vecta[z],'/',vectb[z]);
       write(lst,vecta[z],'/',vectb[z]);
    end;
  end;
end;
```

```
BEGIN (*del principal*)
   clrscr;
   textcolor(7);
   inicializar (vecta,vectb,vecpri);
   marca:=true;
   z:=1;
   writeln(lst);
   writeln(lst);
   writeln  (lst,'    DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO
HACIAN LOS EGIPCIOS');
   writeln  (lst,'     ************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** ***
********');
   writeln (lst);
   writeln(lst);
   write (lst,'    Ingrese el numerador: ');
   write ('ingrese el numerador: ');
   readln (a);
   writeln(lst,a);
   write (lst,'    Ingrese el denominador: ');
   write('ingrese el denominador: ');
   readln (b);
   writeln(lst,b);
   c:=mcd (a,b);
   if (c<>1) then
     begin
        m:=a div c;
        n:=b div c;
     end
     else
        begin
        m:=a;
        n:=b;
     end;
  if (n = 1) then
     begin
         vecta[z]:=m;
         vectb[z]:=1;
         mostrar(vecta,vectb,z,a,b,marca);
     end
  else
  begin
  if (m >= n) then
     begin
        c:=trunc(m/n);
        vecta[z]:= c;
        vectb[z]:= 1;
        z:= z+1;
```

```
            vecta[z]:= m-(n*c);
            vectb[z]:= n;
        end
          else
             begin
                 vecta[z]:=m;
                 vectb[z]:=n;
             end;
    while (vecta[z] <> 1) and ((vecta[z] <>2) or (vectb[z] <>3)) do
          continuar(vecta,vectb,z);
   ordenar(vectb,z);
   mostrar(vecta,vectb,z,a,b,marca);
   end;
   writeln(lst);
   writeln(lst);
   writeln (lst,'     Tipée enter para salir');
   write('Tipée enter para salir');
   readln (j);
   writeln(lst);
   writeln(lst);
   writeln                                                                        (lst,'
################################################################################');
   writeln (lst);
   writeln (lst);
END.
```

5.5.2 EJEMPLOS

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 29

La fracción dada queda expresada así:

2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232

Tipée enter para salir


##########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 97

La fracción dada queda expresada así:

2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776

Tipée enter para salir


##########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 248
Ingrese el denominador: 12

La fracción dada queda expresada así:

248/12 = 20 + 2/3

Tipée enter para salir


######################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 3

La fracción dada queda expresada así:

2/3 = 2/3

Tipée enter para salir


######################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 1000
Ingrese el denominador: 7

La fracción dada queda expresada así:

1000/7 = 142 + 2/3 + 1/7 + 1/21

Tipée enter para salir


######################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 1000
Ingrese el denominador: 3

La fracción dada queda expresada así:

1000/3 = 333 + 1/3

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 11
Ingrese el denominador: 2

La fracción dada queda expresada así:

11/2 = 5 + 1/2

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 427
Ingrese el denominador: 23

La fracción dada queda expresada así:

427/23 = 18 + 1/2 + 1/23 + 1/46

Tipée enter para salir


########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 61
Ingrese el denominador: 12

La fracción dada queda expresada así:

61/12 = 5 + 1/12

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 78
Ingrese el denominador: 19

La fracción dada queda expresada así:

78/19 = 4 + 1/12 + 1/76 + 1/114

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 234
Ingrese el denominador: 432

La fracción dada queda expresada así:

234/432 = 1/2 + 1/24

Tipée enter para salir


########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 18
Ingrese el denominador: 7

La fracción dada queda expresada así:

18/7 = 2 + 1/3 + 1/7 + 1/15 + 1/35

Tipée enter para salir


##############################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 19

La fracción dada queda expresada así:

2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114

Tipée enter para salir


##############################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 27

La fracción dada queda expresada así:

2/27 = 1/18 + 1/54

Tipée enter para salir


##############################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 7
Ingrese el denominador: 2

La fracción dada queda expresada así:

7/2 = 3 + 1/2

Tipée enter para salir


######################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 1
Ingrese el denominador: 1

La fracción dada queda expresada así:

1/1 = 1

Tipée enter para salir


######################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 7

La fracción dada queda expresada así:

2/7 = 1/4 + 1/28

Tipée enter para salir


######################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 7
Ingrese el denominador: 23

La fracción dada queda expresada así:

7/23 = 1/4 + 1/23 + 1/92

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 61

La fracción dada queda expresada así:

2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 8
Ingrese el denominador: 4

La fracción dada queda expresada así:

8/4 = 2

Tipée enter para salir


########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 35
Ingrese el denominador: 48

La fracción dada queda expresada así:

35/48 = 2/3 + 1/24 + 1/48

Tipée enter para salir


#########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 4
Ingrese el denominador: 5

La fracción dada queda expresada así:

4/5 = 1/2 + 1/5 + 1/10

Tipée enter para salir


#########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 7
Ingrese el denominador: 5

La fracción dada queda expresada así:

7/5 = 1 + 1/3 + 1/15

Tipée enter para salir


#########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 7
Ingrese el denominador: 8

La fracción dada queda expresada así:

7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/8

Tipée enter para salir


##########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 3
Ingrese el denominador: 5

La fracción dada queda expresada así:

3/5 = 1/3 + 1/5 + 1/15

Tipée enter para salir


##########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 5
Ingrese el denominador: 6

La fracción dada queda expresada así:

5/6 = 2/3 + 1/6

Tipée enter para salir


##########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 639
Ingrese el denominador: 9

La fracción dada queda expresada así:

639/9 = 71

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 63
Ingrese el denominador: 33

La fracción dada queda expresada así:

63/33 = 1 + 1/2 + 1/5 + 1/10 + 1/11 + 1/55

Tipée enter para salir


########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 14
Ingrese el denominador: 5

La fracción dada queda expresada así:

14/5 = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/10

Tipée enter para salir


########################################################################
```

```
DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 107

E R R O R:  107 no figura en la tabla de números primos del Papiro de Rhind


Tipée enter para salir


##########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 109

E R R O R:  109 no figura en la tabla de números primos del Papiro de Rhind


Tipée enter para salir


##########################################################################


DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN "TANTOS", COMO LO HACIAN LOS EGIPCIOS
************** ** *** ******** ** ********* **** ** ****** *** ********


Ingrese el numerador: 2
Ingrese el denominador: 111

La fracción dada queda expresada así:

2/111 = 1/74 + 1/222

Tipée enter para salir


##########################################################################
```

Capítulo 6

La geometría y aritmética egipcia

Los problemas geométricos se relacionan siempre con problemas de área (cuadrado, rectángulo, círculo y comparación del círculo y del cuadrado, triángulo, triángulo truncado, trapecio, división de un área en partes iguales e inclinación de una pirámide).

Todos estos problemas son puramente concretos; su solución se inspira directamente en necesidades prácticas. Tales soluciones sólo son lógicas en los cálculos métricos que dan los resultados. Desde el punto de vista geométrico puro no hay allí el menor razonamiento ni el menor esfuerzo probatorio, no conllevan ninguna construcción, ninguna prueba intuitiva. Es decir estamos hablando de una geometría completamente empírica y tradicional.

Estos conocimientos empíricos comprenden la solución exacta de la superficie de un cuadrado, de un rectángulo, del volumen de un cubo, de un recipiente paralelepípedo de base rectangular (papiro de Moscú), la expresión de la inclinación de una cara de la pirámide sobre su base, como relación de la altura a la mitad de la base.

Obtuvieron también los egipcios excelentes aproximaciones de la superficie del círculo tomando para ésta el cuadrado de los $8/9^o$ del diámetro y del volumen del cilindro, multiplicando esta expresión de la superficie de base por la altura.

Cuando se trataba de un triángulo se le consideraba como un cuadrilátero, uno de cuyos lados era nulo, y cuando se trataba de un triángulo isósceles, el área se determinaba por el semiproducto de la base por el lado.

Los egipcios sólo consideraban triángulos isósceles. En el caso de cualquier otro triángulo, la fórmula de los papiros nos daría dos evaluaciones diferentes de la superficie del triángulo, según el lado elegido.

Desde el punto de vista aritmético, (que forma la mayor parte de la documentación de la matemática egipcia), con los problemas estaríamos en el campo de la invención personal, individual. Cada solución sólo se da para el caso particular considerado sin que parezca que se den cuenta de que puede ser una clave útil para infinidad de otros problemas del mismo género. Ciertos números de problemas implican una ecuación de primer grado con una incógnita, como tantos problemas de aritmética elemental. Están resueltos de manera empírica. No encontramos ningún intento de formular reglas generales. Casos completamente análogos están tratados de manera completamente diferente. Igual sucede con las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, como los encontramos implícitamente en el papiro de Berlín y en el de Kahun. Allí no hay sino algunas descomposiciones fortuitas de un cuadrado a otros dos. El método es puramente empírico; más exactamente no hay método, sino ensayos, tanteos.

Apoyándose en un conjunto de hechos han sacado como conclusión que una vez superados los cálculos operatorios no hubo en la matemática egipcia ningún intento de logificación.

7. CONCLUSION.

Cuando empezamos a investigar sobre matemática egipcia descubrimos que había muchísimo material, y que éste abarcaba una infinidad de temas.

Decidimos entonces realizar un trabajo generalizado y profundizar acerca del fraccionamiento que ellos efectuaban.

Sobre este tema, encontramos diferentes versiones de egiptólogos acerca de cómo los egipcios lo hacían, teniendo en cuenta también que en cada etapa histórica sus métodos variaban.

Como el papiro de Rhind es el documento que tiene más información sobre este tema, es por eso que profundizamos más en el método que en él aparece, aunque también tratamos de manera superficial los papiros de Akhmin y Moscú, los cuales contienen también información muy rica.

Aunque este trabajo realmente es fascinante, solamente se ha tratado de disminuir un poco la curiosidad nuestra, pero sólo hemos hallado la punta del iceberg, el seguir descubriéndolo dependerá de la curiosidad de cada uno.

Agradecemos enormemente la valiosa ayuda recibida de los profesores Rousset y Morando, la preciada colaboración de nuestra "traductora" Anabella Salamone, y a todos los que nos ayudaron a adquirir materiales o información en internet (Osvaldo Sandomingo, Jorge Román).

8. BIBLIOGRAFÍA

DICCIONARIO ENCICLOPÉDICO LABOR. TOMO 3.

ENCICLOPEDIA "LA EVOLUCIÓN DE LA HUMANIDAD", TOMO 161. LA CIENCIA ORIENTAL ANTES DE LOS GRIEGOS. Autor: Abel Rey.

ENCICLOPEDIA "LABOR". TOMO 5. EL HOMBRE A TRAVES DEL TIEMPO (1ra parte).

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES. VOL I. Autor: Hoefer.

HISTORIA DE LA CIENCIA. VOL I. Autor: George Sarton.

HISTORIA UNIVERSAL DE LAS CIFRAS. Autor: Georges Ifrah.

INTERNET.