

**TERCER CONGRESO SOBRE MEDIOS DE TRANSPORTE
Y SUS TECNOLOGÍAS ASOCIADAS.
UTN Facultad Regional Haedo, octubre 2021, Haedo, Buenos
Aires, Argentina**

**Estudio teórico-experimental aplicado a cálculos de diseño de
estructuras de protección contra vuelco de tractores agrícolas**

Horacio M. Mirassou

*Grupo de investigación GITEVE. Centro de Investigación CIDIV.
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco, General Pacheco,
Buenos Aires, Argentina.*

hmmirassou@yahoo.com , hmirassou@docentes.frgp.utn.edu.ar

Palabras claves: estructura antivuelco, tractor agrícola, ROPS

Resumen

Los tractores agrícolas pueden volcar mientras se desplazan o trabajan, el conductor puede ser aplastado en tractores sin ROPS en vuelcos con ruedas hacia arriba.

La sigla ROPS proviene de la expresión Roll-over Protective Structure, su traducción es: Estructura de Protección Contra Vuelco.

Reciben esa clasificación las cabinas o barras antivuelco que cumplen los requisitos definidos en alguna de las normas que existen al respecto.

Las normas consideradas en este trabajo son aplicables a tractores de diseño convencional (con 2 ejes y tracción en 2 ó 4 ruedas).

Esas normas permiten diversidad de diseños de ROPS. Están definidas unas pocas dimensiones de referencia. Están especificados los procedimientos de ensayo de prototipo, donde se somete al conjunto tractor con su ROPS correspondiente a una serie de esfuerzos, que representan los esfuerzos originados en un vuelco real.

Esos ensayos pueden ser dinámicos o estáticos, a elección del fabricante.

Esas normas especifican valores de energía de deformación elastoplástica que deben aplicarse en las ROPS, calculables en función de la masa del tractor. Están definidas las direcciones de las fuerzas a aplicar pero no sus magnitudes. Las deformaciones máximas están limitadas.

En esas normas no se presentan métodos de cálculo para el dimensionamiento de una ROPS. Eso debe ser resuelto por su diseñador.

Para simplificar los procesos de cálculo, en este trabajo se propone un método, basado en una hipótesis de resistencia de materiales en el rango elastoplástico, para relacionar los valores del momento flexor actuante y del resultante radio de curvatura de un tubo de acero, de sección circular o rectangular, cuyo espesor es suficiente para evitar el aplastamiento de la sección, que pueda formar parte de una estructura ROPS.

En este método se utiliza la curva tensión-deformación del acero de los tubos.

1. Introducción

Un tractor agrícola es un vehículo especial autopropulsado que se utiliza principalmente para arrastrar implementos agrícolas, como arados, sembradoras, equipos para fumigación, etc., en trabajos de labranza o siembra. En algunos casos también se utiliza para arrastrar remolques para el transporte de diversas cargas, como productos del agro, etc. En su configuración más frecuente tiene dos ejes, con tracción en las cuatro ruedas o en las dos del eje trasero. La potencia del motor, generalmente de combustión interna de ciclo Diésel, se transmite a las ruedas mediante transmisiones con engranajes, en la mayor parte de las unidades existentes.

Cuando un tractor agrícola se desplaza o trabaja existe el riesgo de que ocurra un vuelco. Su conductor puede sufrir lesiones, heridas graves o fallecer si la unidad no cuenta con una estructura de protección contra vuelcos adecuada, diseñada y fabricada según las normas existentes. Esa clase de estructuras se denominan con la sigla ROPS (en inglés: Roll Over Protective Structure). Estadísticamente se ha comprobado que en los tractores medianos y grandes, con potencias mayores a 20 CV, las formas de vuelco más frecuentes son hacia un costado o hacia atrás.

Los vuelcos hacia un costado en general son causados por irregularidades del terreno o por su inclinación natural, y pueden ocurrir trabajando en alguna tarea normal (arrastre de arados u otros tipos de implementos) o cuando el tractor se desplaza sin arrastrar nada.

Los vuelcos hacia atrás en algunos casos ocurren cuando arrastrando un implemento, por ejemplo un arado, un súbito aumento de la resistencia al avance (por ejemplo: una zona del terreno más dura que opone mayor resistencia al trabajo de remoción de tierra por parte del arado) genera un sistema de fuerzas de acción y reacción que provocan el vuelco. Otra causa posible se da en este caso: ruedas traseras atascadas en el suelo impedidas de girar (por ejemplo en una zanja) con el motor transmitiéndoles torque, de modo que el cuerpo del tractor es levantado girando respecto del eje trasero. En ambos casos, los tractores con tracción en las cuatro ruedas son menos peligrosos que los que sólo tienen tracción en las ruedas traseras.

La peor situación para el conductor ocurre cuando el tractor experimenta una rotación de media vuelta hasta quedar invertido con sus ruedas ubicadas hacia arriba (vuelco completo de 180°), de modo que todo el peso de la máquina se descarga sobre los elementos que están a mayor altura del tractor (observándolo cuando el mismo se encuentra en posición normal).

Si esos elementos son una cabina o una barra antivuelco, deberían ser capaces de resistir el vuelco y luego el peso de la máquina, de un modo que permita evitar lesiones en el conductor, quien debería estar sujeto al asiento con un cinturón de seguridad (los arraigados del asiento al piso deben resistir las fuerzas generadas).

Pueden recibir la clasificación de ROPS las cabinas o barras antivuelco que reúnen los requisitos que establecen algunas de las normas que existen al respecto. Estas se basan en investigaciones y ensayos realizados en décadas pasadas, y en algunos países su cumplimiento es exigido por la ley. Las ROPS que cumplen las normas están diseñadas para experimentar importantes deformaciones en el período plástico de los materiales en algunas zonas de su estructura, para que la energía mecánica del impacto puesta en juego se utilice como energía de deformación elastoplástica.

Luego de un ensayo de prototipo estático las ROPS existentes suelen presentar deformaciones permanentes con valores del orden de 10 a 15 cm. En la Subsección 1.1 se da una lista de las principales normas y reglamentaciones de este tema.

1.1 Principales normas y reglamentaciones correspondientes al tema ROPS

- 1) Norma IRAM 8039-1 (Junio 1999) *Tractores agrícolas y forestales de ruedas. Estructuras de protección por vuelco. Parte 1: Método de ensayo estático y condiciones de aceptación.* (IRAM: Instituto Argentino de Normalización)
- 2) Norma IRAM 8039-2 (Junio 1999) *Tractores agrícolas y forestales de ruedas. Estructuras de protección por vuelco. Parte 2: Método de ensayo dinámico y condiciones de aceptación.*
- 3) Norma ISO 5700 (1984) *Tractores agrícolas y forestales. Estructuras de protección. Método de ensayo estático y condiciones de aceptación.* (ISO: International Organization for Standardization)
- 4) Norma ISO 3463 (1984) *Tractores agrícolas y forestales. Estructuras de protección. Método de ensayo dinámico y condiciones de aceptación.*

- 5) OECD *Standard Code for the official testing of protective structures on agricultural and forestry tractors (static test). Code 4.*
(OECD: Organization for Economical Cooperation and Development)
- 6) Norma SAE J2194 JUN93 *ROLL-OVER PROTECTIVE STRUCTURES (ROPS) FOR WHEELED AGRICULTURAL TRACTORS*
(SAE: Society of Automotive Engineers)
- 7) Norma SAE J1194 SEP94 *ROLLOVER PROTECTIVE STRUCTURES (ROPS) FOR WHEELED AGRICULTURAL TRACTORS*
- 8) Norma ASAE S383.1 DEC93 (SAE J1194 MAY89) *Roll-Over Protective Structures (ROPS) for Wheeled Agricultural Tractors*
(ASAE: American Society of Agronomist Engineers)
- 9) Reglamentación de seguridad laboral: USA OSHA 29 CFR Part 1928 Subpart C (Julio 1995)
Roll-over protective structures
(OSHA: Occupational Safety and Health Standards for Agriculture)

1.2 Breve síntesis de los contenidos de las normas listadas en la Subsección 1.1

La norma IRAM 8039-1 (de 1999) se basa en la norma ISO 5700 (de 1984), cuyo contenido se asemeja al de la norma OECD Code 4 (número 5 en esta lista), ambas de origen europeo.

La norma IRAM 8039-2 (de 1999) se basa en la norma ISO 3463 (de 1984).

La norma SAE J2194 de USA (revisión 1993), tiene un contenido que se asemeja al de ambas normas ISO mencionadas (incluye métodos de ensayos de tipo estático y dinámico).

La norma SAE J1194 de USA (revisión 1994), también incluye métodos de ensayos de tipo estático y dinámico, y tiene un enfoque del tema estructuras ROPS más sencillo (más fácil de cumplir) que el de las otras normas mencionadas arriba. La norma ASAE S383.1 de USA (revisión 1993) es igual (tiene prácticamente el mismo texto) a la norma SAE J1194.

La reglamentación de seguridad laboral de USA: OSHA 29 CFR Part 1928 Subpart C, tiene un contenido semejante a la norma SAE J1194, pero agrega algunos requisitos adicionales. Ambas son aplicables a tractores con motores de potencia mayor a 20 HP.

La norma OECD Code 4 no menciona un valor mínimo de potencia, define su campo de aplicación para tractores que poseen al menos 2 ejes con ruedas neumáticas (con o sin orugas) y con una masa total entre 800 kg y 15000 kg.

El campo de aplicación de la norma IRAM 8039-1 es el mismo. El campo de aplicación de la norma IRAM 8039-2 es semejante, pero con la masa total del tractor entre 800 y 6000 kg.

Las versiones de las normas de este listado son las consultadas por el autor de este texto.

Las normas IRAM aún están en vigencia, algunas normas SAE tienen revisiones publicadas en fechas más recientes, en general los cambios introducidos son mínimos.

Se puede decir que a grandes rasgos los contenidos de estas normas tienen un criterio en común.

Cuando un tractor vuelca, si tiene una ROPS, ésta impactará contra el suelo a una determinada velocidad. El valor de la velocidad en cada punto es proporcional a su distancia al eje de rotación.

El punto más alejado tendrá la mayor velocidad. Muchos tractores de diseño considerado convencional se asemejan en cuanto a su altura máxima y en la posición de su centro de gravedad.

Aproximadamente, la energía cinética del tractor volcando es función del cuadrado de la velocidad angular y de su masa (más precisamente: del momento de inercia másico respecto del eje de rotación, cuyo valor es función de la masa y la forma en que está distribuida). Esta energía cinética se utilizará, en el proceso del impacto, como energía de deformación elastoplástica del suelo, de la ROPS y/o de otras partes del tractor (un buen diseño de la ROPS evitaría que ocurra esto último). El proceso del vuelco puede terminar luego del primer impacto (vuelco de un cuarto de vuelta o de 90°) o continuar (vuelco de media vuelta o de 180°).

Si la velocidad angular en el instante del impacto fuera la misma para todos los tractores de igual altura, posición del baricentro, trocha, ancho de la ROPS, y equivalente distribución de su masa, la energía cinética resultaría ser una función lineal de la masa del tractor. Los estudios realizados para la redacción de las normas establecieron este criterio: se dan unas sencillas ecuaciones para calcular un valor de energía puesta en juego en función lineal solo de la masa del tractor.

Las ecuaciones para vuelco hacia atrás son distintas que las definidas para vuelco lateral.

Cada ROPS deberá estar preparada para ambas situaciones posibles.

Las normas fijan unos requisitos mínimos obligatorios que cubren la mayor parte de los accidentes que pueden ocurrir cuando el tractor se utiliza en trabajos considerados normales (uso pretendido), simplificando la hipótesis de cálculo para dimensionar los elementos que forman la ROPS y su sistema de unión al resto del tractor. Los criterios y métodos de cálculo no se incluyen en esas normas, eso debe ser resuelto por el fabricante o el diseñador de la ROPS, y es lo que se busca contribuir a solucionar en las próximas páginas de este trabajo. Las normas fijan requisitos de performance a ser cumplidos en una serie de ensayos de un prototipo real de una ROPS para un determinado modelo de tractor. Luego, las ROPS fabricadas en serie para esos tractores deberán ser iguales al prototipo que cumplió satisfactoriamente los requisitos.

En los títulos de algunas normas listadas en la Subsección 1.1 se menciona: método de ensayo estático o método de ensayo dinámico. El fabricante del conjunto tractor con su ROPS puede elegir certificar su producto por uno de esos dos métodos, en general no es obligatorio efectuar ambos. Las ecuaciones para calcular la energía puesta en juego en los ensayos dinámicos y estáticos son distintas, y también son distintas comparando las normas ISO con la norma SAE J1194. Este trabajo se enfoca en los ensayos de tipo estático, considerando que son en general menos costosos de efectuar que los de tipo dinámico.

1.3 La norma SAE J1194 SEP94

Esta norma está publicada en [1] con una extensión de 7 páginas.

Las Figuras 1 a 7 de este texto son semejantes a las figuras 1 a 7 de la norma SAEJ1194.

Las figuras 1 a 3 muestran 3 tipos de ROPS: de 2 columnas (barra antivuelco), de 4 columnas (abierta), o una cabina (cerrada), instaladas en un tractor, vistas posterior y lateral.

En las Figuras 4 y 5 se muestra esquemáticamente la aplicación de la carga desde atrás para las ROPS de 2 y 4 columnas (para una cabina es similar), y eso corresponde a la primera etapa del ensayo estático definido por la norma SAE J1194. Se ensaya una ROPS nueva, sin uso previo.

En las vistas posteriores se puede ver que la carga no está aplicada en el centro, sino que está aplicada en la mitad del semiancho de la ROPS. En la Figura 6 se muestra esquemáticamente la aplicación de la carga lateral para una ROPS de 4 columnas o una cabina, y eso corresponde a la segunda etapa del ensayo estático definido por esta norma. La carga lateral se aplica sobre la ROPS que presenta deformaciones permanentes causadas por la carga posterior, que fue aplicada en la primera etapa. En una ROPS de 2 columnas se aplica coaxial al travesaño superior. Los valores de la energía puesta en juego, a ser calculados con las ecuaciones dadas en esta norma, son los mismos para los 3 tipos de ROPS en cada etapa, pero son distintos para cada etapa (las ecuaciones son distintas).

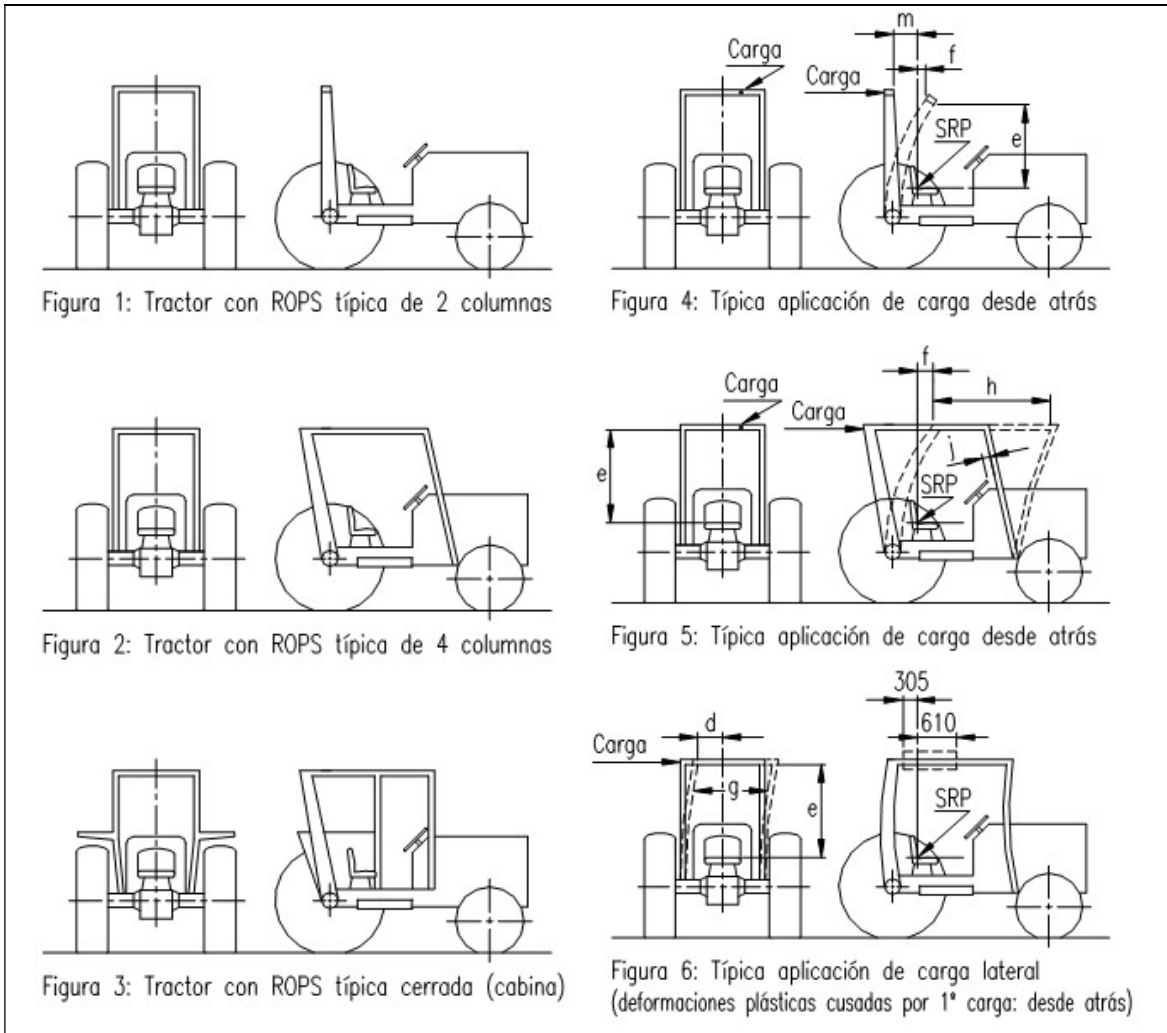
En las Figuras 4 a 6 se indica un punto de referencia del asiento (SRP: seat reference point), respecto del cual se ubica la zona despejada (clearance zone) o espacio de seguridad, se amplía este tema al final de esta Sección 1.3. La Figura 7 muestra una curva Fuerza en función del Desplazamiento, se traza una curva en la primera etapa y otra curva en la segunda etapa.

Cada curva se traza con las mediciones efectuadas durante el ensayo, a medida que se aplica la carga se deben medir dos variables: el desplazamiento (en el punto de aplicación de la carga), en intervalos no mayores a 12,7 [mm] (0,5”), y la fuerza correspondiente a cada desplazamiento.

Conviene trazar esas curvas durante el proceso de aplicación de las cargas cuasiestáticas, para efectuar el cálculo del área encerrada bajo cada curva, la cual es igual a la energía de deformación elastoplástica absorbida por el conjunto tractor con su ROPS en cada etapa del ensayo.

En cada etapa, cuando esa energía es igual o mayor a la requerida (calculada con las ecuaciones de la norma en función de la masa del tractor) puede detenerse la aplicación de la carga.

Al retirar lentamente la carga, el conjunto tractor con su ROPS se recupera elásticamente, y la estructura ROPS presenta una deformación permanente. Es un objetivo deseable pero no obligatorio para el diseño del conjunto tractor con su ROPS que solamente se produzcan deformaciones permanentes en la ROPS y no en el resto del tractor. Como se muestra en la Figura 7, el mayor porcentaje de energía absorbida generalmente corresponde a deformaciones de tipo plástico (permanentes). Las ecuaciones de esta norma para calcular la energía E en [J] a aplicar en función de la masa M en [kg] del tractor se dan en la próxima página de este texto.



Figuras 1 a 3: *Tres modelos de ROPS.*

Figuras 4 a 6: *Cargas en ensayos de prototipo*

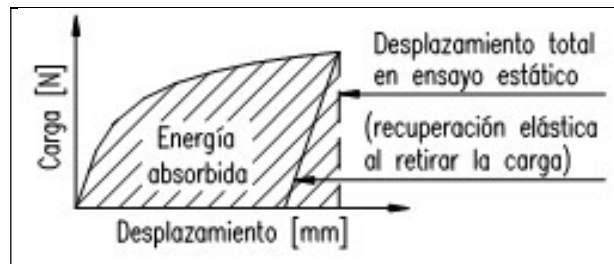


Figura 7: *Curva Fuerza-desplazamiento (F-D)*

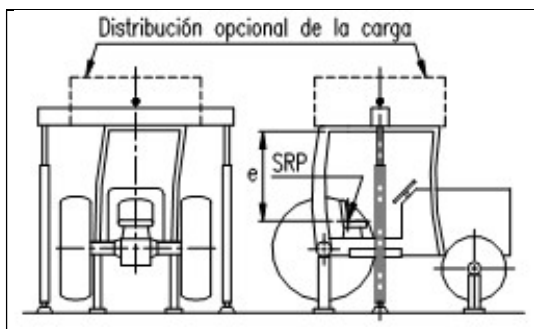


Figura 8: *3ª etapa del ensayo estático*

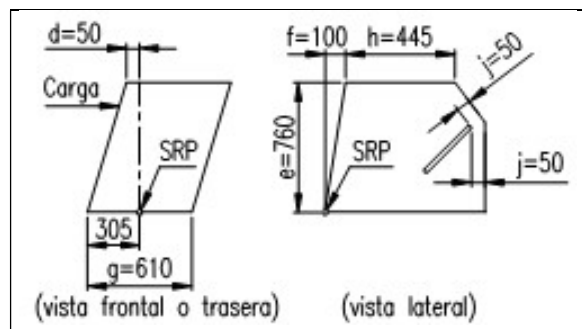


Figura 9: *Zona o Espacio de seguridad*

Carga aplicada desde atrás (primera etapa):

$$E_{ir} = 1,4 M \quad (a)$$

Carga aplicada lateralmente (segunda etapa):

$$E_{is} = 980 + 1,2 M \quad (b)$$

La norma establece que la masa M a ser considerada no puede ser inferior a la potencia disponible en la toma de fuerza (o el 95% de la potencia del motor) multiplicada por el factor 67 kg/kW.

Los valores calculados de E_{ir} y E_{is} deberán incrementarse en un 15% si se busca evitar efectuar el ensayo de vuelco en campo (Field Upset Test), previsto en la subsección 5.4 de la norma, en el cual se define un vuelco real de un prototipo tractor con su ROPS nuevos (sin ensayos previos).

Es un ensayo costoso, una ROPS adicional sufre deformaciones permanentes y el tractor utilizado sufre daños. Generalmente es preferible aumentar en 15% la energía aplicada en las etapas 1 y 2.

Las Figuras 4, 5 y 6 son esquemas muy simplificados (así están dados en la norma SAE J1194). Deberían estar representados unos apoyos rígidos de los ejes del tractor, sin las ruedas, de modo que no sea posible que los neumáticos se deformen durante la aplicación de las cargas.

La Figura 8 de este texto es similar a la figura 12 de la norma, representa la aplicación de una carga de aplastamiento en la etapa 3, sobre el conjunto tractor con su ROPS que fue ensayado antes en las etapas 1 y 2, y tiene las deformaciones permanentes causadas en esas etapas previas. El valor de la fuerza vertical a aplicar debe ser igual a 1,5 veces el peso propio del tractor.

En esa etapa 3 no se mide una energía de deformación, el conjunto tractor con su ROPS debe ser capaz de resistir la carga aplicada sin perder estabilidad durante varios minutos.

La Figura 9 de este texto es similar a la figura 15 de la norma SAE J1194, representa el espacio de seguridad o zona despejada (clearance zone) para el conductor. Durante todas las etapas del ensayo ningún componente del conjunto tractor con su ROPS debe ingresar a ese espacio de seguridad. Las dimensiones indicadas con letras: d,e,f,g,h,j en las Figuras 4, 5, 6 y 9 tienen el mismo valor. En la Figura 4, la dimensión “m” debe ser menor a 304,8 mm (12”).

2. Diseño de una ROPS de un tractor agrícola con la norma SAE J1194 SEP94

Para un tractor determinado, se debe elegir el tipo de ROPS a ser diseñado (de 2 o 4 columnas o una cabina). Se deben definir los límites geométricos según la norma para ese conjunto tractor con su ROPS. La energía de deformación elastoplástica es función del desplazamiento y de la fuerza aplicada. En general se desea lograr absorber la energía aplicada de modo tal que la fuerza máxima sea lo menor posible, para minimizar los esfuerzos en las vinculaciones de la ROPS con el resto del tractor, y para eso se busca que los desplazamientos sean los máximos que permitan: a) los límites geométricos definidos por la norma, b) que la ROPS con las deformaciones permanentes causadas por las cargas horizontales pueda resistir luego la carga vertical.

Entonces el diseño y dimensionamiento de una ROPS puede comenzarse con un determinado esquema que deberá verificarse con los cálculos de resistencia de materiales, incluyendo deformaciones elastoplásticas correspondientes a cada etapa del ensayo, y si es necesario modificar el esquema para luego recalculer hasta encontrar una solución que verifique.

Pueden utilizarse programas de elementos finitos especializados que resuelvan deformaciones elastoplásticas. En las próximas páginas se propone un método aproximado que permite al diseñador de la ROPS acercarse a una solución del problema utilizando una calculadora, es conveniente disponer también de un programa CAD en 2D y un programa de planilla de cálculo. La norma requiere efectuar finalmente el ensayo de prototipo para certificar la ROPS, no contempla la presentación de solamente una memoria de cálculo.

Las columnas y travesaños de ROPS suelen estar formados por tubos de sección rectangular, cuadrada o circular, también pueden existir otras formas especiales, generalmente en cabinas.

Las Figuras 10 y 11 muestran dos diseños posibles de ROPS del tipo con dos columnas, se diferencian en la ubicación predefinida de los nodos de deformación plástica para la etapa 1 del ensayo de prototipo. Ambas ROPS en la etapa 2 de ese ensayo se muestran en la Figura 12 (tractor visto desde atrás). La Figura 13 muestra secciones que se pueden utilizar en una ROPS de dos columnas para un tractor de 75 CV ($M = 3500$ kg).

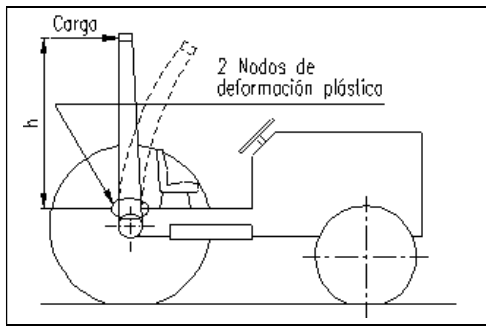


Figura 10: *Ensayo estático, carga desde atrás*

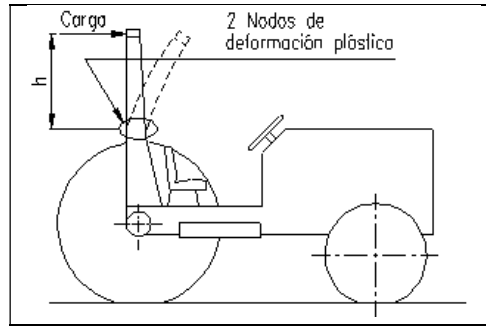


Figura 11: *Ensayo estático, carga desde atrás*

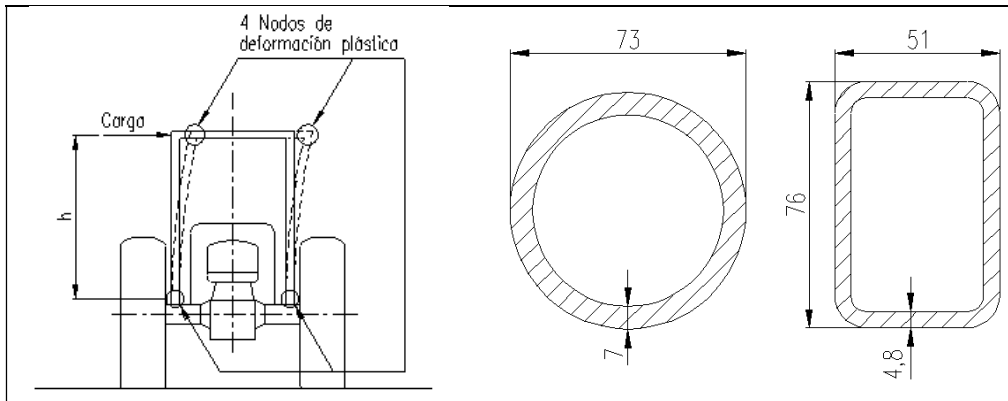


Figura 12: *Ensayo estático, carga lateral*

Figura 13: *Secciones de barras de ROPS*

3. Características de los materiales generalmente utilizados en las ROPS

La mayoría de las ROPS existentes están construidas con tubos de aceros de bajo contenido de carbono, en algunos casos de baja aleación. Se eligen aceros con alto alargamiento, con una gran área encerrada bajo la curva σ - ϵ de un ensayo de tracción (o compresión) de una probeta, dado que esa área se relaciona con la capacidad del material para absorber energía de deformación elastoplástica, en su mayor porcentaje energía de deformación plástica o permanente.

Ejemplos de esas curvas σ - ϵ se muestran en la Figura 14: la curva 1 es la que se espera obtener con los valores mínimos de tensión de fluencia y tensión última definidas en la norma del material. La curva 2 es la que suele obtenerse en un ensayo de tracción real de ese mismo material, generalmente las tensiones de fluencia y última son mayores a las mínimas definidas en la norma. En la Figura 14 se indica con 3 a una distribución de Gauss de posibles resultados de ensayos.

En la Figura 15 se muestra el resultado promedio de ensayos a compresión de dos probetas fabricadas con tubos de material acero ASTM A-53 realizados en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica de UTN FRGP en los primeros días de marzo de 2020. Las tensiones de fluencia y última resultaron bastante mayores a las mínimas definidas en la norma. Para esos tipos de aceros se considera que las curvas σ - ϵ en tracción y en compresión son iguales en valores absolutos.

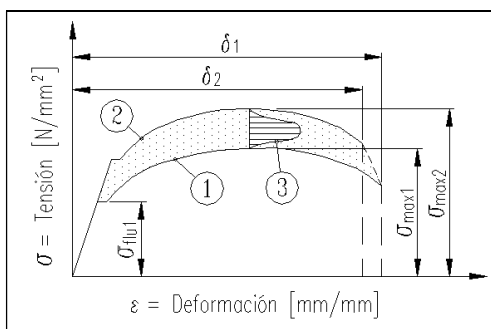


Figura 14: *Curvas σ - ϵ de aceros*

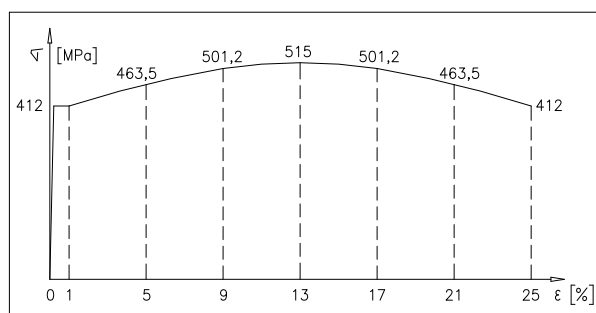


Figura 15: *Curva σ - ϵ del acero de las probetas*

4. Flexión elastoplástica de barra recta de sección con dos ejes de simetría normales

En la Figura 16, tomada de [2] pág. 384, se muestra un trazado que forma parte de un método semigráfico para relacionar el momento flexor Mf aplicado en una sección de una barra, con el radio de curvatura ρ resultante, considerando tensiones y deformaciones elastoplásticas.

Feodosiev [2] págs. 384 a 386, expone este método para flexión pura normal aplicada a barras rectas de sección transversal constante con dos ejes de simetría normales entre sí, y cuyo material presenta diagramas iguales de tensiones σ de tracción y de compresión en función de la deformación específica \mathcal{E} . Entonces el eje neutro, en ambos períodos elástico y plástico, coincide con el eje de simetría normal al plano del momento flexor. Se considera como hipótesis que las secciones permanecen planas en ambos períodos elástico y plástico, por eso la deformación específica \mathcal{E} de cada fibra de la sección es directamente proporcional a su distancia y al eje neutro, e inversamente proporcional al radio de curvatura ρ de la línea elástica que pasa por el eje neutro de la sección estudiada. Se debe conocer el diagrama σ - \mathcal{E} del material, que en la Figura 16 está ubicado en su zona superior. Para un determinado radio de curvatura ρ se calcula la máxima deformación específica \mathcal{E}_{max} como y_{max} de la sección dividida por ρ . Para \mathcal{E}_{max} se obtiene del diagrama σ - \mathcal{E} del material el valor de σ_{max} que actúa en la fibra más alejada y_{max} . Para cada fibra de coordenada y , se obtiene del diagrama σ - \mathcal{E} del material el valor de σ correspondiente. En la Figura 16 se representa este proceso: a la derecha de la sección se traza un diagrama de las tensiones σ que actúan en cada fibra. A la derecha de ese diagrama se traza otro: para cada fibra el producto $\sigma \cdot y \cdot b$, el área encerrada por este diagrama es igual al Mf actuante, esto se demuestra en [2] con el desarrollo de este método. Si a una barra recta de esas características se le aplica un Mf cuyo valor es el calculado, se curvará con radio de curvatura ρ cuyo valor en esa sección es igual al definido inicialmente en este proceso, el cual se repite para otros valores de ρ , obteniéndose para cada uno el correspondiente valor de Mf . Con varios pares de valores Mf y $1/\rho$ se traza otro diagrama como el de la Figura 17, tomado de [2] pág. 386, que es la curva que relaciona al radio de curvatura ρ con el momento flexor Mf aplicado en una sección de la barra (Mf está denominado como M).

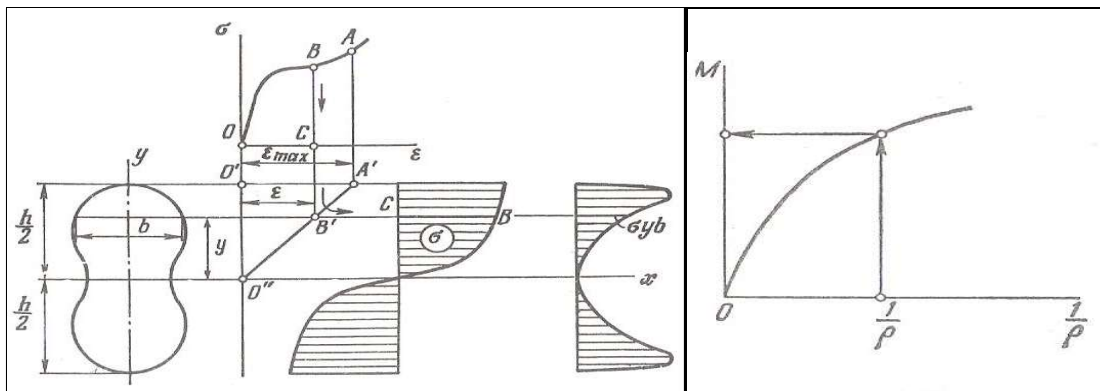


Figura 16: Trazado para relacionar Mf con $1/\rho$

Figura 17: Curva relación Mf con $1/\rho$

5. Método numérico para relacionar Momento flexor y Radio de curvatura

Se propone un método numérico, basado en el método semigráfico explicado en la Sección 4, para relacionar el momento flexor actuante y el resultante radio de curvatura de un tubo de acero, de sección circular o rectangular, cuyo espesor es suficiente para evitar el aplastamiento de la sección. El material debe presentar diagramas iguales de tensiones σ de tracción y de compresión en función de la deformación específica \mathcal{E} . Se asumen las mismas hipótesis definidas en la Sección 4. Las secciones permanecen planas en ambos períodos elástico y plástico, por eso la deformación específica \mathcal{E} de cada fibra de la sección es directamente proporcional a su distancia y al eje neutro, e inversamente proporcional al radio de curvatura ρ de la línea elástica que pasa por el eje neutro de la sección estudiada. Se explica este método con un ejemplo de flexión pura normal aplicada a un tubo de sección circular cuyos datos son: diámetro ext. $D = 73,1$ mm | espesor $e = 6,9$ mm | radio ext. $R = 36,55$ mm | radio int. $r = 29,65$ mm | momento de inercia $J_x = 79,465$ cm⁴ | módulo resistente elástico $W_x = 21,7414$ cm³ | área $A = 1435,0167$ mm² | material: acero ASTM A-53.

5.1 Modelo matemático para representar la curva tensión-deformación del material

El método propuesto requiere conocer la curva de ingeniería del material del tubo que relaciona la tensión σ con la deformación \mathcal{E} . Para determinar la curva en este ejemplo se fabricaron dos probetas de longitud 50 mm cada una, mecanizadas con un torno, a partir de tramos cortados de un tubo de diámetro exterior 26,8 mm (espesor 2,53 mm) de material acero ASTM A-53. Se midió su dureza y se realizaron dos ensayos de compresión axial en una máquina de ensayos del Laboratorio de Ingeniería Mecánica de UTN FRGP, la cual grafica la fuerza aplicada en función del desplazamiento. Con los datos obtenidos se trazó la curva mostrada en la Figura 15. Para eso también se consultó la norma ASTM A-53 [4] y el libro *Atlas of Stress-Strain Curves* [5].

Se calculó σ como la fuerza dividida por el área de la sección original, se calculó \mathcal{E} como el porcentaje del decremento de la longitud con respecto a la longitud original de 50 mm.

En ese tubo las tensiones de fluencia y rotura resultaron ser mayores a las mínimas definidas en la norma de su material. La curva σ - \mathcal{E} (tensión-deformación) debe expresarse con ecuaciones de regresión que permitan calcular σ en función de \mathcal{E} . Las siguientes relaciones, que representan los resultados de los ensayos realizados, se definieron por aproximación:

$$\text{Para: } 0 \leq \mathcal{E} < 0,00206 \quad \text{corresponde: } \sigma = 200000 \mathcal{E} \text{ [MPa]} \quad (1)$$

$$\text{Para: } 0,00206 \leq \mathcal{E} \leq 0,01 \quad \text{corresponde: } \sigma = 412 \text{ [MPa]} \quad (2)$$

$$\text{Para: } 0,01 < \mathcal{E} \leq 0,25 \quad \text{corresponde: } \sigma = (412 + 103 \text{ sen } (90^\circ \cdot (\mathcal{E} - 0,01) / 0,12)) \text{ [MPa]} \quad (3)$$

De ese modo, se puede calcular σ en función de \mathcal{E} en todo el rango de variación de \mathcal{E} . Se tiene la hipótesis de que este diagrama es igual en tracción y en compresión. Se consideró que el material acero ASTM A-53 del tubo ($D=73,1$) del ejemplo de cálculo es semejante al del tubo ensayado, con una curva σ - \mathcal{E} como la de la Figura 15, por eso son aplicables las ecuaciones (1) a (3).

5.2 Modelo matemático para calcular M_f en función del radio de curvatura

En la Figura 18 se muestra un cuarto de la sección del tubo estudiado, dividida en 30 elementos de igual área A_o para el cálculo del momento flexor M_f en función del radio de curvatura ρ mediante el valor medio de \mathcal{E} correspondiente a cada elemento i , calculado con la relación:

$$\mathcal{E}_i = Y_i / \rho \quad (4)$$

Y_i es la coordenada del baricentro de cada elemento respecto del eje neutro. Esta relación se deduce de la hipótesis de que las secciones siempre permanecen planas. Con $\sigma_i = f(\mathcal{E}_i)$ multiplicada por A_o y por Y_i se obtiene el momento M_i que aporta cada elemento i , luego el momento flexor M_f se obtiene con la suma de todos los momentos M_i . Para simplificar el cálculo se sacó A_o como factor común, que luego multiplica a la suma de los productos $Y_i \cdot \sigma_i$ de un cuarto de sección, multiplicando eso por 4 se obtiene el momento flexor M_f total.

$$A_o = A_{\text{sección}} / (4 \times 30) = \pi (R^2 - r^2) / 120 = 11,958472 \text{ mm}^2 \quad (5)$$

Para que todos los elementos tengan el mismo valor de área A_o , el radio r_o del círculo que separa las 2 capas se calcula con la Ecuación (6):

$$r_o = ((R^2 + r^2) / 2)^{0,5} \quad (6)$$

Para determinar las distancias radiales R_1 y R_2 de los baricentros de los elementos de las capas 1 y 2 se calcula la ubicación del baricentro de un elemento de cada capa utilizando la ecuación correspondiente, para un sector de sección circular hueca, de [6] Tabla A.1 caso 21 (Figura 19). Denominamos Θ_i al ángulo formado entre el eje horizontal y un segmento que une el baricentro del elemento i con el baricentro de la sección del tubo. R_1 es la longitud del segmento en la capa 1 y R_2 en la capa 2. Las coordenadas Y_i se calculan con las Ecuaciones (7) y (8):

$$\text{En la capa 1: } Y_i = R_1 \cdot \text{sen } \Theta_i \quad (7)$$

$$\text{En la capa 2: } Y_i = R_2 \cdot \text{sen } \Theta_i \quad (8)$$

Se puede utilizar una hoja de cálculo para determinar la relación entre el momento flexor M_f y el radio de curvatura ρ , con un archivo para cada valor de ρ . Se calculan R_1 y R_2 . Para cada elemento i se calcula: su ángulo Θ_i ($\Delta\Theta = 6^\circ = 0,1047198$ radianes), Y_i con las Ecuaciones (7) u (8), \mathcal{E}_i con

la Ecuación (4), se determina σ_i , se realiza el producto $\sigma_i \cdot Y_i$, se suman los productos $\sigma_i \cdot Y_i$, esta suma se multiplica por A_0 y por 4, este resultado es el momento flexor Mf para ese radio ρ . En la Figura 20 se muestra como ejemplo la hoja de cálculo para radio $\rho = 3,273$ m. Para definir cada valor de σ_i se utilizó la correspondiente Ecuación (1), (2) o (3), según cada valor de \mathcal{E}_i . Se calculó Mf para 16 valores de ρ , se presentan en la Tabla 1 ($Rc = \rho$). En la Figura 21 se muestra la curva de la relación entre Mf y $1/\rho$ trazada con los valores de la Tabla 1.

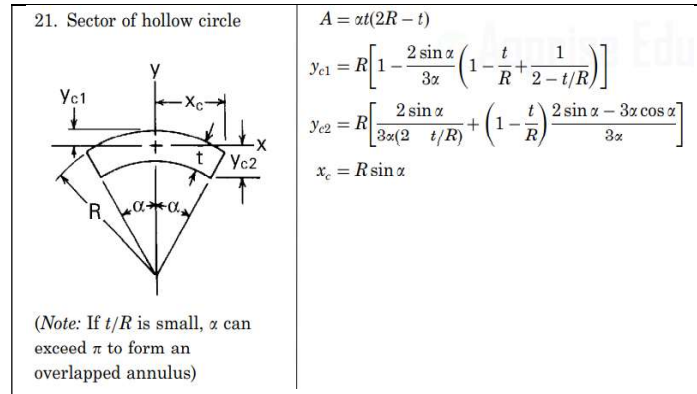
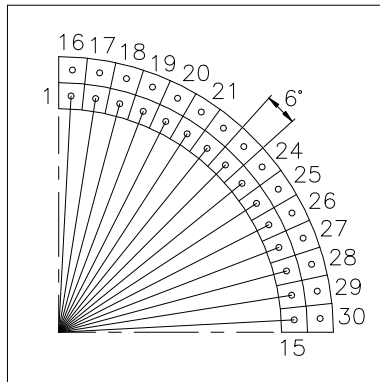


Figura 18: Un cuarto de sección Figura 19: Cálculo ubicación baricentro de elemento

5.3 Validación de la discretización con cálculos exactos clásicos en período elástico

Para el tubo del ejemplo se puede calcular el momento flexor M_y que causa el inicio de tensiones de fluencia, en las fibras más alejadas al eje neutro, con la relación exacta clásica:

$$M_y = F_y \cdot W_x = 412 \text{ [N/mm}^2] \times 21,741435 \text{ [cm}^3] = 8957,47122 \text{ [Nm]} \quad (9)$$

De [7] pág. 137 se obtiene la ecuación exacta clásica que relaciona Mf con ρ :

$$\rho = E \cdot J_x / Mf = 200000 \text{ [N/mm}^2] \times 79,46495 \text{ [cm}^4] / 8957,47122 \text{ [Nm]} = 17,743 \text{ [m]} \quad (10)$$

En la Tabla 1 a este valor de ρ le corresponde un Mf de 8941,11 [Nm], el error relativo ϵ es:

$$\Delta Mf = (8941,11 - 8957,47) \text{ [Nm]} = -16,36 \text{ [Nm]}$$

$$\epsilon = \Delta Mf / Mf = -16,36 / 8957,47 = -0,00183 = -0,183 \% \quad (11)$$

Es un error pequeño para cálculos de estructuras, entonces la discretización realizada es aceptable para el período elástico. Luego en el período plástico es conveniente validar el método con un ensayo experimental, porque la relación entre σ y \mathcal{E} no es un valor constante, y la ecuación (10) no es aplicable. Se realizó un ensayo de flexión pura a una barra, de longitud 4 m, formada por el mismo tubo ($D=26,8$ e=2,53) del cual se extrajeron las probetas, la diferencia entre los radios de curvatura medidos y calculados con este método resultó menor a 3%.

6. Aplicación de datos de Tabla 1 en cálculos de diseño de ROPS según SAE J1194

Inicio con la Etapa 1: la energía E_{ir} se calcula según lo explicado en la Sección 1.3.

Se debe optar por un diseño (Figuras 10 u 11). En la vista lateral se traza el diagrama de momentos flexores Mf causado por la carga desde atrás, cuyo valor máximo inicialmente no se conoce. Para comenzar se puede suponer que en cada columna actúa la mitad de la carga desde atrás. Se puede iterar con incrementos de carga del 10% de la carga que inicia la fluencia. En cada columna se obtiene un diagrama Mf para cada valor de carga. Se divide una columna en varios tramos (4 o 5). Comenzando con la primera carga, en las secciones centrales de cada tramo se conoce el Mf , de la Tabla 1 se obtiene el radio de curvatura ρ para cada sección, para cada tramo se trazan arcos, con ese radio, tangentes entre sí en sus extremos, se obtiene la curva de deformación de esa columna: en su punto superior se conoce la deflexión para esa carga. Se repite el proceso, con varios pares de valores carga-deflexión se traza una curva como en la Figura 7, el área bajo la curva es la energía puesta en juego. Para completar el estudio se puede consultar [3] y [8] a [10].

Flexión elástico-plástica de tubo de sección circular					20,5,2021
Dimensiones:		R = 36.55	r = 29.65		
Cantidad de elementos en un cuarto de sección:			30	(2 x 15)	
Distancia radial de baricentros de capa 1 y capa 2:					
R1 = 31.48515		R2 = 34.92422			radianes:
Ángulo abarcado por cada elemento:			90/15 = 6 grados = 0.10472		
Área de cada elemento:			Ao = 11.95847	mm ²	
Radio de curvatura en baricentro de sección del tubo			3273	mm	
Ángulo [rad]	Yi [mm]	épsilon	Sigma	Sigma.Yi	
1	1.5184364	31.442	0.009606	412	12954.1
2	1.4137166	31.09752	0.009501	412	12812.18
3	1.3089968	30.41232	0.009292	412	12529.88
4	1.204277	29.39392	0.008981	412	12110.29
5	1.0995572	28.05347	0.008571	412	11558.03
6	0.9948374	26.40566	0.008068	412	10879.13
7	0.8901176	24.46855	0.007476	412	10081.04
8	0.7853978	22.26335	0.006802	412	9172.502
9	0.680678	19.81424	0.006054	412	8163.466
10	0.5759582	17.14803	0.005239	412	7064.988
11	0.4712384	14.29395	0.004367	412	5889.105
12	0.3665186	11.28325	0.003447	412	4648.7
13	0.2617988	8.148939	0.00249	412	3357.363
14	0.157079	4.925343	0.001505	300.9681	1482.371
15	0.0523592	1.647784	0.000503	100.6895	165.9146
16	1.5184364	34.87636	0.010656	412.8842	14399.9
17	1.4137166	34.49424	0.010539	412.7267	14236.7
18	1.3089968	33.7342	0.010307	412.4137	13912.45
19	1.204277	32.60457	0.009962	412	13433.08
20	1.0995572	31.1177	0.009507	412	12820.49
21	0.9948374	29.28991	0.008949	412	12067.44
22	0.8901176	27.14121	0.008292	412	11182.18
23	0.7853978	24.69514	0.007545	412	10174.4
24	0.680678	21.97851	0.006715	412	9055.147
25	0.5759582	19.02108	0.005812	412	7836.685
26	0.4712384	15.85525	0.004844	412	6532.362
27	0.3665186	12.5157	0.003824	412	5156.47
28	0.2617988	9.039033	0.002762	412	3724.082
29	0.157079	5.46333	0.001669	333.8423	1823.891
30	0.0523592	1.827769	0.000558	111.6877	204.1393
Sumatoria de (Sigma.Yi) =				259428.5	[N/mm]
Mf = 4.Ao.(Sumatoria de Sigma.Yi)/1000 =				12409.47	[Nm]
Mf = Momento flexor que provoca el radio de curvatura de la barra					

Figura 20: Una página de hoja de cálculo como ejemplo con radio de curvatura 3273 mm Tubo de acero ASTM A-53 (σ - ϵ según Figura 15) y dimensiones [mm]: D= 73,1 e=6,9

Rc [m]	1/Rc [1/m]	Mf [kNm]	Rc [m]	1/Rc [1/m]	Mf [kNm]
∞	0	0	8,183	0,122	11,937
27,276	0,03666	5,816	5,455	0,183	12,257
19,093	0,05238	8,309	4,091	0,244	12,366
17,710	0,05646	8,958	3,273	0,306	12,409
17,702	0,05649	8,962	3,183	0,314	12,417
16,365	0,06111	9,654	2,455	0,407	12,524
13,638	0,07332	10,769	1,637	0,611	12,731
10,910	0,09166	11,462	0,818	1,222	13,387

Tabla 1: Relación calculada entre el momento flexor M_f y el radio de curvatura R_c . ($R_c = \rho$)

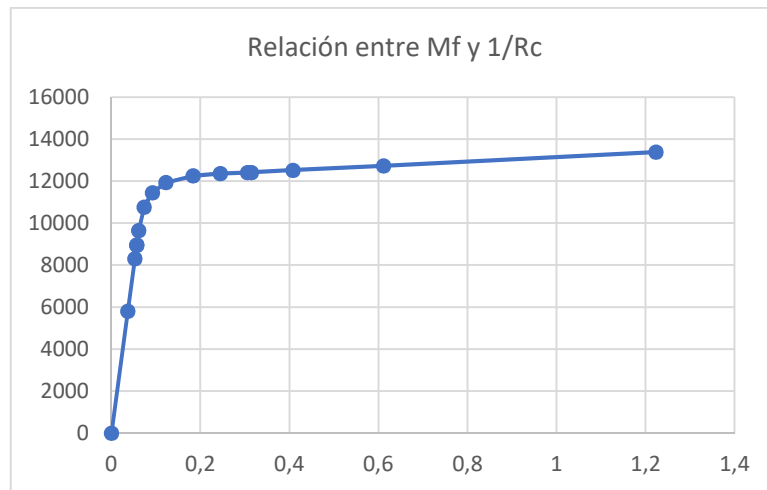


Figura 21: Relación entre M_f [Nm] y $1/R_c$ [1/m]. ($R_c = \rho$) Tubo $D=73,1$ $e=6,9$ ASTM A-53

7. Referencias:

- [1] SAE. *Construction, Agricultural, and Off-Road Machinery Standards Manual SAE HS-2800, 1996 Edition*. Society of Automotive Engineers Inc., USA, 1996.
- [2] Feodosiev, V.I. (1980). *Resistencia de materiales*. Moscú. Segunda edición. Editorial Mir. Impreso en Rusia.
- [3] McCormac J.C., Csernak S.F. *Diseño de Estructuras de Acero Método LRFD, Quinta Edición*. Alfaomega, México, 2013.
- [4] ASTM A 53/A 53M – 99b. Standard Specification for Pipe, Steel, Black and Hot-Dipped, Zinc-Coated, Welded and Seamless. American Society for Testing and Materials. 1999.
- [5] ASM International edited by Moosbrugger Ch. *Atlas of Stress-Strain Curves, Second Edition First Printing*. ASM International, USA, 2002.
- [6] Young W., Budynas R. *Roark's Formulas for Stress and Strain, Seventh Edition*. McGraw-Hill, USA, 2002.
- [7] Verein Deutscher Eisenhüttenleute (Asociación de trabajadores del hierro alemanes). *El acero en la construcción*. Editorial Reverté, España, 1980.
- [8] Norton R.L. *Diseño de máquinas*. Prentice Hall, México, 1999.
- [9] Mirassou Horacio M., "Diseño y dimensionamiento de estructuras de protección contra vuelco (ROPS) para tractores agrícolas", 3º Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica CAIM 2012, Buenos Aires Argentina, (2012), E-Book ISBN 978-987-1978-08-3,
- [10] Mirassou Horacio M., "Flexión elástico-plástica de tubos de sección circular utilizados en estructuras de protección contra vuelco de vehículos", 2do Congreso sobre Medios de Transporte y sus Tecnologías Asociadas, General Pacheco Argentina, (2019), libro digital pdf, Edutecne, ISBN 978-987-4998-39-2.