



FoDAMI

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE ALGUNOS CASOS DE INESTABILIDAD ELÁSTICA DE VIGAS ESBELTAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

Mirassou Horacio Martín, Cazzola Gustavo José, Santelli José

Departamento de Ingeniería Mecánica – UTN Facultad Regional General Pacheco
Hipólito Yrigoyen 288, General Pacheco (B1617FRP), Buenos Aires, Argentina
correo-e: hmirassou@docentes.frgp.utn.edu.ar , hmirassou@yahoo.com

RESUMEN

Algunas estructuras que forman parte de máquinas o sistemas mecánicos pueden incluir vigas esbeltas, las cuales pueden fallar por pérdida de la estabilidad elástica causada por esfuerzos de flexión, a veces combinados con otros tipos de esfuerzos (torsión, compresión, etc.). En este trabajo se exponen resultados del estudio de algunos casos ejemplos de flexión pura actuante en el plano vertical aplicada a vigas esbeltas rectas de sección rectangular constante con relaciones de altura/base entre 5,9 y 11,8, y relaciones entre longitud entre apoyos y altura de la sección entre 25,8 y 50,1, de material acero de bajo contenido de carbono. En primer lugar se presenta el estudio teórico basado en publicaciones de autores clásicos como Timoshenko, Den Hartog, Roark y otros, para calcular el valor del momento flexor crítico que provoca la inestabilidad elástica. Se comparan los valores resultantes de utilizar las ecuaciones presentadas por los distintos autores. Por otro lado se exponen resultados de la verificación experimental de los casos estudiados, realizada mediante un montaje con un dispositivo diseñado para ese fin. Las vigas reales ensayadas consisten en tramos de planchuelas comerciales de uso posible en algunas estructuras mecánicas o industriales. Se midieron las deflexiones elásticas verticales y horizontales transversales causadas por momentos flexores de varios valores distintos. Se presenta la comparación de esos valores con los momentos flexores críticos calculados. Dado que las vigas ensayadas no son perfectas, ocurren importantes deflexiones elásticas transversales cuando los momentos flexores son menores a los momentos críticos calculados. Objetivos de este trabajo: presentar casos con evidencia empírica útil para el diseñador y calculista de estructuras que incluyan vigas esbeltas semejantes, y mostrar la posibilidad de utilizar esos casos como material didáctico en la enseñanza en ingeniería de estos temas, considerando que el dispositivo utilizado es relativamente económico y fácil de replicar.

Palabras Clave: Inestabilidad elástica, Pandeo, Flexión, Vigas.



Convocatoria de trabajos producción 2021

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

1. INTRODUCCIÓN

En el Plan de Estudio vigente de Ingeniería Mecánica de UTN se incluye el tema Inestabilidad Elástica (pandeo) de barras rectas de sección constante, de material isótropo y homogéneo, con modulo de elasticidad longitudinal constante, sometidas a una carga axial. No está incluido, por ahora, el estudio de la inestabilidad elástica de vigas. Se asume que el estudiante o egresado que entendió el tema pandeo de barras sometidas a carga axial podrá aprender por sí mismo el tema inestabilidad elástica de vigas consultando la bibliografía correspondiente, como la citada en este trabajo, cuando en su labor profesional deba analizar o dimensionar vigas de modo de garantizar que no ocurra inestabilidad elástica por flexión. Los autores clásicos como Timoshenko, Roark, Den Hartog, y otros, exponen las ecuaciones para calcular los momentos flexores críticos, considerando como hipótesis de cálculo que el material de la viga y sus características geométricas son perfectos. Pero las vigas reales no son perfectas, de modo que los momentos flexores que causan inestabilidad elástica (los denominamos momentos de pandeo) son menores a los momentos críticos calculados. La diferencia entre ambos valores, que puede expresarse como un porcentaje, dependerá de cuánto se aparta de la perfección la forma geométrica de la viga real y su material.

2. ECUACIONES PARA CALCULAR EL MOMENTO CRÍTICO SEGÚN DISTINTOS AUTORES

2.1 Ecuación según Den Hartog

En la Figura 1 (tomada de [1] pág. 283) se muestra el esquema de una viga esbelta de sección rectangular sometida a flexión pura (M_0) con extremos simplemente apoyados y con guías planas verticales que impiden su giro lateral. M_0 está aplicado en el plano vertical. De ese modo pueden ocurrir las deformaciones elásticas representadas en las vistas en planta y de la sección transversal. Notación: t = espesor de la sección, h = altura de la sección, L = longitud de la viga.

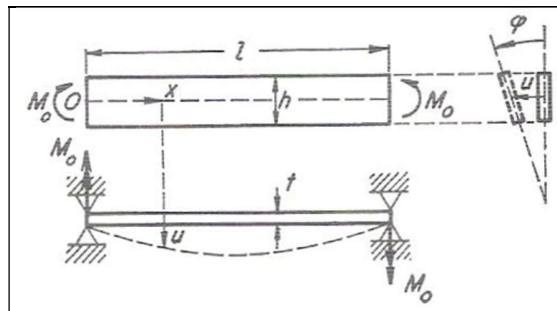


Figura 1: Esquema de viga esbelta de sección rectangular sometida a flexión pura

Para esta hipótesis de cálculo, el momento flexor crítico M_{CR} puede calcularse con la Ecuación (1), que es la ecuación (150) de [1] pág. 285.

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

$$M_{CR} = (\pi/L) (E I_F C)^{0.5} \quad (1)$$

Donde: E = módulo de elasticidad longitudinal del material de la viga

$$I_F = (h t^3) / 12 = \text{momento de inercia de la sección respecto del eje vertical baricéntrico} \quad (2)$$

$$\pi = 3,141592654$$

$$C = G (h t^3) / 3 = \text{rigidez torsional de la sección} \quad (3)$$

G = módulo de elasticidad transversal del material de la viga

Las Ecuaciones (2) y (3) se definen en el texto de la pág. 284 de [1]. Reemplazando (2) y (3) en (1) se obtiene la Ecuación (4):

$$M_{CR} = (\pi/L) [E G (h t^3) (h t^3) / 36]^{0.5} = (\pi/L) (h/6) t^3 (E G)^{0.5} \quad (4)$$

2.2 Ecuación según Timoshenko

Para una hipótesis de cálculo igual a la planteada en la Subsección 2.1, y con las mismas variables, de [2] pág. 250 se obtiene la Ecuación (5), que es igual a la Ecuación (4):

$$M_{CR} = \pm (\pi/L) (h/6) t^3 (E G)^{0.5} \quad (5)$$

2.3 Ecuación según Chen y Lui

Para una hipótesis de cálculo igual a la planteada en la Subsección 2.1, y con las mismas variables, de [3] pág. 321 ecuación (5.4.16), se obtiene la Ecuación (6):

$$M_{CR} = (\pi/L) (E I_Y G J)^{0.5} \quad (6)$$

Donde: $I_Y = (h t^3) / 12 = \text{momento de inercia de la sección respecto del eje vertical baricéntrico} \quad (7)$

$$J = (h t^3) / 3 = \text{característica geométrica de la rigidez torsional de la sección} \quad (8)$$

Las Ecuaciones (7) y (8) se definen en [3] págs. XV, XVI, 310 y 318. Reemplazando (7) y (8) en (6) se obtiene la Ecuación (9), que es igual a la Ecuación (4):

$$M_{CR} = (\pi/L) [E G (h t^3) (h t^3) / 36]^{0.5} = (\pi/L) (h/6) t^3 (E G)^{0.5} \quad (9)$$

2.4 Ecuación según Roark y Young

Para una hipótesis de cálculo igual a la planteada en la Subsección 2.1, y con las mismas variables, de [4] pág. 728 Tabla 15.1 Caso 11 primera ecuación, se obtiene la Ecuación (10), que también es igual a la primera ecuación del Caso 11 de la Tabla 34 pág. 544 de [5]. La Ecuación (10) es semejante a la Ecuación (4), la diferencia está en que se agrega un factor que considera la relación entre t y h .

$$M_{CR} = (\pi/L) (h/6) t^3 (E G)^{0.5} (1 - 0,63 t/h)^{0.5} \quad (10)$$

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

2.5 Ecuación según Simitses y Hodges

Para una hipótesis de cálculo igual a la planteada en la Subsección 2.1, y con las mismas variables, de [6] pág. 251 se obtienen las Ecuaciones (11) y (12).

$$M_{CR} = \pm (\pi/L) (E I_2 G J)^{0.5} / B^{0.5} \quad (11)$$

Donde: $B = (1 - (G J) / (E I_3)) (1 - I_2 / I_3) \quad (12)$

$$J = (h t^3) / 3 \quad (13)$$

$$I_2 = (h t^3) / 12 \quad (14)$$

$$I_3 = (t h^3) / 12 \quad (15)$$

Las Ecuaciones (13), (14) y (15) se definen en [6] págs. 90 y 252. El numerador de la Ecuación (11) es igual a la Ecuación (6), de la cual se deduce la Ecuación (9), que es igual a la Ecuación (4). El denominador de la Ecuación (11) se calcula utilizando las Ecuaciones (12), (13), (14) y (15). En las vigas esbeltas en las que se cumple: $(G J) \ll (E I_3)$, $I_2 \ll I_3 \Rightarrow$ el valor de $B^{0.5}$ es ligeramente menor a 1 y tiende a 1. En esos casos en cálculos de ingeniería una hipótesis simplificada conservadora consiste en adoptar el valor: $B^{0.5} = 1$. De ese modo el resultado de la Ecuación (11) será el mismo que el de las Ecuaciones (6), (9) o (4).

3. CÁLCULOS DEL MOMENTO CRÍTICO EN ALGUNOS CASOS DE VIGAS ESBELTAS

En todos los casos estudiados las vigas están formadas por planchuelas de material acero de bajo contenido de carbono. Los valores de E y G para ese material dados en [3] pág. XVI son:

$$(E = 29.000 \text{ ksi} = 199.948 \text{ MPa} ; G = 11.200 \text{ ksi} = 77.221 \text{ MPa}) \Rightarrow (E G)^{0.5} = 124.259 \text{ MPa}$$

En [5] pág. 607 se dan estos valores (acero estructural con tensión de fluencia 33 ksi = 228 MPa):

$$(E = 29.000 \text{ ksi} = 199.948 \text{ MPa} ; G = 11.500 \text{ ksi} = 79.290 \text{ MPa}) \Rightarrow (E G)^{0.5} = 125.912 \text{ MPa}$$

En las subsecciones 3.1 y 3.3 se calcula M_{CR} con el valor promedio de G : $(E G)^{0.5} = 125.088 \text{ MPa}$

En las subsecciones 3.2 y 3.4 se calcula M_{CR} con el menor valor de G : $(E G)^{0.5} = 124.259 \text{ MPa}$

3.1 Primer caso estudiado considerando el valor promedio de G

Viga vinculada y cargada del modo representado en la Figura 1. Dimensiones reales medidas:

$$t = 3,2 \text{ mm} ; h = 37,8 \text{ mm} ; L = 977 \text{ mm} ; W_x = (t h^2) / 6 = 762,05 \text{ mm}^3 ; (\text{nominal: } 1/8" \times 1-1/2")$$

Momento crítico calculado con ecuaciones presentadas por Den Hartog, Timoshenko, Chen y Lui:

$$\boxed{M_{CR} = 83,02 \text{ Nm}} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.350 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con la ecuación presentada por Roark y Young:

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

$$M_{CR} = 80,80 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.350 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con las ecuaciones presentadas por Simitses y Hodges:

$$M_{CR} = 83,80 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.350 \text{ ksi})$$

3.2 Primer caso estudiado considerando el menor valor encontrado de G

Momento crítico calculado con ecuaciones presentadas por Den Hartog, Timoshenko, Chen y Lui:

$$M_{CR} = 82,48 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.200 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con la ecuación presentada por Roark y Young:

$$M_{CR} = 80,25 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.200 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con las ecuaciones presentadas por Simitses y Hodges:

$$M_{CR} = 83,24 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.200 \text{ ksi})$$

3.3 Segundo caso estudiado considerando el valor promedio de G

Viga vinculada y cargada del modo representado en la Figura 1. Dimensiones reales medidas:

$$t = 3,3 \text{ mm} ; h = 19,5 \text{ mm} ; L = 977 \text{ mm} ; W_x = (t h^2) / 6 = 209,13 \text{ mm}^3 ; (\text{nominal: } 1/8" \times 3/4")$$

Momento crítico calculado con ecuaciones presentadas por Den Hartog, Timoshenko, Chen y Lui:

$$M_{CR} = 46,73 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.350 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con la ecuación presentada por Roark y Young:

$$M_{CR} = 44,16 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.350 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con las ecuaciones presentada por Simitses y Hodges:

$$M_{CR} = 48,53 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.350 \text{ ksi})$$

3.4 Segundo caso estudiado considerando el menor valor encontrado de G

Momento crítico calculado con ecuaciones presentadas por Den Hartog, Timoshenko, Chen y Lui:

$$M_{CR} = 46,43 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.200 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con la ecuación presentada por Roark y Young:

$$M_{CR} = 43,87 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.200 \text{ ksi})$$

Momento crítico calculado con las ecuaciones presentada por Simitses y Hodges:

$$M_{CR} = 48,21 \text{ Nm} \quad (\text{para el cálculo se consideró: } E = 29.000 \text{ ksi} ; G = 11.200 \text{ ksi})$$

3.5 Momentos flexores de inicio de fluencia considerando una tensión de fluencia de 210 MPa

$$M_{FL} = W_x \cdot \sigma_{FL} ; \text{ Primer caso: } M_{FL} = 160,0 \text{ Nm} ; \text{ Segundo caso: } M_{FL} = 43,9 \text{ Nm}$$

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

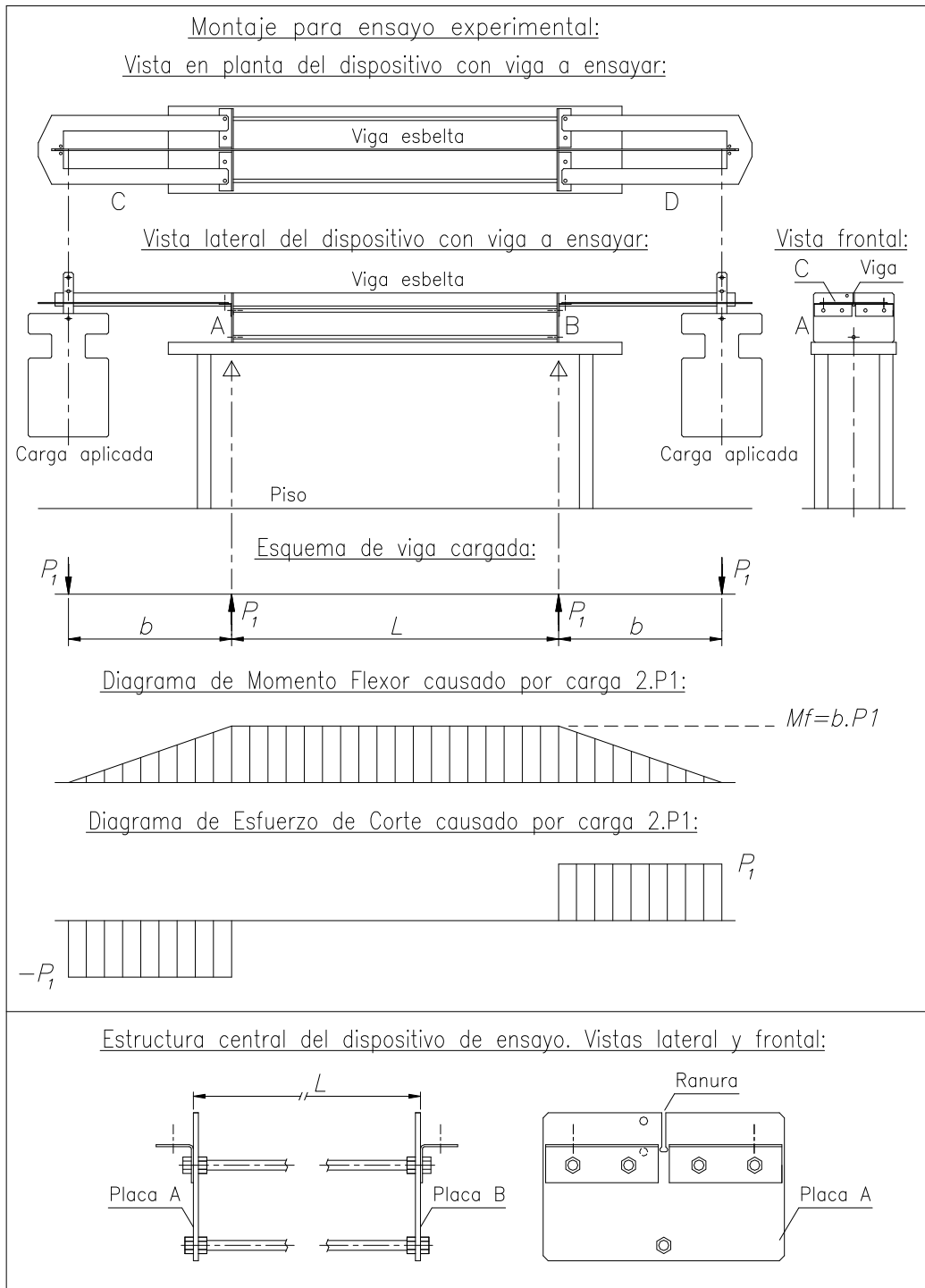


Figura 2: Esquema del montaje para ensayo experimental

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021



Figura 3: Fotografía del montaje para ensayo experimental

4. ENSAYO EXPERIMENTAL

Se diseñó y fabricó un dispositivo para ensayar las vigas de los casos presentados en la Sección 3. En la Figuras 2 y 3 se exponen un esquema y una fotografía del montaje realizado.

En la parte superior de la Figura 2 se muestran las vistas en planta, lateral y frontal del conjunto dispositivo de ensayo con accesorios y la viga esbelta simplemente apoyada y ubicada en las ranuras de profundidad 38 mm de las placas A y B, las cuales están vinculadas entre sí mediante tres barras roscadas y doce tuercas (R.W. 3/8"). Eso también se muestra en la parte inferior de la Figura 2: las vistas lateral y frontal de la estructura central del dispositivo están trazadas en una escala tres veces mayor que en la parte superior de la figura. Las cargas P_1 se obtienen adicionando pesas.

Se diseñó la viga esbelta con extremos de longitud adecuada para obtener un momento flexor M_f , constante en todo el tramo central de longitud L , causado por las cargas P_1 ubicadas a una distancia b de las caras externas de las placas de apoyo A y B. Con esta configuración el esfuerzo de corte causado por las cargas P_1 es nulo en todo el tramo central de longitud L .

Las vigas esbeltas están formadas por tramos de planchuelas comerciales cortados en longitudes de aprox. 2m. Dado que la longitud original de una planchuela es de aprox. 6m, se obtuvieron tres tramos de cada una. La longitud de cada barra roscada comercial utilizada en el dispositivo es de aprox. 1m, por eso la distancia entre las caras externas de las placas A y B resultó en 977 mm.

Se consideró ese valor como longitud L en la Sección 3 para los cálculos de los momentos flexores críticos M_{CR} . Es una hipótesis conservadora considerar como longitud L a la distancia entre las caras externas de las placas A y B, en lugar de la distancia entre las caras internas o la distancia entre centros de las placas, dado que el valor de M_{CR} es inversamente proporcional a la longitud L .

Por otro lado cuando se aplican las cargas P_1 la viga experimenta deflexiones elásticas verticales y queda apoyada en las aristas exteriores de los fondos de las ranuras de las placas A y B, entonces corresponde considerar una longitud entre apoyos L de 977 mm para el cálculo de esas deflexiones. Para ese cálculo se utilizaron las Ecuaciones (16) y (17) tomadas de [7] pág. 1109 caso 7. Se adaptó la notación a la utilizada en este trabajo según el esquema de la Figura 2.

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

$$f = (P_1 b L^2) / (8 E J_x) \quad (16)$$

$$f_1 = (P_1 b^2 (b + 1,5 L)) / (3 E J_x) \quad (17)$$

Donde: $J_x = (t h^3) / 12 \quad (18)$

f = flecha vertical hacia arriba en el centro de la longitud L

f_1 = flecha vertical hacia abajo en los puntos de aplicación de cada carga P_1

Con las dimensiones reales y la Ecuación (18) se obtiene:

Primer caso: $J_x = 1,44027 \text{ cm}^4$; Segundo caso: $J_x = 0,20391 \text{ cm}^4$

Las flechas causadas por los pesos propios de las vigas son muy pequeñas, en comparación con las causadas por las cargas P_1 , y se pueden calcular con las ecuaciones de [7] pág. 1109 caso 9. Con un peso propio de 18,24 N en el Primer caso y 9,87 N en el Segundo, y una longitud total de 2,007 m en ambos, las flechas correspondientes son: Primer caso: $f = 0,013 \text{ mm}$, $f_E = 0,070 \text{ mm}$ Segundo caso: $f = 0,048 \text{ mm}$, $f_E = 0,267 \text{ mm}$; f_E es la flecha en los extremos de cada viga.

También los momentos flexores causados por los pesos propios de las vigas son muy pequeños en comparación con los causados por las cargas P_1 .

Con los datos: $L = 97,7 \text{ cm}$, $E = 19.994.800 \text{ N/cm}^2$, y las Ecuaciones (16) y (17) se obtienen las Ecuaciones (19) y (20) para el Primer caso, y las Ecuaciones (21) y (22) para el Segundo caso.

$$f = (P_1 b) / (24.135,8078 \text{ N}) \quad (19)$$

$$f_1 = (P_1 b^2 (b + 146,55 \text{ cm})) / (86.393.731,79 \text{ N} \cdot \text{cm}^2) \quad (20)$$

$$f = (P_1 b) / (3.417,0902 \text{ N}) \quad (21)$$

$$f_1 = (P_1 b^2 (b + 146,55 \text{ cm})) / (12.231.419 \text{ N} \cdot \text{cm}^2) \quad (22)$$

De la Figura 2 se deduce la Ecuación (23) para calcular M_f en todo el tramo central de longitud L :

$$M_f = b \cdot P_1 \quad (23)$$

En el dispositivo de ensayo las placas C y D tienen ranuras para guiar los extremos de la viga de longitud aprox. 2m, para evitar desplazamientos laterales al aplicar las cargas P_1 . Las placas C y D descargan una parte de su peso en los extremos de la viga, mediante dos accesorios formados por un par de pequeños tornillos y un pequeño travesaño en cada uno, causando un momento flexor que puede calcularse con la Ecuación (23). Para eso se midió, antes de armar el conjunto, la fuerza que cada placa descarga en el extremo que se apoya en la viga, y el peso de los accesorios. La fuerza total aplicada de ese modo en cada extremo de la viga resultó valer 12,405 N con una distancia b de 0,507 m, entonces el momento flexor M_f correspondiente es 6,29 Nm.

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

El peso propio de un extremo de viga de longitud 0,515 m es 4,68 N en el Primer caso y 2,53 N en el Segundo, eso causa un M_f en cada apoyo de la viga (en las placas A y B) de valor 1,205 Nm en el Primer caso y 0,65 Nm en el Segundo. Por lo tanto el momento flexor M_f inicial en los apoyos A y B es la suma de esos valores: 7,495 Nm en el Primer caso y 6,94 Nm en el Segundo.

A estos valores se sumaron luego durante los ensayos los momentos flexores M_f causados por las cargas adicionales P_1 ubicadas en posiciones con otros valores de b .

Las flechas f y f_1 causadas por la fuerza que cada placa C y D descarga en el extremo que se apoya en la viga y el peso de los accesorios se pueden calcular con las Ecuaciones (19), (20), (21) y (22) con una distancia b de 0,507 m, valor muy cercano a la longitud de cada extremo de viga (0,515 m), por eso las flechas f_E en los extremos de vigas resultan aproximadamente iguales a estas flechas f_1 . En el período elástico del material se pueden superponer efectos, las flechas resultantes sumando las causadas por el peso propio de cada viga con las debidas al apoyo de las placas C y D son:

Primer caso: $f = 0,274$ mm , $f_E = 0,798$ mm , Segundo caso: $f = 1,889$ mm , $f_E = 5,409$ mm.

4.1 Ensayo del Primer caso estudiado

La viga de longitud 2,007 m y sección 3,2 x 37,8 mm (nominal 1/8" x 1-1/2") se ubicó en las ranuras de ancho 4,5 mm de las placas A y B, se eliminó el huelgo con cartones de espesor aprox. 1,3 mm. Se aplicaron cargas P_1 en posiciones con diferentes distancias b . Se midieron las deflexiones horizontales tomando como referencia un alambre estirado, semejante a cuerda de piano, que pasa por orificios en las placas A y B (orificios ubicados a una misma distancia de las ranuras). Las deflexiones verticales se midieron con referencia a una regla apoyada sobre las placas A y B.

Se compara cada M_f aplicado con el menor valor de M_{CR} calculado en la Sección 3: $M_{CR} = 80,25$ Nm.

A los M_f calculados con la Ecuación (23) se les suma el M_f inicial (7,495 Nm) calculado arriba.

Δz = desplazamiento lateral de una sección de la viga. Cargas aplicadas (en varios minutos c/u):

a) $P_1 = 113,44$ N , $b = 0,24$ m $\Rightarrow M_f = (113,44 \times 0,24 + 7,495)$ Nm = 34,72 Nm (43 % de M_{CR})

No se detectan desplazamientos laterales de la viga en el tramo central de longitud L .

b) $P_1 = 113,44$ N , $b = 0,36$ m $\Rightarrow M_f = (113,44 \times 0,36 + 7,495)$ Nm = 48,33 Nm (60 % de M_{CR})

$\Delta z = 1$ mm , en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

c) $P_1 = 113,44$ N , $b = 0,435$ m $\Rightarrow M_f = (113,44 \times 0,435 + 7,495)$ Nm = 56,84 Nm (71 % de M_{CR})

$\Delta z = 1$ mm , en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

$\Delta z = 2$ mm , en una sección ubicada a 0,215 m de la cara exterior de la placa B

d) $P_1 = 113,44$ N , $b = 0,48$ m $\Rightarrow M_f = (113,44 \times 0,48 + 7,495)$ Nm = 61,95 Nm (77 % de M_{CR})

$\Delta z = 3$ mm , en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

$\Delta z = 4$ mm , en secciones ubicadas entre 0,23 y 0,26 m de la cara exterior de la placa A

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

e) $P_1 = 146,89 \text{ N}$, $b = 0,48 \text{ m} \Rightarrow Mf = (146,89 \times 0,48 + 7,495) \text{ Nm} = 78,00 \text{ Nm}$ (97 % de M_{CR})

$\Delta z = 4,5 \text{ mm}$, en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

$\Delta z = 5 \text{ mm}$, en secciones a 0,25 m de cara exterior de placa A y 0,31 m de exterior de placa B

La viga permaneció en equilibrio durante el tiempo de aplicación de esta carga y de las anteriores.

Al desarmar el conjunto, en la viga no se detectaron a simple vista deformaciones permanentes.

Los momentos Mf fueron calculados para las secciones en los apoyos A y B, en la sección central de la viga Mf es un poco menor, con decremento 1,084 Nm (en todo el ensayo del Primer caso), porque el peso propio de la viga es una carga distribuida uniforme en toda su longitud de 2,007 m.

Cálculo de las flechas f y f_1 causadas por las cargas: $P_1 = 146,89 \text{ N}$, con: $b = 48 \text{ cm}$, utilizando las Ecuaciones (19) y (20): $f = 2,92 \text{ mm}$, $f_1 = 7,621 \text{ mm}$.

A estos valores se deben sumar las flechas iniciales, causadas por el peso propio y el apoyo de las placas C y D (calculadas en la página anterior). En la sección central se pueden sumar directamente:

$f = (2,92 + 0,274) \text{ mm} = 3,194 \text{ mm} \Rightarrow f \approx 3,2 \text{ mm}$

En los extremos de la viga la flecha inicial f_E se definió para una distancia $b = 51,5 \text{ cm}$, mientras que f_1 se calculó arriba para P_1 con $b = 48 \text{ cm}$. El valor de f_{1P} causado por peso propio y apoyos de placas C y D puede estimarse aprox. por interpolación lineal: $f_{1P} = 0,798 \text{ mm} \times (48 / 51,5) = 0,744 \text{ mm}$.

Sumando este valor al f_1 de P_1 se obtiene: $f_1 = (7,621 + 0,744) \text{ mm} = 8,365 \text{ mm} \Rightarrow f_1 \approx 8,4 \text{ mm}$

Las flechas reales se midieron con una regla cuya menor división de escala es 1 mm, se obtuvo:

$f \approx 3 \text{ mm}$, $f_1 \approx 8 \text{ mm}$, las diferencias son: menor a 6,3 % para f y menor a 4,8 % para f_1 .

4.2 Ensayo del Segundo caso estudiado

La viga de longitud 2,007 m y sección 3,3 x 19,5 mm (nominal 1/8" x 3/4") se ubicó en las ranuras de ancho 4,5 mm de las placas A y B, se eliminó el huelgo con cartones de espesor aprox. 1,2 mm.

Se aplicaron cargas P_1 en posiciones con diferentes distancias b . Se midieron las deflexiones horizontales y verticales del mismo modo que en el ensayo del Primer caso.

Se compara cada Mf aplicado con el menor valor de M_{CR} calculado en la Sección 3: $M_{CR} = 43,87 \text{ Nm}$.

El momento flexor de inicio de fluencia (Subsección 3.5) es: $M_{FL} = 43,9 \text{ Nm}$ (aprox. igual a M_{CR}).

A los Mf calculados con Ecuación (23) se les suma Mf inicial (6,94 Nm) calculado en página anterior.

Los momentos Mf fueron calculados para las secciones en los apoyos A y B, en la sección central de la viga Mf es un poco menor, con decremento 0,586 Nm (en todo el ensayo del Segundo caso), porque el peso propio de la viga es una carga distribuida uniforme en toda su longitud de 2,007 m.

Δz = desplazamiento lateral de una sección de la viga. Cargas aplicadas (en varios minutos c/u):

a) $P_1 = 58,65 \text{ N}$, $b = 0,32 \text{ m} \Rightarrow Mf = (58,65 \times 0,32 + 6,94) \text{ Nm} = 25,71 \text{ Nm}$ (58 % de M_{CR})

No se detectan desplazamientos laterales de la viga en el tramo central de longitud L .

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

b) $P_1 = 86,1 \text{ N}$, $b = 0,32 \text{ m} \Rightarrow Mf = (86,1 \times 0,32 + 0,65) \text{ Nm} = 28,2 \text{ Nm}$ (64 % de M_{CR})

El Mf inicial es solamente el causado por el peso propio de la viga, dado que la flecha f_E es grande (22 mm) y las placas C y D quedaron sujetadas en voladizo, sin apoyar su extremo en la viga.

$\Delta z = 0,5 \text{ mm}$, en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

c) $P_1 = 113,44 \text{ N}$, $b = 0,322 \text{ m} \Rightarrow Mf = (113,44 \times 0,322 + 0,65) \text{ Nm} = 37,18 \text{ Nm}$ (85 % de M_{CR})

$\Delta z = 0,5 \text{ mm}$, en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

d) $P_1 = 113,44 \text{ N}$, $b = 0,385 \text{ m} \Rightarrow Mf = (113,44 \times 0,385 + 0,65) \text{ Nm} = 44,32 \text{ Nm}$ (101 % de M_{CR})

$\Delta z = 2 \text{ mm}$, en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

Se superó el menor valor calculado de M_{CR} en la Sección 3, pero no otros 4 valores.

e) $P_1 = 113,44 \text{ N}$, $b = 0,43 \text{ m} \Rightarrow Mf = (113,44 \times 0,43 + 0,65) \text{ Nm} = 49,43 \text{ Nm}$ (113 % de M_{CR})

$\Delta z = 3 \text{ mm}$, en la sección central de la viga (no se detecta un giro de ninguna sección)

Se superaron todos los valores calculados de M_{CR} en la Sección 3, al mayor en 2 %.

Se superó el momento flexor de inicio de fluencia M_{FL} calculado en la Subsección 3.5 en 13 %.

La viga permaneció en equilibrio durante el tiempo de aplicación de esta carga y de las anteriores.

Al desarmar el conjunto, en la viga no se detectaron a simple vista deformaciones permanentes.

Cálculo de las flechas f y f_1 causadas por las cargas: $P_1 = 113,44 \text{ N}$, con: $b = 43 \text{ cm}$, utilizando las Ecuaciones (21) y (22): $f = 14,28 \text{ mm}$, $f_1 = 32,5 \text{ mm}$.

A estos valores se deben sumar las flechas iniciales, causadas por el peso propio. Las calculadas en la página 8 corresponden a los extremos y a la sección central, en ésta las flechas se pueden sumar directamente:

$$f = (14,28 + 0,048) \text{ mm} = 14,33 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{f \approx 14,3 \text{ mm}}$$

La flecha inicial f_E causada por el peso propio en los extremos se calculó para una distancia $b = 51,5 \text{ cm}$, mientras que f_1 se calculó arriba para P_1 con $b = 43 \text{ cm}$. Dado el pequeño valor de esa f_E se puede calcular aprox. f_{1P} causada por el peso propio por interpolación lineal (para $b = 43 \text{ cm}$), resulta:

$f_{1P} = 0,267 \text{ mm} \times (43 / 51,5) = 0,249 \text{ mm}$. Sumando este valor al de f_1 causado por P_1 se obtiene:

$$f_1 = (32,5 + 0,249) \text{ mm} = 32,75 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{f_1 \approx 32,7 \text{ mm}}$$

Las flechas reales se midieron con una regla cuya menor división de escala es 1 mm, se obtuvo:

$f \approx 15 \text{ mm}$, $f_1 \approx 32 \text{ mm}$, las diferencias son: menor a 4,9 % para f y menor a 2,2 % para f_1 .

5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En ambos casos Primero y Segundo los porcentajes de aproximación entre las flechas verticales calculadas y las flechas reales medidas son generalmente aceptables para cálculos de ingeniería.

Se puede ver que la aproximación tiende a mejorar para flechas grandes, esto se debe a los métodos de medición empleados, para medir flechas pequeñas es conveniente utilizar un reloj comparador.



FoDAMI

15. 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

En este trabajo el cálculo y medición de las flechas verticales no es un objetivo principal, se realizó como un complemento al estudio del comportamiento de algunos casos de vigas esbeltas sometidas a momentos flexores de valores cercanos o iguales al momento crítico, calculado según una determinada hipótesis de cálculo, con un criterio más cercano a la ingeniería que a la ciencia dura. Las planchuelas comerciales utilizadas para las vigas tienen defectos originales, por ejemplo: ondulaciones laterales de aprox. 1 a 1,5 mm cada aprox. 100 a 300 mm de longitud. Esos defectos estarán presentes cada vez que se las utilice para formar parte de alguna estructura. La vinculación de las vigas ensayadas, tal como se muestra en las Figuras 2 y 3, es una de las posibles vinculaciones que pueden presentarse en diversos tipos de estructuras mecánicas. Para cálculos de diseño o análisis de un caso como ese, generalmente es aceptable en ingeniería plantear una hipótesis de cálculo, por ejemplo, según los esquemas de la Figura 1, y utilizar alguna de las ecuaciones recopiladas en la Sección 2 para el cálculo del momento flexor crítico, ecuaciones que fueron deducidas para materiales y vigas perfectas. El diseñador de una estructura semejante deberá adoptar un coeficiente de seguridad con respecto al momento crítico calculado, según el uso pretendido y la magnitud de las deflexiones laterales admisibles. Se encontró que en las vigas ensayadas las deflexiones laterales detectables ocurrieron con momentos flexores mayores a aprox. el 50% de los momentos críticos calculados. Uno de los propósitos de este trabajo es mostrar los casos estudiados como posible material didáctico para el estudio y la enseñanza de estos temas. Para eso trabajaremos en mejorar el dispositivo presentado, y los métodos de ensayo y medición.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo agradecen a la Secretaría de Ciencia y Tecnología, al CIDIV y al Departamento de Ingeniería Mecánica de UTN FRGP por el apoyo brindado para realizarlo.

7. REFERENCIAS

- [1] Den Hartog J. *Advanced Strength of Materials*. Dover Publications, USA, 1987.
- [2] Timoshenko S., Gere J. *Theory of elastic stability, Second Edition*. McGraw Hill, Singapur, 1985.
- [3] Chen W., Lui E. *Structural Stability, Theory and Implementation*. Elsevier, USA, 1987.
- [4] Young W., Budynas R. *Roark's Formulas for Stress and Strain, Seventh Edition*. McGraw-Hill, USA, 2002.
- [5] Roark R., Young W. *Formulas for Stress and Strain, Fifth Edition*. McGraw-Hill, Japón, 1975.
- [6] Simitses G., Hodges D. *Fundamentals of Structural Stability*. Elsevier, USA, 2006.
- [7] Verein Deutscher Eisenhüttenleute (Asociación de trabajadores del hierro alemanes). *El acero en la construcción*. Editorial Reverté, España, 1980.



Convocatoria de trabajos producción 2021