



CONTROL PID

UN ENFOQUE DESCRIPTIVO



Ing. Walter J. D. Cova

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba
Centro Universitario de Desarrollos en Automación y Robótica

Diciembre de 2005

CONTROL PID

UN ENFOQUE DESCRIPTIVO

Ex umbra in solem.

Dos palabras

Las presentes notas de difusión surgen de las tareas realizadas en el marco del Proyecto 25/E066 *SISTEMA ROBOTICO DE ARQUITECTURA ABIERTA MULTIPROPOSITO* desarrollado en el CUDAR, como un aporte a las Cátedras de *Electrónica y Sistemas de Control* (carrera de Ingeniería Mecánica) y de *Sistemas de Control* (Ingeniería Electrónica) de la Facultad Regional Córdoba.

El objetivo perseguido es sintetizar brevemente algunos conceptos relacionados con el diseño y ajuste de controladores PID, tanto para sistemas continuos como muestreados, a fin de contar con una visión abarcativa de los diferentes aspectos de esta área de la Automatización y Control.

No puedo cerrar estas palabras introductorias sin manifestar mi reconocimiento a los colegas amigos que leyeron la versión preliminar de estas notas y brindaron sus sugerencias, comentarios y correcciones: agradezco entonces la colaboración de E. Ambroggio, R. Cavallero, J. Jazni, H. Marinelli, J. Naguil, J. Ortega, J. Pedroni y J. Picco.

Walter J. D. Cova

UTN-FRC CUDAR
Diciembre de 2005.



CONTENIDO

Introducción

Características PID Básicas

Consideraciones de Robustez

- Controladores con Dos Grados de Libertad
- Atenuación de Perturbaciones
- Variaciones del Proceso
- Ruidos de Medición y Saturación

Diseño con Dos Grados de Libertad aplicando Filtrado de Ruidos

- Filtrado
- Asignación de Peso al Punto de Ajuste

Efecto de *Windup*

- Limitación del Punto de Ajuste
- Algoritmos Incrementales
- Cálculo Retrógado y Seguimiento
- Controladores con Modo de Seguimiento

Ajuste de Parámetros (*Tuning*)

- Método de Ziegler-Nichols en base a la Respuesta al Escalón
- Método de Ziegler-Nichols en base a la Respuesta en Frecuencia
- Discusión de los Métodos Presentados
- AMIGO* – un Método Mejorado de Ajuste por Respuesta al Escalón

Implementación en Computadora Digital

- Problemas derivados del Muestreo
- Dispositivos de Retención
- Discretización de la Ley de Control
- Aspectos Operativos
- Pseudocódigo de Computadora

Conceptos sobre Ajuste Automático de Parámetros (*Autotuning*)

Referencias Bibliográficas

Introducción

Transcurridos más de 65 años desde su patentamiento* los controladores de acción proporcional + integradora + derivativa continúan manteniendo plena vigencia en la automatización industrial. La página Internet perteneciente a la *International Federation of Automatic Control (IFAC)* www.ifac-control.org en la sección correspondiente a *Professional Briefs* (destinada a los profesionales del Control Automático en los ámbitos industrial y académico), exhibe dos publicaciones (sobre un total de cinco) en las que el control PID juega un papel protagónico refs. [1] y [2]. Para completar el muestrario, citaremos el paper de Åström y Hägglund: *Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control*, aparecido en el Journal of Process Control de enero de 2004 [3].

Por su parte el relevamiento efectuado por Desborough y Miller [4] en 2002 sobre más de 11.000 controladores en refinerías, industrias químicas y papeleras, arrojó como resultado que el 97% de dichos controladores poseían estructura PID, reafirmando así su difusión y vigencia [5] pese a todos los avances teóricos y tecnológicos. Los controladores integrados en dispositivos [6] e instrumentos [7] constituyen un área de creciente penetración del control PID en la industria.

Estas notas de difusión, constituyen una breve incursión sobre los conceptos relacionados con el diseño y ajuste de controladores PID, tanto para sistemas continuos como discretos, a fin de contar con una visión abarcativa de los diferentes aspectos de esta área de la Automatización y Control.

Por lo que atañe a los contenidos específicos, en primer lugar se pasa reseña a las características básicas PID y se discuten los problemas asociados con el diseño robusto del sistema a lazo cerrado. Los problemas específicos del *windup* y las reglas prácticas para el ajuste de parámetros (*tuning*) son considerados junto con sus correspondientes soluciones. Capítulo aparte merece la implementación del controlador en computadora digital, donde se discuten los problemas de muestreo y *aliasing*, discretización de la ley de control y aspectos operativos prácticos que condicionan el funcionamiento del controlador. Las notas se cierran con algunos conceptos sobre la automatización del ajuste de parámetros (*autotuning*) empleada en dispositivos modernos.

Características PID Básicas

Comenzaremos con una síntesis de las características del controlador PID, para lo cual consideraremos el algoritmo *teórico* elemental:

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1)$$

cuyas variables se explicitan en el lazo de control de la Fig.1.

* El controlador PID fue patentado en 1939 por Albert Callender y Allan Stevenson de la firma Imperial Chemicals Limited (Northwich, Inglaterra). El controlador PID representó un enorme avance sobre los métodos de control automáticos previos.

La señal de control resulta entonces igual a la suma de tres términos: el término **P** (que es proporcional al error), el término **I** (proporcional a la integral del error) y el término **D** (que es proporcional a la derivada del error). Los parámetros del controlador son la ganancia proporcional K , el tiempo de integración T_i y el tiempo de derivación T_d .

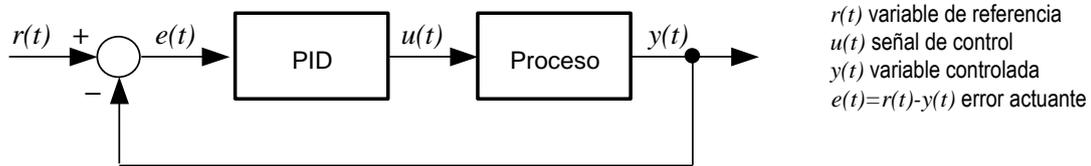


Fig.1. Lazo de control realimentado.

Los efectos de las acciones proporcional, integradora y derivadora se ilustran en las Figs.2, 3 y 4 respectivamente, en las que se muestran para un proceso de tercer orden, las respuestas temporales de $y(t)$ para una variación en escalón unitario de la variable de referencia o punto de ajuste (en inglés: *set-point*).

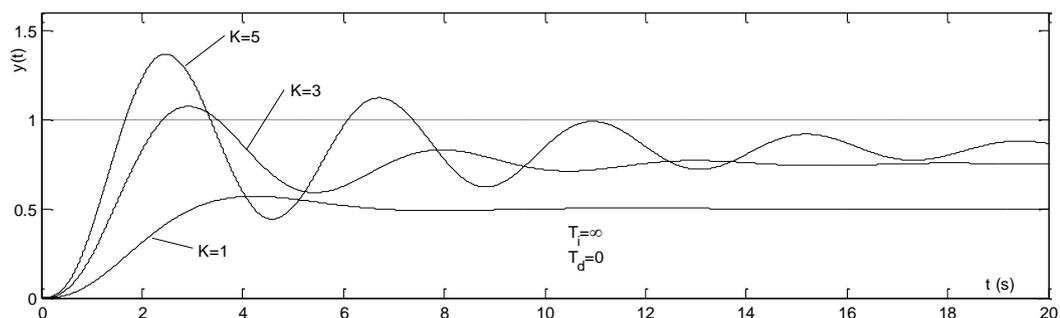


Fig.2. Simulación de un sistema a lazo cerrado con control proporcional. La función de transferencia del proceso es $P(s)=1/(s+1)^3$.

Con control puramente proporcional, el error en estado de régimen disminuye cuando K aumenta, pero el sistema se hace más oscilatorio.

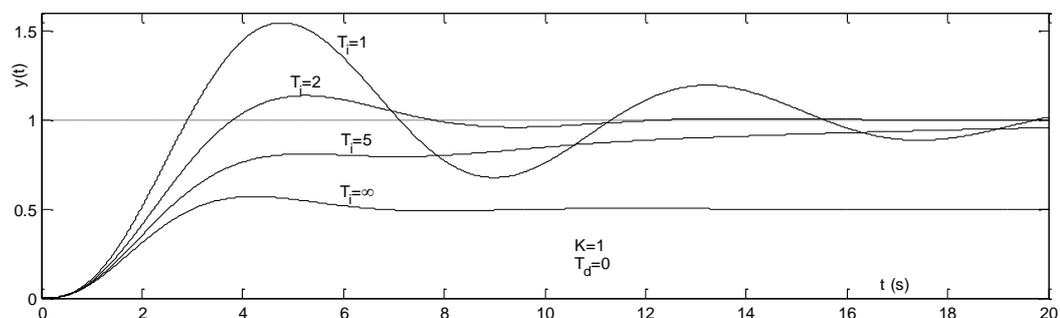


Fig.3. Simulación de un sistema a lazo cerrado con control proporcional-integrador (PI). La función de transferencia del proceso es $P(s)=1/(s+1)^3$ y la ganancia del controlador es $K=1$.

Al agregar la componente integradora comprobamos que su efecto se incrementa a medida que T_i disminuye. En la Fig. 3 observamos que el error de régimen desaparece. La tendencia a la oscilación crece a medida que T_i se va haciendo más pequeño.

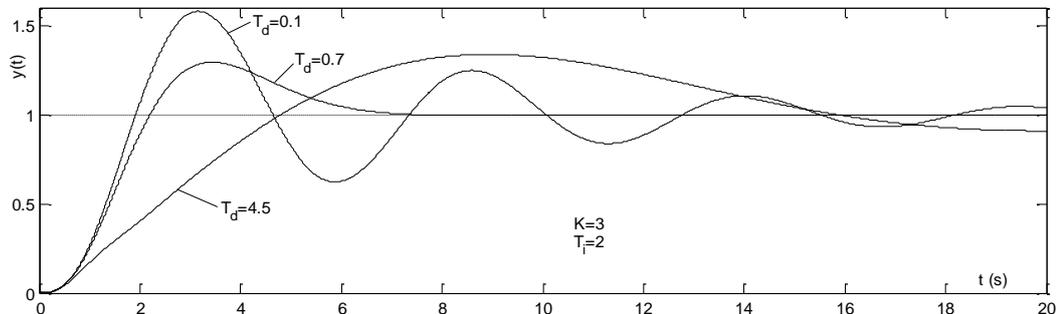


Fig. 4. Simulación de un sistema a lazo cerrado con controlador PID. La función de transferencia del proceso es $P(s)=1/(s+1)^3$ y los restantes coeficientes se indican.

La Fig.4 muestra el efecto derivador. Los parámetros K y T_i elegidos hacen oscilatorio (con T_d nulo) al sistema de lazo cerrado (con un período de aproximadamente 6 segundos). A medida que crece T_d aumenta el amortiguamiento, pero éste vuelve a decrecer si T_d se hace demasiado grande. Teniendo en cuenta que la acción derivadora puede interpretarse como una predicción basada en una extrapolación lineal durante el tiempo T_d , vemos que esa predicción resulta inútil si T_d se hace grande respecto del período de oscilación no amortiguado. La relación de T_d con la dinámica del sistema se explicita en la Fig. 5.

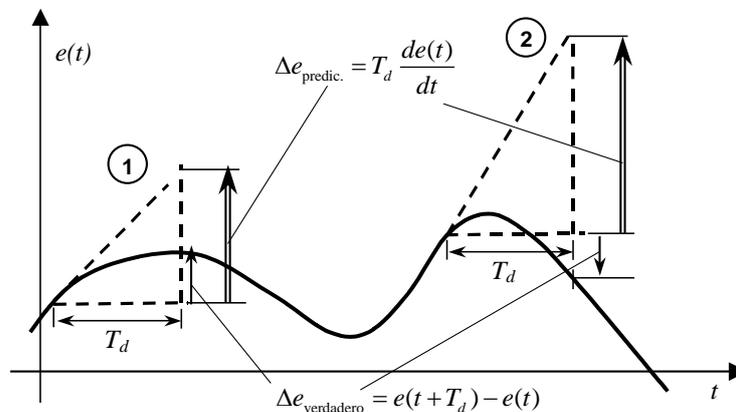


Fig. 5. Se compara el efecto predictivo de la acción derivadora y su relación con la dinámica del sistema. La predicción (1) es aceptable, mientras que la (2) no lo es, debido al empleo de un valor excesivamente prolongado para T_d .

Existen múltiples detalles en los controladores PID que no son revelados por la expresión (1). Para lograr un buen controlador PID se deberá tener en cuenta también:

- Filtrado de ruidos y respuesta en alta frecuencia;
- Diseño de 2 grados de libertad con asignación de peso al punto de ajuste;
- Efecto *windup* debido a la saturación del actuador;
- Ajuste (*tuning*) de los parámetros;
- Implementación computacional.

Consideraciones de Robustez

Con la finalidad de incorporar las definiciones necesarias para nuestro estudio, picotearemos algunas migajas conceptuales en los terrenos del Control Robusto. Para ello, expandiremos el lazo de control elemental de la Fig. 1 explicitando la estructura general del controlador y las perturbaciones y ruidos que inciden sobre el proceso y las variables controladas.

En la Fig. 6 el proceso \mathbf{P} se encuentra sometido a perturbaciones: la perturbación de carga d (que representan aquellos efectos que apartan al proceso de su comportamiento deseado) y el ruido de medición n . La variable de proceso x es la verdadera variable física que se desea controlar, pero el control se basa en la señal medida y que se encuentra corrompida por el ruido n . El controlador se muestra dividido en dos partes: el compensador de realimentación \mathbf{C} y el compensador por adelantado (*feedforward*) \mathbf{F} . El proceso es influido por el controlador a través de la variable de control u . El proceso resulta ser así un sistema de tres entradas (u, d, n) y una salida (y). En la Fig. 6 se muestra la perturbación de carga actuando a la entrada del proceso, pero en realidad la perturbación puede ingresar al proceso en una multitud de maneras diferentes, habiéndose adoptado la representación mostrada a los efectos de evitar innecesarias complicaciones.

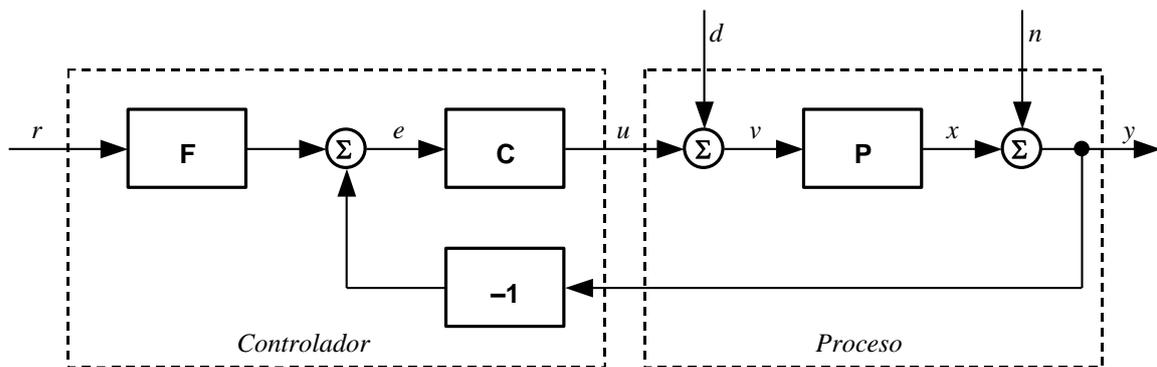


Fig. 6. Diagrama en bloques de un sistema de control realimentado.

La atenuación de perturbaciones es a menudo el objetivo primario del control. Las perturbaciones de carga son señales que pertenecen típicamente al rango de las bajas frecuencias. El ruido de medición por su parte posee componentes de alta frecuencia con valor medio nulo e introduce errores en los valores de la variable controlada. Haciendo un resumen de las consideraciones generales de diseño para un controlador, podemos formular los requerimientos básicos:

- Estabilidad
- Capacidad de seguir señales de referencia
- Reducción de los efectos de perturbaciones de carga
- Reducción de los efectos del ruido de medición
- Rechazo de variaciones de parámetros del proceso y/o incertezas en el modelo empleado.

Dependiendo de la aplicación específica, uno o más de los requerimientos indicados prevalecerá o prevalecerán sobre los restantes.

El sistema realimentado de la Fig. 6 posee, como dijimos, tres entradas: r, d y n que afectan a tres variables u, x e y que son de gran interés para el sistema de control. Suponiendo al sistema lineal existen entonces nueve relaciones expresables como funciones de transferencia

entre las variables de entrada y las de salida. Si con X, Y, U, D, N, R representamos las transformadas de Laplace de x, y, u, d, n, r , dejando de lado el argumento complejo s en beneficio de la sencillez, podemos escribir

$$\begin{aligned} X &= \frac{P}{1+PC}D - \frac{PC}{1+PC}N + \frac{PCF}{1+PC}R \\ Y &= \frac{P}{1+PC}D + \frac{1}{1+PC}N + \frac{PCF}{1+PC}R \\ U &= -\frac{PC}{1+PC}D - \frac{C}{1+PC}N + \frac{CF}{1+PC}R \end{aligned} \quad (2)$$

Observamos en (2) que varias de las funciones de transferencia son iguales y que todas las relaciones están expresadas como combinaciones del siguiente conjunto de seis funciones, al que designaremos –siguiendo a Åström [8]– como el «*Sexteto Mayor*».

$$\begin{array}{ccc} \frac{PCF}{1+PC} & \frac{PC}{1+PC} & \frac{P}{1+PC} \\ \frac{CF}{1+PC} & \frac{C}{1+PC} & \frac{1}{1+PC} \end{array} \quad (3)$$

Las funciones de transferencia de la primera columna determinan las respuestas de la variable de proceso (x) y la variable de control (u) al set-point (r) o variable de comando. La segunda columna da las mismas señales para el caso de realimentación pura de error ($\mathbf{F}=1$). La función $P/(1+PC)$ en la tercera columna define la reacción de la variable de proceso (x) a una perturbación de carga (d), mientras que $C/(1+PC)$ da la respuesta de la señal de control al ruido de medición.

El sistema con $\mathbf{F}=1$ se denomina control de realimentación de error puro. En este caso el sistema queda completamente caracterizado por el «*Cuarteto*» de funciones de transferencia:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1+PC} & \text{función de sensibilidad} \\ \frac{PC}{1+PC} & \text{función de sensibilidad complementaria} \\ \frac{P}{1+PC} & \text{función de sensibilidad a la perturbacion de carga} \\ \frac{C}{1+PC} & \text{función de sensibilidad al ruido} \end{array} \quad (4)$$

Los nombres de las funciones integrantes del *Cuarteto* se deducen a partir de considerar la función de transferencia de lazo cerrado (T) del sistema y de la variación que sufre si la planta (P) experimenta una pequeña perturbación alrededor del valor nominal de sus parámetros:

$$T = \frac{PC}{1+PC}; \quad dT = \frac{C}{(1+PC)^2} dP$$

(5)

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{1+PC} \frac{dP}{P} \rightarrow S = \frac{dT/T}{dP/P} = \frac{1}{1+PC}$$

La función de sensibilidad S permite entonces expresar la variación relativa de la función de transferencia de lazo cerrado ante pequeñas variaciones del proceso. De acuerdo a las (5) tenemos que

$$S + T = 1$$

(6)

razón por la cual a la función de transferencia de lazo cerrado (T) se la suele denominar también función de sensibilidad complementaria.

Controladores con Dos Grados de Libertad

Antes de adentrarnos en consideraciones de diseño, dejemos aclarado que el diagrama en bloques de la Fig. 6 que adoptamos como representación estandarizada, es totalmente equivalente a otras configuraciones posibles. Así por ejemplo, el clásico esquema de adelanto de la señal de comando de la Fig. 7 puede ser llevado a la forma de la Fig. 6 si imponemos $F=A/C$.

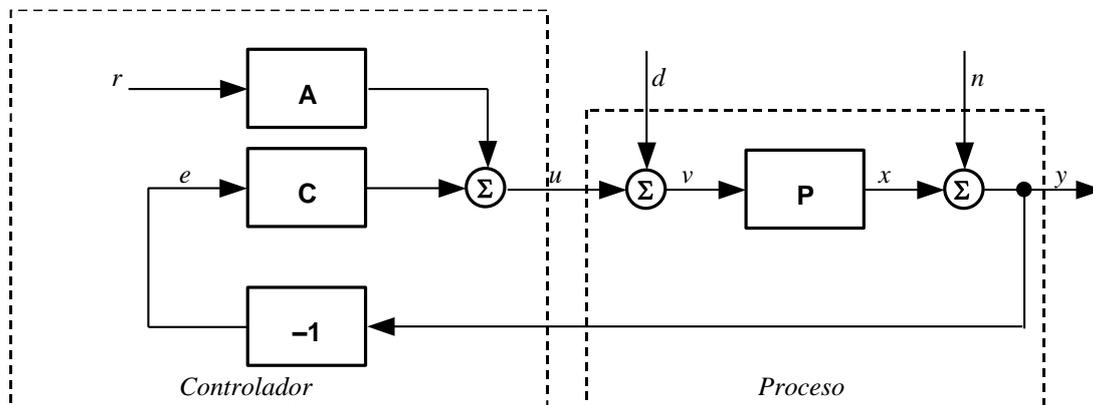


Fig. 7. Realización alternativa.

Decimos que el controlador de la Fig. 6 posee dos grados de libertad porque el bloque C forma parte del lazo cerrado, mientras que el bloque F es exterior al mismo. Este hecho posibilita una atractiva subdivisión del problema de diseño: así C puede ser proyectado para proporcionar el debido rechazo de las perturbaciones de carga e incertezas en el proceso, mientras que F es diseñado para lograr una buena respuesta a las señales de referencia. El diseño de C solamente considera el cuarteto, mientras que en el proyecto de F intervienen las dos funciones de transferencia restantes que completan el sexteto mayor.

Para describir al sistema con propiedad, es entonces necesario mostrar las respuestas de las seis funciones de transferencia, cosa que hemos hecho en las figuras siguientes, donde mostramos las respuestas al escalón y las respuestas en frecuencia del sexteto.

Las respuestas temporales de la Fig. 8 muestran que el feedforward mejora sustancialmente el tiempo de respuesta. El tiempo de respuesta es notablemente menor, 4s contra 25s, sin sobrepasamiento (comparar Fig. 8.a. con 8.b.). Esto también se refleja en las curvas de respuesta en frecuencia, que muestran (Fig. 9.a.) un mayor ancho de banda sin pico de resonancia para la función de transferencia con adelanto de señal (comparar con 9.b.).

Las funciones de transferencia $CF/(1+PC)$ y $C/(1+PC)$ representan la transmisión de señal de la variable de referencia a la variable de control, y del ruido de medición a la variable de control, respectivamente. La respuesta temporal de la Fig. 8.d, demuestra que la reducción del tiempo de respuesta que se logra por adelanto de señal, requiere un esfuerzo de control substancial. El valor inicial de la variable de control se encuentra fuera de escala en 8.d. pero la respuesta en frecuencia 9.d. muestra que la ganancia de alta frecuencia para $CF/(1+PC)$ es 16, que debe ser comparado con el valor 0.78 para $C/(1+PC)$. La respuesta rápida requiere entonces señales de control considerablemente mayores. Independientemente del valor que tome la función de transferencia del bloque de adelanto de señal (*feedforward*), la Fig. 8.c. nos informa que el rechazo a un escalón de perturbación de carga se completará en aproximadamente 20 a 25 segundos.

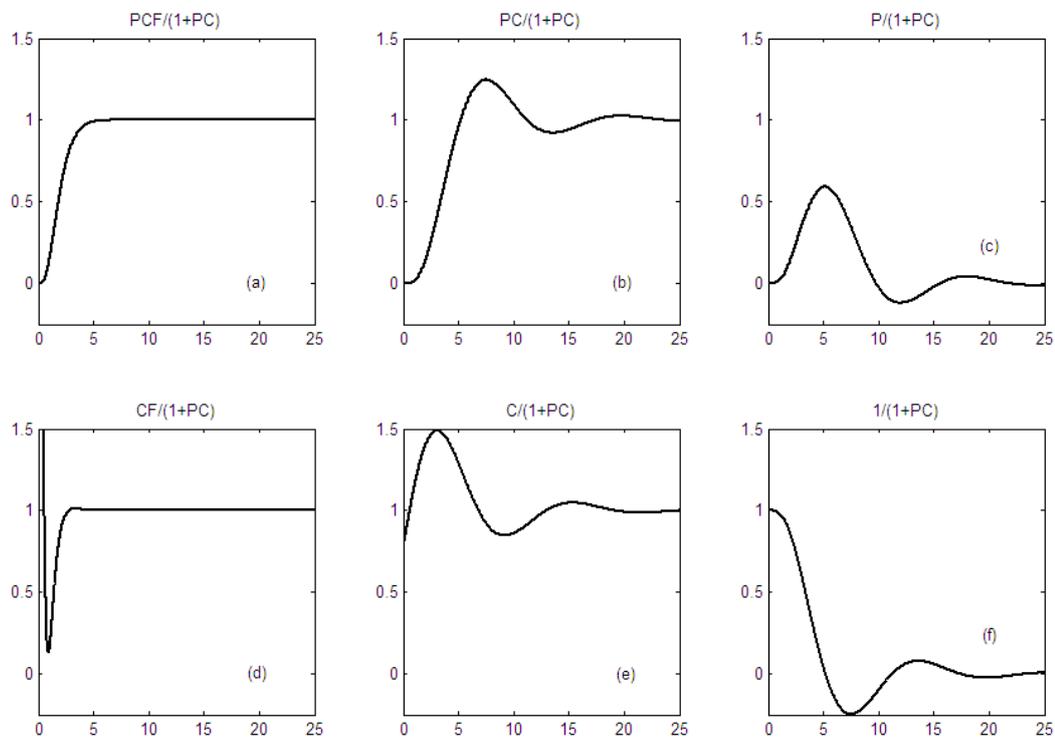


Fig. 8. Respuestas al escalón del sexteto. El proceso es $P(s)=1/(s+1)^4$. El controlador aplicado es PI con $K=0.775$, $T_i=2.05$. El bloque F de adelanto de señal se ha diseñado para obtener la función de transferencia $1/(0.5s+1)^4$ de la entrada r a la salida y .

El hecho de que se necesitan 6 relaciones para capturar la totalidad de las propiedades de un lazo básico de control es a menudo pasado por alto en la literatura, reduciéndose muchas publicaciones a mostrar tan sólo la respuesta de la variable del proceso a cambios en el punto de ajuste, brindando una información muy parcializada del comportamiento del sistema.

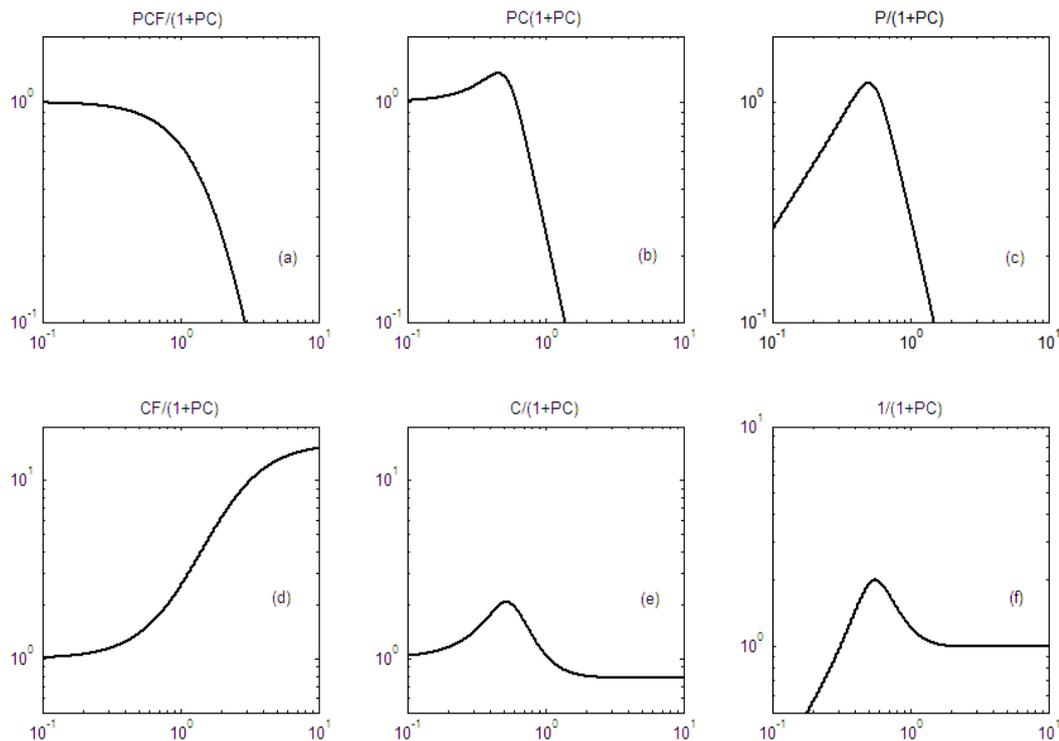


Fig. 9. Respuestas en frecuencia del sexteto, para la misma situación representada en la Fig. 8.

Ilustraremos lo expresado mediante un ejemplo. Sea el proceso caracterizado por la función de transferencia $P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0.02)}$ que es controlado por realimentación pura de error

empleando el compensador PI $C(s) = \frac{50s+1}{50s}$, resultando la función de transferencia de lazo

abierto $L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

La Fig. 10 muestra que las respuestas a un escalón de la variable de referencia son muy razonables. Basados en estas respuestas podríamos ceder a la tentación de dar el diseño por bueno. Para explorar nuestro sistema algo más en profundidad, debemos calcular el cuarteto ya que $F=1$.

$$\frac{PC}{1+PC} = \frac{1}{s^2 + s + 1} ; \quad \frac{P}{1+PC} = \frac{s}{(s+0.02)(s^2 + s + 1)} ;$$

$$\frac{C}{1+PC} = \frac{(s+0.02)(s+1)}{s^2 + s + 1} ; \quad \frac{1}{1+PC} = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1} ;$$

Obsérvese que el polo del proceso ubicado en $s = -0.02$ es cancelado por el cero del controlador PI. Esto hace que la función de transferencia de lazo abierto sea de segundo orden aunque el sistema de lazo cerrado es de tercer orden, con la ecuación característica

$$(s + 0.02)(s^2 + s + 1) = 0 .$$

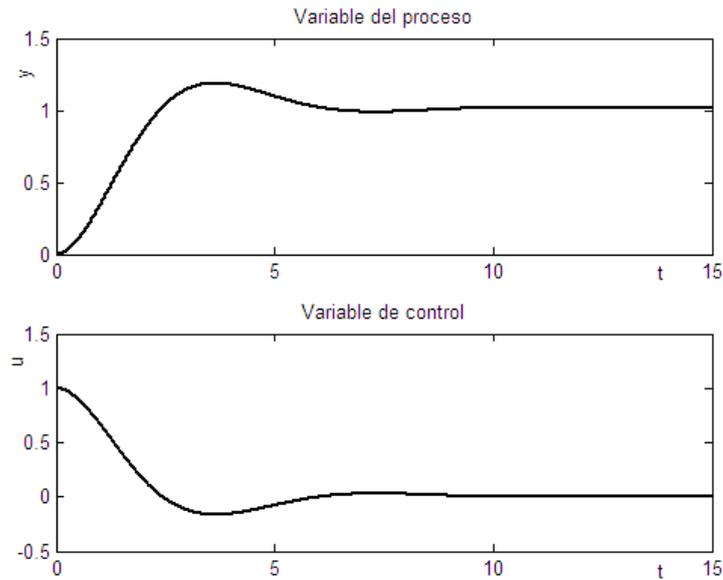


Fig. 10. Respuestas a un escalón de la variable de referencia.

La presencia del polo lento $s = -0.02$ en la función de transferencia $P/(1+PC)$, da por resultado que la respuesta a una perturbación en la carga decaiga muy lentamente, según $e^{-0.02t}$. El controlador PI no responderá a la señal $e^{-0.02t}$ porque el cero en $s = -0.02$ bloqueará su transmisión. Esto se ve con claridad en la Fig. 11 en la que se observa que una perturbación de carga es rechazada en aproximadamente 200 segundos.

El comportamiento ilustrado es típico de la cancelación de polos y ceros y corresponde a la excitación de un modo observable pero no controlable en el sistema de lazo cerrado.

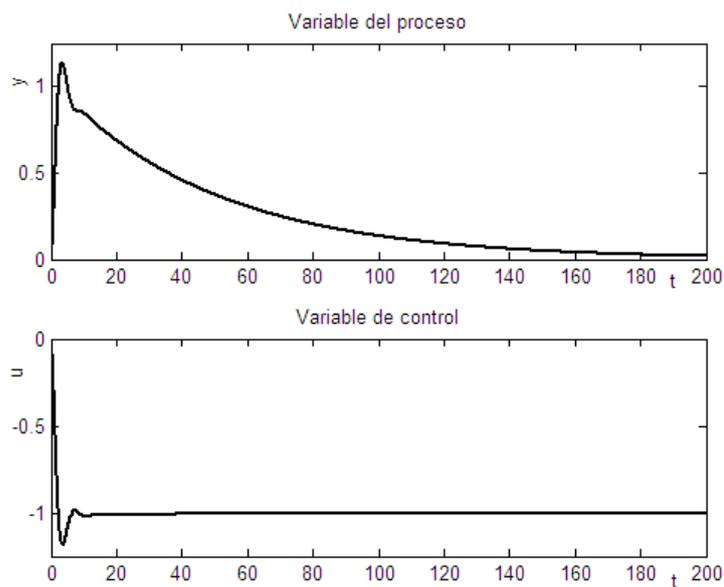


Fig. 11. Respuestas a un escalón de perturbación de carga.

Atenuación de Perturbaciones

A efectos de discutir la influencia de las perturbaciones y su atenuación, consideraremos la operación a lazo abierto y a lazo cerrado del sistema de la Fig. 6 considerando nula la señal de referencia ($r = 0$). A lazo abierto la salida del sistema vale

$$Y_a = P(s)D(s) + N(s) \quad (7)$$

mientras que, cerrando el lazo, es

$$Y_c = \frac{P(s)D(s) + N(s)}{1 + P(s)C(s)} = S(s)[P(s)D(s) + N(s)] = S(s)Y_a \quad (8)$$

La atenuación de perturbaciones puede entonces visualizarse mediante la curva de Bode de $S(j\omega)$. La frecuencia más baja donde la función de sensibilidad tiene módulo 1 se denomina frecuencia de cruce de la sensibilidad ω_{cs} .

El módulo máximo de la sensibilidad

$$M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| \quad (9)$$

es un parámetro importante ya que define la máxima amplificación de las perturbaciones. Ese máximo ocurre para la frecuencia ω_{ms} .

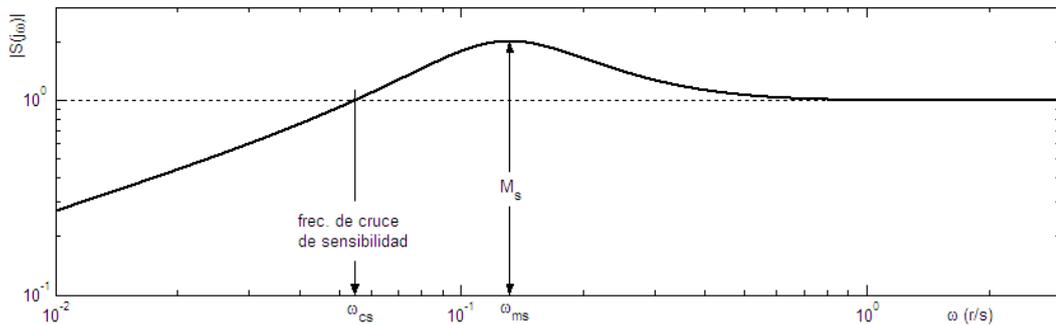


Fig. 12. Diagrama de Bode de la f.t. de sensibilidad correspondiente al sistema de la Fig. 8. Se explicitan módulo máximo, frecuencia del máximo y frecuencia de cruce de sensibilidad.

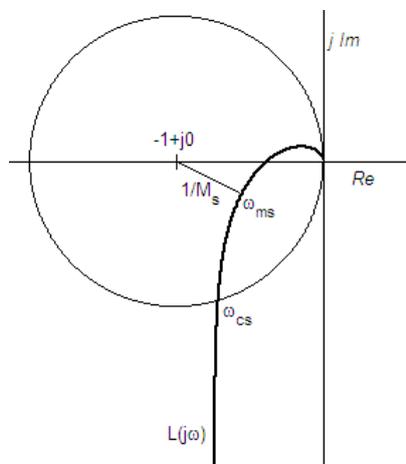


Fig. 13. Diagrama de Nyquist de la función de transferencia de lazo abierto correspondiente al sistema de la Fig. 8.

La función de sensibilidad puede ser escrita en la forma

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (10)$$

y como solamente depende de la función de transferencia de lazo abierto $L(s)$, puede ser visualizada en el diagrama de Nyquist de $L(j\omega)$. El número complejo $1 + L(j\omega)$ es representado por el vector trazado desde el punto -1 al punto $L(j\omega)$ sobre la curva de Nyquist. La sensibilidad es entonces menor que 1 para todos los puntos exteriores al círculo de radio unitario centrado en -1 . Las perturbaciones correspondientes a estas frecuencias son atenuadas por la realimentación (ver Fig. 13).

Variaciones del Proceso

Los sistemas de control se diseñan sobre la base de modelos simplificados de los procesos, cuya dinámica puede variar durante la operación. La sensibilidad del sistema de lazo cerrado ante variaciones en la dinámica del proceso controlado, constituye un aspecto crucial del diseño.

El riesgo de inestabilidad es el principal peligro en los sistemas realimentados, por lo que resulta de interés investigar si las variaciones del proceso pueden desencadenarla. Las funciones de sensibilidad brindan en este aspecto informaciones de suma utilidad. La Fig. 13 muestra que la mayor sensibilidad está dada por la recíproca de la menor distancia entre la curva de Nyquist de la función de transferencia de lazo abierto y el punto crítico $-1 + j0$.

La función de sensibilidad complementaria también resulta de utilidad para evaluar las variaciones admisibles en el proceso. Sea un sistema realimentado con un proceso P y controlador C , cuyo diagrama de Nyquist de lazo abierto se muestra en la Fig. 14. Si el proceso varía de P a $P+\Delta P$ la función de lazo abierto cambia de PC a $PC+C\Delta P$ como se ilustra en la figura. La distancia del punto crítico al punto L es $|1+L|$. Esto significa que la curva de Nyquist perturbada no alcanzará el punto crítico -1 en tanto se cumpla

$$|C\Delta P| < |1+L|.$$

Esta condición debe ser válida para todos los puntos sobre el diagrama de Nyquist. La condición de estabilidad puede ser reescrita de la manera siguiente si en la desigualdad precedente dividimos ambos miembros por $|PC|$:

$$\frac{|\Delta P(j\omega)|}{|P(j\omega)|} < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad (11)$$

También se requiere que la perturbación $\Delta P(s)$ sea una función de transferencia estable a fin de satisfacer la condición de rodeos de Nyquist. La condición (11) es conservadora ya que de la Fig. 14 se deduce que la perturbación crítica es la que se produce en la dirección hacia el punto -1 . Resultan entonces admisibles perturbaciones mayores en otras direcciones.

La fórmula (11) es una de las razones por las cuales los sistemas realimentados funcionan tan bien en la práctica. La Ec.(11) implica que el sistema a lazo cerrado será por lo menos estable para variaciones sustanciales en la dinámica del sistema.

Una estimación conservadora de las variaciones admisibles en el proceso que no originarán inestabilidad está dada por:

$$\frac{|\Delta P(j\omega)|}{|P(j\omega)|} < \frac{1}{M_t}$$

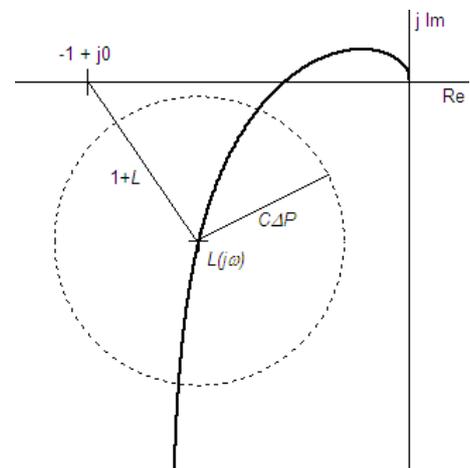


Fig. 14. Diagrama de Nyquist de la función nominal de lazo abierto y la incertezada originada en las variaciones ΔP del proceso.

donde M_t es el mayor valor de la sensibilidad complementaria

$$M_t = \max_{\omega} |T(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| \quad (12)$$

Vemos que el valor de M_t es influido por el diseño del controlador o viceversa, si se conoce el rango de variación a que puede estar sometida la función de transferencia del proceso, resultará posible calcular el controlador prefijando un margen de estabilidad aceptable.

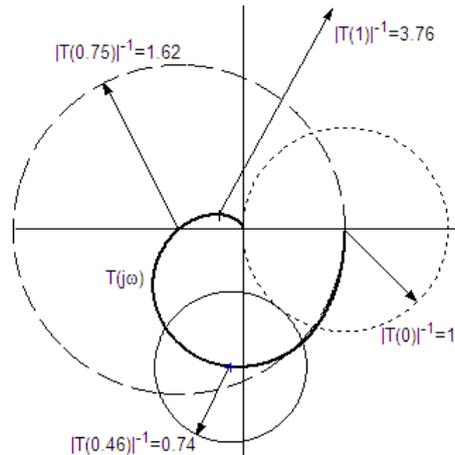


Fig. 15. Diagrama de Nyquist de la f.t. de sensibilidad complementaria $T(j\omega)$ correspondiente a la Fig. 9.b. Los círculos muestran las regiones de incerteza $|\Delta P|=1/|T|$ calculadas para el controlador PI con $K=0.775$ y $T_i=2.05$ en las frecuencias angulares $\omega=0, 0.46, 0.75$ y 1 .

La Fig. 15 muestra el trazado de Nyquist de $T(j\omega)$ del sistema considerado en nuestro ejemplo, junto con los círculos que acotan las regiones de incerteza para algunas frecuencias de interés. Observamos que en nuestro caso M_t se hace máxima para $\omega = 0.46$ que es donde se produce el mínimo de la variación $|\Delta P|$ admisible para la planta. La situación ilustrada es típica de muchos procesos, donde se requiere una buena aproximación a la función de transferencia de la planta (es decir baja incerteza) en las cercanías de la frecuencia de cruce de lazo abierto, siendo admisibles elevados valores de incerteza a frecuencias superiores e inferiores. Una consecuencia práctica de lo dicho es que un simple modelo que describa correctamente la dinámica del proceso en las cercanías de la frecuencia de cruce, resulta suficiente para el diseño. Una excepción a esta regla la constituyen los procesos que poseen resonancias múltiples, ya que su función de transferencia puede poseer ganancias elevadas también en altas frecuencias.

Hemos podido constatar que la función de sensibilidad S y la función de sensibilidad complementaria T brindan mucha información acerca del comportamiento del sistema realimentado. Resulta de acuerdo a las ecuaciones (5) y (8) que es conveniente un bajo valor de la función de sensibilidad, y se deduce de (11) que un bajo valor de la sensibilidad complementaria vuelve admisible una incerteza elevada para el proceso. Dado que, de acuerdo a la (6) es

$$S(s) + T(s) = 1$$

deducimos que S y T no pueden ser simultáneamente pequeñas. La función de transferencia de lazo abierto $L(s)$ posee típicamente valores elevados para baja frecuencia y se aproxima a cero a medida que s tiende a infinito. En consecuencia S es típicamente de valor reducido para s pequeño, y tiende a 1 para s elevado. Recíprocamente T es 1 para $s \rightarrow 0$ y se anula cuando $s \rightarrow \infty$.

Salvo para procesos muy particulares, la función de sensibilidad S no puede ser hecha pequeña sobre un rango extendido de frecuencias. Para sistemas de control típicos, existen restricciones muy severas sobre la función de sensibilidad. Bode demostró que si la función de transferencia de lazo abierto posee p_k polos en el semiplano derecho y tiende a cero con mayor rapidez que $1/s$ para altas frecuencias, la función de sensibilidad satisface la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \int_0^{\infty} \log \frac{1}{|1+L(j\omega)|} d\omega = \pi \sum_k \operatorname{Re}\{p_k\} \quad (13)$$

esta expresión demuestra que si se hace pequeña para algunas frecuencias a la función de sensibilidad, ésta debe incrementarse para otras frecuencias. Lo que significa que si la atenuación de perturbaciones mejora en un cierto rango de frecuencias, necesariamente deberá empeorar en otro rango (efecto cama de agua). Para funciones de lazo abierto sin polos en el semiplano derecho, la (13) se reduce a

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = 0 \quad (14)$$

esta fórmula posee una simple interpretación geométrica que se muestra en la Fig. 16: el área por arriba del eje horizontal debe ser exactamente igual al área por debajo del eje. Para una demostración de las integrales de Bode, se recomienda el texto [9].

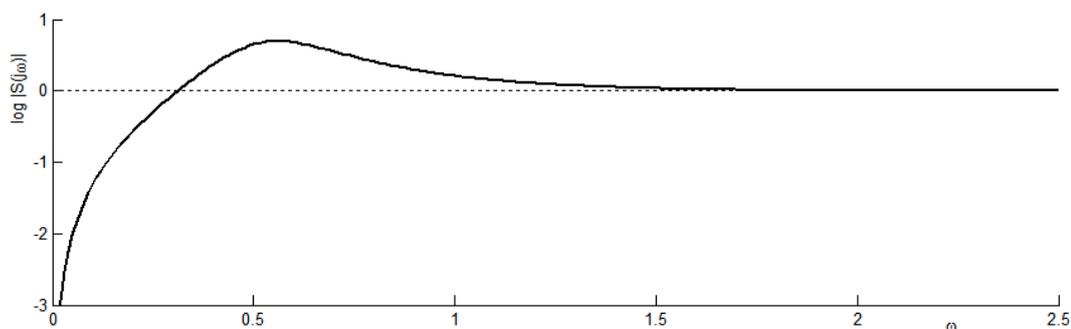


Fig. 16. Interpretación geométrica de la integral (14).

Como cierre del presente tema, debemos comentar la importancia que han adquirido —o mejor dicho: han vuelto a adquirir— conceptos tan añejos como el criterio de estabilidad de Nyquist en asociación con la problemática de la robustez. En la publicación [10] nos encontramos con una extensión del concepto del margen de estabilidad de Nyquist, aplicado como una medida de robustez en sistemas multivariados inciertos.

Ruidos de Medición y Saturación

Dado un sistema con realimentación de error puro (de un solo grado de libertad), resulta intuitivamente razonable afirmar que una respuesta rápida al comando requiere de un controlador con elevada ganancia. Pero cuando el controlador tiene alta ganancia, también el ruido de medición es amplificado e inyectado al sistema, lo que ocasionará variaciones en la señal de control y en la variable controlada. Es preciso que las fluctuaciones así originadas en la señal de control no sean tan grandes como para ocasionar una saturación del actuador. Dado que el ruido de medición es típicamente de alta frecuencia, éste y la saturación del actuador proporcionan una cota superior a la ganancia del controlador en alta frecuencia, limitando en consecuencia la rapidez de respuesta del sistema.

Existen muchas fuentes de ruido de medición: el ruido puede ser inherente a la naturaleza del sensor o puede ser originado por la electrónica asociada. En sistemas controlados por computadora es también causado por la resolución de los convertidores A/D y D/A. Considérese un sistema controlado por computadora, con convertidores analógico-digitales y digitales-analógicos de 12 bits. Como 12 bits corresponden a 4096 niveles, se infiere que para una ganancia de alta frecuencia del controlador $M_c=4096$ un bit de error dará por resultado un cambio de rango completo en la señal de control. Para un sistema razonable se requiere que las fluctuaciones en la señal de control debida a los errores de medición no superen el 5% del rango de señal. Esto significa que para nuestro ejemplo, la ganancia de alta frecuencia del controlador deberá restringirse a 200.

Los análisis precedentemente efectuados sobre rechazo de perturbaciones, variaciones en el proceso controlado, ruidos de medición y saturación, contribuyen en conjunto a subrayar las ventajas inherentes al diseño de controladores con dos grados de libertad, donde resulta posible separar los problemas de la respuesta al comando, del rechazo a la perturbación de carga y la sensibilidad a variaciones en los parámetros del proceso. Así, teniendo en cuenta las Ecs.(4), el proceso de diseño puede ser dividido en dos pasos independientes:

- En primer término diseñar el controlador de realimentación C que reduzca los efectos de las perturbaciones de carga (PS) y la sensibilidad a variaciones del proceso, sin introducir demasiado ruido de medición al sistema (CS).
- Luego diseñar la función de transferencia de adelanto de comando que proporcione la respuesta deseada al punto de ajuste (FT).

Por cierto que si el ruido de medición se convierte en un factor condicionante, no deberá perderse de vista la alternativa de cambiar los sensores por otros de mejor calidad a fin de superar el problema.

Diseño con 2 Grados de Libertad aplicando Filtrado de Ruidos

Filtrado

Como la diferenciación es muy sensible al ruido, la forma de la función de transferencia que se deduce de la expresión (1) debe ser modificada a fin de limitar la ganancia de alta frecuencia del término derivativo, mediante el uso de un filtro. Si se emplea un filtro de primer orden se tendrá para la función de transferencia entre la variable medida y y la salida del controlador u (véase la Fig. 6):

$$C(s) = -K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} \right) \quad (15)$$

este controlador posee la ganancia de alta frecuencia

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = -K(1 + N). \quad (16)$$

Teniendo en cuenta la anterior discusión sobre robustez ante variaciones del proceso, resulta altamente deseable que la ganancia del controlador sea decreciente en alta frecuencia (es decir que presente un 'roll-off'), lo que se puede lograr mediante un acondicionamiento de la señal de control a través del filtro

$$F(s) = \frac{1}{(1 + sT_f)^n} \quad (17)$$

donde T_f es la constante de tiempo y n es el orden del filtro empleado. Si la estructura del controlador es PID se elegirá $T_f = T_d/N$; si la estructura es tan sólo PI puede tomarse $T_f = T_i/N$. Típicamente los valores de N se encuentran en el rango de 8 a 20.

El controlador también puede ser implementado como

$$C(s) = -K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \frac{1}{(1 + sT_d/N)^2} \quad (18)$$

Esta estructura posee la ventaja de permitir el uso de un proceso de diseño iterativo. Primero se calcula un controlador PID ideal para el proceso $P(s)$. El diseño proporciona el valor del parámetro T_d , a partir del cual se recalcula el controlador ideal pero ahora para el proceso $P(s)/(1 + sT_d/N)^2$, lo que arrojará un nuevo valor de T_d , y así sucesivamente. El procedimiento descrito brinda también una clara visión del compromiso que existe entre performance y filtrado.

Asignación de Peso al Punto de Ajuste

Al usar la ley de control (1), resulta claro que un cambio en escalón de la señal de referencia originará un impulso en la señal de control, situación que no es de manera alguna deseable en la mayoría de los casos. Por esta razón la acción derivativa frecuentemente no es aplicada sobre la señal de referencia. Otra posibilidad es que la acción proporcional sea aplicada tan sólo sobre una fracción de la señal de referencia. Esto se denomina asignación de peso al punto de ajuste. Un controlador PID dado por (1) se convierte entonces en

$$u(t) = K \left[br(t) - y(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \left(c \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \right] \quad (19)$$

donde b y c son parámetros adicionales. El término integral debe depender del error a fin de proporcionar la respuesta deseada en estado de régimen. El controlador definido por (19) posee

una estructura de dos grados de libertad ya que los caminos de señal de y a u y de r a u son diferentes, resultando las funciones de transferencia

$$\frac{U(s)}{R(s)} = C_r(s) = K \left(b + \frac{1}{sT_i} + csT_d \right); \quad \frac{U(s)}{Y(s)} = C_y(s) = -K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (20)$$

De acuerdo con la segunda de las (20), el controlador (19) reaccionará ante una perturbación en la carga de la misma manera que lo hace un controlador de un solo grado de libertad; la respuesta a cambios en la variable de referencia se verá influida por los parámetros b y c .

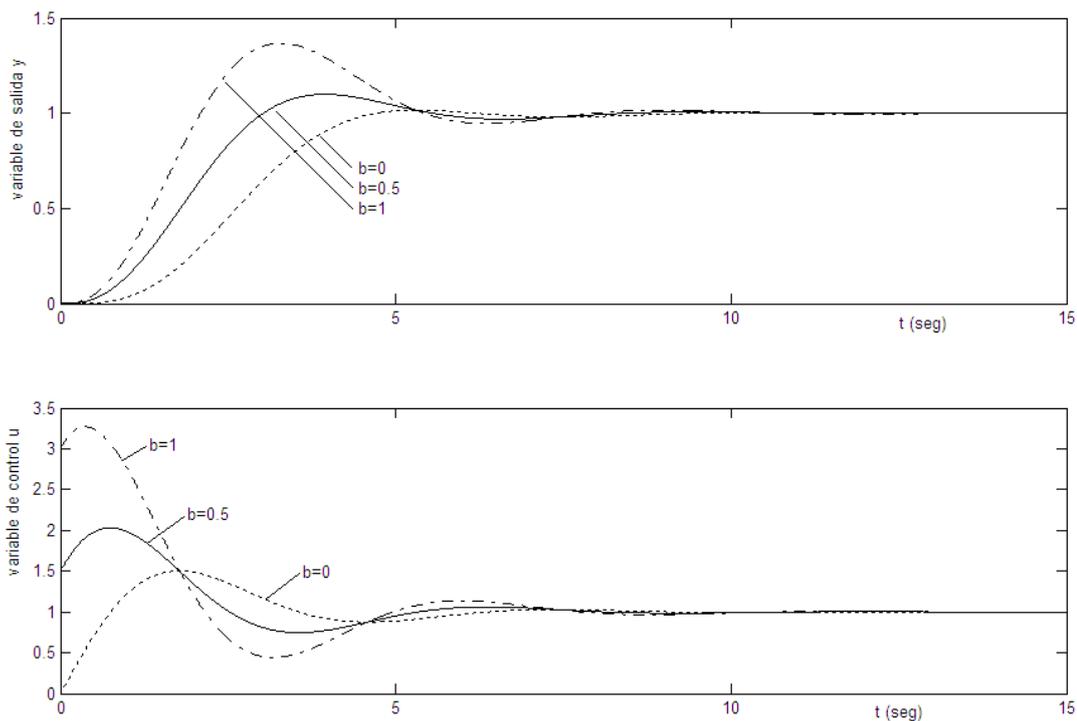


Fig. 17. Respuesta a un escalón en la variable de referencia para diferentes factores de peso del punto de ajuste ($b=0, 0.5, 1$). Función de transferencia del proceso $P(s)=1/(s+1)^3$. Los parámetros del controlador son $K=3, T_i=0.5, T_d=0.5$.

Obsérvese que el sobrepasamiento y el tiempo de respuesta dependen del factor de peso b . El valor de c es normalmente cero para evitar grandes transitorios en la señal de control debido a variaciones abruptas del punto de ajuste.

El controlador (19), puede ser realizado bajo la forma de un controlador PI-PD como se muestra en la figura siguiente:

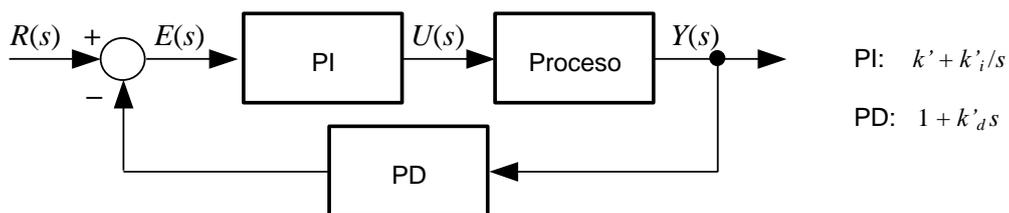


Fig. 18. Diagrama de bloques de un controlador PI-PD.

Nótese que la ganancia proporcional del controlador PD debe ser unitaria para obtener un error de régimen nulo. La relación de entrada-salida para el controlador completo vale

$$U(s) = k' R(s) + \frac{k'_i}{s} [R(s) - Y(s)] - (k' + k'_d k'_i) Y(s) + k'_d k'_i s Y(s) \quad (21)$$

Operando algebraicamente sobre (21) y comparando con (19) se deducen las equivalencias

$$K = k' + k'_d k'_i ; \quad T_i = \frac{k' + k'_d k'_i}{k'_i} ; \quad T_d = \frac{k'_d k'_i}{k' + k'_d k'_i} ; \quad b = \frac{k'}{k' + k'_d k'_i} ; \quad c = 0.$$

Nótese que la estructura definida por (19) es ajustable de manera más sencilla, ya que los parámetros K , T_i , T_d pueden ser determinados en primer término para compensar perturbaciones de carga, ruido de medición y variaciones del proceso. Una vez hecho esto, se puede ajustar la respuesta a la variable de comando, seleccionando los valores de b y c . Los parámetros del controlador aparecen de un modo extremadamente más complicado en la estructura PI-PD.

Efecto de *Windup*

El *windup** es un efecto no lineal que se encuentra en prácticamente todos los controladores y es causado por la interacción de la acción integradora con las saturaciones. Todos los actuadores están sujetos a limitaciones: un motor tiene una velocidad máxima, una válvula no puede estar más abierta que totalmente abierta (o recíprocamente, totalmente cerrada). Para un sistema de control que opere en un amplio rango de condiciones, puede ocurrir que la variable de control alcance los límites o topes del actuador. Cuando esto último ocurre, el lazo de realimentación se interrumpe y el sistema opera a lazo abierto, porque el actuador permanece en el tope independientemente del valor de la salida del proceso. Si el controlador utilizado posee acción integradora, el error continuará siendo integrado. Esto significa que el término integral puede llegar a hacerse muy grande; coloquialmente diríamos que se va “remontando” como un barrilete cada vez más alto o, en inglés: ‘*it winds up*’. Posteriormente se requiere que el error posea signo contrario durante un largo período antes de que las cosas retornen a la normalidad. Extraemos como consecuencia que todo controlador que posea acción integradora puede originar transitorios largos cuando se satura el actuador.

Para ejemplificar el efecto de *windup*, se muestra en la Fig. 19 el comportamiento de un proceso integrador gobernado por un controlador PI. La variación inicial del punto de ajuste es tan grande que el actuador satura de inmediato en su límite superior. El término integral crece inicialmente por ser el error positivo; alcanza su máximo para $t=10$, tiempo para el cual el error se anula. El actuador permanece saturado en este punto, debido al valor elevado que posee el término integral, y continuará en el límite superior hasta que el error haya sido negativo durante el tiempo necesario para la parte integral disminuya hasta alcanzar un valor bajo. Se observa en la figura que la señal de control $u(t)$ oscila repetidas veces entre sus límites superior e inferior. El efecto neto es un gran sobrepasamiento y una oscilación amortiguada hasta el momento en que la variable controlada $y(t)$ se mantiene lo suficientemente cerca del punto de ajuste, el actuador deja de saturar y el sistema exhibe un comportamiento lineal. Si bien en este ejemplo

* Podríamos traducir *windup* como un efecto de carga o acumulación en el integrador, pero preferimos no hacerlo ya que el fenómeno se conoce internacionalmente con su designación en inglés.

hemos considerado el *windup* originado por un escalón en la variable de referencia, también puede ocurrir por otras circunstancias, como por ejemplo perturbaciones de carga.

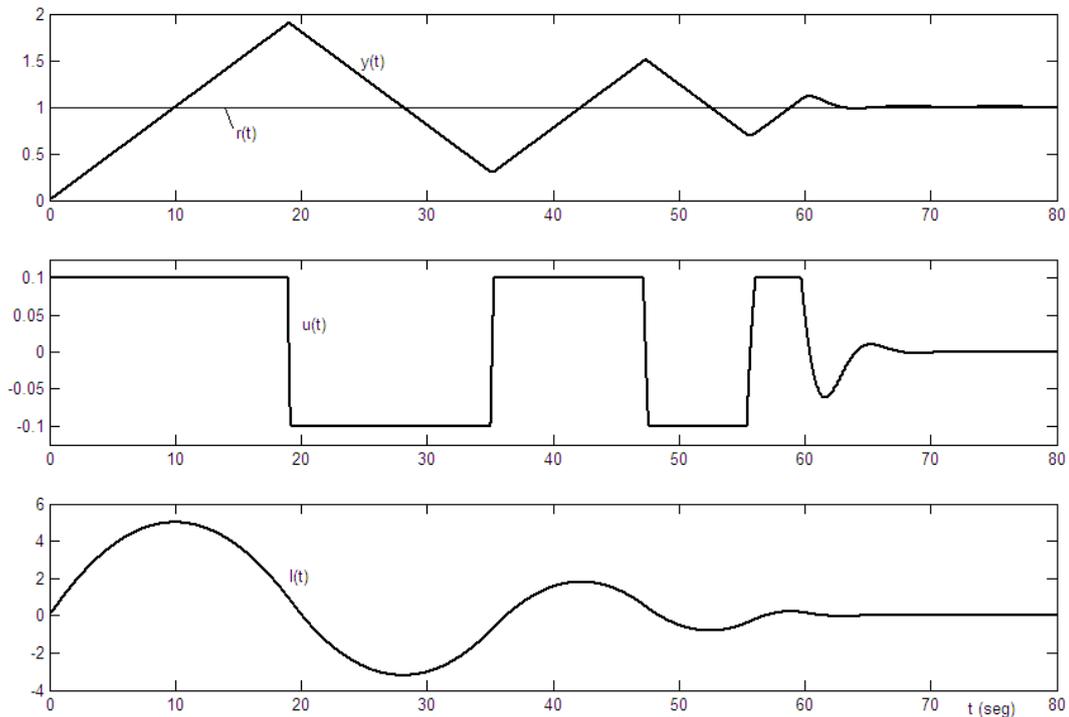


Fig. 19. Ilustración del *windup* de un integrador. Considérese que la variable de salida $y(t)$ representa las variaciones del nivel de un tanque de líquido alrededor de su valor medio, siendo el caudal de entrada gobernado por una válvula y un controlador PI.

El fenómeno de *windup* era bien conocido por los fabricantes de controladores analógicos y las soluciones desarrolladas muchas veces fueron protegidas como secretos industriales. El problema del *windup* se redescubrió cuando los controladores fueron implementados digitalmente: varios métodos para evitarlo fueron presentados en la literatura técnica. Pasamos a analizar algunos de ellos.

Limitación del Punto de Ajuste

Una manera de evitar el *windup* es introducir limitadores en las variaciones de la señal de referencia, de modo tal que el actuador nunca alcance sus límites de saturación. Este procedimiento resulta excesivamente conservador, con la consecuente disminución de la performance. Por otra parte, no evita el *windup* causado por las perturbaciones de carga.

Algoritmos Incrementales

En los primeros tiempos del control industrial, la acción integral era incorporada al actuador, empleando por ejemplo un motor que operaba directamente sobre una válvula. En este caso el *windup* era evitado automáticamente, ya que la integración se interrumpía al detenerse la válvula contra su tope. Cuando los controladores se implementaron utilizando técnicas analógicas (y posteriormente computadoras), muchos fabricantes emplearon los así llamados algoritmos de velocidad que configuran análogos del antiguo diseño mecánico. Un algoritmo de velocidad en

primer lugar calcula la velocidad de variación de la señal de control que es luego empleada para controlar un integrador. Mediante este concepto resulta fácil inhibir la integración toda vez que la salida del actuador se sature. Si la salida del actuador no es medible, puede emplearse un modelo para computar la saturación.

Cálculo Retrógrado y Seguimiento

El cálculo retrógrado funciona de la siguiente manera: cuando la salida se satura, el término integral del controlador es recalculado de tal manera que su nuevo valor provoque una salida en el límite de saturación. Resulta ventajoso no resetear el integrador en forma instantánea sino dinámicamente, a través de una constante de tiempo T_t .

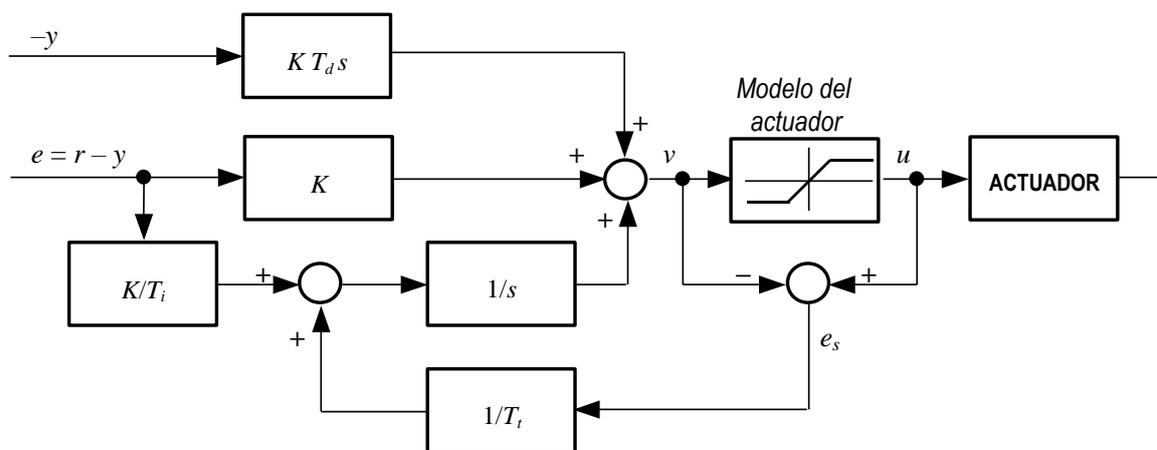


Fig. 20. Controlador con *anti-windup*. La salida del actuador es estimada mediante un modelo matemático.

El controlador de la Fig. 20, basado en cálculo retrógrado, posee un lazo de realimentación extra que se genera midiendo la salida u del actuador (en la figura del modelo del actuador) y formando la señal de error e_s como la diferencia entre la salida del controlador v y u . La señal e_s es inyectada a la entrada del integrador a través de la ganancia $1/T_t$; si no hay saturación e_s es nula y por lo tanto no afecta la operación lineal del controlador. Cuando el actuador se satura, e_s es negativa y no-nula; el lazo principal de realimentación se interrumpe, pero debido al lazo auxiliar la salida del integrador es llevada a un valor tal que anule su entrada. En condiciones de saturación la entrada del integrador vale:

$$\frac{1}{T_t} e_s + \frac{K}{T_i} e \quad \text{donde } e \text{ es el error actuante.}$$

En condiciones de regimen vale $e_s = -\frac{KT_t}{T_i} e$

Siendo $e_s = u - v$ resulta $v = u_{\text{lim}} + \frac{KT_t}{T_i} e$

donde u_{lim} es el valor de saturación de la variable de control. Esto significa que v se ubica en un valor ligeramente por encima del límite de saturación y que la señal de control puede reaccionar tan pronto como el error cambia de signo. De esta manera el integrador queda impedido de sufrir *windup*. La velocidad con la cual se resetea el integrador depende de la ganancia $1/T_t$, pudiéndose interpretar T_t como la constante de tiempo que determina la rapidez

de reseteo y es llamada constante de tiempo de seguimiento. Y hablamos de seguimiento (o 'tracking'), porque se obliga a la señal v a seguir de cerca las evoluciones temporales de u .

Ocurre frecuentemente que la salida del actuador no puede ser sensada. Para utilizar el esquema de *anti-windup* que acabamos de describir, se incorpora al controlador un modelo matemático del actuador, tal como fue ilustrado en la Fig. 20.

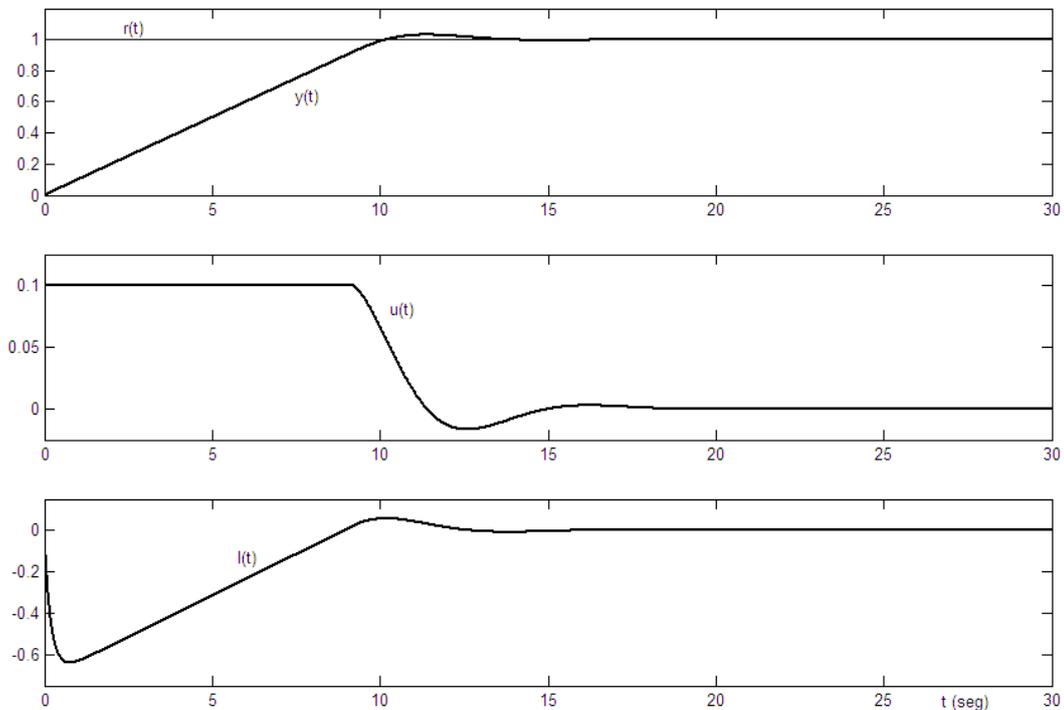


Fig. 21. Controlador con *anti-windup* aplicado al sistema de la Fig. 19.

Pasamos a analizar la aplicación del esquema *anti-windup* al sistema simulado en la Fig. 19. Obsérvese en la Fig. 21 que la salida del integrador es rápidamente llevada a un valor tal que la señal del controlador se encuentra en el límite de saturación, y la componente integral tiene valor

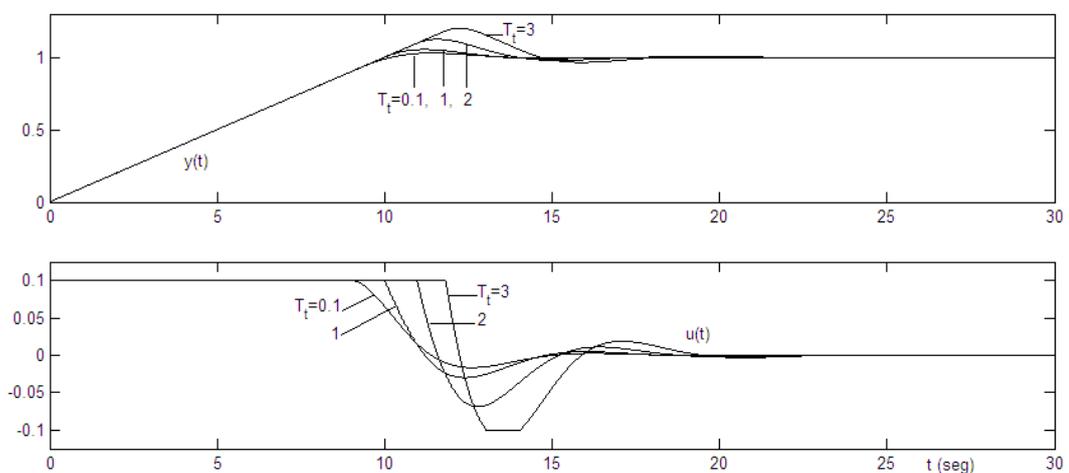


Fig. 22. Respuesta al escalón del sistema de la Fig. 19, para diferentes valores de la constante de tiempo T_i .

negativo en la fase inicial, cuando el actuador se encuentra saturado. Este comportamiento difiere drásticamente respecto de la Fig. 19 donde la integral es positiva durante el transitorio inicial. También debe destacarse la dramática mejora de la performance comparada con el controlador PI ordinario empleado en la Fig. 19.

El efecto de los cambios en la constante de tiempo de seguimiento, se muestra en la Fig. 22. De la misma podría inferirse que resulta siempre conveniente seleccionar un valor pequeño de la constante de tiempo, de modo que el integrador se resetee rápidamente. Sin embargo ha de tenerse cuidado al emplear *anti-windup* en sistemas con componente derivativa de control. Si se selecciona la constante de tiempo demasiado pequeña, señales de error espúreas pueden provocar la saturación del actuador lo que provocará el reseteo accidental del integrador. La constante de tiempo de seguimiento T_t debe ser mayor que T_d y menor que T_i . Una regla práctica que ha sido propuesta, consiste en elegir $T_t = \sqrt{T_i T_d}$.

Controladores con Modo de Seguimiento

Se puede interpretar que un controlador con cálculo retrógrado posee dos modos de operación: el *modo normal de control* cuando opera como un controlador ordinario lineal, y el *modo de seguimiento* al operar en presencia de saturación del actuador. La Fig. 23 muestra un módulo PID con seguimiento. Nótese que el cambio de modo es automático ya que el modo de seguimiento queda inhibido cuando la señal w es igual a la salida del controlador. Es decir que no se requiere de una lógica para el control modal, lo que resulta especialmente ventajoso para la implementación de sistemas complejos de control en cascada.

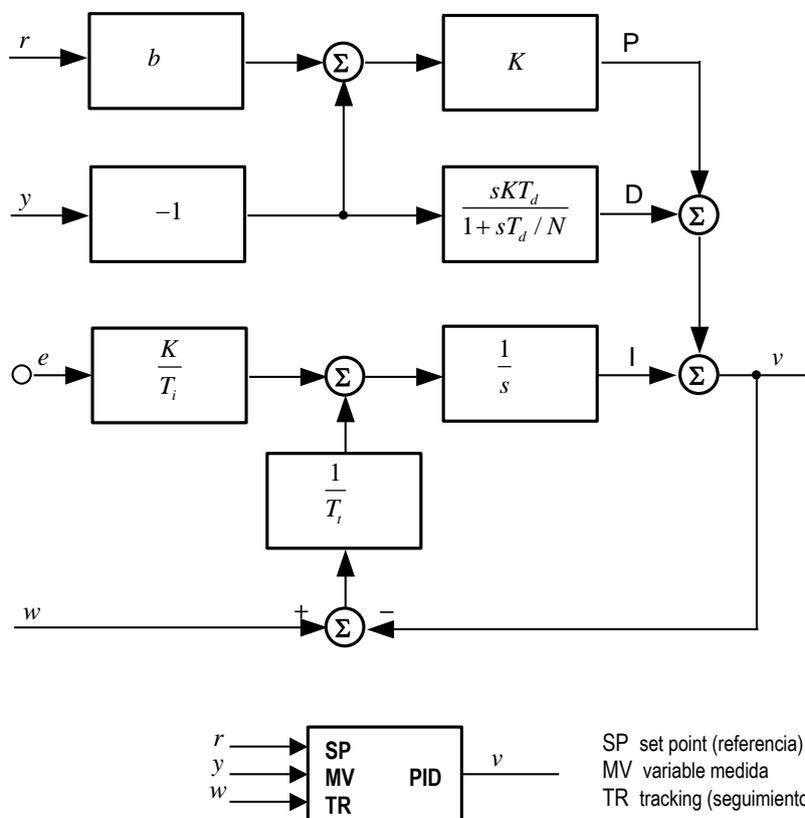


Fig. 23. Diagrama en bloques y representación simplificada de un módulo PID con seguimiento.

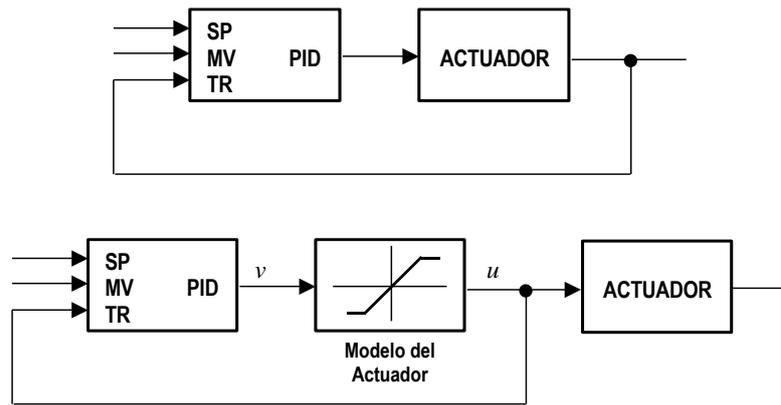


Fig. 24. Alternativas de utilización de un módulo PID con seguimiento.

En la Fig. 24 hemos representado las alternativas de uso de un módulo PID con seguimiento, cuando la salida del actuador es medible o bien cuando se emplea un modelo del funcionamiento del actuador.

Ajuste de Parámetros (*Tuning*)

Todos los métodos generales de diseño pueden ser aplicados para el control PID. Una cantidad de métodos han sido desarrollados especialmente para los controladores PID y éstos son, en general, denominados métodos de ajuste o sintonía (*tuning*).

Ampliamente conocidos son los métodos desarrollados por Ziegler y Nichols*, que han marcado su influencia sobre la práctica del control industrial por más de medio siglo. Si bien los resultados que brindan son moderadamente buenos, su difusión se debe a su extrema simplicidad, ya que se basan en la caracterización del proceso mediante unos pocos parámetros y el empleo de ecuaciones de ajuste muy sencillas.

Método de Ziegler-Nichols en base a la Respuesta al Escalón

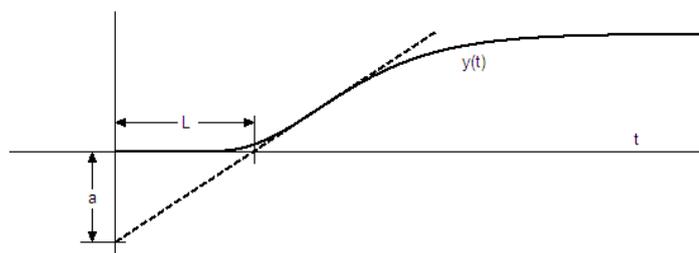


Fig. 25. Caracterización de la respuesta al escalón según Ziegler-Nichols

* "Optimum Settings For Automatic Controllers" – es el nombre de una de las más importantes publicaciones en la historia de la automatización, la instrumentación y los sistemas de control. Escrito por J.G. Ziegler and N.B. Nichols y publicado en la edición de Noviembre de 1942 de las *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, este paper fue originalmente presentado en la convención de ASME en Diciembre de 1941. Por aquellos días Ziegler y Nichols eran compañeros de trabajo en la firma Taylor Instrument Companies (Rochester, NY). Un facsímil del original puede obtenerse accediendo a www.driedger.ca/Z-N/Z-n.pdf.

Uno de los métodos de ajuste de Ziegler-Nichols se basa en la información obtenida acerca del proceso a partir de un ensayo de respuesta al escalón en lazo abierto. La respuesta $y(t)$ es caracterizada por tan sólo dos parámetros a y L que se determinan en base a la tangente de máxima pendiente a la curva $y(t)$, tal como se muestra en la Fig. 25.

Los parámetros para cada tipo de controlador definidos por Ziegler y Nichols en base al ensayo de lazo abierto, se muestran en la Tabla 1. En la misma tabla se muestra el valor estimado del período de oscilación T_p del sistema a lazo cerrado.

Controlador	K	T_i	T_d	T_p
P	$1/a$			$4L$
PI	$0.9/a$	$3L$		$5.7L$
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$	$3.4L$

Tabla 1. Parámetros de controladores según Ziegler-Nichols en base a la respuesta al escalón.

Método de Ziegler-Nichols en base a la Respuesta en Frecuencia

Un segundo método también desarrollado por Ziegler y Nichols se basa en una muy simple caracterización de la respuesta en frecuencia del proceso controlado. El diseño se funda en el conocimiento de un único punto del lugar de Nyquist del proceso: el punto donde $P(j\omega)$ corta por primera vez al eje real negativo, que corresponde a la frecuencia ω_{180} (ver Fig. 26). Los parámetros de este punto pueden ser determinados experimentalmente de la manera siguiente: conéctese un controlador puramente proporcional cerrando el lazo del proceso e increméntese suavemente la ganancia hasta que el sistema comienza a oscilar. La ganancia para la cual ocurre esto es K_0 y el período de oscilación que se registra es T_0 . Los parámetros del controlador sugeridos por Ziegler y Nichols son los que se consignan en la Tabla 2, donde también se indica un valor aproximado del período T_p del modo dominante de la respuesta del sistema a lazo cerrado.

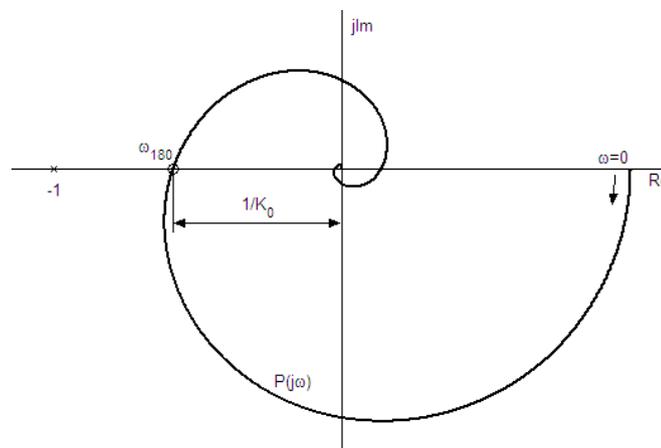


Fig. 26. Caracterización de la respuesta en frecuencia según Ziegler-Nichols.

Controlador	K	T_i	T_d	T_p
P	$0.5 K_0$			T_0
PI	$0.4 K_0$	$0.8 T_0$		$1.4 T_0$
PID	$0.6 K_0$	$0.5 T_0$	$0.125 T_0$	$0.85 T_0$

Tabla 2. Parámetros de controladores según Ziegler-Nichols en base a la respuesta en frecuencia.

Discusión de los Métodos Presentados

Las reglas de ajuste de Ziegler y Nichols fueron desarrolladas para brindar una buena atenuación de perturbaciones a lazo cerrado. Los métodos se basaron en simulaciones extensivas, y el criterio de diseño empleado es el conocido como *atenuación de un cuarto de amplitud*, es decir que la amplitud de una oscilación ha de ser reducida en un factor de cuatro luego de transcurrido un período de la onda. Ésto corresponde a un factor de amortiguamiento $\zeta=0.2$ para los polos dominantes de lazo cerrado, lo que brinda una performance muy franciscana en su pobreza.

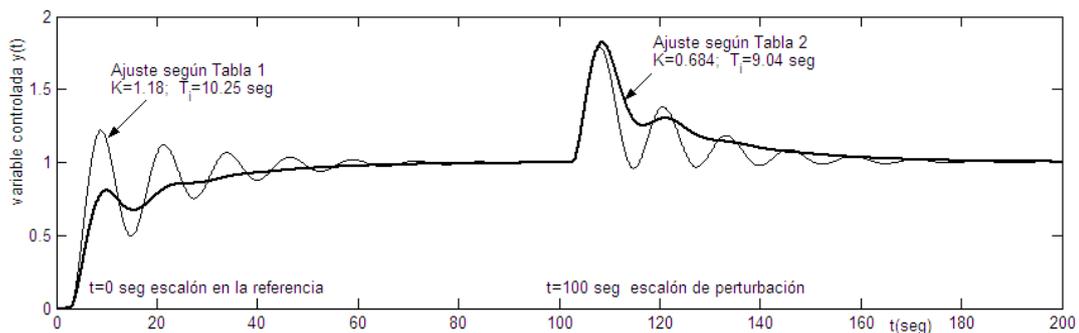


Fig. 27. Comparación de los métodos de Ziegler-Nichols. El proceso es $P(s)=e^{-2s}/(1+s)^4$. La respuesta al escalón es la mostrada en la Fig. 25, y la curva de Nyquist es la de la Fig. 26. El controlador es PI. Se muestran las respuestas a un escalón en la variable de referencia para $t=0$ seg, seguido de una perturbación de carga en $t=100$ seg.

Contemplando la Fig. 27, se nos ocurre pensar que ningún ingeniero de control de la década de 1950 puede haberse sentido feliz con las respuestas temporales que obtenía al aplicar los métodos de Ziegler-Nichols. La pregunta que surge es: ¿qué razón subyacía y/o subyace a la popularidad de estos procedimientos, en vista de la tristeza que dimana de los resultados obtenidos de su aplicación? La respuesta es elemental: la sim- pli- ci- dad. Tanto el método de respuesta al escalón, como el basado en la respuesta en frecuencia, son sumamente fáciles de aplicar y los resultados obtenidos constituyen un punto de partida confiable (¡magister Ziegler dixit!), para que el ingeniero de planta ejercite la habilidad de sus neuronas, a fin de lograr mejoras palpables en la salida del proceso.

Lo que acabamos de mencionar, justifica una pequeña digresión: no fueron Ziegler y Nichols los únicos en incursionar por el florido prado de las fórmulas sintéticas que pretenden brindar una panacea al problema de la sintonía de los lazos de control... Si damos una ojeada a la literatura del último medio siglo en esta área, nos encontramos con textos, como el enciclopédico de W. Oppelt, donde se describen los métodos de: Cohen y Coon; Chien, Hrones y Reswick; Hazebroek y Van der Waerden; Oldenburg y Sartorius; Takahashi; Ziegler y Nichols; etc. (ref. [11], págs. 467-471).

Los controladores diseñados mediante las reglas de Ziegler-Nichols dan origen a sistemas de lazo cerrado de muy pobre robustez. Analizando las reglas con más atención, comprobamos que tan solo dos parámetros no son suficientes para caracterizar la dinámica de un proceso. Recientemente se han desarrollado reglas, casi tan simples como las de Ziegler y Nichols que proporcionan controladores robustos con buen rechazo de perturbaciones, basadas en la caracterización del proceso mediante un conjunto de tres parámetros.

AMIGO - un Método Mejorado de Ajuste por Respuesta al Escalón

El procedimiento que describiremos a continuación, caracteriza mediante tres parámetros la respuesta al escalón del proceso. El método, basado en consideraciones de robustez y presentado en [12], es aplicable a procesos esencialmente monótonos, cuyas respuestas al escalón unitario se muestran en la Fig. 28. Resulta indispensable contar con una definición clara del concepto de *monotonidad esencial* para poder decidir en base a la respuesta al escalón si un proceso posee esta propiedad. Sea $g(t)$ la respuesta impulsiva de un proceso estable. El parámetro

$$m = \frac{\int_0^{\infty} g(t) dt}{\int_0^{\infty} |g(t)| dt} \quad (22)$$

se denomina índice de monotonicidad. El valor del índice se encuentra entre 0 y 1 y vale $m=1$ si la respuesta al escalón es estrictamente monótona. Diremos entonces que un proceso es esencialmente monótono, si el índice es mayor que un valor que un valor especificado, $m=0.8$.

Existe una dificultad con la definición (22) para procesos con integración, ya que en estos casos siempre resulta $m=1$. Dado que únicamente la parte inicial de la respuesta al escalón resulta relevante para el diseño del controlador, puede aplicarse la definición (22) limitando el tiempo de integración a un tiempo final dado, por ejemplo $10L$, donde L es el tiempo muerto que se define más adelante en la Ec.(23).

Observando la Fig. 28 constatamos que los procesos A, B y D poseen respuesta estrictamente no decreciente. El proceso B posee un tiempo muerto o retardo puro. Los procesos C y E poseen ceros en el semiplano derecho, lo que origina las respuestas inicialmente decrecientes. El proceso F es moderadamente oscilatorio. Tanto D como E son procesos integrantes.

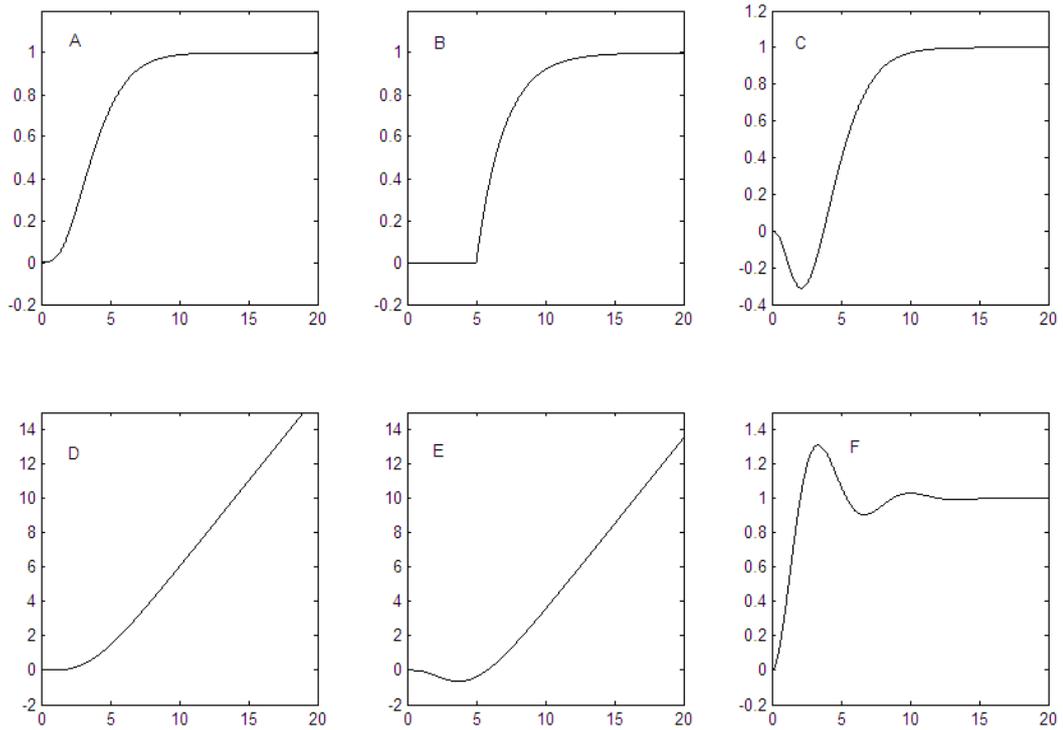


Fig. 28. Respuestas al escalón de procesos esencialmente monótonos.

Para procesos oscilatorios del tipo F, el índice de monotonicidad es función del amortiguamiento relativo ζ . En la Fig. 29 se puede verificar que, para valores $\zeta > 0.57$ es $m > 0.8$.

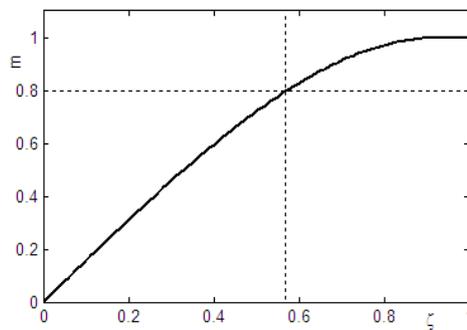


Fig. 29. Índice de monotonicidad como función de ζ para procesos con función de transferencia $G(s)=1/(s^2+2\zeta s+1)$.

El método de diseño se basa en maximizar la ganancia de integración del controlador PI, sujeto a una restricción de robustez definida por el módulo máximo de la función de sensibilidad M_S . Un rango razonable es $M_S \in (1.2, 2.0)$ obteniéndose para valores menores una mejora en la robustez, penalizada por una reducción del rechazo de perturbaciones de carga.

Adoptando $M_S = 1.4$ y aplicando el procedimiento descrito en [12] y [13] para un conjunto de funciones de transferencia con respuesta al escalón esencialmente monótonas del tipo de la Fig. 28, se sistematizaron un conjunto de reglas de ajuste para controladores PI denominadas *AMIGO* (del inglés *Approximated M_S -constrained Integral Gain Optimization*). Estas reglas se basan en

caracterizar los procesos mediante tres parámetros: ganancia estática K_p , constante de tiempo aparente T y tiempo muerto o retardo aparente L , obtenibles de la respuesta al escalón (Fig. 30).

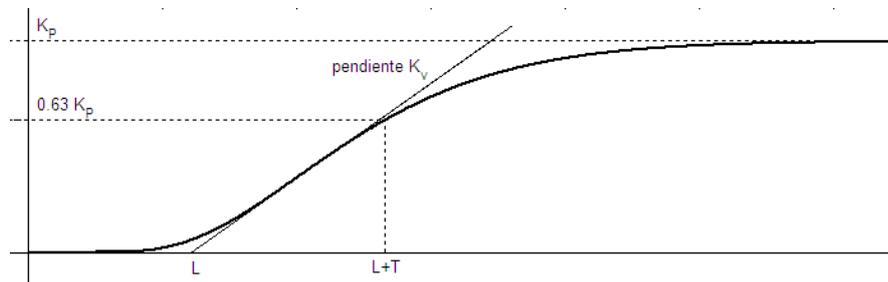


Fig. 30. Respuesta al escalón unitario de un proceso y procedimiento empleado para determinar los parámetros K_p , T , L y K_v .

Los procesos con integración no poseen ganancia estática. Dichos procesos son caracterizados por el tiempo muerto aparente L y la máxima pendiente de la respuesta $K_v = K_p/T$. En definitiva, se supone que los procesos son representables mediante las funciones de transferencia elementales:

$$G_1(s) = \frac{K_p}{1 + sT} e^{-sL} \quad \text{para procesos sin integración,} \quad (23)$$

$$G_2(s) = \frac{K_v}{s} e^{-sL} \quad \text{para procesos integrantes.} \quad (24)$$

Las reglas de ajuste para el controlador PI se expresan en función del retardo de tiempo relativo

$$\tau = \frac{L}{L+T} \quad (25)$$

Para procesos estables (no integrantes), valen las fórmulas de cálculo de la ganancia proporcional:

$$K = \begin{cases} \frac{0.35}{K_v L} - \frac{0.6}{K_p}, & \text{para } L < T/6 \\ \frac{0.25T}{K_p L}, & \text{para } T/6 < L < T \\ \frac{0.1T}{K_p L} + \frac{0.15}{K_p}, & \text{para } T < L \end{cases} \quad (26)$$

Para procesos integrantes el tiempo de retardo relativo es $\tau=0$, y la ganancia estática es infinita.

Por lo tanto la regla (26) se reduce a $K = \frac{0.35}{K_v L}$.

Para el cálculo del tiempo de integración T_i valen las expresiones

$$T_i = \begin{cases} 7L, & \text{para } L < 0.11T \\ 0.8T, & \text{para } 0.11T < L < T \\ 0.3L + 0.5T, & \text{para } T < L \end{cases} \quad (27)$$

La regla (27) también incluye los procesos integrantes. Como para éstos se tiene $T = \infty$, resulta $T_i = 7L$.

El empleo de acción derivadora, es decir la implementación de controladores PID, es particularmente conveniente en procesos con valores de τ por debajo de 0.5 ya que la ganancia de integración puede ser incrementada por sobre los valores de la expresión (27). Si bien en [3] se demuestra que no resulta posible formular reglas óptimas para controladores PID basados en los modelos sencillos (23) y (24), es factible hallar expresiones conservativas y robustas. Así para procesos no integrantes se estipula

$$K = \frac{1}{K_p} \left(0.2 + 0.45 \frac{T}{L} \right); \quad T_i = \frac{0.4L + 0.8T}{L + 0.1T} L; \quad T_d = \frac{0.5LT}{0.3L + T} \quad (28)$$

y para procesos integrantes, las (28) se describen como

$$K = 0.45/K_v; \quad T_i = 8L; \quad T_d = 0.5L \quad (29)$$

Aplicaremos los valores obtenidos al proceso $P(s) = e^{-2s}/(1+s)^4$ ya tratado en las Figs. 25, 26 y 27, para el cual hemos comprobado que las reglas de Ziegler-Nichols no conducían a resultados aceptables. Sobre la respuesta al escalón de la Fig. 25 podemos determinar los valores $K_P=1$; $L=3.42s$; $L+T=6.34s$; $T=2.92s$; con lo que resulta $\tau=0.54$. De las (26) y (27) resulta

$$K = \frac{0.1T}{K_p L} + \frac{0.15}{K_p} = 0.235$$

$$T_i = 0.3L + 0.5T = 2.486s$$

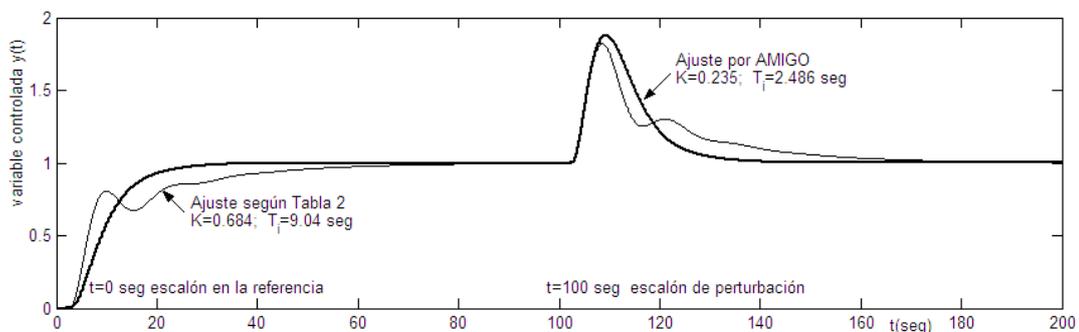


Fig. 31. Respuesta temporal para el proceso $P(s) = e^{-2s}/(1+s)^4$ con controlador PI ajustado según el procedimiento AMIGO. Para comparación se muestra la repuesta obtenida por las reglas de Ziegler-Nichols de respuesta en frecuencia .

Siendo por otra parte $\tau = 0.54 > 0.5$, no se obtienen mejoras sensibles utilizando un controlador PID como puede verificarse con una sencilla simulación.

No podemos cerrar este apartado sin mencionar la aplicación de técnicas avanzadas al cálculo de los parámetros PID. En la referencia [14] se realiza la aplicación de procedimientos de algoritmos genéticos para el cálculo de los ajustes optimizados*.

Implementación en Computadora Digital

Un sistema controlado por computadora posee la estructura general que se muestra en la Fig. 32. Está constituido por el proceso a controlar (sistema continuo en el tiempo, cuyas señales de entrada y salida son funciones continuas del tiempo); un muestreador junto con un convertor analógico-digital discretiza en el tiempo y cuantifica la señal de salida del proceso (y), conformando los datos de entrada al algoritmo de control implementado en una computadora digital. El algoritmo calcula el valor numérico de la variable de control (u) que es transformado en una señal continua mediante un convertidor digital-analógico dotado de un dispositivo de retención (*hold*).

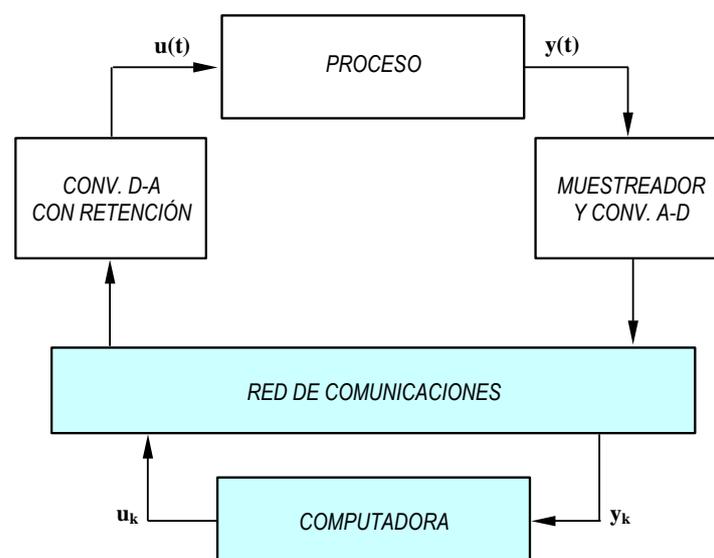


Fig. 32. Esquema de un sistema controlado por computadora.

Las comunicaciones entre el proceso o, expresándolo con precisión, entre los convertidores A-D y D-A y la computadora se realiza mediante un enlace de datos o una red de datos. Por cierto, todas las operaciones utilizan para su sincronización el reloj de la computadora y son gobernadas por medio de un sistema operativo en tiempo real.

* El interesado puede acceder a www.genetic-programming.com/hc/pidtuningrules.html para más detalles.

Utilizando una computadora digital para implementar las leyes de control, la secuencia ideal de operaciones es la siguiente:

1. Esperar la señal de interrupción de reloj
2. Convertir y leer la señal de entrada analógica (y)
3. Calcular la señal de control (u)
4. Actualizar la señal analógica de control
5. Actualizar las variables internas del controlador
6. Ir a 1.

Con esta implementación se minimiza el retardo de cálculo. Dependiendo del sistema operativo en tiempo real y de los tiempos de conversión A-D y D-A, el retardo de cálculo o retardo computacional puede variar de muestra a muestra. Ello puede hacerse aún más pronunciado si el algoritmo de control incluye pasos iterativos u optimizaciones. Una manera de reducir la variación en el retardo de cálculo es introducir un paso entero de muestreo como retardo del controlador haciendo $u(t_k) = \Phi[y(t_{k-1})]$, (ver Fig. 33-B). El retardo de cálculo se hace así más determinístico, pero también más prolongado, lo que en general no es bueno para la performance del sistema a lazo cerrado. En cada caso particular deberá efectuarse un análisis de la influencia del retardo de cálculo y sus variaciones sobre el comportamiento del sistema.

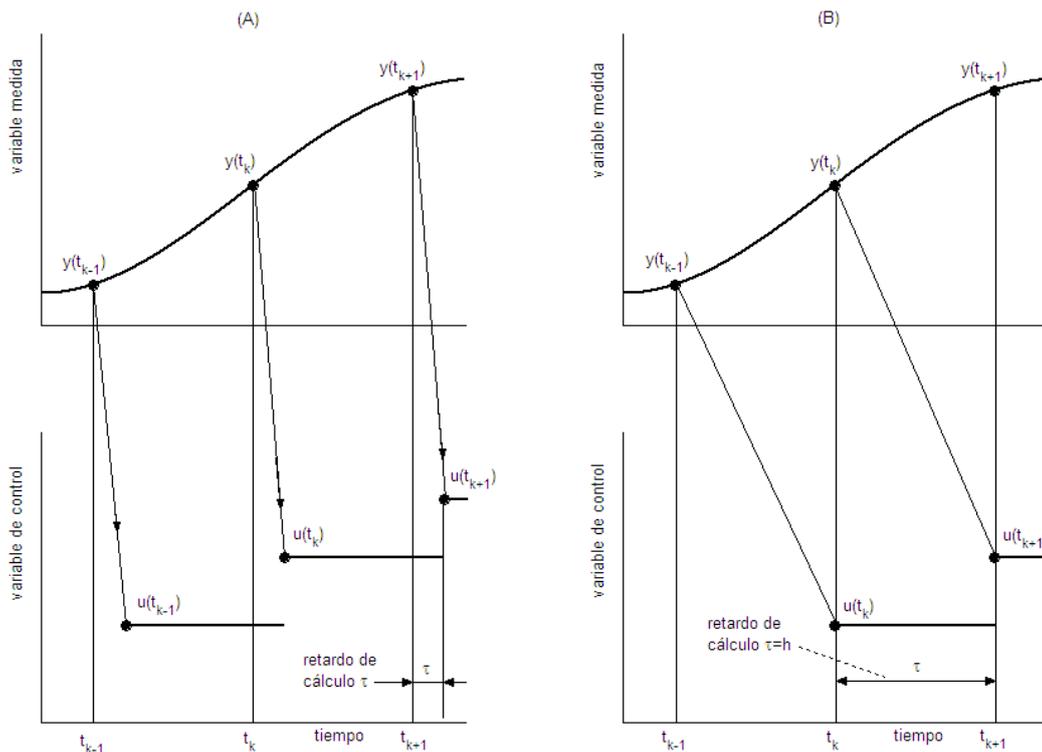


Fig. 33. Dos maneras de sincronizar señales de entrada y salida. En (A) las señales de control son aplicadas inmediatamente luego de ser calculadas; en (B) la señales medidas en el instante t_k son empleadas para calcular la señal que será aplicada en el instante t_{k+1} . $h = t_k - t_{k-1}$ es el período de muestreo.

Problemas derivados del muestreo

La interacción entre señales continuas y discretas vuelven variantes en el tiempo a los sistemas muestreados. Supóngase en la Fig. 32 que una perturbación se sumara a la salida del proceso. La

invariancia temporal requiere que un desplazamiento en el tiempo de la excitación de un sistema dé por resultado un desplazamiento similar en su respuesta. Dado que la conversión A-D está gobernada por un reloj, el sistema reaccionará de manera diferente si la perturbación es desplazada en el tiempo. El sistema se mantendrá invariante en el supuesto que todos los cambios en las variables del sistema, entradas y perturbaciones se sincronizan con los instantes de muestreo. Recíprocamente, si la frecuencia de muestreo es suficientemente elevada con respecto a las frecuencias propias de la dinámica del sistema y sus perturbaciones, el sistema muestreado podrá considerarse como invariante.

Si las señales senoidales $\sin(1.8\pi t - \pi)$ y $\sin(0.2\pi t)$ que se grafican en la Fig. 34 son muestreadas a la frecuencia $\omega_s=2\pi/h$, con $h=1$; desde el punto de vista de la señal muestreada las sinusoides no pueden ser distinguidas entre sí.

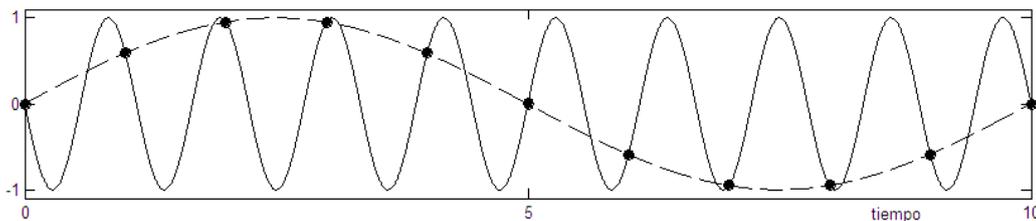


Fig. 34. Para un período de muestreo $h=1$, las señales de 0.1Hz (línea de puntos) y 0.9Hz (línea continua) poseen los mismos valores en los instantes de muestreo. Desde el punto de vista de la señal muestreada, la sinusoides de 0.9Hz produce un “alias” de 0.1Hz.

El muestreo es entonces una operación no lineal y acarrea pérdidas de información, en cuanto no está garantizada la reconstrucción de la señal continua original a partir de la señal muestreada. El ejemplo que acabamos de analizar, puede comprenderse mejor, si consideramos dos señales senoidales

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin(\omega t) \\ f_2(t) &= \sin(\omega t \pm n\omega_s t) \end{aligned} \quad (30)$$

donde $\omega_s=2\pi/h$ es la frecuencia de muestreo y n un entero cualquiera. En los instantes de muestreo ($t = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$) se tendrán las señales discretas en el tiempo

$$\begin{aligned} f_1(kh) &= \sin(\omega kh) \\ f_2(kh) &= \sin\left(\omega kh \pm n \frac{2\pi}{h} kh\right) = \sin(\omega kh) \cdot \cos(2\pi nk) \pm \cos(\omega kh) \cdot \sin(2\pi nk) \end{aligned} \quad (31)$$

es decir: $f_2(kh) = \sin(\omega kh) = f_1(kh)$

En definitiva, el muestreo produce un plegado del dominio de frecuencias (*frequency folding*) alrededor de ω_s . Una de los modos en que puede expresarse el teorema de Shannon o teorema del muestreo, establece que una señal continua puede ser reconstruida a partir de su versión muestreada, si la frecuencia de muestreo es como mínimo el duplo de la componente de mayor frecuencia que forma parte del espectro de la señal continua [$\omega_s/2 \geq \omega_{max}$].

El ruido de los sensores puede dar origen a señales muestreadas espúreas o alias de baja frecuencia que al confundirse con la dinámica propia del proceso, originen perturbaciones en el

funcionamiento a lazo cerrado. Resulta entonces necesario insertar *antes* del convertidor A-D un filtro *analógico* (filtro ‘*anti-alias*’) que limite convenientemente el ancho de banda de la señal $y(t)$ por debajo de la frecuencia de Nyquist ($\omega_s/2$). La dinámica de este filtro deberá considerarse en conjunto con la dinámica del proceso para un correcto diseño del sistema de control.

Del siguiente ejemplo, puede extraerse una idea indicativa de la relación entre el ancho de banda del prefiltro anti-alias y la frecuencia de muestreo. Supóngase que la configuración elegida para el filtro sea Butterworth de segundo orden*, que el ancho de banda sea ω_b y que se desea que el filtro atenúe por un factor de 16 ($1/16 \cong -24\text{db}$) las señales de la frecuencia de Nyquist ($\omega_s/2$). Se tendrá así:

$$\left(\frac{\omega_s/2}{\omega_b}\right)^2 = 16 \quad \text{por lo tanto} \quad \omega_b = \frac{1}{8} \omega_s . \quad (32)$$

En consecuencia, la frecuencia del modo dominante del sistema a lazo cerrado se encontrará bien por debajo de $\omega_s/8$. Generalizando, si $1/G_{\omega_N}$ es la atenuación del filtro a la frecuencia de Nyquist, resultará el ancho de banda $\omega_b = \omega_s \sqrt{G_{\omega_N}}/2$.

Dispositivos de Retención

La manera más simple y común de reconstruir una señal muestreada es hacer que la salida del dispositivo de retención se mantenga constante hasta el advenimiento del próximo valor muestreado. Al circuito así instrumentado se lo denomina dispositivo de retención de orden cero (‘*zero-order hold*’) ya que la señal continua de salida es un polinomio de orden cero entre los instantes de muestreo. Si $f(kh)$ representa la señal discreta muestreada con período h , entonces la señal reconstruida a la salida del dispositivo de retención de orden cero será $f(t)$ dada por

$$f(t) = f(kh); \quad kh \leq t < kh + h \quad (33)$$

Un inconveniente del dispositivo de retención de orden cero es que su salida es discontinua (ver Fig. 35). Estas discontinuidades pueden excitar modos dinámicos pobremente amortiguados del proceso, como así también provocar desgaste en los actuadores del sistema. Una manera de hacer continua la salida es utilizar un dispositivo de retención de primer orden (‘*first-order hold*’). La señal entre los instantes de muestreo es ahora una interpolación lineal. La señal reconstruida podrá expresarse

$$f(t) = f(kh) + \frac{t - kh}{h} [f(kh + h) - f(kh)]; \quad kh \leq t < kh + h \quad (34)$$

Nótese que la reconstrucción (34) *no es causal* dado que $f(kh + h)$ debiera encontrarse disponible en el instante kh . El valor de $f(kh + h)$ puede ser reemplazado por una predicción fácilmente calculable en base a una extrapolación.

* Butterworth de segundo orden es una configuración anti-alias muy difundida. En casos críticos pueden ser seleccionados filtros de orden superior o bien de configuraciones alternativas (Tschebyscheff, elípticos, etc.).

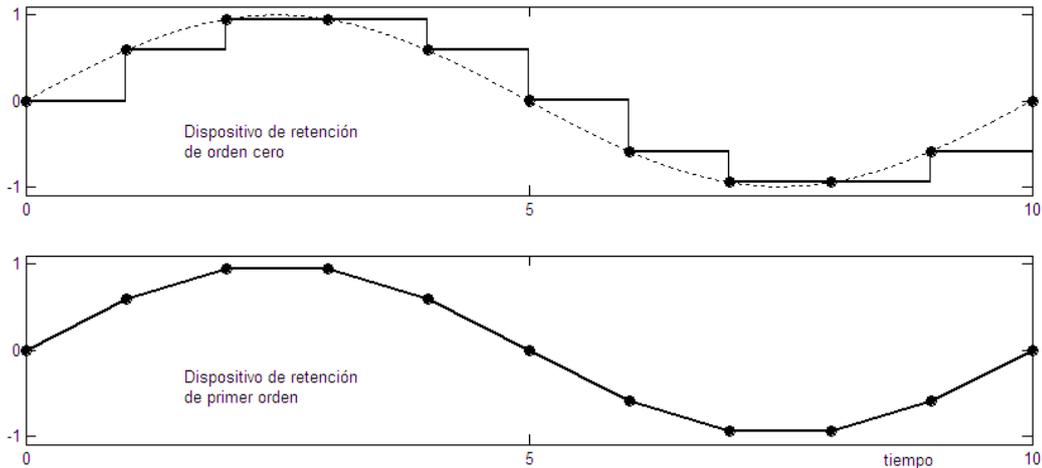


Fig. 35. Muestreo y reconstrucción de una señal senoidal empleando dispositivos de retención de orden cero y de primer orden, para un período de muestreo $h = 1$. Los instantes de muestreo se indican mediante puntos.

Si bien la Fig. 35 muestra la innegable ventaja de utilizar un dispositivo de retención de primer orden cuando la señal de entrada es suave, no debemos perder de vista que es un resultado meramente académico, ya que una implementación causal del dispositivo manifestará discontinuidades originadas en la extrapolación, pues en (34) se realiza el reemplazo de $f(kh + h)$ por la aproximación

$$\hat{f}(kh + h) = f(kh) + \frac{f(kh) - f(kh - h)}{h} h$$

$$\hat{f}(kh + h) = 2f(kh) - f(kh - h)$$

con lo que la señal reconstruida es ahora

$$f(t) = f(kh) + \frac{t - kh}{h} [f(kh) - f(kh - h)]; \quad kh \leq t < kh + h \quad (35)$$

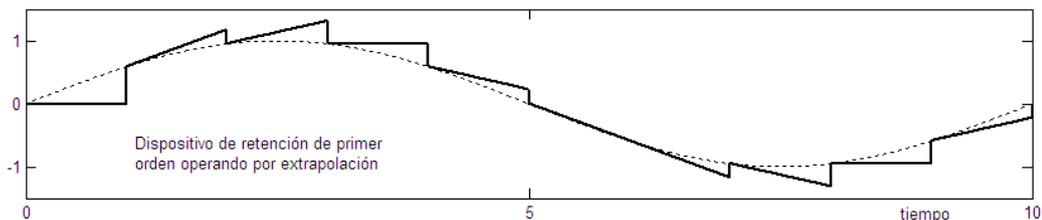


Fig. 36. Reconstrucción de una señal senoidal mediante un dispositivo de retención de primer orden realizado con extrapolación.

Por cierto, la reconstrucción de señales tanto con dispositivos de orden cero como con los de primer orden, alcanza mayor precisión cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo con respecto de la frecuencia de la señal. Si llamamos $f_r(t)$ a la señal reconstruida a la salida de un dispositivo de retención correspondiente a la señal original $f(t) = \sin(\omega t)$, entonces la reconstrucción será tanto más precisa cuanto menor sea el error cuadrático promediado en el período $T = 2\pi/\omega$ de la señal.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \int_0^T (f_r - f)^2 dt = \bar{\varepsilon}(h/T) \quad (36)$$

En la figura se muestra el error $\bar{\varepsilon}$ correspondiente a los dispositivos de retención de orden cero y de primer orden con extrapolación calculado para un intervalo de valores de la relación entre la frecuencia de muestreo y la frecuencia de la señal.

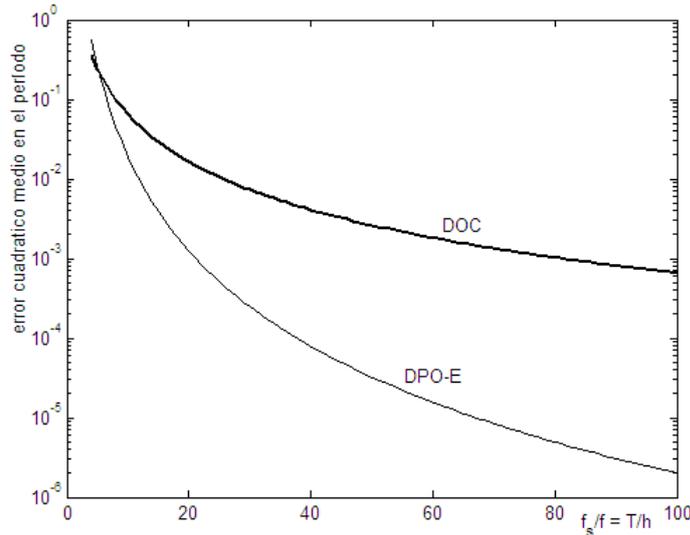


Fig. 37. Errores cuadráticos según (36) para un dispositivo de orden cero (DOC) y uno de primer orden con extrapolación (DPO-E).

Viendo las formas de onda de las Figs. 35 y 36, no nos sorprende comprobar que para frecuencias de muestreo bajas el error sea mayor para el dispositivo de primer orden que para el de orden cero. Para relaciones de frecuencia de muestreo de 20:1 y superiores, el error para el dispositivo de primer orden es por lo menos un orden de magnitud inferior al de orden cero.

Para concluir, no podemos dejar de insistir en el concepto de derivación que se encuentra implícito en la operación de extrapolación: como consecuencia de ello aparece la necesidad de guardar estrictas precauciones cuando se pretenda utilizar un dispositivo de retención de primer orden en presencia de señales ruidosas.

Discretización de la Ley de Control

Para implementar una ley de control tal como PID en una computadora digital, es necesario formular aproximaciones discretas de la derivada y de la integral que aparecen en la ley de control.

Acción Proporcional Recordando la (19), el término proporcional es

$$P(t) = K [br(t) - y(t)]$$

Este término se implementa reemplazando simplemente las variables continuas por sus versiones muestreadas,

$$P(t_k) = K [br(t_k) - y(t_k)] \quad (37)$$

donde t_k denota los instantes de muestreo, es decir los valores de tiempo para los cuales se leen las variables analógicas.

Acción Integradora El término integral es

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

y se deduce que

$$\frac{dI}{dt} = \frac{K}{T_i} e$$

Si se aproxima la derivada con una diferencia hacia adelante se obtiene

$$\frac{I(t_{k+1}) - I(t_k)}{h} = \frac{K}{T_i} e(t_k)$$

lo que nos conduce a la siguiente expresión recursiva para el cálculo del término integral

$$I(t_{k+1}) = I(t_k) + \frac{Kh}{T_i} e(t_k). \quad (38)$$

Acción Derivadora El término correspondiente al derivador en la expresión (15) es

$$D(s) = -\frac{sKT_d}{1 + sT_d/N} Y(s)$$

es decir:

$$\frac{T_d}{N} \frac{dD}{dt} + D = -KT_d \frac{dy}{dt}$$

que puede ser aproximada por la siguiente ecuación en diferencias

$$\frac{T_d}{N} \frac{D(t_k) - D(t_{k-1})}{h} + D(t_k) = -KT_d \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h}$$

y reordenando obtenemos

$$D(t_k) = \frac{T_d}{T_d + Nh} D(t_{k-1}) - \frac{KT_d N}{T_d + Nh} [y(t_k) - y(t_{k-1})] \quad (39)$$

La ventaja de emplear una expresión retrógrada es que el valor del factor $T_d/(T_d + Nh)$ se encuentra siempre comprendido en el intervalo $[0,1]$ lo que garantiza la estabilidad de la ecuación en diferencias.

Hemos entonces determinado que el controlador PID puede ser aproximado mediante las expresiones (40). Por cierto, estas expresiones constituyen quizás la más simple de las muchas discretizaciones posibles del algoritmo de control PID. La selección del método de discretización más adecuado constituye un problema de optimización en el que concurren, entre otros factores, la frecuencia de muestreo utilizada y las características dinámicas de los conversores A-D y D-A empleados.

$$\begin{aligned}
 P(t_k) &= K [br(t_k) - y(t_k)] \\
 e(t_k) &= r(t_k) - y(t_k) \\
 D(t_k) &= \frac{T_d}{T_d + Nh} \{D(t_{k-1}) - KN[y(t_k) - y(t_{k-1})]\} \\
 u(t_k) &= P(t_k) + I(t_k) + D(t_k) \\
 I(t_{k+1}) &= I(t_k) + \frac{Kh}{T_i} e(t_k)
 \end{aligned} \tag{40}$$

Algoritmos de Velocidad. El algoritmo descrito por las (40) se denomina *algoritmo posicional* porque su salida es la variable de control. En algunos casos el controlador está dispuesto de manera tal que su salida es proporcionada por un integrador (p.ej. un motor). En estos casos resulta natural modificar el algoritmo de modo que proporcione la velocidad de la variable de control (con mayor propiedad diríamos la derivada temporal de la variable de control). Un algoritmo de este tipo se denomina *algoritmo de velocidad*. La Fig. 38 muestra un diagrama de bloques analógicos de un algoritmo de velocidad.

Los algoritmos de velocidad se utilizaban en controladores antiguos construidos alrededor de motores (integradores mecánicos). En muchos casos, al cambiar la tecnología, los fabricantes retuvieron la estructura original para asegurar la compatibilidad con equipos preexistentes. Otra razón para el uso de algoritmos de velocidad es que facilitan la implementación de muchas cuestiones prácticas, tales como la protección anti-windup y la transición sin sacudidas ante cambios de parámetros. En implementaciones digitales los algoritmos de velocidad son también denominados *algoritmos incrementales*.

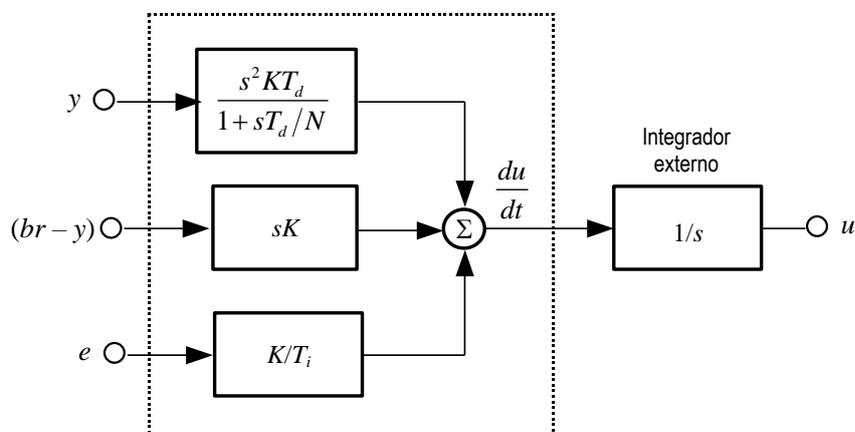


Fig. 38. Diagrama en bloques correspondiente a la representación analógica de un algoritmo de velocidad.

Algoritmo Incremental. La forma incremental del algoritmo PID puede ser obtenida calculando las diferencias temporales de la salida del controlador para luego sumar (integración discreta) estos incrementos.

$$\Delta u(t_k) = u(t_k) - u(t_{k-1}) = \Delta P(t_k) + \Delta I(t_k) + \Delta D(t_k) \quad (41)$$

En muchos casos la integración se realiza externamente. Esto resulta natural cuando se utiliza un motor paso-a-paso. Los incrementos de las partes proporcional, integradora y derivadora se calculan con facilidad a partir de las Ecs. (37) a (39):

$$\begin{aligned} \Delta P(t_k) &= K \{b[r(t_k) - r(t_{k-1})] - y(t_k) + y(t_{k-1})\} \\ \Delta I(t_k) &= \frac{Kh}{T_i} e(t_{k-1}) \\ \Delta D(t_k) &= a_d \Delta D(t_{k-1}) - b_d [y(t_k) - 2y(t_{k-1}) + y(t_{k-2})] \\ a_d &= \frac{T_d}{T_d + Nh}; \quad b_d = \frac{T_d KN}{T_d + Nh} \end{aligned} \quad (42)$$

Aspectos Operativos

Prácticamente todos los controladores pueden funcionar en dos modos: manual o automático. En el modo manual la salida del controlador es manipulada directamente por el operador, usualmente accionando botones que incrementan o decrementan la salida. Un controlador puede también operar en forma combinada con otros controladores (p.ej. en una conexión en cascada), o con elementos no lineales tales como multiplicadores o selectores: ello origina más modos operativos. Los controladores poseen parámetros que pueden ser ajustados durante la operación. Cuando se producen cambios de modos y/o de parámetros, es esencial evitar que se produzcan transitorios de conmutación, por lo que se deberá seleccionar un controlador con la estructura adecuada.

Transferencia sin sacudidas entre Manual y Automático. Dado que el controlador es un sistema dinámico, es necesario asegurar que el estado del sistema sea el correcto al conmutar el controlador de modo manual a modo automático: es decir que la salida calculada por el algoritmo de control sea igual a la señal generada manualmente. A esto se denomina ‘transferencia sin sacudidas’ (en inglés ‘*bumpless*’).

En la Fig. 39 se muestra una implementación que utiliza un integrador separado para sumar los cambios incrementales que produce el dispositivo manual. El diagrama contiene dos configuraciones del tipo anti-windup (recordar la Fig. 20) que aseguran el seguimiento de la salida manual por parte del controlador y viceversa.

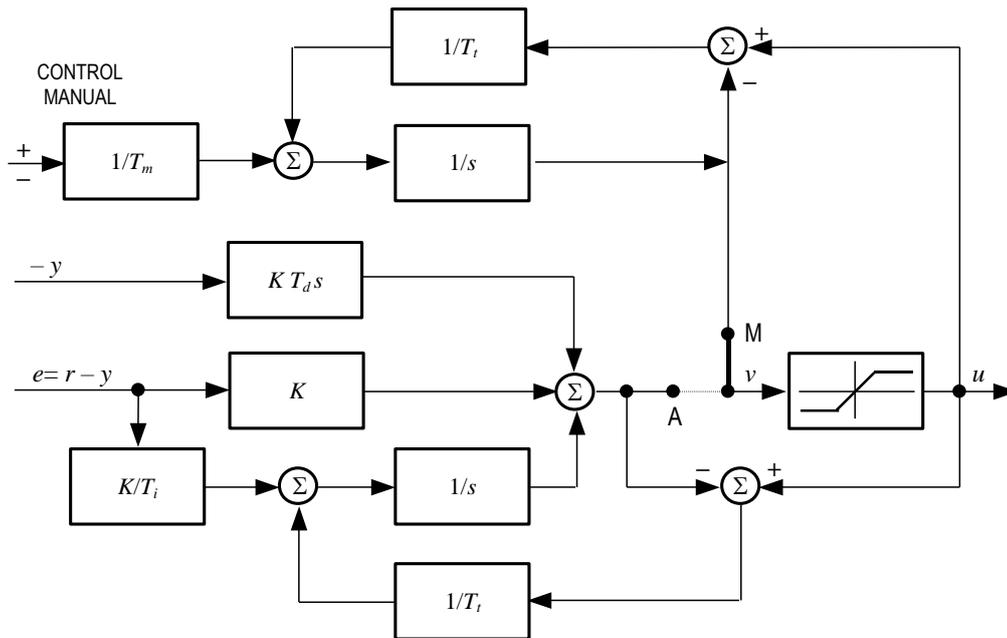


Fig. 39. Controlador PID que conmuta suavemente de modo manual (M) a modo automático (A).

Transferencia sin sacudidas ante Cambios de Parámetros. Una modificación de los parámetros del controlador se reflejará como un cambio en su variable de salida. Estos cambios son en general indeseables: para un controlador PID es natural el requerimiento de que no se originen cambios drásticos en la salida, si los parámetros son modificados cuando el error es cero. Esto será verdadero para todos los algoritmos incrementales ya que su salida es cero cuando su entrada es cero, independientemente de los valores de sus parámetros. Para un algoritmo de posición, ello dependerá de la implementación adoptada.

Si al implementar el algoritmo el estado interno del controlador es elegido como

$$x_I = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

el término integral resulta $I = \frac{K}{T_i} x_I$.

Todo cambio en K o en T_i dará por resultado un cambio en I . Para evitar sacudidas al modificar los parámetros, al implementar el término integrador, se deberá elegir el estado conforme a

$$x_I = \int_0^t \frac{K(\tau)}{T_i(\tau)} e(\tau) d\tau. \quad (43)$$

Un caso en particular requiere de especiales precauciones: es cuando se implementa la asignación de peso al punto de ajuste. En este caso es necesario que la cantidad $P + I$ sea invariante ante cambios en los parámetros. Ello conduce a que, cuando se cambian los parámetros, el estado I debe ser modificado de la manera siguiente:

$$I_{nuevo} = I_{viejo} + K_{viejo} (b_{viejo} r - y) - K_{nuevo} (b_{nuevo} r - y) \quad (44)$$

Tomando las adecuadas precauciones es entonces relativamente sencillo evitar sacudidas si los cambios en los parámetros se realizan cuando el error es nulo (operación en régimen).

Pseudocódigo de Computadora

A modo de ilustración, el siguiente es el pseudocódigo para un algoritmo PID basado en las Ecs.(40) . El controlador maneja tanto el *windup* como la transferencia sin sacudidas.

```

"Cálculo de coeficientes del controlador
bi=K*h/Ti                "ganancia de integración
ad=Td/(Td+N*h)          "ganancia derivativa
bd=K*N*Td/(Td+N*h)     "ganancia derivativa
ao=h/Tt                 "ganancia de seguimiento (tracking)

"Cambio de parámetros sin sacudidas
I=I+Kviejo*(bviejo*r-y)-K*(b*r-y)  "invariancia de P+I

"Algoritmo de control
r=adin(ch1)              "ingresar variable de referencia desde ch1
y=adin(ch2)              "ingresar variable del proceso desde ch2
P=K*(b*r-y)              "acción Proporcional
D=ad*D-bd*(y-yviejo)    "acción Derivativa
v=P+I+D                  "salida temporal para acción antiwindup
u=sat(v,umin,umax)      "simula saturación del actuador
daout(u,ch3)             "sacar variable de control u por ch3
I=I+bi*(r-y)+ao*(u-v)   "actualiza Integrador con antiwindup
yviejo=y                 "actualiza variable de proceso vieja

```

El cálculo de coeficientes debe realizarse sólo cuando se modifican los parámetros del controlador. El cálculo de ad , ao , bd , bi ahorra tiempo de ejecución del programa principal. El algoritmo de control debe ser ejecutado una vez por cada período de muestreo. Obsérvese que el pseudocódigo incluye en la derivación únicamente a la variable del proceso, emplea factor de peso para la variable de referencia e implementa anti-windup.

Conceptos sobre Ajuste Automático de Parámetros (*Autotuning*)

Por sintonía automática o ajuste automático de parámetros entendemos un método que posibilita, a demanda del usuario, el ajuste de los parámetros de un controlador en forma automática. El proceso se realiza por requerimiento del operador, ya sea oprimiendo un botón o enviando un comando al controlador. El *autotuning* queda entonces perfectamente diferenciado de las técnicas adaptativas, por aplicación de las cuales se realiza una modificación permanente de los parámetros para adecuarlos a las variaciones del proceso controlado.

En la literatura [1] se puede encontrar los detalles de toda una variedad de métodos empleados para la sintonía automática de controladores PID. En nuestro caso nos limitaremos analizar el método del relé, empleado para recabar información sobre el proceso y brindar los datos necesarios para la sintonía.

Utilizando procesos tradicionales de respuesta en frecuencia, la función de transferencia de un proceso se determina midiendo las respuestas de régimen a excitaciones senoidales. Una dificultad de este método radica en la selección *a priori* de frecuencias adecuadas para la señal de entrada. Un método especial en el que se genera la frecuencia apropiada de la señal de entrada en forma totalmente automática, consiste en insertar en el lazo de control una realimentación no lineal empleando un relé para inducir una oscilación de ciclo límite. Suponiendo el relé ideal, carente de histéresis, la frecuencia de la señal de entrada al proceso corresponde muy aproximadamente a la frecuencia ω_{180} de la condición “justo oscilante” en el método de Ziegler-Nichols.

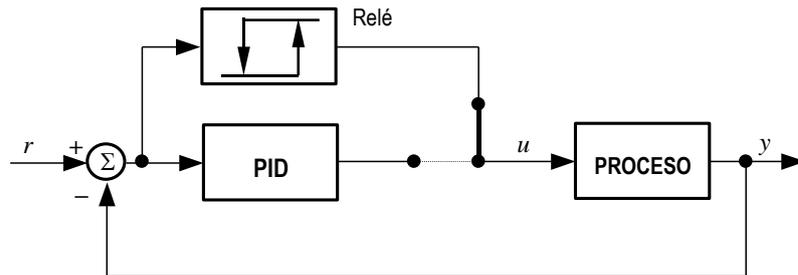


Fig. 40. Sintonizador a relé. En el modo de sintonía, el proceso es realimentado a través del relé.

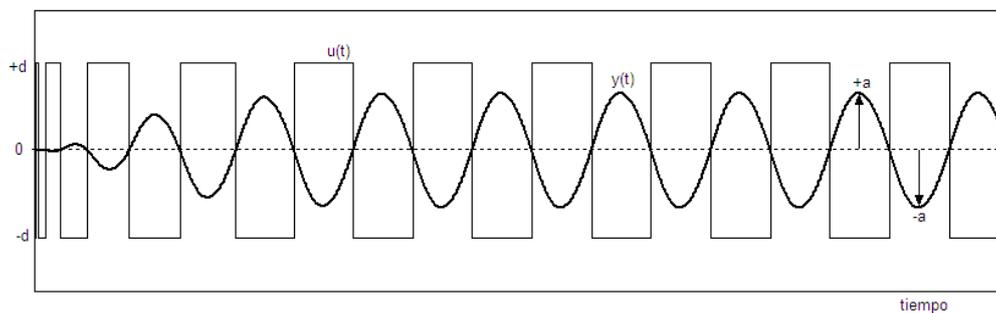


Fig. 41. Salida del relé (trazo fino) y variable del proceso, para un sistema realimentado a través de un relé ideal.

Para interpretar el funcionamiento, supongamos que la salida del relé es expandida en serie de Fourier y que el proceso atenúe eficazmente las armónicas de alta frecuencia. Resulta entonces suficiente considerar tan sólo la primera armónica de la entrada del proceso. La entrada y la salida se encuentran en contrafase, por lo que la frecuencia de oscilación es ω_{180} . Si d es la amplitud del relé (ver Fig. 41), la primera armónica de la onda cuadrada que excita al proceso vale $4d/\pi$. Sea a la amplitud de oscilación de la salida $y(t)$. La ganancia del proceso a ω_{180} está dada por

$$K_{180} = \frac{\pi a}{4d}; \quad (45)$$

K_{180} y ω_{180} definen un punto de la curva de respuesta en frecuencia del proceso, sobre la base del cual resultaría factible realizar una presintonía del controlador. Hemos visto al tratar las reglas de Ziegler-Nichols que dos parámetros son insuficientes para definir aceptablemente la dinámica de un proceso. Una manera de determinar mayor cantidad de puntos de la respuesta en frecuencia es utilizar un relé de histéresis ε y amplitud de salida d ajustables (Fig. 42).

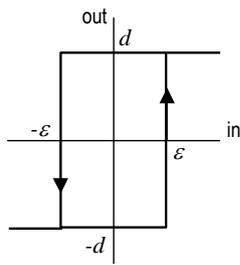


Fig. 42. Característica de transferencia de un relé.

Empleando también en este caso el concepto de aproximación de primera armónica, la función descriptiva inversa [15] correspondiente posee parte imaginaria no nula

$$-\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi}{4d} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} - j \frac{\pi\varepsilon}{4d} \quad (46)$$

y tanto la frecuencia como la amplitud de oscilación quedarán en este caso determinadas por la intersección de la curva de Nyquist del proceso con el lugar geométrico de (46).

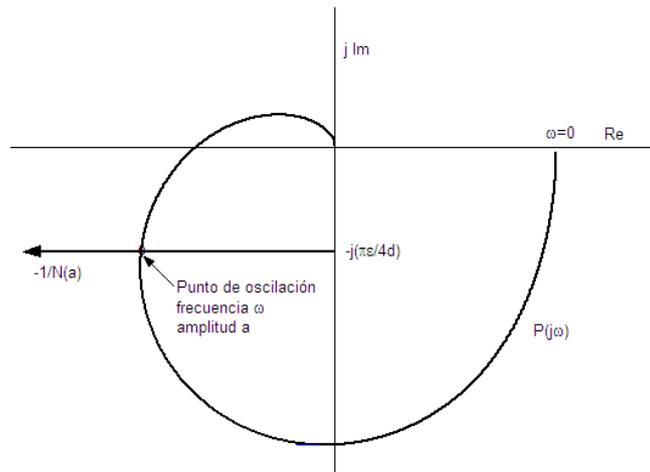


Fig. 43. Determinación de los parámetros de oscilación en base al lugar de Nyquist del proceso $P(j\omega)$ y la función descriptiva inversa del relé con histéresis.

De la Fig. 43 se observa que, variando la histéresis ε y la amplitud d de la salida del relé se pueden determinar múltiples puntos de la respuesta en frecuencia del proceso, utilizables para calcular los parámetros del controlador PID. No entraremos aquí en los detalles del algoritmo empleado, puesto que excedería el alcance de estas notas. Solamente hemos querido explicar los fundamentos de un método sencillo de sintonía automática.

Para Concluir

Tras esta breve, pero es de esperar –al decir de los antiguos– inspiradora, incursión por los feraces prados del PID, y habiendo lanzado una mirada a vuelo de pájaro (el lector puede elegir cuál) a la variedad de temas que se asocian al diseño e implementación de estos controladores, queda demostrada la hipótesis inexpresada pero subyacente a estas páginas: que el control PID en sus diferentes aspectos brinda un extenso campo de investigación y desarrollo al profesional interesado.

La bibliografía adjunta no es exhaustiva en modo alguno, pero no obstante brinda un punto de partida para comenzar a satisfacer las inquietudes del lector curioso.



Referencias Bibliográficas

- [1] A. Leva, C. Cox, A. Ruano: *Hands-on autotuning: a guide to better utilisation*. IFAC Professional Brief, 2005. www.ifac-control.org/publications/pbrief.htm
- [2] B. Wittenmark, K.J. Åström, K.E. Årzén: *Computer Control: an Overview*. IFAC Professional Brief, 2005. www.ifac-control.org/publications/pbrief.htm
- [3] K.J. Åström, T. Häggglund: *Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control*. Journal of Process Control, v.14 (2004), págs. 635-650.
- [4] L. Desborough, R. Miller: *Increasing customer value of industrial control performance monitoring – Honeywell's experience*. Sixth International Conference on Chemical Process Control, AIChE Symposium Series Number 326, vol. 98, 2002.
- [5] K.J. Åström, T. Häggglund: *The future of PID Control*. Control Engineering Practice, vol. 9 (2001), págs 1163-1175.
- [6] S.G. Akkermans, S.G. Stan: *Digital servo IC for optical disk drives*. Control Engineering Practice, vol. 9 (11) (2002), págs 1245-1253.
- [7] J.E. Jazni y colaboradores: *Servoacelerómetro de 1 Grado de Libertad con Rebalanceo Electrónico Analógico*. Comisión Nacional de Actividades Espaciales – Instituto Universitario Aeronáutico, Córdoba, 2000.
- [8] K.J. Åström: *Control System Design - Lecture Notes for ME155*. University of California at Santa Barbara. ©2002.
- [9] A.D. Lewis: *A Mathematical Approach to Classical Control*. Queen's University, Dept. Of Mathematics & Statistics. Kingston, Canada. Update 22/10/2004.
- [10] H.A. Latchman, O.D. Crisalle, V.R. Basker: *The Nyquist Robust Stability Margin – A New Metric for the Sability of Uncertain Systems*. International Journal of Robust and Nonlinear Control. Vol. 7, págs. 211-226 (1997).
- [11] W. Oppelt: *Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge*. Verlag Chemie GmbH, Weinheim/Bergstr., 1972.
- [12] T. Häggglund, K.J. Åström: *Revisiting the Ziegler-Nichols Tuning Rules for PI Control*. Asian Journal of Control, vol. 4, No. 4, (Dec. 2002), págs 364-380.
- [13] K.J. Åström, H. Panagopoulos, T. Häggglund,: *Design of PI Controllers based on Non-Convex Optimisation*. Automatica, vol. 34, No. 5, (1998), págs. 585-601.
- [14] Koza, Keane, Streeter, Mydlowec, Yu, Lanza: *Genetic Programming IV: Routine Human-Competitive Machine Intelligence*. Keuwer Academic Publishers, 2003.
- [15] K. Ogata: *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall Iternacional. México, 1976.

Non est ad astra mollis e terris via.