Buenas prácticas

Desarrollo de la Competencia de Modelización Matemática

Idalí Calderón
Mario Di Blasi
Viviana Cappello
Gabriela Tomazzeli
Milena Balbi
Natalia Cuello
Pablo Ochoa Rodirguez
Lucía Sacco
Hernán Martínez

Compilación:
Julieta Rozenhauz
Liliana Cuenca Pletsch

edUTecNe

Buenas prácticas

Desarrollo de la Competencia de Modelización Matemática

edUTecNe
Buenos Aires, 2023

Buenas prácticas: desarrollo de la competencia de modelización matemática / Idalí Calderón... [et al.] ; editado por Fernando Cejas.- 1a ed.- Ciudad Autónoma de Buenos Aires : edUTecNe, 2023.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-8992-26-6

1. Matemática. 2. Medios de Enseñanza. 3. Didáctica. I. Calderón, Idalí. II. Cejas, Fernando, ed.

CDD 510.711

Diseño de Tapa e interior: Fernando Cejas

Universidad Tecnológica Nacional – República Argentina
Rector: Ing. Rubén Soro
Vicerrector: Ing. Haroldo Avetta
Secretaria Cultura y Extensión Universitaria: Ing. Federico Olivo Aneiros

edUTecNe – Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional
Coordinador General a cargo: Fernando Cejas
Dirección General: Mg. Claudio Véliz
Dirección de Cultura y Comunicación: Ing. Pablo Lassave

Queda hecho el depósito que marca la Ley Nº 11.723

Sarmiento 440, Piso 6 (C1041AAJ)
Buenos Aires, República Argentina
Publicado Argentina – Published in Argentina

ISBN 978-987-8992-26-6

Prólogo

Idalí Carderón.

En la última década –y particularmente en Latinoamérica– la universidad, como ente de desarrollo, formación y cambio, ha sufrido transformaciones sustanciales. Ha habido –y continúan apareciendo– reformas curriculares, cambios metodológicos –y hasta ideológicos–; cambios respecto de los espacios de formación y modificaciones estructurales en la dinámica académica.

Si bien uno de los grandes habilitadores de esta transformación en la universidad –desde su cultura– son los espacios de innovación, generarlos no es tarea sencilla; pero, al igual que las semillas que se toman su tiempo para germinar, si las condiciones son favorables, la planta crece más rápido.

Por lo tanto, es fundamental generar esas condiciones óptimas para que la semilla de la innovación en la universidad brote y para que, con ello, se convierta en una cultura, en una vivencia y en una práctica diaria para todas las actividades de la institución educativa. De manera específica, en la enseñanza de las matemáticas, no existe ni ha existido una receta única para instaurar la cultura de la innovación dentro del aula; sin embargo, existen buenas prácticas que representan ejercicios exitosos de implementación en Latinoamérica y en el mundo. Estos ejemplos parten desde los cambios en la currícula de las asignaturas de matemáticas, atraviesan los espacios de aprendizaje modificados (que fomentan la creatividad y la innovación) y alcanzan el desarrollo de las competencias docentes de quienes acompañan el aprendizaje de la matemática.

La enseñanza de la matemática y de la innovación.

Aunque la matemática –como cuerpo de conocimiento– ha sido un ente estático a través del tiempo, no se puede decir lo mismo respecto de su didáctica ni de las metodologías que la acompañan. La creciente preocupación de las y los docentes de matemáticas por el alto índice de reprobación en las asignaturas relacionadas, y la necesidad, cada vez más imperante, de que el conocimiento se verifique en la práctica –a través del desarrollo de competencias en el estudiantado– ha propiciado corrientes de enseñanza de diversos tipos.

Es así, pues, que el abordaje de la matemática se ha enfocado en el desarrollo de la capacidad de cada estudiante de elaborar un pensamiento crítico, analizar información, discriminarla y seleccionarla; tomar decisiones y resolver problemas.

A partir del uso de técnicas didácticas de aprendizaje activo, –tales como: el Aprendizaje Colaborativo, el Aprendizaje Basado en Problemas, el Aprendizaje Orientado a Proyectos, o el Aprendizaje Basado en Retos, sumado a la práctica de metodologías como: el Aula Invertida, la Modelización, la Simulación, el WebQuest, entre otros–, las aulas de matemática y los procesos de capacitación docente se han enriquecido con más y mejores anclajes para la construcción del aprendizaje, tendientes a otorgar un grado mayor de significación a los conceptos y a brindar herramientas para fomentar la motivación del grupo hacia la materia fuera del aula también.

Existen diferentes perspectivas acerca del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, pero, desde la última década, se pretende colaborar con este proceso a partir de todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana. Por lo tanto, se asume que la construcción del conocimiento matemático tiene muchos niveles y profundidades, ya que incluye pensamientos sobre tópicos matemáticos y, también, procesos de pensamientos avanzados, tales como: la abstracción, estimación, comparación, justificación y trabajo a partir de hipótesis.

Para un profesor o profesora, enseñar significa crear las condiciones para que cada estudiante se apropie del conocimiento matemático y aprender significa involucrarse en una actividad intelectual, cuyo resultado final incluye tanto la apropiación del objeto matemático en sí como de las herramientas de uso que lo componen. Ejemplos interesantes de estas condiciones son los proyectos enfocados a la resolución de problemas como vehículo. No así aquellos proyectos con fines didácticos, enfocados al uso de tecnología con sentido, o proyectos relacionados con el descubrimiento de "lo matemático" en situaciones de la vida cotidiana.

La última parte de esta publicación está compuesta por los dos trabajos ganadores del "Concurso de propuestas de enseñanza para el desarrollo de competencias". Los proyectos nominados a partir de esta convocatoria representan un gran ejemplo de cambio planeado, ya que reflejan los resultados de aprendizaje que se quieren alcanzar y especifican un método razonable de implementación. Es decir que, por un lado, se plantea el abordaje de resolución de problemas, que pretende llevar la matemática a una o varias situaciones reales cercanas al contexto de cada estudiante y, por el otro, el uso efectivo de la tecnología para resolver un reto, también real, desde el punto de vista gráfico y dimensional. Es así, entonces, que se inicia el desafío del *statu quo* y se documentan las experiencias innovadoras de profesores de matemáticas.

Desarrollo de la competencia de modelización matemática. Antecedentes, enfoques perspectivas y empoderamiento.

Mario Di Blasi.

En este capítulo se presentará una breve reseña del "estado del arte" sobre el desarrollo de la competencia de modelización matemática. En una primera parte se mencionarán algunas definiciones, entendiendo que modelización es un término polisémico. Luego, se verán diferentes concepciones del proceso de modelización para finalizar con las distintas perspectivas en educación y una reflexión final relacionada con el empoderamiento matemático.

En relación con la competencia de modelización matemática se puede observar –en el capítulo 3 del *Study 14*, de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI)– que Henning y Keune (2007) mencionan que Blum había definido la competencia de modelización como la capacidad de estructurar, matematizar, interpretar y resolver problemas y, además, de trabajar con modelos matemáticos, validar los modelos, analizarlos críticamente, evaluar e interpretar los modelos y sus resultados, comunicarlos, observar y controlar de forma automática el proceso de modelado.

En Rico (2007) hay una descripción muy parecida a la competencia de modelar vinculada al proyecto PISA/OCDE:

> Modelar. Esta competencia incluye (a) estructurar el campo o situación que va a modelarse; (b) traducir la realidad a una estructura matemática; (c) interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar con un modelo matemático; (d) reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados; (e) comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones); y (f) dirigir y controlar el proceso de modelización. (p. 59)

Taha (2011) define modelo matemático como:

> el procedimiento usado para resumir un problema de decisión, de manera tal que permite la identificación y evaluación sistemática de todas las alternativas de resolución del problema. En el cual se llega a la toma de decisión al seleccionar la alternativa que se juzgue como

> aquella que es la mejor. (p. 9)

Morris (1967), por su parte, describe lo siguiente:

> El proceso de desarrollo del modelo puede verse útilmente como un proceso de enriquecimiento o elaboración. Uno comienza con modelos muy simples, bastante distintos de la realidad, e intenta avanzar de manera evolutiva hacia modelos más elaborados que reflejen más a fondo la complejidad de la situación de gestión real. (p. 709)

En línea con las afirmaciones de Morris y en el contexto de la formación de ingenieros/as se encuentra la propuesta de cuestión terminológica aportada por Blum (2015), donde subdivide el proceso de modelización en siete pasos o subprocesos que se pueden ver en uno de los muchos esquemas para el proceso de modelado o modelización (Fig. 1):

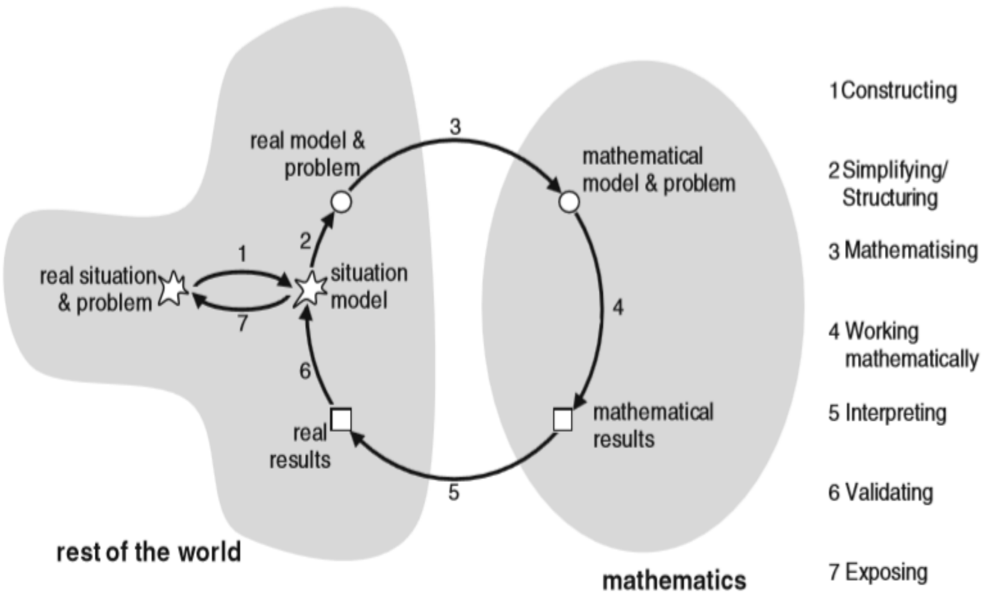


Fig. 1: Esquema de los siete pasos (Blum, 2015, p. 76)

Es posible afirmar que el esquema anterior está en correlación directa con la definición dada de competencia de modelización y es una reelaboración, por parte de Blum, de esquemas propios previos.

Maaß (2006) hace un esquema (Fig. 2) similar al de Blum:

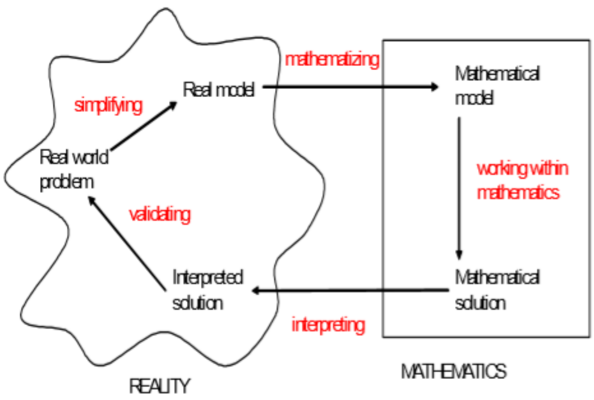


Fig. 2: Proceso de modelización (Maaß, 2006, p. 115)

Después de realizar diversas investigaciones sobre los procesos y las competencias de modelado por parte de los/as alumnos/as concluye que, además de las competencias para llevar a cabo los pasos, los factores importantes son el desarrollo de las competencias de modelado metacognitivo, la estructuración de hechos, las competencias en la argumentación matemática y una actitud positiva. (Maaß, 2006)

Blomhøj (2004) hace una propuesta de proceso de modelización en seis subprocesos (Fig. 3).

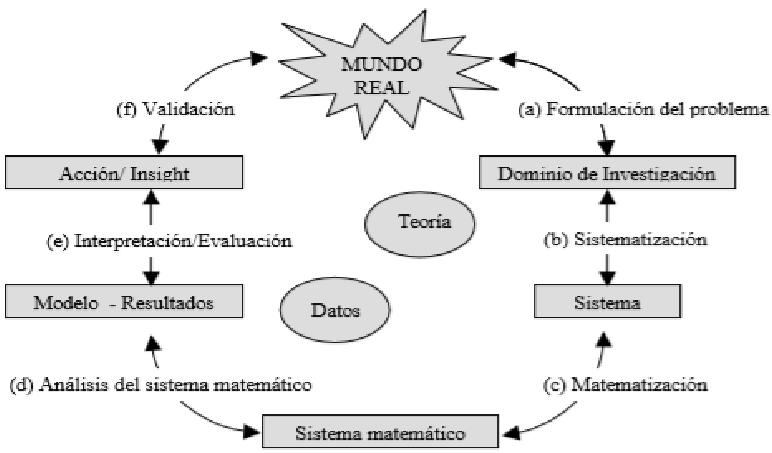


Fig. 3: Un modelo gráfico de un proceso de modelización (Blomhøj, 2004, p. *24)*

Cuando se modela un problema del mundo real, se trabaja entre la realidad y la matemática. El proceso de modelado comienza con el problema del mundo real. Al simplificar, estructurar e idealizar este problema, se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. (Maaß, 2006)

La diferencia entre el procedimiento de un experto y el de un principiante, en todo proceso de modelización, es que los/as expertos/as utilizan la metacognición. Los/as principiantes a menudo experimentan sin estructura y después de un tiempo sin éxito abandonan. Además, los expertos revisan sus estrategias y encuentran una solución con el mismo o incluso menos esfuerzo. El desarrollo hacia la metacognición, o el aprendizaje autorregulado, se considera una tarea principal de las instituciones educativas, y eso da cuenta de distintos niveles en el desarrollo de la competencia de modelización.

La modelización matemática se ha convertido en los últimos años en un tema de estudio de la educación matemática, la denominación "aplicaciones y modelización" ha sido usada para representar toda relación entre la matemática y el mundo real, entendiendo por mundo real lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana, así como las materias de la escuela o la universidad, o disciplinas científicas diferentes de la matemática. Este autor indica que, mientras la modelización se focaliza en la dirección que va de la realidad hacia la matemática y enfatiza los procesos involucrados en la creación de modelos, las aplicaciones van en la dirección opuesta y destacan el uso de modelos ya creados.

Villarreal (2013) menciona diferentes enfoques, no excluyentes, vinculados a la modelización matemática y a la aplicación de modelos con fines didácticos:

> a) Aplicación del conocimiento matemático recién enseñado para resolver un problema real o artificial.
>
> b) Presentación de un problema real a fin de motivar a los/as estudiantes para el estudio del contenido matemático que será usado para resolverlo.
>
> c) Trabajo con proyectos en los cuales el/la profesor/a elige un tema del mundo real y también propone problemas asociados con él.
>
> d) Trabajo con temas del mundo real elegidos por los/as estudiantes, que también diseñan proyectos, proponen y resuelven problemas con la ayuda del profesor/a. (p. 3)

Los cuatro enfoques anteriores pueden relacionarse con la propuesta de Muller y Burkhardt (2007), que distingue entre *aplicaciones ilustrativas* y *modelización activa;* y con el enfoque de Julie y Mudaly (2007), que entienden como extremos de un continuo a la *modelización como vehículo* y la *modelización como contenido*.

En Blum (2015) se afirma que hay estudios de casos que muestran que las TIC se pueden usar como valiosas herramientas para modelar actividades, no solo en las fases intra-matemáticas como se puede ver en el trabajo de Borba y Villarreal (2005). También, menciona que las TIC se pueden utilizar para experimentos, investigaciones, simulaciones, visualizaciones o cálculos y, por ese motivo, algunos investigadores sugieren extender el ciclo de modelado agregando un tercer mundo: el mundo tecnológico. (Fig. 4)

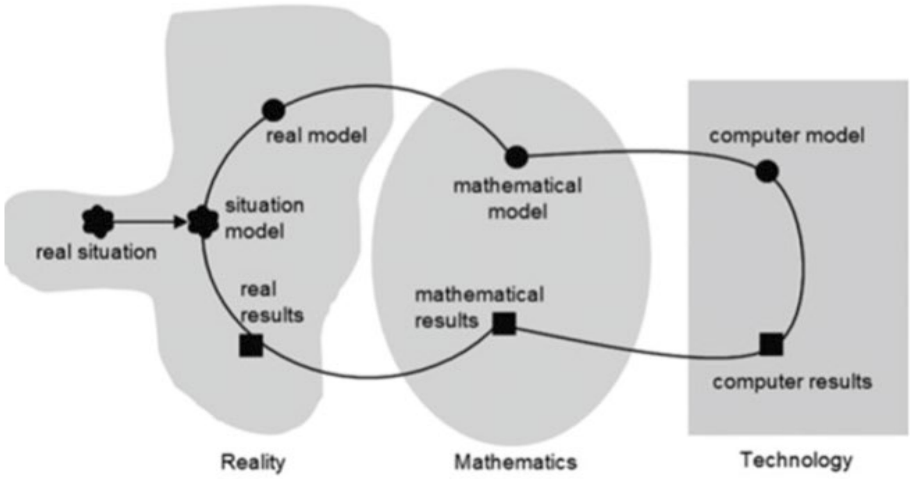


Fig. 4: Esquema extendido del ciclo de modelización (Blum, 2015 p. 86).

Abassian (2020) menciona cinco perspectivas de la educación en modelos matemáticos que identifica como: modelado realista, modelado educativo, modelos y perspectiva de modelado, modelado sociocrítico y modelado epistemológico.

Es importante destacar que estas perspectivas no son excluyentes. Algunos investigadores han trabajado y publicado en varias de ellas.

En la siguiente figura pueden apreciarse las principales características de las perspectivas:

Perspectiva	Realista	Educacional	Contextual	Sociocrítica	Epistemológica
Objetivos	Desarrollar competencias para modelar y comprender auténticos escenarios del mundo real.	Desarrollar competencias para modelar un escenario del mundo real y comprender matemáticas.	Desarrollar un profundo conocimiento de matemáticas a través de un contexto de modelización.	Desarrollar competencias de modelización matemática para tomar decisiones en la sociedad.	Desarrollar razonamiento matemático formal.
Definición de un modelo matemático	Los objetos matemáticos (gráficos, ecuaciones, etc.) explican el escenario del mundo real dado.	Los objetos matemáticos que tienen una relación con el escenario del mundo real dado.	Un sistema conceptual que mapea las características estructurales de un sistema relevante.	Representación matemática de un escenario relevante.	El resultado de una actividad basada en situaciones y conceptos matemáticos.
Descripción del ciclo de modelización matemática	Un proceso cíclico, de múltiples pasos. Comienza en el mundo real, es matematizado dentro del mundo matemático, y finaliza en el mundo real.	Un proceso cíclico, de múltiples pasos que comienza en el mundo real, es matematizado, luego finaliza en el mundo real.	Un ciclo que comienza en el mundo real, luego, cuando es desarrollado un modelo, vuelve al mundo real. El ciclo se repite tantas veces como sea necesario.	Todos los aspectos de la intervención del modelador en la exploración de un problema del mundo real utilizando matemáticas.	Cuatro niveles de actividades. "Modelos de" y "modelos para" son creados para desarrollar razonamiento matemático formalmente.
Diseño de tareas	Auténticas, desordenadas tareas de la vida real que requieran del uso del ciclo de modelización.	Tareas auténticas que pueden ser simplificadas para revelar objetivos matemáticos específicos.	Las actividades generadoras de modelos son diseñadas para desarrollar un concepto matemático específico. Deben ser en un contexto de un problema del mundo real. Deben reunir los seis principios rectores.	Las tareas son de contexto social, pero pueden también enfocarse en el desarrollo de conceptos matemáticos específicos.	No se establecen requerimientos.
Ejemplos de investigaciones clave	Pollak, Ferri.	Niss, Blum, Zbiek, Conner.	Lesh, Doerr.	D´Ambrosio, Barbosa, Skovsmose.	Freudenthal, Gravenmeijer.
Enfoque de la investigación	Competencias de modelización matemática.	Matemáticas en modelización matemática y modelización matemática en el currículo.	El uso de las actividades generadoras de modelos para enseñar matemáticas.	Uso de los estudiantes de matemáticas para comprender la sociedad críticamente.	Enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos específicos.

Fig. 5: Resumen de las principales características de las cinco perspectivas de modelización matemática. Extraído de Abassian (2020). Traducción del autor.

Perspectiva realista

En esta perspectiva, el enfoque principal está en las competencias de modelización matemática y las herramientas que respaldan las competencias de modelado matemático, que aquí se entiende como la capacidad de recorrer todas y cada una de las etapas de un proceso de modelado matemático.

La perspectiva realista pone el acento en el desarrollo de competencias de modelización matemática utilizadas para comprender escenarios auténticos del mundo real a través de las matemáticas.

Perspectiva educacional

El objetivo en esta perspectiva, además de desarrollar competencias de modelización matemática, es también aprender matemáticas, ya que pone en énfasis tanto a la modelización como contenido como a la modelización como vehículo. Es decir que el trabajo en esta perspectiva puede resultar en que las tareas originales se simplifiquen respecto de las desordenadas tareas auténticas descritas en la perspectiva realista.

Perspectiva contextual

Esta perspectiva de diferencia de las anteriores en que aquí un modelo matemático consiste en una herramienta conceptual de un sistema matemático que se desarrolla a partir de una situación específica del mundo.

Los modelos matemáticos son vistos como sistemas, compuestos por conceptos, que mapean diferentes características de sistemas relacionados.

Perspectiva sociocrítica

La perspectiva sociocrítica pone el acento en el rol social que pueden desempeñar las matemáticas. El objetivo de utilizar conceptos matemáticos para tomar decisiones en la sociedad, demostrar el poder de las matemáticas en la toma de decisiones y cómo se puede utilizar en ello.

Perspectiva epistemológica

En la perspectiva epistemológica se percibe a la modelización matemática como un lente que permitiría establecer teorías generales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El objetivo central aquí es el desarrollo de la comprensión matemática, ya que no requiere que se modelice un problema o situación del mundo real. Para esta perspectiva, toda tarea matemática puede describirse como una tarea de modelización.

Sin embargo, las actividades de modelización en este enfoque suelen comenzar en el mundo real y terminar en las matemáticas.

El empoderamiento que es favorecido por el desarrollo de la competencia de modelización matemática.

Siguiendo los desarrollos teóricos de Valero (2017), se puede afirmar que hoy, sin dudas, es necesario que todas y todos aprendan matemáticas gracias a estrategias de enseñanza apropiadas. Las matemáticas empoderan a quien las aprende "profundamente".

El empoderamiento intrínseco

Está claro que el aprendizaje de las matemáticas empodera porque algo constitutivo del conocimiento matemático se transfiere a quienes logran apropiarse de él. Abstracción, axiomatización, formalización se consideran elementos de una forma de pensar que producen un acercamiento a la comprensión del universo. La apropiación de estas características brinda una mejor capacidad de pensamiento, un empoderamiento. Es posible pensar que la enseñanza tradicional de la matemática promueve este tipo de empoderamiento y no más.

El empoderamiento en los usos y aplicaciones

En esta mirada, el empoderamiento no se fundamenta en lo que el conocimiento matemático brinda al aprendiz, sino en la capacidad del mismo para usar ese conocimiento en el abordaje de tareas/problemas.

El trabajo en el desarrollo de la competencia de modelización matemática es un paso importante para avanzar de un empoderamiento intrínseco a uno de usos y aplicaciones.

El empoderamiento crítico

El empoderamiento más completo no está en las características intrínsecas de las matemáticas ni en la capacidad de darles uso. Este tipo de empoderamiento empieza a construirse cuando el aprendiz tiene la posibilidad de reconocer no solo los efectos positivos de las matemáticas para lograr el bienestar y progreso social, sino también su influencia en la capacidad de generar destrucción y riesgos para el ser humano y la sociedad.

Habiendo hecho el recorrido que se propuso al inicio del capítulo, se considera que el lector interesado en el tema tiene la información necesaria para adentrarse en el estudio del desarrollo de la competencia de modelización matemática por distintos autores, enfoques y perspectivas; las que considere más útiles para la enseñanza o la investigación.

Bibliografía

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. & Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, 12:1, 53-65. Doi: 10.1080/19477503.2019.1595360

Blomhøj, M. (2004). Modelización Matemática – Una teoría para la práctica. *Revista de la Educación Matemática, 23(2)*, 20-35. Disponible en: https://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In S.J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73- 96). Seoul, Korea: Springer. Doi 10.1007/978-3-319-12688-3_9.

Borba, M. C. & Villarreal, M.E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking – Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*. New York, USA: Springer.

Henning H., Keune M. (2007). Levels of Modelling Competencies. In W. Blum, P. L.

Julie C., Mudaly V. (2007). Mathematical Modelling of Social Issues in School Mathematics in South Africa. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss M. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education - New ICMI Study Series 10* (pp. 503-510). Boston, USA: Springer.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *ZDM,* 38. 113-142. Doi: 10.1007/BF02655885.

Morris, W. T (1967). On the art of modeling. *Management Science*, *13*(12), 707-717.

Muller E., Burkhardt H. (2007). Applications and Modelling for Mathematics — Overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss M. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series 10* (pp. 267-274). Boston, USA: Springer.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, I (2), pp. 47-66.

Taha, H.A. (2011*). Operations Research: An Introduction, 9th edition*. New Jersey, USA: Pearson Prentice Hall.

Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 99-128.

Villarreal, M. y Mina, M. (2013). Modelización en la formación inicial de profesores de matemática. En *VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática* (pp. 1-16). Santa María, Río Grande do Sul, Brasil: Centro Universitario Franciscano.

Reflexiones sobre la tarea de capacitar y acompañar a los y las docentes del área de matemática

Viviana Cappello.

A fines del año 2022, se dictó el curso denominado "Estrategias y modelos para la Enseñanza de la Matemática" en dos cohortes.

La capacitación giró en torno a brindar propuestas factibles de implementación para la enseñanza y el aprendizaje de los y las estudiantes de la matemática, dejando atrás el formato de "curso general" y orientada al docente en su contexto institucional, como agente de cambio y como protagonista e impulsor de una mirada más práctica. Para ello, se tuvo en cuenta que el creciente interés por los modelos matemáticos, la simulación, el trabajo colaborativo y eficaz, en equipo, ya han marcado un cambio de tendencia en la docencia y en la investigación.

Cabe destacar que para abordar la enseñanza de la matemática no alcanza solo con desarrollar el dominio disciplinar, sino que se necesita también del conocimiento didáctico del contenido. Además, hay que tener presente que la mejora del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática es paulatino y lento, y que no se logra con la mera participación de los y las docentes en cursos de formación permanente; sino que, para lograr una transformación eficaz de la propia práctica, los y las docentes deben plantearse preguntas y buscar respuestas centradas en el porqué de sus propias prácticas, puesto que ellas están marcadas por sus creencias y concepciones de la matemática como disciplina.

En los cursos se tuvieron en cuenta las realidades (las condiciones institucionales y las diferentes estructuras en las que se desarrolla la formación docente dentro de las FFRR), las perspectivas (la relación entre el conocimiento y su uso en situaciones de enseñanza de la matemática), las expectativas y posibilidades que presentan espacios para la discusión (el rol de las tecnologías y el desarrollo de agendas de investigación).

Los materiales multimediales fueron pensados y diseñados en función de las necesidades recabadas por la experiencia del aula. Se tuvo en cuenta la importancia de transmitir a los y las docentes ejemplos de aplicaciones accesibles para las clases, como así también, que todo lo presentado resulte atractivo para que fuera replicado. A veces, contar con experiencias de colegas genera nuevas ideas para ser aplicadas y en este curso se trató de propiciar ese intercambio.

Los materiales presentados, así como las aplicaciones propias de la disciplina, fueron recibidos con entusiasmo y dotados de estrategias para fomentar su óptimo desarrollo y sus potenciales mejoras. En este sentido, cabe aclarar que los y las docentes participaron activamente a la hora de comentar las prácticas y las herramientas tecnológicas que utilizan a diario.

La presentación de nuevas técnicas y estrategias enriqueció el espacio y motivó la incorporación de las mismas, cambiando la ejercitación monótona y repetitiva por la exploración, la búsqueda de solución a problemas reales y la simulación como estrategia protagonista de la enseñanza.

La capacitación docente es una tarea altamente creativa en la que hay que utilizar todos los recursos, personales y profesionales, para resolver y gestionar todas y cada una de las situaciones de conflictos que se derivan de la convivencia entre dispares y, en ocasiones, con intereses contrapuestos. El término conflicto está formulado en un sentido positivo, de normalidad, y se refiere a los retos de formar simultáneamente a una diversidad de personas, con características y circunstancias variadas, así como la toma de decisiones *ad hoc*.

La capacitación dejó las siguientes apreciaciones valiosas:

- Los y las docentes afirmaron que el planteo de situaciones reales, la utilización de juegos y la resolución de problemas contribuyen a que cada docente pueda acompañar a sus estudiantes para constituirse en individuos reflexivos con una adecuada destreza matemática.
- Los y las docentes manifestaron la valoración del afecto, en tanto seres que piensan y sienten al mismo tiempo, como una necesidad de superar la tradición que divide lo cognitivo académico de lo vincular afectivo, y de reconocer el valor de las experiencias intersubjetivas en el desarrollo de todas las personas.
- Los y las docentes lograron desarrollar un enriquecimiento mutuo, ya que cada uno hizo aportes de gran valor a los demás y se construyeron ideas en equipo.
- Los y las docentes aún afirman que se debe fortalecer el trabajo que recupere conocimientos matemáticos, conocimientos didácticos y el desempeño docente, como alternativas viables para el mejoramiento de la educación matemática en el aula. Asimismo, se debe continuar

potenciando las posibilidades que nos ofrecen las tecnologías, la modelización y la simulación para la apropiación de los contenidos presentados en todas las asignaturas del área de matemática.

Como capacitadora en matemática, considero que el para qué de la enseñanza de este contenido se centra en tener la habilidad y la capacidad necesaria para hacer efectiva la transmisión de conocimientos, y para que la formación de futuros ingenieros e ingenieras logre encaminarse hacia una profesionalización de la docencia universitaria.

Llevo más veinte años dictando materias del área de matemática y una decena en la formación de docentes. Puedo decir que empecé transitando mi experiencia mucho antes de que asomaran las conferencia TED, las videoconferencias, el *e-learning* y las innovaciones en capacitación que trajo el nuevo siglo. He transitado la clase magistral, las demostraciones tediosas y extensas, la resolución de innumerables ejercicios de igual complejidad y he respondido preguntas que mis estudiantes jamás se hicieron-. Actualmente, tener la oportunidad de realizar cursos con diversos de colegas y lograr un enriquecimiento mutuo es sumamente gratificante. Todos los grupos con los que trabajé fueron, sin lugar a dudas, singulares y con todos hemos compartido sólidos conocimientos sobre el proceso de enseñar matemática.

Ejemplos de Buenas Prácticas

Desafío sobre emisiones

Gabriela Tomazzeli.

Propósito

Que cada estudiante se familiarice con conceptos del Álgebra Lineal mediante una situación motivadora de modelización intra y extra matemática.

Objetivos

- Modelizar una situación problema haciendo uso de lenguaje matricial.
- Interpretar los resultados obtenidos en el contexto de una situación problema y comunicar los mismos mediante lenguaje apropiado.
- Utilizar herramientas tecnológicas para comparar y contrastar resultados.
- Promover las capacidades de participación, de iniciativa, de responsabilidad, de autonomía y de colaboración.
- Articular horizontalmente con la "Ingeniería de Transición" integrada al espacio curricular Ingeniería y Sociedad.

Situación problema propuesta

1- Visualizar el video: https://youtu.be/st3KaBirwgs

2- En cualquier contexto de trabajo de un ingeniero o una ingeniera, es de gran importancia evaluar el aporte de los Gases de Efecto Invernadero (GEI) al medioambiente. La finalidad consiste en optimizar su contribución, es decir, minimizar el impacto de los aportes de los GEI al medio. Existen especialistas que podrían realizar estas investigaciones y también un estudio exhaustivo, sin embargo, el lenguaje del Álgebra Lineal permite aproximarse a estos temas, conocer en pequeña medida su utilidad, y obtener algunos resultados interesantes. Por ello se propone:

A.1. Formar grupos de tres o cuatro estudiantes.

A.2. El **desafío sobre emisiones** consiste en elegir un "*objeto*" del cual deberá evaluarse *su aporte de Gases de Efecto Invernadero (GEI) al* *medioambiente*. Deberán debatir cuál será el "*objeto* elegido". Tengan en cuenta:

a) Pueden comenzar investigando "*qué investigar*", es decir, buscar algún tema que consideren de interés y del cual se pueda realizar un estudio de cómo aporta y cuánto aporta, el "*objeto elegido*", en relación a los GEI. Si el grupo lo prefiere, el tema a elegir puede ser un tema que le compete a vuestra especialidad de ingeniería, del cual se pueda realizar un estudio de los aportes de los GEI que permita estimar la huella de carbono. Para información sobre el tema se sugiere investigar en:

https://es.wikipedia.org/wiki/Huella_de_carbono

https://www.gba.gob.ar/desarrollo_agrario/huella_de_carbono/que_es_la_huella_de_carbono

b) Para reflexionar: ¿por qué razón consideran que sería importante obtener este tipo de información?

https://www.un.org/es/climatechange/what-is-climate-change

Aclaración: Existen calculadoras de GEI. Puedes ver una calculadora de huella de carbono en:

https://conteudo.waycarbon.com/climas-es-huelladecarbono?huella%20de%20carbono&gclid=CjwKCAjwqJSaBhBUEiwAg5W9p78RHFEtKA55hoZXp0_-sgBsQqvbSNx52zBxXO4-BrvNIIEhXekPXhoCrLAQAvD_BwE

B.1

a) Selecciona tres etapas en la "***obtención*** *del objeto*" de estudio.
b) Considera una demanda determinada del "*objeto*", que será designada como "***d***", representada por un valor fijo (constante).
c) Elige tres gases (entre los de mayor impacto en cuanto a su contribución al medioambiente) que puedan estudiarse en las tres etapas seleccionadas.

Desafío #: ¿Qué herramientas conoces que permitan ordenar los datos obtenidos e identificar rápidamente y con precisión a cada uno de ellos?

d. Investiga cuáles serían los valores de entradas y salidas en cada una de las etapas seleccionadas en **a.**, teniendo en cuenta la demanda fijada en **b.** Ordena los datos obtenidos usando la herramienta encontrada.

Desafío ##: ¿Cómo ordenarías el valor fijo de la demanda "***d***" en un arreglo numérico de tres filas y una columna (3x1), de manera tal que éste funcione '*tirando*' del último dato de la última etapa?

Desafío ###: Si la demanda ahora es una "cantidad (variable)" de "objeto requerido", ¿cómo lo representarías en un tercer arreglo? Llama "***s***" a este arreglo.

e. A partir de las respuestas dadas anteriormente, ¿cómo relacionarías los tres arreglos de datos, de manera que *s* responda a la demanda (variable) *d*? ¿Por qué los vincularías de ese modo?

f. Investiga cuál es la contribución de cada uno de los gases elegidos, en cada una de las etapas. Puedes considerar valores aproximados. A continuación, ordena los datos, en un nuevo arreglo numérico, que se nombrará con la letra **B**.

Desafío ####: Ahora bien, ¿cómo se podría vincular a **s** con **B**? Elabora alguna conclusión.

Desafío #####: Encuentra un vínculo entre todos los arreglos obtenidos, de forma tal de que se puedan calcular las emisiones totales de GEI en las tres etapas, cada vez que varía la demanda. Elabora una conclusión.

g. Realiza los cálculos correspondientes para conocer el aporte de los GEI debidos al "objeto".

Utiliza cualquier calculadora matemática como geogebra, scilab-5.4 o similar.

h. Elabora una conclusión final.

C.1

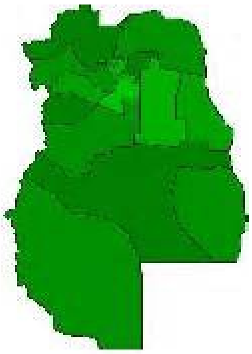
a. ¿Qué y cómo variarían los factores de una situación semejante a la planteada si se consideran cuatro etapas en lugar de tres? ¿Y para el caso de cinco etapas?

b. Los resultados logrados se han trabajado en tres etapas de forma tal que el arreglo numérico resultante es de orden tres. ¿Si el arreglo que representa a las etapas es rectangular, podría tener solución una situación similar?

Ejemplo

Para el circuito productivo del vino, se considera una bodega boutique en particular, para la cual se quiere evaluar el aporte de gases de efecto invernadero con mayor impacto. Como ejemplo, se consideran para su estudio, tres etapas desde el viñedo hasta el producto final (cantidad de botellas producidas).

Las etapas seleccionadas son:

- Etapa 1: Viticultor (V)
- Etapa 2: Bodega (B)
- Etapa 3: Embotelladora/Empacadora (E)

La Tabla 1 muestra que, para obtener 1.776.316 botellas de vino estándar se requieren 1.687.500 litros de vino y para obtener 1.687.500 litros de vino se necesitan 2.250 toneladas de uva.

Tabla 1

Input	Output
	2250 t de uva
2250 t de uva	1687500 l de vino
1687500 l de vino	1776316 botellas

A continuación, ordenamos los datos que se han considerado para su estudio, como se muestra en la matriz E que llamaremos "*matriz de etapas*".

$$E = \begin{bmatrix} 1776316 & 0 & 0 \\ -1687500 & 1687500 & 0 \\ 0 & -2250 & 2250 \end{bmatrix}$$

Las columnas de E representan cada una de las tres etapas y son:

$$e3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2250 \end{pmatrix}, \quad e2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1687500 \\ 2250 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e1 = \begin{pmatrix} 1776316 \\ 1687500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El signo negativo en los registros de la matriz E solo representan los *inputs* o entradas en cada etapa.

Puesto que la matriz E es de orden 3, definimos un vector *d* que deberá ser de orden 3x1 al que llamamos "*vector de demanda*", acorde a la decisión de producción de la bodega para esa vendimia. Se colocará ese dato (d_{11}) en la posición a_{11} del vector *d*. En este caso, a diferencia de los datos que se mostraron en la Tabla 1, realizada para 1.776.316 botellas de vino, la bodega boutique embotellará 5.000 unidades de producto terminado. Luego el vector *d* quedará definido como sigue:

$$d = \begin{pmatrix} 5000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora es el turno de definir y ordenar en un arreglo, los gases de efecto invernadero. Se investigó que los principales gases responsables del efecto invernadero son dióxido de carbono (CO_2), gas metano (CH_4), óxido de nitrógeno (NO_2), óxido de azufre (SO_2), ozono (O_3) y los gases fluorados o clorofluorocarbonos (CFC). Es preciso aclarar que, en la industria del vino uno de los gases más nocivos para el medioambiente y que posee alto impacto es el SO_2, como consecuencia del uso abusivo de fertilizantes y, por otra parte, los NO_x por sus aportes provenientes de la utilización de combustibles fósiles.

Es necesario ordenar las emisiones de gases producidos en cada etapa, en una nueva matriz que llamaremos *matriz de emisiones* y denotaremos con la letra B. En esta matriz B, cada columna representa la emisión de los tres gases elegidos. En este caso se evaluarán, dióxido de carbono (CO_2), gas metano (CH_4) y óxido de nitrógeno (NO_2). De esta forma, cada fila representa la cantidad de CO_2 que se emite en cada una de las etapas definidas anteriormente.

$$B = \begin{bmatrix} CO_2 & CO_2 & CO_2 \\ CH_4 & CH_4 & CH_4 \\ NO_2 & NO_2 & NO_2 \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.7 \\ 0.25 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Donde cada columna de B representa los aportes al medio de tres gases diferentes, debidos a la etapa correspondiente a la misma columna de la matriz E. A su vez, cada fila aporta el dato de la cantidad total, por ejemplo, en toneladas, de cada uno de esos gases entregados al medio, por todo el circuito productivo.

Ahora bien, ¿cómo podemos vincular a las matrices E, B y d?

En primer lugar, si se plantea E · s = d, estaríamos pensando quién es "el vector s" que "escala" a E, para responder a la demanda de la bodega. Por lo tanto, aparece la necesidad de un nuevo vector 3x1, que llamaremos "*vector escala*". Resulta que este mismo vector "s", "escala" en la misma proporción a la matriz de emisiones B, al realizar B · s. Si nombramos como "g" al resultado de B · s, es decir, B · s = g, el resultado del vector columna g nos mostraría cómo se "agrandó" o se "achicó" el aporte total de gases al medio, dependiendo de la demanda establecida por la bodega, ya sea que ésta demande mayor o menor cantidad de botellas en relación al ejemplo inicial.

Y como E · s = d, el vector escala s resulta:

$$s = E^{-1} \cdot d$$

Si B · s = g (2), muestra el aporte total de gases al medio entonces el vector g será llamado *vector de emisiones.* Luego, reemplazando (1) en (2) resulta

$$g = B \cdot E^{-1} \cdot d$$

De modo que finalmente se conocen cada uno de los elementos de g, que representan las emisiones totales de cada gas de efecto invernadero, durante el circuito constituido por las tres etapas consideradas.

Conclusión. Reflexión personal sobre el proyecto

Puesto que los conceptos que abordarán los estudiantes en este proyecto son conceptos integrados en forma de espiral, es posible usar este trabajo de modelización matemática tanto en la Unidad de Matrices, como en la de Sistemas de Ecuaciones Lineales así como también en la Unidad de Espacios Vectoriales, lo cual podrá realizarse adaptando los enunciados (completando o simplificando) en lo concerniente a "las decisiones sobre las variables a considerar" y además en "el trabajo dentro del modelo". Todo lo anterior da una amplia perspectiva de implementación. Por ejemplo, se puede introducir esta propuesta de modelización usando el concepto de "subespacio vectorial", ya que éste permite representar de manera única datos multidimensionales a través de un vector, con un valor determinado para cada una de sus coordenadas.

Por otra parte, los estudiantes tienen numerosas posibilidades para la elección del tema, razón por la cual puede resultar desorientador en un comienzo, pero motivador luego.

Es importante destacar que el presente trabajo correspondiente al espacio curricular Álgebra Lineal y Geometría Analítica, aporta a la Competencia Tecnológica: Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería y a las Competencias Sociales Políticas y Actitudinales: Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo y Comunicarse con efectividad.

Bibliografía

Sugerida para el alumno

Anton, H. Introducción al Álgebra Lineal. Ed. Limusa.

Grossman, S. I. Álgebra Lineal con Aplicaciones. Mc Graw Hill.

Bibliografía de consulta

1.Bibliografía sugerida para el curso.

2.Bibliografía adicional recomendada.

Lay, D. (2013). Álgebra Lineal para cursos con enfoque por competencias. (Primera edición). México: Pearson Educación.

Lang S. (1990). Introducción al Álgebra Lineal. Addison- Wesley Iberoamericana.

Tesis de Maestría en Logística. "Modelado de eficiencia energética y ecosustentabilidad de una cadena de suministro". Autora: Gabriela Beatriz Tomazzeli.

Modelización para la enseñanza de la matemática en ingeniería. Proyecto final: el hangar

Milena María Balbi.

Introducción

Objetivos:

- Representar, desde la matemática, lo que perciben con los sentidos para después, comprender mejor la realidad y así ser compartida por sus pares.
- Promover el diseño e implementación de situaciones que integren, en los procesos de aprendizaje, las habilidades propias de la comprensión matemática, aplicadas a la realidad por medio de los procesos de matematización y modelización.
- Adquirir la competencia de modelización matemática mediante:

  - integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento;
  - interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad;
  - mejoría de aprehensión de los conceptos matemáticos;
  - capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones problema;
  - estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas;
  - habilidad en el uso de la tecnología (calculadora gráfica y computadoras);
  - capacidad para actuar en grupo;
  - orientación para la realización de la investigación;
  - capacidad para la redacción de esa investigación. [1]

Marco teórico

Actualmente estamos en plena migración a un diseño curricular para la formación por competencias en las carreras de Ingeniería, que nos interpela como docentes en las maneras de planificar, de enseñar y en las clases propiamente dicha, donde el aprendizaje se centra en el estudiante, de allí que creo que la modelización favorece a poner en práctica este nuevo paradigma de enseñanza, sumándose a lo que afirman Villarreal, Esteley y Mina:

> Los objetivos educacionales van más allá de la mera aplicación de contenidos matemáticos, enfatizando la participación significativa de los estudiantes en sus clases de matemática como formuladores de problemas y diseñadores de proyectos, de acuerdo a sus propios intereses. [2]

Con este proyecto se pretende que los y las estudiantes pongan en práctica el modelado matemático, mediante un problema que atraviese el cursado de la asignatura Análisis Matemático II, para que analicen, investiguen y generen un modelo que dé solución a las consignas propuestas y, de esta manera, vayan adquiriendo las herramientas, habilidades y competencias necesarias para el futuro ingeniero. En los libros del CONFEDI, especialmente el Libro Rojo, se definen las competencias, los resultados de aprendizajes, las rúbricas, las tributaciones y los alcances del título, según la especialidad. La competencia de modelización es una de las que se enuncian entre las competencias específicas matemáticas.

En el documento de Villarreal y otros [3], se menciona algunas de las diferentes maneras de introducir la modelización matemática, definidas por Borba & Villarreal (2005). En esta propuesta se aplica el modelo según el cual se trabaja con un tema designado por el profesor que elige un tema del mundo real para que el alumno resuelva, guiado por el docente (del tipo 3).

De acuerdo con Delval (2008), una alternativa para superar las prácticas educativas y pedagógicas tradicionales consiste en transformar las escuelas en laboratorios; donde los participantes tengan la oportunidad de contrastar y reinventar las creaciones filosóficas, artísticas, éticas, tecnológicas y científicas con la realidad, con y en los contextos socioculturales; donde los participantes tengan la oportunidad de cuestionar lo que se enseña y se aprende dentro y fuera de la escuela. Y con base en estos procesos construir y comprender explicaciones más humanas del conocimiento y de la vida.

Retomando esto de transformar el aula de matemáticas en un laboratorio, repienso a los estudiantes como científicos, y me surge la pregunta: ¿cómo pueden ser científicos? Recuerdo entonces la Teoría de Gastón Bachelard, que trata sobre los obstáculos epistemológicos camino a la investigación. Primero debemos plantearnos ¿para qué sirve la investigación? La respuesta es: para saber.

El investigador precisa del necesario espíritu científico, esto es, entender y comprender la inquietud de desarrollar capacidades dentro del rigor científico, en nuestro caso matemático.

Llega un momento en que el espíritu prefiere lo que confirma su saber a lo que lo contradice, en el que opta por las respuestas en lugar de preguntas, entonces el espíritu conservativo domina y el crecimiento intelectual se detiene (Bachelard, 1988).

Sabemos que investigar incluye el descubrimiento de conocimiento nuevo sobre lo que ya se sabe en la sociedad y, sobre todo, en la ciencia. Para nuestro caso, el aula de matemáticas, donde se dice que todo está desarrollado, es difícil pensar en crear nuevo conocimiento matemático, pero para cada estudiante, incluso para cada docente el conocimiento se crea y recrea, en los planteos y desarrollos de nuevos problemas de modelización, así de esa manera no se cae en la obsolescencia. Pero ese investigar también va unido al intento de constatar creencias, ideas y suposiciones de lo que creemos ya saber. Por lo tanto, siempre partimos de supuestos o hipótesis a constatar, justamente, con nuestras indagaciones, y más aún en la modelización.

Para construir un objeto de estudio, es decir, lo que se va a investigar de manera objetiva; se debe plantear ese objeto, que también llamamos problema, a partir de algunas consideraciones que establece Bachelard y él afirma que hay plantear el problema del conocimiento científico en términos de "obstáculos". No se trata de considerar los obstáculos externos sino aquellos que aparecen en el acto mismo de conocer. [4] En un ensayo [5] se reflexiona en torno a la noción "la clase de matemáticas como laboratorio socio-epistemológico". Con esta noción se trata de promover una participación significativa del alumnado en la construcción y comprensión del conocimiento matemático escolar. Por lo general, las clases de matemáticas se distinguen por el dictado de definiciones, la práctica de procedimientos o la memorización de algoritmos (Pulido, 2010).

La modelación, sin embargo, no es una panacea para superar todos los problemas de la práctica escolar relativos a la enseñanza de la matemática. Las investigaciones señalan que aquélla puede representar un avance en la enseñanza de las matemáticas en clase, porque ésta deja de ser una mera transmisión de técnicas de resolución (del tipo: siga el modelo) y pasa a ser presentada como herramienta o estructura de otra área del conocimiento. Lo que exige mayor empeño en los estudios, en la investigación y en la interpretación del contexto, tanto para el profesor como para los alumnos. [6] Comparto la afirmación de Henry Pollak:

> Así es que volví a pensar ¿cómo encaramos la enseñanza de la modelización? Pienso que es tremendamente importante porque más estudiantes se quedarán con nosotros si tenemos este tipo de matemática. Tenemos que enseñar nuestra matemática de tal manera que mantenga a la gente junta tanto tiempo como sea posible de tal forma que, no importa de dónde uno viene, sino que uno tenga el mayor tiempo posible para que las direcciones en las que uno quiere ir y las capacidades que uno tenga puedan ponerse en evidencia. [7] Breve descripción del contexto

Esta propuesta de modelización matemática está pensada para implementarla en la asignatura Análisis Matemático II (AMII) de la Facultad Regional Resistencia (FRRE) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN).

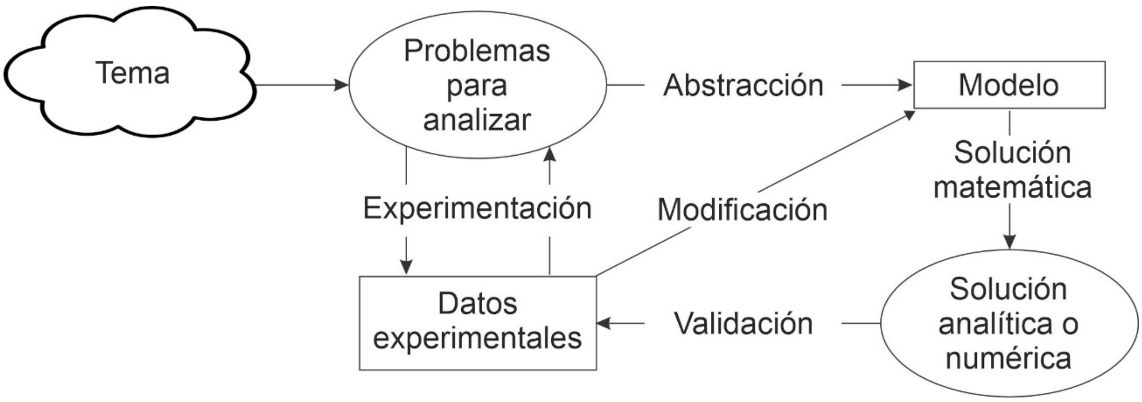
En esta regional se dictan actualmente las carreras de Ingeniería Electromecánica, Química y en Sistemas de Información. Dentro del perfil del egresado, se define, en uno de los ítems, que el ingeniero debe ser capaz de resolver problemas relacionados con la ingeniería. Por este motivo es que creo que la propuesta de incorporar la modelización matemática dentro del desarrollo del programa de estudio favorecería a la adquisición de la habilidad de resolución de problemas. Esta asignatura AMII se encuentra en el tercer cuatrimestre de la carrera, o sea, en el primero del segundo año de los planes de estudio, con una carga de 5 horas cátedras por semana, una duración de 16 semanas de clases (cuatrimestral). Los y las estudiantes que la cursan cuentan con los saberes de Análisis Matemático I y Algebra y Geometría Analítica. Para cursar AMII es condición necesaria tener regular en dichas asignaturas. La realidad es que al momento de la cursada pocos alumnos tienen ambas asignaturas aprobadas.

Las dos primeras consignas de esta actividad proponen la modelización de la parametrización de una superficie que cubre El Hangar. Este problema se seleccionó para los alumnos de segundo año de Ingeniería Química de la UTN, regional Resistencia.

Los saberes que necesitan son los siguientes:

[redacted] Cuádricas y cónicas. Superficies y curvas.
[redacted] Parametrización de curvas y superficies.
[redacted] Campos escalares y campos vectoriales
[redacted] Integrales de superficie.
[redacted] Teoremas de la divergencia.

Para abordar esta metodología se tendrán en cuenta las fases para la modelización, para recordarlas en todo el proceso e ir midiendo y controlando el ciclo de la modelización, se tendrá siempre a mano el diagrama de Bassanezi (2002), para usarlo como herramienta didáctica:



Enunciado del problema: El Hangar

Los hermanos Wright ganaron la lotería y quieren invertir en la construcción de un Hangar, le asignaron un espacio en el aeródromo para guardar dos Boeing 747. El terreno disponible donde se lo construirá tiene una superficie de dos hectáreas.

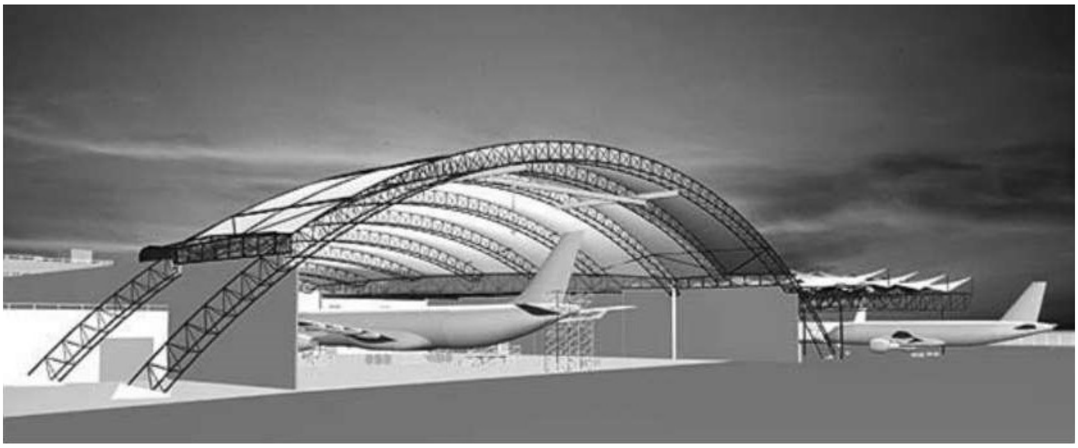
¿Qué medidas debería tener el Hangar?

¿Podría servir parametrizar la superficie que planteas?

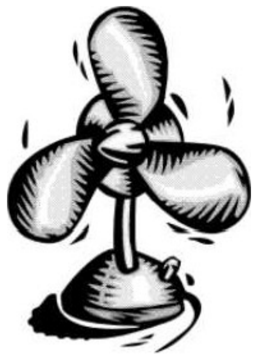
¿Cuál es la posición ideal de las vigas respecto al suelo?

Aplica un *software* para el diseño y, si diseñas varias posibilidades, preséntalas en el trabajo. Justifica luego porqué eliges una.

Te presentamos un modelo de diseño, es el que se recomienda por las distribuciones de fuerzas, ¿será cierto?



Una vez finalizada la construcción, se aplicará una capa de pintura al hangar cuya densidad será de 10 gramos por centímetro cuadrado (en todos los puntos) ¿Cuántos kilogramos de pintura se necesitarán?



Finalmente se instará un sistema de ventilación en el fondo del hangar que producirá una corriente de aire con campo de velocidad (medida en m/s), que puede ser F (x, y, z) = (O, x2+z2, O). ¿Por qué te parece que puede tener esa forma?, ¿es la única?

¿Cuántos metros cúbicos de aire atraviesan la salida del hangar por segundo?

Metodología e implementación

Se pretende proponer la actividad durante la segunda semana del cursado de Análisis Matemático II, en el primer cuatrimestre.

Se resolverá en grupos de tres a cinco integrantes, los grupos tendrán un/a docente tutor/a que los irá guiando en la investigación, en los avances, en los planteos y desarrollos.

Temas como las medidas de los aviones, los movimientos que necesitan realizar para ingresar al hangar, las normas para la construcción, el tipo de estructura más conveniente, así también como la elección de los *softwares*, podrían llevar un mes aproximadamente.

De allí que se propone que la realización de esta actividad de modelización atraviese el cuatrimestre. Promoviendo la comunicación vertical y horizontal con otras asignaturas.

Para ir viendo y compartiendo los avances programaría una reunión mensual con todos los grupos y los docentes, donde se expongan las propuestas y los desarrollos que se llevan adelante. En ese momento se realizarían la coevaluación, autoevaluación y hetero-evaluación.

En cada reunión mensual los docentes generarían un espacio del tipo "laboratorio", según Brousseau. También es importante que los y las docentes reconozcan las etapas del análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), promoviendo la descripción de las tareas y técnicas, la validación, las explicaciones y justificaciones; la aplicación, las etapas y procesos, y la validación de la técnica. También las teorías y tecnologías que soportan las técnicas.

Sin dejar a un lado la institucionalización, la descontextualización y la re contextualización, que se dan en sucesivos procesos de avances y retrocesos en el desarrollo de la solución al problema planteado.

Cálculos correspondientes al apartado 1)

La superficie S viene definida como la gráfica de la función:

$$f(x,y) = 10 - x^2$$

Se puede dar una parametrización sencilla de S tomando como parámetros las variables x e y.

$$s: IR^2 \rightarrow IR^3$$

$$(u,v) \rightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$x(u,v) = u$$

$$y(u,v) = v$$

$$z(u,v) = 10 - u^2$$

Para estudiar la regularidad de esta parametrización calculamos las derivadas parciales de s (u, v)

$$s_u(u,v) = (1, 0, -2u)$$

$$s_v(u,v) = (0,1,0)$$

y hallamos su producto vectorial

$$S_u(u,v)\ X\ S_V(u,v) = \ (1{,}0,-2u)\ X\ (0{,}1{,}0) = \ (2u, 0{,}1)$$

Como la tercera componente de este vector es constantemente igual a 1, se tiene

$$S_u(u,v)\ X\ S_V(u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in IR^2$$

por lo que la parametrización es regular en todos los puntos de S.

Cálculos correspondientes al apartado 2)

Calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental utilizando las fórmulas que los definen

$$E(u,v) = \ s_u(u,v)s_u\ (u,v) = \ (1,0,-\ 2u)\ (1,0,-\ 2u) = 1 + \ 4u^2$$

$$F(u,v) = \ s_u(u,v)s_v\ (u,v) = \ (1,0,-\ 2u)\ (0{,}1,0) = 0$$

$$G(u,v) = \ s_v(u,v)s_v\ (u,v) = \ (0{,}1,0)\ (0{,}1,0) = 1$$

La primera forma fundamental queda

$$I(u,v) = \ E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv\ + G(u,v)dv^2 = \ (1 + 4u^2)du^2 + \ dv^2$$

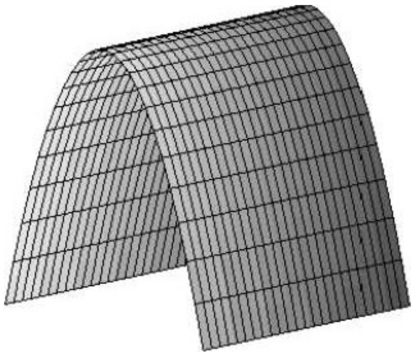
Cálculos correspondientes al apartado 3)

Las curvas paramétricas de la superficie se consiguen cuando uno de los parámetros se hace constante mientras que el otro varia. Así tenemos que para la parametrización de S dada en el apartado 1) las dos familias de curvas paramétricas son

$u - curva \qquad v = cte = k \qquad r(u) = s(u,k) = (u,k,10-u^2) \qquad u \in IR$

$v - curva \qquad u = cte = k \qquad r(v) = s(k,v) = (k,v,10-k^2) \qquad v \in IR$

En la figura siguiente aparecen en negro sobre la superficie algunas u-curvas y v-curvas. Las u-curvas son parábolas mientras que las v-curvas son rectas.



Por cada punto de la superficie pasa una u-curva y una v-curva. El ángulo que forman se puede calcular utilizando los coeficientes de la primera forma fundamental. En este caso, se tiene

$$\cos\beta \frac{F(u,v)}{\sqrt{E(u,v)G(u,v)}} = 0$$

ya que el segundo coeficiente fundamental es nulo. De esta forma las curvas paramétricas son ortogonales en todos los puntos de la superficie, como se puede comprobar en el dibujo anterior.

Cálculos correspondientes al apartado 4)

Conocida la densidad p en cada punto, la masa de una superficie se calcula integrando la función p (x, y, z) sobre la superficie, es decir, mediante

$$\int_S \rho(x,y,z)dS$$

Cuando la densidad es constante, como en el caso que nos ocupa, la masa es la densidad por el área de la superficie.

Calculamos entonces el área de la superficie que define el hangar.

Esta área se puede calcular según las fórmulas siguientes

$$Area = \int_S dS = \int_U \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \; du\, dv$$
$$= \int_U |s_u(u,v) \times s_v(u,v)| du dv$$

donde U es el conjunto donde varían los parámetros para definir la superficie del hangar y viene dado por el rectángulo

$$U = \left[0, \sqrt{10}\right] \times [0{,}30]$$

si tomamos como unidad de medida el metro.

Utilizando, por ejemplo, el producto vectorial de las derivadas que se conoce del apartado 1) se tiene

$$Area = \int_S dS = \int_U \sqrt{1+4u^2}\, du\, dv = \int_0^{30} \int_0^{\sqrt{10}} \sqrt{1+4u^2} \; du\, dv$$
$$= 30 \int_0^{\sqrt{10}} \sqrt{1+4u^2} \; du$$

Como

$$\int \sqrt{1+x^2} \; dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\, 1n\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) cte$$

la integral buscada es

$$Area = 30 \int_0^{\sqrt{10}} \sqrt{1+4u^2}\ du =$$

$$= 30\ \frac{1}{4}\left(2u\sqrt{1+4u^2} + 1n\ \left(2u + \sqrt{1+4u^2}\right) \Big|\begin{matrix}\sqrt{10}\\0\end{matrix} = \right.$$

$$\left. = \frac{15}{2}\left(2\sqrt{10}\,\sqrt{41} + 1n\left(2\sqrt{10} + \sqrt{41}\right)\right) \approx 322.80519\ \right)$$

Este resultado aproximado viene dado en metros cuadrados. Como la densidad es 10g/cm2 debemos realizar la correspondiente conversión de unidades

Kilogramos de pintura $= (10g/cm^2) \times (322.80519m^2) \times (10^4 cm^2/m^2) \times (10^3\ kg/g) = 32280.519\ kg$

Cálculos correspondientes al apartado 5)

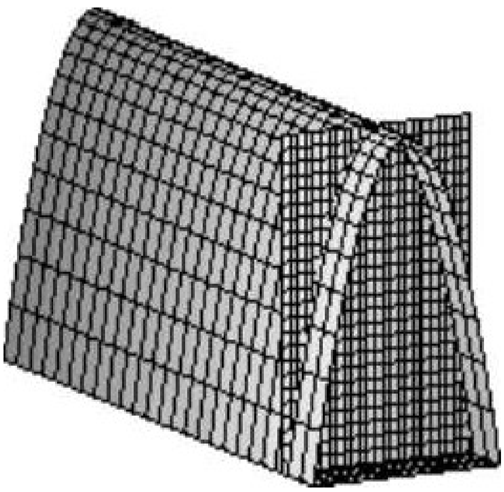
El sistema de ventilación instalado en el hangar hace que el aire se mueva y su velocidad viene dada por el siguiente campo

$$F(x,y,z) = (0, x^2 + z^2, 0)$$

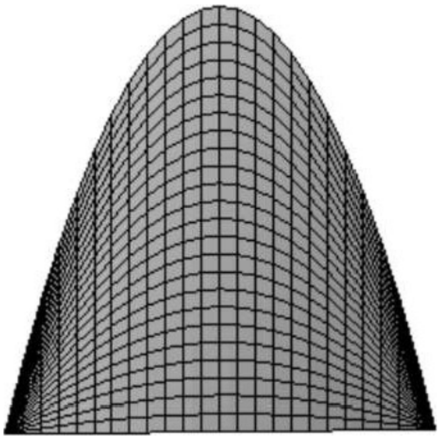
Para calcular la cantidad de aire que atraviesa la salida debemos obtener el flujo de F a través de la superficie de salida que viene dado por la correspondiente integral de superficie.

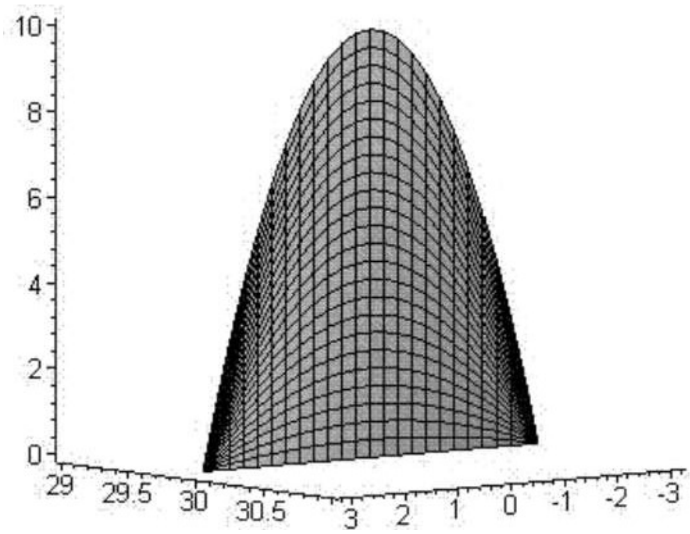
La superficie de la salida del hangar.

En la figura se representa el hangar y la superficie de salida.



Esta superficie es la parte del plano y=30 comprendida entre la parábola z=1-x2 y z=O, como se muestra en las figuras siguientes:





En primer lugar, necesitamos una parametrización de la superficie sobre la que hay que integrar.

Conseguimos una parametrización de la superficie de salida SI tomando la parametrización del plano definida cuando los parámetros son las variables x y z y su variación es adecuada, es decir

$$s': V \to IR^2$$

$$(u, v) \to (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$x(u,v) = u$$

$$y(u,v) = 30$$

$$z(u,v) = v$$

y el conjunto V donde varían los parámetros es

$$V = \{(u,v) \in IR^2 / 0 \le u \le \sqrt{10}, 0 \le v \le 10 - u^2\}$$

Cálculo del flujo de F

La integral de superficie se calcula como

$$\int_{S_1} F(x,y,z)dS = \int_{v} F \circ s'(u,v)(s'_u(u,v) \times s'_v(u,v))\, dudv$$

donde s'u y s'v son las derivadas parciales de la parametrización con respecto a los parámetros:

El producto vectorial de las derivadas es

$$S'_u(u,v) \times s'_v\,(u,v) = (0,-1,0)$$

Calculamos la integral

$$\int_{S_1} F\, dS = \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{1-u^2} (0, u^2 + \, v^2, 0)(0,-1,0\,)\, du\, dv = -\int_0^{\sqrt{10}} (\int_0^{1-u^2} (u^{2+}\, v^2)\, dv) du =$$

$$= -\int_0^{\sqrt{10}} (u^2(10 - \, u^2) + \frac{1}{3}\,(10 - \, u^2)^3)\, du =$$

$$= -(\frac{1000}{3}\, u - \, 30\, u^3 + \frac{9}{5}\, u^5 \, - \frac{1}{21}\, u^7)| \begin{matrix} \sqrt{10} \\ 0 \end{matrix} =$$

$$= -\frac{1160}{7}\sqrt{10} \approx -524.0346$$

Interpretación del signo de la integral

Como sabemos la integral de superficie de un campo vectorial es lo que se denomina una integral orientada, es decir, su signo varía con la orientación elegida para la superficie. La orientación de la superficie se define eligiendo un sentido para el vector normal, cuya dirección es la del vector producto vectorial de las derivadas parciales de la parametrización utilizada. En nuestro caso, hemos tomado como vector normal para realizar la integral

$$s'_u\,(u,v) \times s'_v(u,v) = (0,-1,0)$$

Al tomar el vector (0,-1,0) hemos fijado una orientación en la superficie.

El hecho de que la integral de superficie calculada sea negativa indica que el movimiento del fluido se opone al sentido del vector normal elegido.

De hecho, el sentido elegido para el vector normal apunta hacia el interior del hangar mientras que el aire se mueva hacia fuera del mismo.

Conclusiones

Esta propuesta se ha trabajado bajo el concepto de Modelización Matemática y para ello se eligió diseñar una actividad que permita al estudiante descubrir, involucrarse y apropiarse del conocimiento, siendo él mismo el que proponga caminos para llegar a la solución del problema. Parafraseando a Morten Blomhoj, creo que las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje, promoviendo al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuales construir importantes conceptos matemáticos, y relaciones entre los saberes que construye. Personalmente, creo que para que el desarrollo de la clase de matemática basada en la formación por competencias, en la modelización matemática, recreando la TAD y el enfoque ontosemiótico, mediante el CDM, se debe crear un ambiente de trabajo confiable y agradable.[8]

Bibliografía

[1]Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática, *Revista Educación Matemática*, pág. 108, vol. 16, núm. 2, © Santillana, agosto de 2004.

[2]Villarreal, E. y Mina, M. (2010). Traducción del artículo: Modelización potenciada por tecnologías de la información y la comunicación, pág. 3 Springer.

[3]Villarreal, E. y, Mina, M. (2010). Traducción del artículo: Modelización potenciada por tecnologías de la información y la comunicación, Springer.

[4]Buenaventura Loreto Vera Pérez, Los obstáculos epistemológicos en la investigación científica, en:
https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/hueiutla/n3/m4.html

[5]Ventura García Jiménez. (2018). La clase de matemáticas como laboratorio socio epistemológico. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* Universidad de Nariño, vol. 2, núm. 11, pp. 142-165.

[6]Salett Biembengut, M. y Hein, N. (2004) Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática, *Revista Educación Matemática,* © Santillana vol. 16, núm. 2, pág. 123.

[7]Pollak, H. Modelización matemática- una conversación con Henry Pollak, Teachers College, Columbia University, New York.USA Traducción realizada para el curso Didáctica Especial y Taller de Matemática — FaMAF (UNC) del artículo: Pollak, H. (2007) Mathematical modeling — a conversation with Henry Pollak. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14th ICMI Study (pp.109-120). New York: Springer.

[8]Balbi, M. (2014). Enseñanza por Competencias y su Ambiente de Trabajo, para el Ingreso a 10 año en la Facultad de Ingeniería de la UNNE. Tesis para optar al título de magíster en la enseñanza de la matemática (p.108 y 109) - UNNE, Sáenz Peña, Chaco, Argentina.

Trabajos premiados en el Concurso de Buenas Prácticas.

Estrategia basada en problemas para el desarrollo de competencias genéricas en el espacio de álgebra y geometría analítica

Responsable: Natalia Cuello.

Colaboración: Pablo Ochoa Rodríguez.

Facultad Regional Córdoba.

Fundamentación

La actualización y evolución de las estrategias tecno-didácticas en educación superior se han convertido en necesidades imperiosas para concretar los objetivos de aprendizaje por competencias. En este sentido, el aprendizaje basado en problemas (ABPb), como estrategia de enseñanza, se ha propuesto desde los años 60, iniciándose en los planes de estudio del área de Ciencias de la Salud de la Universidad de McMaster en Canadá. Algunos autores (Barrows y col., 1980) atribuyen sus orígenes al hecho de combatir la sensación de desilusión que experimentaban los estudiantes de medicina que tenían expectativas de aprendizaje más reales y dinámicas. De la medicina, se fue extendiendo a todas las áreas del conocimiento siendo implementado de forma total en sus currículos de formación, en las siguientes Instituciones: Universidad de Maastricht (Holanda), Wheeling Jesuit University (Washington, EEUU), Instituto Tecnológico de Monterrey (México) y University of New Castle, (Australia) (Painéan y col., 2012). En mi experiencia como docente he notado en todos los años cierta incertidumbre por parte de los y las estudiantes por no conocer la relación e importancia del contenido de la materia y su ejercicio profesional. Por esto, estas estrategias no solo favorecerían el desarrollo de las competencias genéricas, sino que aumentarían la motivación hacia el estudio a la vez que disminuirían el sentimiento de frustración y ansiedad que pudiera conllevar a un decrecimiento del alto abandono que se produce en los primeros meses del cursado.

El ABPb es un método centrado en el estudiante basado en el principio de usar problemas en escenarios reales y relacionados con la materia de estudio y profesión, los estudiantes se sienten identificados con los casos y se involucran con más entusiasmo e interés, haciendo que el aprendizaje que adquieren sea mucho más relevante y significante que en otras metodologías menos pragmáticas.

Objetivo general

Implementar estrategias de enseñanza basadas en problemas, para el desarrollo de competencias genéricas, tecnológicas y sociales, en el ciclo inicial homogéneo en las carreras de ingeniería.

Objetivos específicos

1) Implementar actividades que favorezcan el aprendizaje activo, autónomo y significativo para el desarrollo de competencias genéricas, tecnológicas y sociales definidas por CONFEDI.
2) Diseñar y aplicar instrumentos de seguimiento de implementación de estrategias propuestas para valorar el aporte al desarrollo de las competencias.
3) Analizar y procesar los datos cuantitativos y cualitativos provenientes de las experiencias de las actividades realizadas al finalizar el cuatrimestre.
4) Divulgar los resultados en forma de manuscrito e informe final.
5) Ampliar y actualizar la bibliografía en forma continua.

Alcance

Las actividades propuestas por este proyecto se implementarán en la asignatura de Algebra y Geometría Analítica brindada en el primer cuatrimestre del 2023, en los cursos 1V1 y 1V2, perteneciente a la especialidad de ingeniería. En los últimos años estos cursos se han compuesto por más de cien estudiantes.

Los resultados son de interés para el Departamento de Materias Básicas (UTN-FRC), ya que de esta experiencia se podrán fomentar nuevas estrategias metodológicas al resto del cuerpo docente y, eventualmente, podrían ser tenidas en cuenta para el rediseño curricular de esta asignatura. Asimismo, esta metodología es susceptible de ser aplicada en todas las materias del ciclo inicial de materias homogéneas, pudiendo escalarse y replicarse e inclusive desarrollarse en actividades conjuntas entre materias brindadas en el mismo periodo como el caso de Análisis Matemático I. Además, se podría prever que, en los años siguientes a este proyecto, devenga la articulación de todas las materias del departamento de manera transversal.

La propuesta diseñada permitirá sentar las bases para la transformación y mejora en las prácticas docentes, asumiendo el desafío de la formación básica de las y los estudiantes de las carreras de ingeniería, y prepararlos para las exigencias de saberes y competencias en el momento de su actuación profesional.

Metodología

Para desarrollar el objetivo 1) "Implementar actividades que favorezcan el aprendizaje activo, autónomo y significativo para el desarrollo de competencias genéricas, tecnológicas y sociales definidas por CONFEDI". Se considera proponer a los y las estudiantes un trabajo práctico grupal consistente en un problema propio del ejercicio de la profesión; y, de esta manera, lograr aumentar la motivación en el estudio de la materia mientras se estimula el pensamiento lógico y crítico, trabajo colaborativo, comunicación asertiva y aprendizaje autónomo.

La principal característica del ABPb reside en que el propio estudiante es protagonista de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El docente adopta el rol de orientador que propone la situación problemática y que actúa a disposición del estudiante para colaborar con su experiencia. Los y las estudiantes trabajan en colaboración, en pequeños grupos, dando lugar al desarrollo de habilidades de comunicación y competencias interpersonales (Lambros, 2004; Prince y col., 2005). La actividad propuesta debe promover la comprensión y el desempeño flexible, en tanto que el tema debe tener relevancia profesional.

Al momento de seleccionar la situación problemática debe tenerse en cuenta las siguientes características del curso:

1) Álgebra y Geometría Analítica es brindada en el primer cuatrimestre de primer año, teniendo como materia antecesora y correlativa solo el cursillo de ingreso de Matemática. Al mismo tiempo, los y las estudiantes están recibiendo clases de Análisis I, Integración I e Ingeniería y Sociedad, por lo que aún no han tenido ninguna experiencia en materias de su especialidad.
2) La materia pertenece al bloque de Ciencias Básicas, y si bien, la UTN se caracteriza por separar desde el primer momento a los y las estudiantes

según la especialidad, al ser esta materia homogénea para todas las ingenierías, es frecuente que se inscriba por consideraciones especiales a estudiantes de otras especialidades. Esto significa que, en el curso 1V1 y 1V2, que corresponde a ingeniería química, pueden inscribirse algunos estudiantes de otra especialidad.

Teniendo en cuenta estas dos características, la situación problemática debe ser de injerencia en la profesión de ingeniería, pero no ser demasiado específica en la especialidad, ya que los y las estudiantes del curso no poseen aún formación específica. En este sentido, los problemas de producción industrial podrían ser los más adecuados ya que podrían ser comprendidos por cualquier persona con secundario completo y resueltos con herramientas básicas del álgebra lineal.

A modo de ejemplo, se citará una situación problemática susceptible de ser utilizada en las clases brindadas en el 2023:

En el año 2022, la empresa Gold Fields compró la minera Yámana, creando, así, el cuarto productor de oro a nivel mundial. La venta unifica las operaciones en Sudáfrica, Ghana, Australia, Canadá y América del Sur. Por su parte, Yámana Chile Servicios Ltda., es una compañía con base en Canadá, que se dedica a la producción de oro, plata y cobre.

Sus propiedades en Chile son las minas Florida y El Peñón, además de los proyectos en vías de desarrollo. Según los reportes de la compañía que se publican en su página web, la producción anual de la mina La Florida es de 300-350 Tn de cobre y 6000-6500 Kg de Dore (aleación de oro y plata), mientras que la producción anual de la mina de El Peñón contiene 400-450 tn cobre y 4000-4500 kg de Dore.

Para satisfacer el pedido de un cliente, se requiere obtener 180 tn de cobre y 2524 kg de Dore. Siendo ustedes parte del equipo de ingenieros encargados de producción de la minera Yámana, deberán responder a la siguiente pregunta: ¿Cuántos días debe operar la mina La Florida y cuántos días debe operar la mina El Peñón para cumplir dicho pedido lo antes posible?

Es importante que la situación problemática acerque al estudiante a un contexto realista, por ello, no se plantea un problema de producción de una compañía genérica e hipotética, sino que se trata de una minera bien reconocida cuyos reportes pueden ser fácilmente descargados desde internet por los y las estudiantes.

Los y las estudiantes serán organizados en grupos menores a diez integrantes, y la situación problemática deberá ser resuelta por los mismos en el horario de una clase. Se espera que para dicha actividad los y las estuantes realicen las siguientes tareas; lectura comprensiva, diferenciación de ideas principales de secundarias, cambio de la representación del problema, planteo de las posibles formas de solucionar el problema intercambiando ideas entre los integrantes del grupo. Posteriormente, se hará una puesta en común entre todos. Finalmente, cada grupo entregará un informe escrito al finalizar la clase con las conclusiones y el planteo de la resolución. Cabe destacar que interesa al docente que al finalizar la clase se llegue a un planteo exitoso de la forma matemática de resolver el problema a través de las distintas etapas, quedando en segundo plano la solución numérica final. Si fuera necesario podrán terminar de calcular numéricamente para la siguiente clase. Con esta actividad los y las estudiantes podrán aplicar en un contexto realista, los conceptos de matrices y sistema de ecuaciones lineales percibiendo la utilidad de los contenidos de la materia para su futura vida profesional.

Estas tareas se basarán en el empleo de estrategias básicas para la comprensión, que incluyen las estrategias de atención, del procesamiento y organización de la información. De este modo, se implementarán estrategias de enseñanza para el desarrollo de procesos de pensamiento superior.

Para desarrollar el objetivo 2) "Diseñar y aplicar instrumentos de seguimiento de implementación de estrategias propuestas para valorar el aporte al desarrollo de las competencias", se evaluarán los trabajos entregados por los y las estudiante mediante rúbricas digitales, esperando dar un uso más avanzado de la plataforma Moodle que se ha implementado en la cátedra, por efecto de la pandemia, pero que, en muchos casos, están siendo subutilizados en su potencial.

A su vez se realizarán encuestas por medio del aula virtual y entrevistas presenciales para conocer la mirada, opinión y retroalimentación de la experiencia vivida por los y las estudiantes

Para desarrollar el objetivo 3) "Analizar y procesar los datos cuantitativos y cualitativos provenientes de las experiencias de las actividades realizadas al finalizar el cuatrimestre, evaluando el alcance de desarrollo de competencias", se recolectarán los datos obtenidos por cada docente, como se describió en el objetivo 3) y realizarán estadísticas, gráfica de barras, tablas comparativas, entre otros, para el tratamiento de los datos y su posterior exposición. Para la evaluación cualitativa, se seleccionarán algunas categorías que permitan rastrear correlaciones de las experiencias, retomar los datos cualitativos

Para desarrollar el objetivo 4) "Divulgar los resultados en forma de manuscrito e informe final" se realizarán análisis comparativos, cuantitativos y cualitativos sobre cómo impactan las estrategias docentes en el desarrollo y adquisición de las competencias genéricas, para medir la factibilidad y limitaciones presentadas en el desarrollo del proyecto y elaborar un informe de final.

Bibliografía

Barrows, Howard; Tamblyn, Robyn. Problem-based learning: An approach to medical education. New York: Springer, 1980

Lambros, Ann. *Problem based learning in middle and high school classrooms. A teacher's guide to implementation*. California: Corwin Press, 2004.

Paineán, Óscar; Aliaga, Verónica; Torres, Teresa. Aprendizaje basado en problemas: evaluación de una propuesta curricular para la formación inicial docente. *Estudios pedagógicos*, v. 38, n 1, p.161-180, 2012.

Prince, Katinka; Van Eijs, Patrick; Boshuizen, Henny; Vleuten, Cees; Scherpbier, Albert. General competencies of problem-based learning (PBL) and non-PBL graduates. *Medical Education*, n. 39, p. 394–401, 2005.

Propuestas de actividades de aprendizaje para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables. Visualización, comprensión y resolución de situaciones reales con Realidad Aumentada.

Responsable: Lucía Sacco.

Integrantes: Hernán Martínez.

Facultad Regional San Nicolás.

Líneas temáticas

Se consideran las siguientes líneas temáticas de trabajo en la propuesta de enseñanza:

- Aprendizaje activo. Se enfoca a que el y la estudiante busquen aprender de manera constante y voluntaria a través de estrategias que motivan a la indagación y a la resolución de problemas. Se propondrán fundamentalmente las metodologías activas que favorezcan el desarrollo de competencias: Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y Aprendizaje Basado en Investigación (ABI).
- Transformación digital. Se propondrán diversas herramientas, recursos y metodologías que complementen el proceso formativo y que permitan a las y los estudiantes adquirir competencias tecnológicas que potencien el aprendizaje de saberes.

Introducción

Análisis Matemático II es una asignatura anual de segundo año, de todas las carreras de Ingeniería de la FRSN, que requiere, tanto del docente como de los estudiantes, mucho compromiso, dedicación y estudio. Como objetos de conocimiento incluye el estudio de las funciones de varias variables en el marco del cálculo diferencial y el cálculo integral. Los y las docentes de la cátedra, desde hace años, vienen trabajando en el diseño, implementación y evaluación de distintas estrategias didácticas, cuyo eje central se base en el trabajo activo por parte de los y las estudiantes en la modelización y resolución de problemas reales de la Ingeniería, en los que se utilicen las herramientas matemáticas que se encuentran dentro de los contenidos de la asignatura y del uso de diversos recursos y tecnologías emergentes.

En 2021 y 2022, se diseña, implementa y evalúa un dispositivo de diferenciación (Perrenoud, 2004) con estudiantes que habían desaprobado el examen parcial de la Unidad de Cálculo Integral. En esa oportunidad se les planteó **una actividad abierta de aprendizaje**, en palabras de Astolfi (1997, pp. 144-145), de una situación problema, como superación de los obstáculos y dificultades evidenciadas en dicho parcial. En la actividad se planteó el reto de "salir a recorrer la ciudad", (estábamos saliendo poco a poco del aislamiento), elegir un objeto tridimensional que pudieran vincular con su especialidad o sus intereses. Luego, con conocimientos de Geometría Analítica y Análisis Matemático II, se proponía la toma de medidas reales, utilizando alguna aplicación del celular, el planteo de las ecuaciones que modelizaban el objeto tridimensional, utilizar GeoGebraRA para obtener información del modelo realizado y a partir de ello, problematizar y contextualizar el objeto tridimensional identificando aplicaciones geométricas y físicas de las trabajada en AMII.

Fundamentación

La educación basada en competencias supone poner el eje en el y la estudiante y en las actividades que este realiza, más que en los contenidos y la transmisión de estos (CONFEDI, 2018: 18). En otras palabras, plantea metodologías pedagógicas donde se "busca centrar la enseñanza en las salidas (*outputs*), las habilidades y no en los (*inputs)* o contenidos" (Martínez Alonso et al., 2008: 42). El modelo de enseñanza basada en las competencias tiene en cuenta la concepción del aprendizaje significativo, basado en los postulados de Ausubel, entre otros, y los enfoques constructivistas actuales, que sostienen que las transformaciones que experimenta el estudiante son en forma simultánea, tanto en el orden cognitivo como en su personalidad (Molina Álvarez, 2000: 13). El aprendizaje, desde este enfoque, es la base del desarrollo del alumno, entendiéndose como tal, al nivel de independencia que alcanza el mismo, producto de los conocimientos que adquiere y que le permiten estar mejor preparado para dar solución a cualquier situación problemática.

A partir de la experiencia realizada en 2021 y 2022, con la actividad abierta de aprendizaje antes mencionada, como una estrategia didáctica que proponga un modo diferente de acercamiento, no sólo a los saberes conocer de AMII, sino principalmente en los saberes hacer y ser.

La manipulación de distintas representaciones matemáticas por parte de los estudiantes proporciona medios para construir imágenes mentales de los objetos o conceptos matemáticos trabajados. La potencialidad de estas imágenes conceptuales construidas dependerá de las representaciones que el y la estudiante utilice (HItt, 2000; Hitt, 2003). Arcavi (2003) describe la visualización como la capacidad, como el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas en la mente, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas desconocidas y compresiones avanzadas. El tema de las aplicaciones geométricas como físicas del cálculo diferencial e integral presenta un gran número de situaciones problemas que, de trabajarse desde una buena representación gráfica, que lleve a activar el proceso de visualización, permite al estudiante diseñar estrategias de resolución y solución. Esta propuesta de enseñanza, como evolución de lo trabajado en años anteriores, propone en 2023 diseñar, implementar y evaluar una actividad de aprendizaje como trabajo práctico que lleve a los y las estudiantes a la visualización, comprensión y resolución de una situación problema, recuperando conocimientos previos de Geometría Analítica, Análisis Matemático I, Física I y II, integrando distintas tecnologías además de las de medición y Realidad Aumentada para el estudio de las aplicaciones, no sólo del cálculo integral, sino del cálculo diferencial.

Competencias genéricas, meta, resultados de aprendizaje y objetivos

Las Competencias Genéricas que se pretenden promover a partir de la propuesta de enseñanza, según Libro Rojo, son las siguientes:

- Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la Ingeniería.
- Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
- Comunicarse con efectividad.

Meta de la asignatura:

Valorar la importancia de la aplicación del Cálculo Diferencial e Integral, con funciones reales, vectoriales y Ecuaciones Diferenciales, como herramientas eficaces en la formación básica del profesional, para la identificación, formulación, resolución y comunicación de problemas de Ingeniería.

Resultados de aprendizaje:

Del estudiante en el primer cuatrimestre (parte del segundo):

RA 1: Evalúa el Cálculo Diferencial de funciones reales y vectoriales para el estudio de curvas en el espacio y aplicaciones de la diferenciabilidad en el contexto de la situación problemática.

RA 2: Evalúa el Cálculo Integral de funciones reales y vectoriales para el cálculo de aplicaciones físicas y geométricas teniendo en cuenta cada situación problema y utilizando herramientas digitales que permitan el análisis de las soluciones obtenidas.

Objetivos de la propuesta de enseñanza

Generales:

Diseñar, implementar y evaluar actividades abiertas de aprendizaje con Realidad Aumentada que integren contenido, pedagogía y tecnología para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables y que lleven a los y las estudiantes al desarrollo de la identificación, visualización, formulación, comprensión y resolución de situaciones problemáticas reales.

Específicos:

- Fortalecer los contenidos de Geometría Analítica para la visualización de objetos tridimensionales utilizando aplicaciones para realizar mediciones y modelizaciones.
- Adquirir una mayor percepción e interacción con entes geométricos utilizando Realidad Aumentada del *software* GeoGebra

para el estudio del cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables.

- Verificar el proceso de modelización de superficies y sólidos tridimensionales reales, propuesto a partir de trabajar con superficies dadas en forma cartesiana y/o paramétricas y con GeoGebraRA.
- Problematizar situaciones reales utilizando aplicaciones geométricas y físicas del cálculo diferencial e integral sobre objetos tridimensionales.

Alcance

La propuesta de enseñanza se implementará durante el 2023 con estudiantes de segundo año que cursan Análisis Matemático II, en el denominado Curso Común de la FRSN. Al mismo concurren a clases alrededor de 25 estudiantes, quienes ya han transitado en algún año anterior su trayectoria académica por la asignatura, pero que no han podido alcanzar la regularidad. La duración de la propuesta de enseñanza es entre los meses de mayo y setiembre. El gran desafío que se propone es ampliar y evolucionar lo propuesto en 2021 y 2022.

Este trabajo es un aporte fundamental para analizar la transferencia de aprendizajes que realizan los y las estudiantes de saberes de las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático I de primer año, así como de la asignatura Física II, que se encuentra en el segundo año de estudios. Por otro lado, se considera el potencial uso del *software* libres, tanto los propuestos por los docentes como los que propongan los y las estudiantes. GeoGebraRA es libre, no requiere ningún tipo de trabajo de programación o lectura de lenguajes por parte del estudiante y puede ser manipulado desde los móviles de los y las estudiantes.

Metodología propuesta

Se ofrece, para 2023, una propuesta de enseñanza que forme parte de un modelo definido por la cátedra.

Durante los meses de marzo y abril se propone reforzar conocimientos previos a partir de la siguiente unidad:

Unidad Nº 1: Estructura vectorial y métrica de Rn. Nociones de Topología de Rn

Estructura vectorial de Rn: Definición de Rn. Propiedades. Estructura métrica de Rn. Distancia entre dos puntos: definición, propiedades. Entorno de un punto de Rn: definición, casos particulares (n= 1, 2, 3). Entorno reducido. Puntos particulares de un conjunto de Rn: punto aislado, de acumulación, interior, exterior, frontera. Conjunto de puntos de Rn: conjunto acotado, abierto, cerrado, compacto, conexo, simplemente conexo, frontera, dominio.

Finalizada esta unidad se entregarán las pautas de realización de los dos trabajos prácticos, como actividades libres de aprendizaje a trabajar en equipo. Dichos equipos de trabajo los conformarían los propios estudiantes. Los y las docentes estarán atentos a dicha conformación, teniendo en cuenta los resultados de los test de aprendizajes realizados a comienzos del ciclo lectivo.

- Entre mayo y junio se propondrá una actividad de aprendizaje, en forma de 1er.Trabajo Práctico, en la cual se propone la elección de un objeto tridimensional, la modelización geométrica con ecuaciones cartesianas, topología en R^2 y R^3 y la formulación de aplicaciones del cálculo diferencial, interpretando y ajustando lo realizado con GeoGebraRA y otras tecnologías, según lo planteen los y las estudiantes. (TP a diseñar para 2023)
- Entre julio y setiembre se presentarán las consignas de un 2do Trabajo Práctico, que propone continuar con el objeto tridimensional antes trabajado, realizando particularmente cálculos referidos a la integración, y trabajando con el concepto de superficies paramétricas y aplicaciones geométrica y físicas de las integrales múltiples, de líneas y de superficie. (con ajustes a lo realizado en 2021 y 2022)

Para ambos trabajos prácticos, se realizarán controles periódicos de los avances por parte de los y las estudiantes (orientación, ajustes, resolución de dudas, etc.).

Criterios de evaluación de logros de desempeños (similares para cada TP)

- Muestra creatividad en el planteo de la situación problema real que involucra el objeto tridimensional utilizando aprendizajes del cálculo diferencial / cálculo integral.
- Aplica por lo menos tres saberes del cálculo diferencial / cálculo

integral en la resolución del problema planteado.

- Evidencia el uso de aplicaciones de medición y de Realidad Aumentada de GeoGebra como recursos para evaluar la visualización y modelización del objeto tridimensional propuesta.
- Evidencia capacidades para desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.

Confecciona un informe digital que incluya las etapas de trabajo realizadas, con capturas de las aplicaciones de medición y de realidad aumentada, fotos reales y cálculos realizados, utilizando herramientas informáticas apropiadas (editor de ecuaciones). Los y las estudiantes contarán con días de consultas y un cronograma de presentación de avances de lo realizado. Las consultas se realizarán en forma presencial o a través de los foros de intercambio y colaboración, incluidos en el Aula Virtual de Moodle. Junto con las consignas de los trabajos prácticos se incluirá la rúbrica con la que se evaluará la actividad.

Algunas evidencias de producciones 2021 y 2022

Por cuestiones de espacio sólo se incluyen las consignas de la actividad libre de aprendizaje, algunas de las imágenes que evidencian acciones llevadas a cabo por el y la estudiantes para el reconocimiento, visualización e interpretación del objeto tridimensional y las consignas por ellos propuestas, aplicando saberes de la unidad en la resolución de estas. Es importante señalar que los y las estudiantes incluyen en esta actividad lo investigado del objeto tridimensional que los lleva a poder formular preguntas y plantear estrategias de resolución y análisis de soluciones.

1. Consignas

a) Describir un objeto tridimensional del espacio real, en tu lugar de trabajo, en tu casa, en la calle. Este puede ser o no sólido. Puede estar conformado por varios cuerpos tridimensionales.

b) Utilizar las aplicaciones de medición para obtener las dimensiones reales del objeto tridimensional real.

c) Modelizar dicho objeto con los entes geométricos utilizados en esta asignatura o anteriores (puntos, rectas, planos, superficies)

d) Utilizar GeoGebra 3D para visualizar el modelo digital a partir de las ecuaciones que lo modelizan.

e) Utilizar la herramienta REALIDAD AUMENTADA de GeoGebra (AR) "verificar" el modelo digital propuesto del objeto real (superponiendo el modelo digital sobre el objeto real). Ver tutoriales propuestos en el aula y en este documento.

f) Problematizar una situación en la que incluyas dicho objeto tridimensional realizando cálculos de volúmenes, masas, áreas laterales, flujo, circulación u otro concepto trabajado en la UNIDAD 5 (por lo menos tres contenidos).

g) Resolver en forma completa, incluyendo el paso a paso realizado y todas las fotos y capturas que "muestren" lo realizado.

h) Incluir la bibliografía consulta.

(Propuesta de un alumno Ingeniería Eléctrica)

Objeto tridimensional: transformador eléctrico.

1) Hallar, de forma genérica y mediante integrales múltiples, el volumen de la caja base del transformador.
2) Se sabe que los transformadores, generalmente, contienen aceite natural como aislante, suponiendo que el transformador del problema contiene 200 litros(1l=1000cm³) en su caja principal y que no quedan espacios libres dentro del mismo. Calcular el volumen ocupado por los componentes internos del transformador.
3) Se solicita calcular la masa total del transformador sin tener en cuenta los componentes internos para la elección del material de soporte. Realice las operaciones suponiendo una densidad constante δ=k.
4) Suponiendo que el transformador se sobrecalienta por pérdida de refrigerante, calcular el flujo de calor saliente de la caja principal del transformador $(\bar{C} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k})$.

Índice

Buenas prácticas
Desarrollo de la Competencia de Modelización Matemática

Idalí Calderón, Mario Di Blasi, Viviana Cappello, Gabriela Tomazzeli, Milena Balbi, Natalia Cuello, Pablo Ochoa Rodirguez, Lucía Sacco, Hernán Martínez,
Compilación: Julieta Rozenhauz, Liliana Cuenca Pletsch

En la enseñanza de las matemáticas, no hay una receta única para instaurar la innovación en el aula; sin embargo, existen buenas prácticas que representan ejercicios exitosos de implementación. Estos ejemplos parten de los cambios curriculares en las asignaturas, que fomentan la creatividad. En esta línea, abordamos la competencia de modelización matemática, desde diferentes concepciones; las perspectivas en educación y el empoderamiento matemático. Luego se reflexiona acerca de la capacitación docente requerida y se presentan buenas prácticas. Finalmente, están los dos trabajos ganadores del "Concurso de propuestas de enseñanza para el desarrollo de competencias". Los proyectos nominados a partir de esta convocatoria representan un gran ejemplo de cambio planeado, ya que reflejan los resultados de aprendizaje que se quieren alcanzar y especifican un método razonable de implementación.

ISBN 978-987-8992-26-6
9 789878 992266
edUTecNe