

## CONSIDERACIONES DINÁMICAS SOBRE EL CONTROL DE UNA TOBERA PIVOTANTE

NAGUIL, JORGE L.<sup>(1)(2)(\*)</sup> - PEDRONI, JUAN P.<sup>(1)(2)</sup> - COVA, WALTER J. D.<sup>(1)(3)</sup> -  
JAZNI, JORGE E.<sup>(1)(3)</sup> - MODESTI, MARIO R.<sup>(4)</sup>

<sup>(1)</sup> Instituto Universitario Aeronáutico, Centro de Investigaciones Aplicadas,  
Departamento Sistemas Electromecánicos.  
Av. Fuerza Aérea 6500 – CP(5022) Córdoba – Argentina.  
<sup>(\*)</sup> Tel. 0351-4664242 e-mail: [jnaguil@iua.edu.ar](mailto:jnaguil@iua.edu.ar)

<sup>(2)</sup> Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba,  
GRSI – Grupo Robótica y Sistemas Integrados.  
Av. Vélez Sarsfield 1611 – CP (5000) Córdoba – Argentina.

<sup>(3)</sup> Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba,  
CUDAR - Centro Universitario de Desarrollo en Automación y Robótica.  
Maestro Marcelo López y Cruz Roja Argentina – CP(5016) Córdoba – Argentina.

<sup>(4)</sup> Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba,  
CIII - Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería, LabSen (Laboratorio de Sensores).  
Maestro Marcelo López y Cruz Roja Argentina – CP(5016) Córdoba – Argentina.

### RESUMEN

Se analizan las cargas dinámicas impuestas por el conjunto constituido por la tobera y los dos actuadores electromecánicos montados a  $90^\circ$  para la orientación del eje de empuje de un vehículo lanzador. Se estudia la influencia de los componentes del conjunto y las simplificaciones aplicables, se discute la utilización de las expresiones de Euler y Kane para obtener el modelo dinámico del sistema, se presenta un esquema de control y se genera la correspondiente ley de control para el movimiento combinado de los actuadores, sometida a las especificaciones de comportamiento dinámico y restricciones cinemáticas. Se validan los resultados obtenidos mediante simulaciones en condiciones de funcionamiento lineal y no lineal, se evalúa la performance del controlador utilizando un índice de optimización.

### 1.- INTRODUCCION

La problemática del control de posición de la tobera de un vehículo lanzador, mediante actuadores cruzados es discutida en [1] en sus aspectos cinemáticos. En particular el desarrollo expuesto a continuación tiene por objeto el estudio de las relaciones dinámicas que rigen el movimiento de un motor de reacción orientable para grandes ángulos de deflexión, como asimismo la determinación formal de los comandos a ser suministrados por el autopiloto al objeto de garantizar que la trayectoria descrita por el eje de la tobera sea tal que minimice las componentes del empuje en direcciones no deseadas. Se introduce como novedad la utilización del método

de Kane [5] en la generación de la ley dinámica de control.

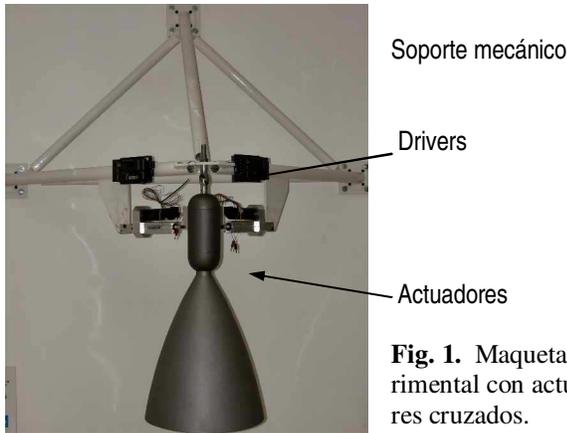
Aparecen además objetivos adicionales para este trabajo. En primer término, disponer de un modelo dinámico que permita integrar (en un futuro) los efectos de perturbaciones derivadas de la propulsión (encendido y apagado del chorro de gases, desalineación del vector empuje, etc.) y, en segunda instancia, favorecer la integración de un modelo hardware-in-the-loop de carácter general, que permita no sólo verificar el lazo de posición de la tobera, sino también diferentes estrategias de guiado.

En la Sección 2 de este trabajo se deduce un modelo dinámico del sistema tobera y se realiza la justificación de simplificaciones introdu-

cidas; mientras que la Sección 3 centra su enfoque en la obtención de una ley de control para el movimiento combinado de los efectores, que asegure la ortodromicidad de las trayectorias descritas por el eje de la tobera, respetando las especificaciones de performance del sistema. En el apartado de Conclusiones se resumen los resultados alcanzados y se plantean futuros desarrollos.

## 2. DINÁMICA

La Fig. 1 muestra un montaje experimental con la maqueta de la cámara de combustión y la tobera de la segunda etapa a propulsante líquido de un vehículo lanzador. Para la obtención del modelo dinámico se realizó una primera aproximación, suponiendo al vehículo en rampa de lanzamiento y tomando el punto de pivotamiento de la tobera como inercial. Posteriormente, para modelar el comportamiento en vuelo, habrá que tener en cuenta el centro de masa del vehículo como punto de referencia inercial.



**Fig. 1.** Maqueta experimental con actuadores cruzados.

### 2.1. El método de Kane.

El modelado dinámico de sistemas puede ser obtenido mediante diferentes métodos, tales como las ecuaciones de Newton-Euler, ecuaciones de Lagrange o el método de Kane. El procedimiento de Kane es muy efectivo para el modelado dinámico de sistemas multi-cuerpos. Las coordenadas generalizadas corresponden al mí-

nimo conjunto de coordenadas que describen el sistema. Para sistemas con restricciones noholonomicas, el uso de velocidades generalizadas representa el mínimo número de variables de velocidad para describir el movimiento del cuerpo. Este número es llamado grados de libertad del sistema. Las ecuaciones dinámicas de Kane pueden ser representadas como:

$$\dot{P}_r^o + \dot{P}_r^o = 0 \quad \text{con } (r=1, \dots, p)$$

Donde:

$$\dot{P}_r^o = 0 \sum_{i=1}^N v_r^{P_i} \cdot R_i \quad \dot{P}_r^o = \sum_{i=1}^N v_r^{P_i} \cdot R_i^*$$

Donde  $\dot{P}_r^o$  son las fuerzas generalizadas activas o externas y  $\dot{P}_r^o$  son las fuerzas generalizadas de inercia;  $R_i$  son las fuerzas activas;  $R_i^*$  son las fuerzas de inercia;  $P_i$  es la partícula  $i$  del sistema;  $v_r^{P_i}$  es la velocidad parcial de la partícula  $P_i$  respecto a un sistema inercial, siendo  $N$  el número de partículas.

### 2.2. Modelado por Kane.

Se considerará al modelo mecánico como un único cuerpo rígido, el conjunto tobera-cámara de combustión con masa  $MT$ , lo cual se justificara mas adelante. Se define a  $I$  como la matriz de inercia del sistema. Se asume simetría axial alrededor de  $x_p$ .

El movimiento de la tobera se describe desde un marco inercial, la terna  $\{x_f, y_f, z_f\}$  paralela a los ejes del vehículo o la terna  $\{x_p, y_p, z_p\}$  paralela a los ejes de la tobera, coincidiendo los ejes  $Oy_f$  y  $Oz_p$  con los ejes de rotación de la cruceta, Figs. 2 y 3.

Se trabajará con 2 coordenadas generalizadas  $q_{1,2}$  y para la descripción de la posición y dos velocidades generalizadas  $u_{1,2}$  para la descripción del movimiento del sistema. Las coordenadas generalizadas son los ángulos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  que describen la posición de la tobera respecto de la terna  $\{x_f, y_f, z_f\}$ . la velocidad angular está dada por:

$$\bar{\omega} = u_1 e_{y_f} + u_2 e_{z_p}$$

Donde  $u_{1,2}$  son las derivadas temporales de  $q_{1,2}$  respectivamente.

En las Figs. 2 y 3, los puntos A y B son los puntos de fijación de los actuadores 1 y 2 a la estructura del vehículo, mientras que P y Q corresponden a las fijaciones contra el cuerpo de la cámara de combustión, solidaria a la tobera.

De acuerdo a la convención adoptada, el actuador 2 (QB) hace rotar al eje de la tobera  $\delta_1$  alrededor del eje  $Oy_f$ , mientras que el actuador 1 (PA) lo hace rotar  $\delta_2$  alrededor del eje  $Oz_f$ , existiendo obviamente un acoplamiento de movimientos.

La fuerza  $F_P$  es paralela al vector AP y actúa sobre el punto P. La fuerza  $F_Q$  es paralela al vector BQ y actúa sobre el punto Q, Fig.3. En situación de reposo los puntos A, B, P y Q son coplanares y las fuerzas ( $F_P$  y  $F_Q$ ) proporcionadas por los actuadores son nulas.

Se define:

- $a+b$ : distancia de A o B al eje  $x_f$
- $b$ : distancia de P, Q al eje  $x_p$
- $c$ : distancia de A, B al plano  $y_f z_f$ , distancia de P, Q al plano  $y_p z_p$
- $cg$ : distancia al centro de masa

De acuerdo a lo precedente, las ecuaciones dinámicas de Kane quedan definidas por (1) y (2), para determinarlas formalmente se utilizó la herramienta para modelado dinámico de sistemas mecánicos Autolev® [4], [5].

$$\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r = 0$$

Entonces:

$$\frac{K_{n1}}{K_{d1}} F_P + \frac{K_{n2}}{K_{d2}} F_Q + R_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{K_{n3}}{K_{d3}} F_P + \frac{K_{n4}}{K_{d4}} F_Q + R_2 = 0 \quad (2)$$

Donde:

$$K_{n1} = c \cdot \sin(\delta_1) \cdot [b \cdot \sin(\delta_2) + c \cdot \cos(\delta_2)]$$

$$K_{d1} = \left[ b^2 + 2 \cdot c^2 + (a+b)^2 + 2 \cdot c \cdot (a+b) \cdot \sin(\delta_2) - 2 \cdot b \cdot (a+b) \cdot \cos(\delta_2) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\delta_2) \cdot \cos(\delta_1) - 2 \cdot c^2 \cdot \cos(\delta_1) \cdot \cos(\delta_2) \right]^{1/2}$$

$$K_{n2} = c \cdot \cos(\delta_1) [b - (a+b) \cdot \cos(\delta_2)] + \sin(\delta_1) [b \cdot (a+b) + c^2 \cdot \cos(\delta_2)]$$

$$K_{d2} = \left[ b^2 + 2 \cdot c^2 + (a+b)^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\delta_1) - 2 \cdot b \cdot (a+b) \cdot \cos(\delta_1) - 2 \cdot c^2 \cdot \cos(\delta_1) \cdot \cos(\delta_2) - 2 \cdot c \cdot (a+b) \cdot \sin(\delta_1) \cdot \cos(\delta_2) \right]^{1/2}$$

$$R_1 = -g \cdot c g_x \cdot MT \cdot \sin(\delta_1) \cos(\delta_2) - 2 \cdot (I_{xx} - I_{yy}) \sin(\delta_2) \cos(\delta_2) \delta_1^2 \delta_2^2 - (I_{yy} + (I_{xx} - I_{yy})) \sin^2(\delta_2) \delta_1^2$$

$$K_{n3} = -c \cdot \cos(\delta_2) [b \cdot \cos(\delta_1) + (a+b)] - \sin(\delta_2) [b \cdot (a+b) + c^2 \cdot \cos(\delta_1)]$$

$$K_{d3} = K_{d1}$$

$$K_{n4} = c \cdot \sin(\delta_2) \cdot [(a+b) \cdot \sin(\delta_1) + c \cdot \cos(\delta_1)]$$

$$K_{d4} = K_{d2}$$

$$R_2 = -g \cdot c g_x \cdot MT \cdot \sin(\delta_2) \cos(\delta_1) + (I_{xx} - I_{yy}) \sin(\delta_2) \cos(\delta_2) \delta_1^2 - I_{zz} \delta_2^2$$

Estas ecuaciones se utilizan para generar la ley de control dinámico.

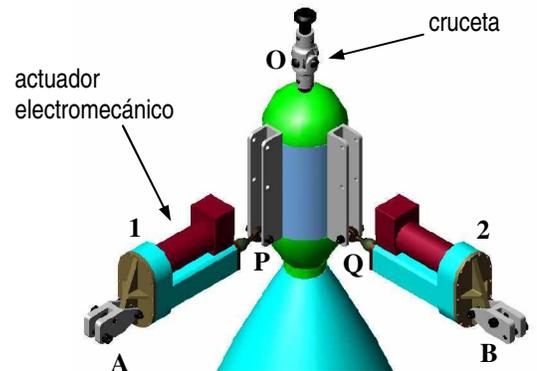


Fig. 2. Disposición esquemática.

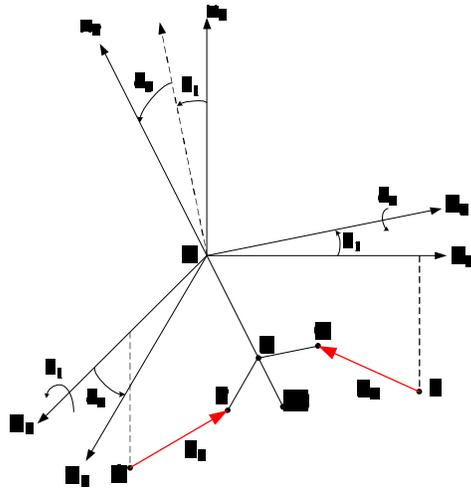


Fig. 3. Temas de referencia y fuerzas

### 2.3. Modelado por Newton-Euler.

En la Fig. 4 se muestra el modelo generado en Simulink® a partir de la ecuación de Newton-Euler (3), siguiendo a [6].

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i \bar{T}_i + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega} \quad (3)$$

Donde

- $\bar{L}$  momento angular del sistema
- $\bar{T}_i$  cuplas puras del sistema
- $\bar{F}_i$  fuerzas actuantes en el sistema
- $\bar{r}_i$  vectores del punto de acción de las fuerzas respecto a un punto inercial, en nuestro caso el punto de pivotamiento.
- $I$  matriz de inercia del sistema

$\bar{\alpha}, \bar{\omega}$  aceleración y v. angular del sistema.

### 2.3.1. Consideraciones sobre la matriz de inercia.

Aunque la masa de los actuadores 2.4Kg es comparativa con la masa de la tobera 9.73Kg, considerando las restricciones mecánicas del sistema (Fig 2), observamos que los actuadores al estar fijos a la estructura, la posición de su centro de masa respecto al punto de pivotamiento se mantiene prácticamente constante. Por lo que su influencia sobre la inercia del sistema es muchísimo menor que si acompañaran el movimiento del centro de gravedad de la tobera. En el siguiente cálculo se asumirá que así lo hacen, para demostrar su baja influencia en el sistema respecto de la matriz de inercia

La matriz de inercia está compuesta por la tobera, cámara de combustión, y el conjunto de los actuadores electromecánicos y sus accesorios de montaje. Las contribuciones inerciales respecto del punto de pivotamiento se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Momentos de Inercia.

	Tobera y Cámara de Combustión	Actuadores y Accesorios
I <sub>xx</sub>	0,1439	0.12728
I <sub>yy</sub>	2.2255	0.08582
I <sub>zz</sub>	2.2255	0.08582
I <sub>xy</sub>	0,0	0.00024
I <sub>xz</sub>	0,0	0.00024
I <sub>yz</sub>	0,0	0,0

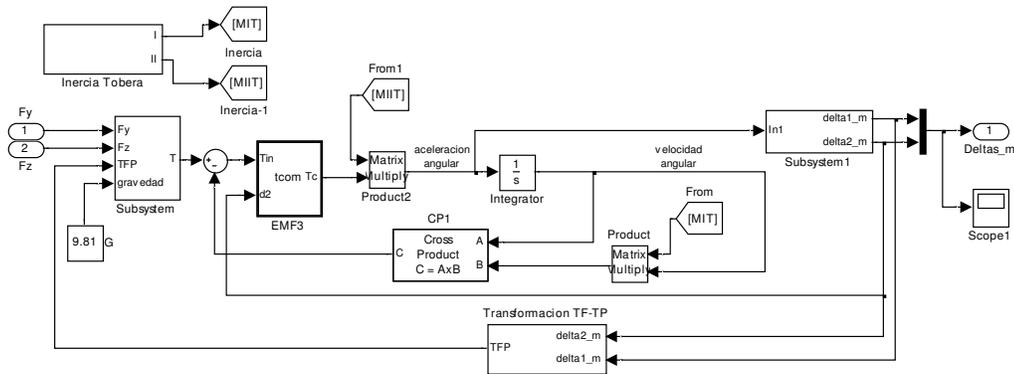


Fig. 4. Modelo Simulink®

En función de las especificaciones estáticas y dinámicas se obtienen los momentos debidos a cada conjunto, empleando para el cálculo las máximas aceleraciones y velocidades angulares especificadas (Tabla 2).

**Tabla 2.** Especificaciones de los actuadores.

Especificaciones Estáticas		
Características	Valores	Equivalente ángulo
Desplazamiento (elongación) total	42 mm	≈0.4369 rad
Desplazamiento controlado	40 mm	≈0.4160 rad
Precisión de posicionamiento	±0.05 mm	≈0.0054 rad
Especificaciones Dinámicas		
Características bajo carga	Valores	
Velocidad de posicionamiento <sup>(1)</sup>	≥ 0.2 m/s	≈2.08 rad/s
Aceleración de posicionamiento <sup>(1)</sup>	≥ 12 m/s <sup>2</sup>	≈154.57 rad/s <sup>2</sup>
Ancho de banda de -6dB <sup>(2)</sup>	≥ 10 Hz	
<sup>(1)</sup> Valores máximos en condiciones de error de posicionamiento por fuera de la banda de linealidad.		
<sup>(2)</sup> Para valores de error de posicionamiento dentro del 10% del rango de desplazamiento controlado (± 2 mm).		

Momento debido a los actuadores:

$$|I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega}| = |T_a| = 18.76 \quad (4)$$

Momentos debidos a la Tobera:

$$|I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega}| = |T_T| = 486.48 \quad (5)$$

De las Ecs. (4) y (5) se obtiene que el momento debido a los actuadores es despreciable frente a los de la tobera (3.86%); en base a lo cual queda justificado modelar a los actuadores como fuerzas de control que se ejercen sobre los puntos P y Q.

### 2.3.2. Consideraciones sobre las fuerzas y cuplas puras.

Se consideran solamente las fuerzas debidas a la gravedad y la de control de los actuadores. En el sistema propuesto no existen cuplas puras de control.

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r}_P \times \bar{F}_{AP} + \bar{r}_Q \times \bar{F}_{BQ} + \bar{r}_{cg} \times \bar{F}_g + \bar{T}_e = I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega}$$

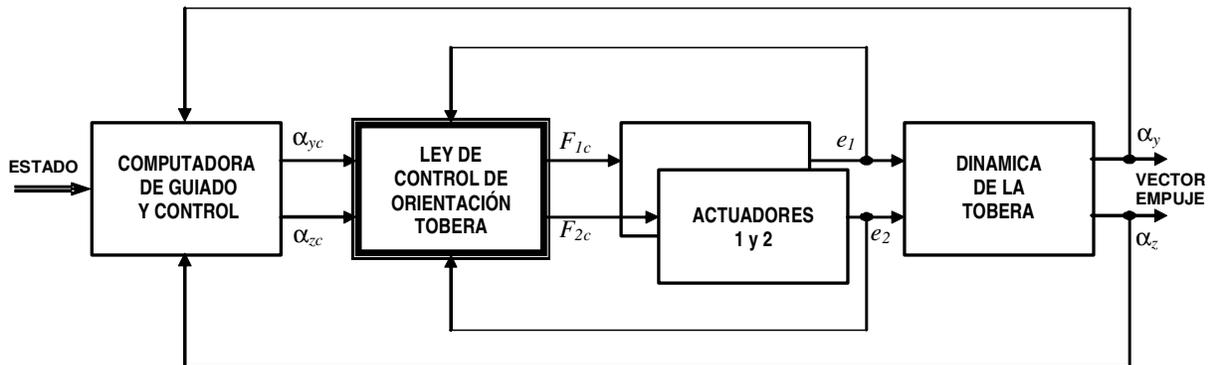
donde  $F_{AP}$  y  $F_{BQ}$  son las fuerzas de control de los actuadores y  $y$  y  $z$  respectivamente. El momento  $T_e$  se debe a las restricciones mecánicas y es paralelo al vector  $e_{yf} \times e_{zp}$ .

## 3. CONTROL DEL VECTOR EMPUJE.

### 3.1. Consideraciones Generales.

Se definirá al vector de posicionamiento OR como un versor cuya dirección coincide con el eje de simetría de la tobera, véase la Fig. 3. El vector de posicionamiento de la tobera, podrá adoptar cualquier orientación, barriendo su extremo un sector esférico de 20° de apertura angular total (requerimiento de diseño).

El problema de control se sintetiza en la Fig. 5. El estado de actitud y posición del vehículo junto con la orientación actual del vector empuje alimentan a la Computadora de Guiado y Control (CGC) la que, de acuerdo a la trayectoria nominal perseguida, genera las variables de comando



**Fig. 5.** Lazo de control del vector empuje.

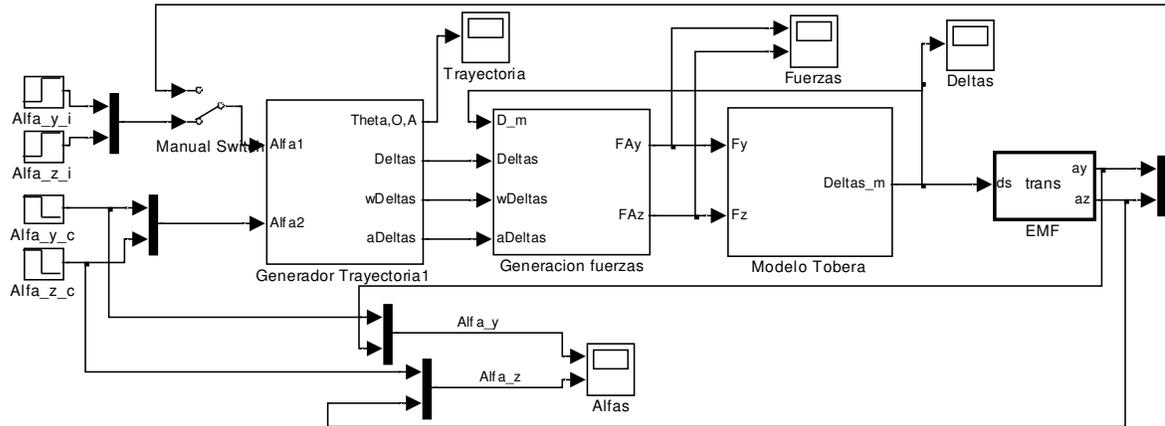


Fig. 6. Sistema de control Implementado en Simulink®

$(\alpha_{yc}, \alpha_{zc})$  correspondientes a la orientación deseada del eje de la tobera. El subsistema de electrónica y actuadores generaran momentos angulares, a través de una ley de control adecuada, que lleven la orientación actual de la tobera  $(\alpha_y, \alpha_z)$  a reproducir los valores angulares comandados. La orientación del vector empuje corresponde a la dirección del vector OR de la Fig. 3. Para cambiar ese vector de la posición  $R_1 (\alpha_{y1}, \alpha_{z1})$  a la posición  $R_2 (\alpha_{y2}, \alpha_{z2})$ , se describirá una trayectoria sobre la superficie del sector esférico correspondiente al conjunto de las orientaciones alcanzables. La trayectoria de mínima distancia (ortodrómica) será un arco de círculo perteneciente al plano definido por O,  $R_1$  y  $R_2$ . Consecuentemente, toda otra trayectoria que describa el extremo del vector de posicionamiento resultará no-mínima y empleándose un índice de bondad [1] para evaluar su la performance.

### 3.2. Control de orientación

Básicamente lo que se requiere es que el vector empuje recorra una ortodrómica entre un punto inicial y final, moviéndose sobre un plano establecido. Con estas especificaciones se puede generar una trayectoria deseada (o trayectoria de referencia) teniendo en cuenta posición, velocidad y aceleración sobre el plano de la ortodrómica, respetando las restricciones cinemáticas.

Para ello se utiliza el diagrama de la Fig. 7, y la expresión (6), que da la trayectoria de referencia, donde  $\theta_o(s)$  y  $\theta_c(s)$  son las transformadas de Laplace del ángulo de salida y de comando, respectivamente. Los valores implementados en los bloques *Saturación Aceleración* y *Saturación Velocidad* del modelo, son los mínimos de la Tabla 2 ( $154.57 \text{ rad/s}^2$  y  $2.08 \text{ rad/s}$  respectivamente). Para la frecuencia natural y relación de amortiguamiento se han tomado  $\omega_n = 2\pi \cdot 10 \text{ Hz}$  y  $0.71 \leq \zeta \leq 1$  al objeto de asegurar transitorios prácticamente aperiódicos y reducido tiempo de respuesta.

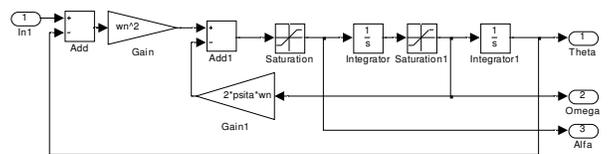
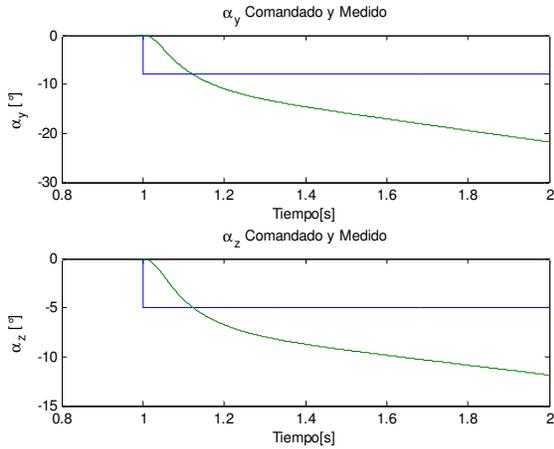


Fig. 7. Generación de trayectoria referencial.

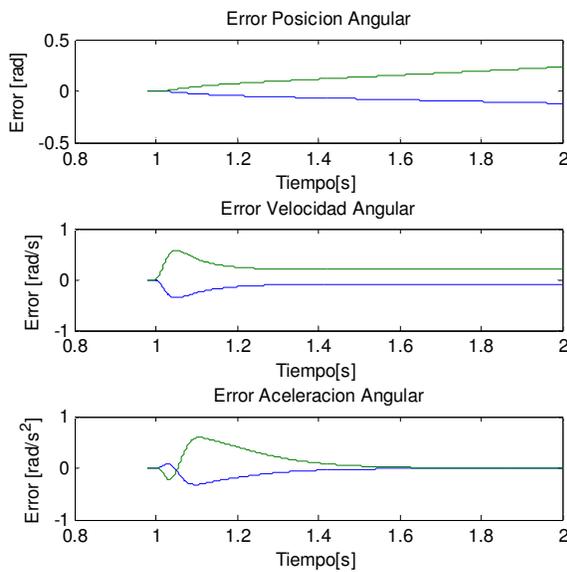
$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6)$$

Se implementa por lo tanto un control por modelo de referencia.

En la Figura 8 se muestra la respuesta a lazo abierto del sistema y en la Fig 9 los errores respecto de la trayectoria de referencia.

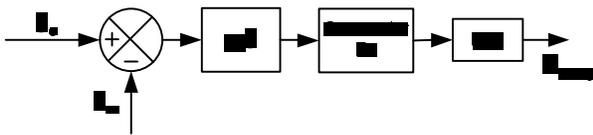


**Fig. 8.** Respuesta a lazo abierto



**Fig. 9.** Error de trayectoria lazo abierto

Para cerrar el lazo de control se utiliza un controlador proporcional para cada una actuador, Fig. 10.



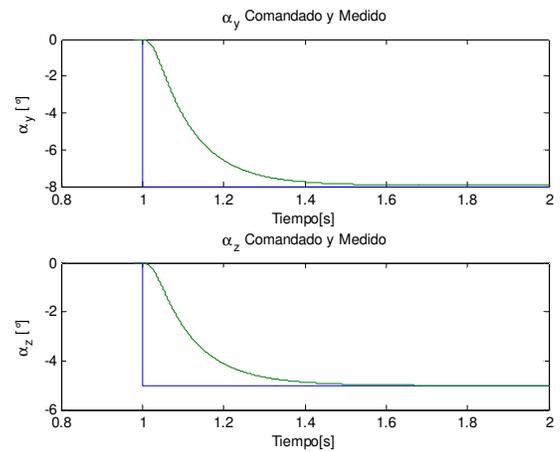
**Fig. 10.** Controlador

Con este tipo de controlador se obtienen los siguientes resultados, en la Fig. 11 se muestra la respuesta a lazo cerrado del sistema y en la Fig

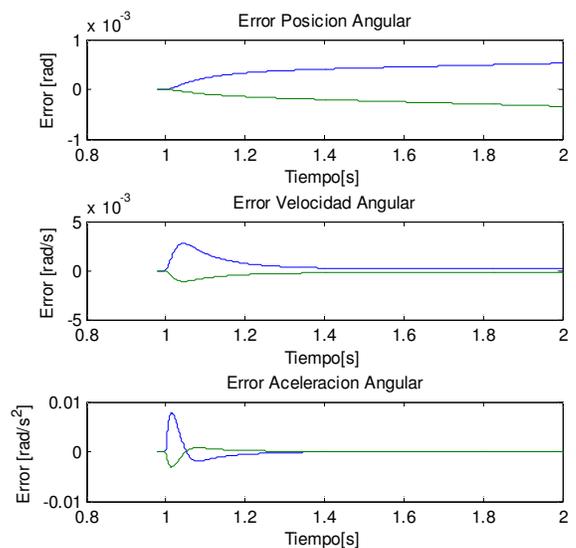
12, los errores respecto de la trayectoria de referencia.

Comprando ambas respuestas Fig. 8 y Fig 11, se observa mejora en la respuesta del sistema dinámico tobera. Se observa también que la respuesta de  $\alpha_z$  es mucho mejor que la de  $\alpha_y$  debido a que el control sobre  $\alpha_z$  es directamente proporcional al de  $\delta 1$  por otro lado el valor de  $\alpha_y$  es una transformación trigonométrica respecto de  $\delta 1$  y  $\delta 2$  para mayores detalles ver [1].

Cabe aclarar que la compensación debe realizarse con sumo cuidado, ya que las ecuaciones dinámicas muestran un gran acoplamiento y no linealidad, tanto para la posición como para la velocidad angular.



**Fig. 11.** Respuesta lazo cerrado



**Fig. 12.** Error de trayectoria lazo cerrado

### 3.3. Índice de Optimización.

Utilizando el índice de bondad definido en [1], *discrepancia respecto de la ortodrómica*:

$$\delta_o = 100 \cdot (Q_L - 1)$$

Donde  $Q_L$  es la relación entre longitud de la trayectoria y el largo de la ortodrómica que posee iguales puntos extremos. Se obtiene su valor para las trayectorias a lazo cerrado

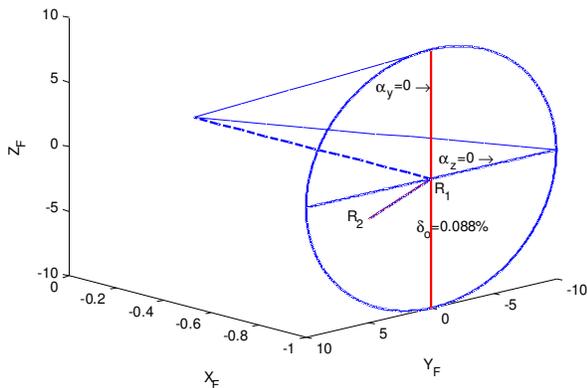


Fig. 13. Trayectoria Lazo cerrado

Se logró una buena aproximación a la ortodrómica difiriendo en un valor de 0.088%, Fig. 13, similar al obtenido en [1]

### CONCLUSIONES

El análisis de la dinámica a podido ser reducido a un sistema cerrado a través del método de Kane simplificando las ecuación de Euler para el sistema tobera.

Por lo que hace a la implementación de los cálculos de dinámica a través del modelo de Euler se debe tener sumo cuidado en su implementación para no generar errores numéricos ocasionados por la implementación de la ecuación de Euler.

La ley de control determinada, ha sido validada mostrando sus errores su aproximación a la ortodrómica., debemos tener en cuenta la dificultad de realizar el comando de posición a tra-

vés de fuerzas. Para la implementación práctica de esta ley se habrá de tener en cuenta tanto las características operativas de los servomotores empleados (limitaciones de corriente y tensión), como las particularidades dinámicas de la carga y las perturbaciones inducidas por el sistema de propulsión.

Con su formulación actual, la ley de control puede ser integrada con a una simulación incluyendo hardware-in-the-loop utilizando la maqueta disponible de la tobera y los actuadores electromecánicos reales.

### RECONOCIMIENTO

El presente trabajo ha sido ejecutado en el marco del convenio existente entre la Comisión Nacional de Actividades Espaciales-CONAE y la Asociación de Investigaciones Tecnológicas-AIT en el Instituto Universitario Aeronáutico, Centro de Investigaciones Aplicadas, Departamento Sistemas Electromecánicos.

### REFERENCIAS

- [1] W. Cova et al, **Accionamiento cruzado de una tobera, consideraciones cinemáticas y ley de control**, AATE 2007.
- [2] W. Nukulwuthiopas et al, **Dinamic modeling of a One -Wheel robot by Using kane's method**, IEEE ICIT'02 .
- [3] K. Kondak, **Mechanical model and control of an autonomous small size helicopter whit a stiff main rotor**, IEEE ICIRS'04.
- [4] Online Dynamics.Inc , **Autolev Tutorial**, 2005.
- [5] T. Kane, D. Levison , **Autolev 4 User's Manual**, Online Dynamics.Inc 2005.
- [6] Bedford & Fowler, **Mecánica para ingeniería. Dinámica**, Addison Wesley