Proyecciones, Vol.6 No. 2, Octubre de 2008
TRABAJO INVITADO

Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones

Raquel Abrate (*), Vicenç Font Moll (**), Marcel Pochulu (*)

(*) Universidad Nacional de Villa María
Arturo Jauretche 1550 – 5900 Villa María, Provincia de Córdoba, Argentina
e-mail: mpochulu@arnet.com.ar
(**) Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes 585 – 08007 Barcelona – España

Resumen

El trabajo examina algunos de los modelos y métodos de resolución de ecuaciones que emplean los alumnos y textos escolares de Matemática, analizando las implicancias didácticas que tienen los mismos, en cuanto a obstáculos y dificultades que producen en los aprendizajes de los estudiantes. Para ello, se trabajó con las producciones escritas de 429 estudiantes, aspirantes a ingresar en la Universidad Nacional de Villa María (Argentina) durante el año 2007, mientras cursaban el Módulo de Matemática del Curso de Ingreso, y con 60 libros de Matemática que abordan la resolución de ecuaciones como tema de estudio.

PALABRAS CLAVE: MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES, METÁFORAS EN EL DISCURSO, RESOLUCIÓN DE ECUACIONES, DIFICULTADES EN MATEMÁTICA

Abstract

This research work examines some of the models and methods of resolution of equations that both pupils and Mathematics school texts use, analysing the didactic implications they have, regarding to obstacles and difficulties that are produced in students' learning. For this purpose, 429 students' written productions were analysed when they entered National University of Villa Maria (Argentina), during the year 2007, while they were taking up the level course module on Mathematics. Besides, 60 books of Mathematics that approach the resolution of equations as a topic of study were used.

KEYWORDS: METHODS OF RESOLUTION OF EQUATIONS, METAPHORS IN THE SPEECH, RESOLUTION OF EQUATIONS, DIFFICULTIES IN MATHEMATICS

Introducción

A pesar de la importancia que tienen las ecuaciones dentro del currículo, por diversas razones los alumnos no suelen contar con muchos recursos para resolverlas. La experiencia nos muestra que cuando los alumnos "creen" conocer todas las técnicas básicas, terminan utilizándolas indiscriminadamente sin analizar que por otros métodos el problema hubiese resultado más fácil y menos laborioso en su resolución. En este sentido, diversos estudios (Kieran, 1992; Rivero, 2000; Pochulu, 2005a, 2005b; Abrate y colaboradores, 2006; Abrate y colaboradores, 2007a, 2007b, entre otros) muestran que los estudiantes no están logrando una formación matemática adecuada en Álgebra.

Por ejemplo, en Abrate y colaboradores (2006), que trabajaron con alumnos ingresantes a la Universidad, se hace notar el hecho de que la resolución de ecuaciones desencadena una gran cantidad de errores que se reflejan en las producciones escritas. Las dificultades que estos autores encuentran se insertan dentro de los problemas generales de enseñanza y aprendizaje del Álgebra, en la escuela secundaria, y también han sido reportadas por Filloy y Rojano (1985a, 1985b, 1989), Filloy (1987), Kieran (1981), Hercovics, (1980a, 1980b), Hercovics y Lincherski (1994), Pochulu (2005a, 2005b), entre otros.

Asimismo, en otros trabajos de los presentes autores (Abrate y colaboradores, 2007a, 2007b) se argumenta que el uso de algunos modelos de resolución de ecuaciones no resulta inocuo para el aprendizaje de los estudiantes, en tanto conlleva a dificultades que no logran superar y conducen a la aparición sistemática de errores.

Se torna evidente, entonces, que la falta de un modelo didáctico que sirva de referente adecuado para la resolución de ecuaciones, obstaculiza el proceso de desarrollo de las competencias y las habilidades a lograr en esta área. Esta situación viene a complementarse, por otro lado, con el hecho de que los profesores de Matemática no siempre son conscientes de los obstáculos y las dificultades que generan los modelos y métodos utilizados en contextos de resolución de ecuaciones. En consecuencia, los interrogantes que guían la investigación que llevamos a cabo son:

a) ¿Cuáles son los modelos y los métodos de resolución de ecuaciones que frecuentemente utilizan los alumnos?

b) ¿Qué obstáculos y dificultades producen estos modelos y métodos de resolución de ecuaciones sobre los alumnos?

c) ¿Qué modelos y métodos de resolución de ecuaciones utilizan los libros de Matemática cuando abordan estos temas?

Marco teórico

En este trabajo suponemos que el lenguaje que empleamos es fundamentalmente metafórico, y de acuerdo con Lakoff y Núñez (2000), una metáfora se puede interpretar como la comprensión de un dominio en términos de otro. En este sentido, las metáforas se caracterizan por crear una relación conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que deja proyectar propiedades e inferencias del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de características y estructuras de un dominio a otro.

Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, sirven para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultan otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático.

Al respecto, podemos decir que la metáfora ha constituido un motivo de reflexión teórica a lo largo de la historia, por lo que hoy en día disponemos de algunas ideas importantes sobre ella. De manera sucinta, estas ideas heredadas son:

- La metáfora es la aplicación a una cosa de un nombre que es propio de otra.
- La elaboración y comprensión de metáforas conlleva la captación de similitudes ocultas.
- La función y el origen de la metáfora es proporcionar placer estético al entendimiento.
- La metáfora es una clase de abuso verbal que ha de suprimirse del discurso propio del conocimiento.
- La metáfora constituye un elemento medular del lenguaje y su auténtica esencia.

Además, estas ideas heredadas se pueden agrupar en dos puntos de vista radicalmente diferentes:

- La metáfora es un accidente lingüístico marginal, con funciones comunicativas especializadas y ajenas al ámbito del conocimiento (un fenómeno a evitar).
- La metáfora encarna la auténtica naturaleza del lenguaje y del pensamiento (es el fenómeno central).

De acuerdo con el segundo punto de vista, los enfoques cognitivos y, en particular, el propuesto por la teoría contemporánea de la metáfora (Jonson, 1991; Lakoff y Jonson, 1991; Lakoff y Núñez, 2000; Núñez y colaboradores, 1999, entre otros) son los que, en nuestra opinión, tienen el protagonismo en las reflexiones actuales sobre la metáfora. Por tanto, el primer marco teórico utilizado en esta investigación deviene de la teoría sobre "Qué son las matemáticas", propuesta por Lakoff y Núñez (2000). El núcleo central de la teoría está basado en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, y en los relativamente recientes hallazgos en lingüística cognitiva.

Como segundo referente teórico, y con la finalidad de afrontar la complejidad que la investigación sobre las metáforas requiere, hemos tenido en cuenta el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) del conocimiento e instrucción matemática (Godino y colaboradores, 2007).

En el EOS se considera que la dialéctica personal-institucional está en la base de la emergencia de los objetos matemáticos, en el sentido de que el objeto institucional llama a la puerta del conocimiento personal para conseguir la emergencia del objeto personal. La manera de conseguir esta emergencia pasa por cuatro instrumentos de conocimiento [1], en los cuales juega un papel determinante el uso de "entidades vicariales o subrogatorias" (Font, 2007) ya que, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se intenta justificar el lenguaje matemático abstracto mediante otro lenguaje menos abstracto, y para ello se utilizan subsidiariamente analogías, representaciones, diagramas, contextualizaciones, modelizaciones, metáforas, entre otras.

Metodología

La investigación fue de naturaleza diagnóstico-descriptiva y hermenéutica, y se realizó en dos fases claramente diferenciadas. Para la primera fase, y con la intención de dar respuestas a las dos primeras preguntas directrices del trabajo, diseñamos una secuencia de actividades para ser resueltas por los estudiantes, con la intención de:

- Analizar el discurso escrito que emplean los alumnos en contextos de resolución de ecuaciones
- Poner en evidencia potenciales dificultades y obstáculos debidos al uso de metáforas en la resolución de ecuaciones.

Trabajamos con las producciones escritas de 429 estudiantes aspirantes a ingresar en la Universidad Nacional de Villa María (Argentina), durante el año 2007, mientras cursaban el Módulo de Matemática.

Para la segunda fase, y con la intención de responder la tercera pregunta directriz del trabajo, analizamos 60 libros de Matemática que abordan la resolución de ecuaciones como tema de estudio. Estos libros pertenecen a las bibliotecas de los dos centros educativos encargados de la formación de profesores en la ciudad, y buscamos en ellos la presencia de los modelos y los métodos que eran más utilizados por los alumnos y que habían sido detectados en la primera fase de nuestro estudio. Básicamente hicimos la distinción entre dos formas de resolver una ecuación:

- Por propiedades o metáfora "objetual" (se dota a un objeto matemático de propiedades particulares). Ejemplo:

Resolver; $2(p + 4) = 7p - 2$

Solución:

$2p + 8 = 7p + 2$ (propiedad distributiva)

$2p = 7p - 6$ (restando 8 de ambos miembros)

$-5p = -6$ (restando 7p de ambos miembros)

$p = \frac{-5}{-6}$ (dividiendo ambos miembros entre – 5)

$p = \frac{6}{5}$

[1] La dualidad extensivo-intensivo (particular-general), la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización.

- Por transposición de términos o metáfora operacional (un objeto matemático es considerado como un dispositivo donde sus elementos se pueden "pasar", "cruzar", "quitar", "colocar", ser "llevados", "transferidos", "transformados" o "trasladados" de un lugar a otro bajo ciertas reglas). Ejemplo:

Resolver: $(\sqrt{x} - 5)^2 = 25$

Solución:

$(\sqrt{x} - 5) = \sqrt{25}$ (pasamos la potencia al otro miembro como raíz)

$\sqrt{x} - 5 = 5$ (resolvemos la raíz)

$\sqrt{x} = 5 + 5$ (pasamos el 5 sumando en el segundo miembro)

$\sqrt{x} = 10$ (resolvemos la suma)

$x = 10^2$ (pasamos la raíz como potencia al segundo miembro)

$x = 100$ (resolvemos la potencia)

Resultados y discusión

Para la primera fase de la investigación, la cual tuvo como uno de sus objetivos analizar el discurso escrito que empleaban los alumnos en contextos de resolución de ecuaciones, analizamos las respuestas dadas a dos ejercicios de la secuencia de actividades que se diseñaron para el trabajo. Así, el ejercicio Nº 1 proponía a los alumnos:

Supongamos que debes enseñarle a un compañero a resolver ecuaciones. Para ello te proponemos que resuelvas los ejemplos siguientes y escribas, como si fuera una ayuda para la otra persona, qué es lo que haces para hallar su solución.

a) $3 \cdot x - 1 = 5$

b) $\sqrt{x - 2} = 3$

Donde no sólo se debía buscar su conjunto solución, sino también, explicar los procedimientos que se llevaban a cabo.

El ejercicio Nº 2, en tanto, exponía la resolución de dos ecuaciones, tal como aparecen en la mayoría de los libros de textos de Matemática, y se le solicitaba a los estudiantes que dieran las explicaciones de los procedimientos que se pudieron haber empleado para hallar el conjunto solución.

Otros compañeros han trabajado de la siguiente manera. Te pedimos que nos expliques lo que han realizado en cada paso.

a)

$\frac{3 \cdot x - 5}{2} + 4 = 6$ ....

$\frac{3 \cdot x - 5}{2} = 2$ ....

$3 \cdot x - 5 = 4$ ....

$3 \cdot x = 9$ ....

$x = 3$ ....

b)

$\sqrt{x} - 3 = 1$ ....

$\sqrt{x} - 3 + 3 = 1 + 3$ ....

$\sqrt{x} = 4$ ....

$(\sqrt{x})^2 - (4)^2$ ....

$x = 16$ ....

Analizando la información emergente de la resolución de estas actividades, hallamos que 372 alumnos (79,7%) emplean, de manera explícita, la transposición de términos para explicar la resolución de ecuaciones. Además, la cantidad de alumnos se incrementa si incluimos a aquellos que de manera implícita usan este tipo de método. En este último caso, aludimos a quienes no dan explicaciones de la resolución que llevan a cabo y tampoco se evidencia el uso de propiedades, o aquéllos que brindan explicaciones muy vagas y a quienes no resulta posible encuadrar en alguna categoría particular.

No obstante, si se tiene en cuenta a los alumnos que emplearon transposición de términos o metáfora operacional en su discurso escrito para ambos ejercicios, ya sea de manera explícita o induciendo a ellas, el total asciende a 402, esto es, el 93,7% del total (Figura 1).

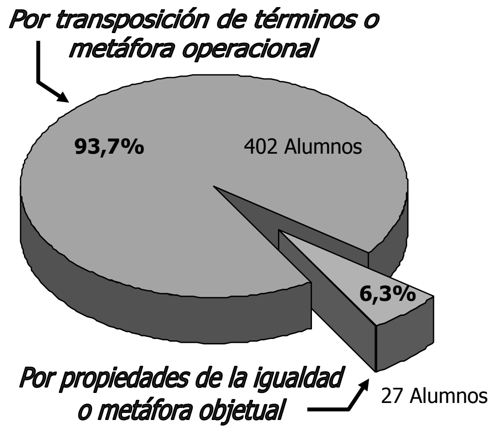


Figura 1: Métodos de resolución de ecuaciones que emplean los alumnos

El empleo de la transposición de términos, o una metáfora operacional, lleva a que los alumnos consideren a una ecuación como un dispositivo, donde los términos y números se pueden "pasar", "cruzar", "quitar", "colocar", ser "llevados", "transferidos", "transformados" o "trasladados" de un miembro a otro.

Tal como expresan Lakoff y Núñez (2000), aquí las metáforas pueden ser interpretadas como la comprensión de un dominio en términos de otro, y vienen a conformar metáforas conectadas a tierra (grounding metaphors), en tanto relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas.

Entre estas metáforas, se destacan las ontológicas. Un primer tipo de metáfora ontológica es la "objetual", que tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos, y permite considerar acontecimientos, actividades, emociones, ideas, etc., como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.) o sustancias. Nuestra experiencia en el mundo de las cosas nos permite considerar un objeto separado de su entorno y, a partir de dichas experiencias se genera el esquema de imagen objetual, el cual es el dominio de partida que se proyecta al mundo de las entidades matemáticas. Dicha metáfora conceptual se puede concretar en diferentes expresiones metafóricas, tal como lo reflejan los fragmentos de los discursos escritos por los alumnos, que extractamos de las respuestas que brindaron a los ejercicios 1 y 2:

- *Debes despejar la incógnita (x) llevando los demás números al otro término cambiándole su signo;*
- *Debes despejar la incógnita (x) llevando los demás números al otro término cambiándole su signo;*
- *Así la suma se transforma en resta;*
- *Primero cambio de lugar el – 1 para el otro lado con +1;*
- *Pasamos la raíz cuadrada que se transforma en exponente del resultado;*
- *Pasamos al otro miembro con la operación contraria a la radicación que es la potenciación;*
- *Pasamos al otro término con la operación opuesta a la que realizan;*
- *Cuando trasladamos de un término a otro invertimos el signo;*
- *Se pasa al otro miembro el término que esté menos relacionado con la incógnita haciendo la operación inversa;*
- *Colocamos x del otro lado de la igualación;*
- *Hay que transferir términos de un miembro a otro, invirtiendo la operación;*

Es de destacar que los alumnos utilizan las expresiones "términos" y "miembros" de una ecuación como equivalentes, y que aparecieron gran cantidad de errores en la resolución de las ecuaciones, pues aplican equivocadamente estas reglas de transposición de términos que sustentan en su discurso.

Como segundo objetivo de la primera fase de investigación, nos propusimos poner en evidencia potenciales dificultades y obstáculos debidos al uso de la transposición de términos en la resolución de ecuaciones. Con este propósito, solicitamos en el ejercicio 3 que se determinara el número de ecuaciones presentes en la resolución del ejercicio anterior (el número 2). Sosteníamos, como hipótesis muy fuerte, que el uso de la transposición de términos o metáforas operacionales, para resolver ecuaciones, podría llegar a impedir que se distinguieran las ecuaciones equivalentes.

Pudimos constatar que sólo 25 alumnos (5,8%) distinguieron las 5 ecuaciones presentes en el ejercicio y el resto (94,2%) lo hizo desacertadamente. Quienes sólo distinguen una ecuación, argumentan en términos de:

- *Porque hay una sola incógnita;,*
- *Porque hay una sola igualdad con una incógnita;*
- *Porque el resultado que tengo que determinar es de una sola x;*

- *Porque siempre se resuelve la misma.*

Un importante número de alumnos (32,8%) argumenta distinguir sólo 4 ecuaciones, en tanto consideran a la última (x = 3 o x = 16) sólo un "resultado" y no una ecuación. Algunos argumentos que esgrimieron para esta decisión fueron:

- *Porque en los primeros pasos la incógnita no está sola, lo que hace que sigan manteniéndose las ecuaciones;*
- *Porque todavía no se sabe cuánto vale x;*
- *Porque en cada una de ellas, la x no tiene valor;*
- *Porque en la última la incógnita ya está encontrada o resuelta;*
- *Porque en los primeros pasos hay una incógnita;*
- *Porque en los primeros pasos siempre hay que encontrar el valor de una incógnita;*
- *Porque en las primeras hay una incógnita. Siempre que hay una incógnita (x) es una ecuación;*
- *Porque se fue haciendo por pasos y la ecuación es más chica hasta llegar al resultado.*

El ejercicio 4 de la guía de actividades, en tanto, involucraba la resolución de tres ecuaciones de segundo grado equivalentes en su conjunto solución:

Encuentra los valores de x que satisfacen cada ecuación

[Ayuda: Recuerda que si ax2+bx+c=0 entonces las raíces de esta ecuación pueden obtenerse mediante la expresión $\frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a}$ *]*

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $-x^2 + 5x - 6 = 0$

c) $\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{5} = 0$

Las dos primeras se presentaban con coeficientes enteros, mientras que en la última se empleaban coeficientes racionales no enteros. Nuestras hipótesis previas establecían que los alumnos que sólo utilizan la transposición de términos en contextos de resolución de ecuaciones no advertirían la equivalencia y que, por otro lado, el trabajo con números racionales los llevaría a cometer errores, o a desistir de realizar el ejercicio. Cabe hacer notar que los alumnos no contaban con calculadoras para la resolución de las ecuaciones propuestas.

Tal como lo esperábamos, el 82,5 % (354 alumnos) presentaron dificultades para hallar el conjunto solución de una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales no enteros, y ninguno de los estudiantes trabajó con ecuaciones equivalentes[2].

Por último, el ejercicio 5 planteaba hallar el conjunto solución de una ecuación racional, la que fácilmente podía ser resuelta si se buscaba una ecuación entera equivalente a ella. Esto se lograba si se multiplicaba a ambos miembros de la igualdad por la variable que intervenía[3], lo que conllevaba a la ecuación que proponía el ejercicio 1, inciso "a" (3x – 1 = 5).

Sólo 91 alumnos resuelven correctamente la ecuación (21,2%) y 2 de ellos se valen de propiedades (metáfora "objetual") para hallar una ecuación equivalente más sencilla de resolver (multiplicaron ambos miembros por la variable). El resto, 338 alumnos (78,8%) no logran tener éxito en la búsqueda del conjunto solución y emplean con errores la transposición de términos. Asimismo, es de destacar que ningún alumno realizó un análisis retrospectivo de la solución, aun entre quienes lo resolvieron correctamente, que permitiera determinar si el conjunto solución era el apropiado.

Si analizamos estos tres últimos ejercicios, en forma conjunta, podemos percibir que a la mayoría de los estudiantes (aproximadamente un 80%) se les presentaron obstáculos insoslayables en la resolución de ecuaciones,

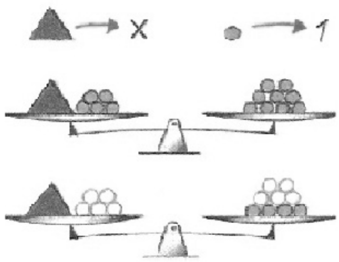
[2] Multiplicando por 10 a ambos miembros de la igualdad se podía determinar que la ecuación planteada en el inciso "b" era equivalente en su conjunto solución a la del inciso "a".
[3] Debe tener presente el lector que multiplicar a ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable puede conducir a ecuaciones no equivalentes, aunque en este caso, sí resultaban serlo.

los cuales podían haber sido fácilmente salvables si se hubiesen utilizado propiedades de la igualdad (metáfora objetual).

Culminada la primera fase de la investigación, iniciamos la segunda, la cual involucró el análisis de 60 textos de Matemática que discriminamos por nivel educativo (secundario o universitario). Hallamos que sólo un 15,5% de los libros de texto de matemáticas, para el nivel secundario, enfoca la resolución de ecuaciones mediante propiedades o metáfora objetual (Figura 2), mientras que los restantes (84,5%) se valen de la transposición de términos o metáforas operacionales (Figura 3), o inducen a su uso (Figura 4).

De todos modos, podemos hacer una distinción entre estos modelos o métodos de resolución de ecuaciones que utilizan los textos escolares de Matemática para el nivel secundario, pues consideramos que no influyen del mismo modo, en la cognición individual de los alumnos, las metáforas operacionales asociadas ala transposición de términos *(El número que está sumando en un miembro de una igualdad pasa restando al otro, el que está multiplicando pasa dividiendo, etc.)* o aquéllas que intentan mostrar una analogía entre las ecuaciones y un subibaja o balanza. En este último caso, pensamos que si bien la metáfora *"una ecuación es como un subibaja o balanza"* no lleva a pensar que se están empleando propiedades o reglas propias del tema en cuestión, sí creemos que conlleva a una mejor captación de similitudes

RESOLUCION DE LA ECUACIÓN $x + a = b$



Vamos a resolver la ecuación $x + 5 = 9$

$X + 5 = 9$ Para despejar la x debemos eliminar el 5 que está sumando en el primer miembro

$X + 5 - 5 = 9 - 5$ Restamos 5 a cada miembro

$X = 4$ La x queda despejada. La solución es x= 4

Figura 2: Resolución de una ecuación por propiedades

ECUACIONES

Para resolver ecuaciones de primer grado es indispensable seguir un plan de trabajo.

Ejemplo:

$(\sqrt{x} - 5)^2 = 25$

$\sqrt{x} - 5 = \sqrt{25}$ —— la potencia al cambiar de miembro se transforma en la operación opuesta

$\sqrt{x}\ 5 = 5$ —— reducimos la raíz

$\sqrt{x} = 5 - 5$ —— pasaje de término

$x = 10^2$ —— la raíz al cambiar de miembro, se transforma en potencia

$\boxed{x = 100}$

Figura 3: Resolución de una ecuación por transposición de términos

ocultas entre dominios que se encuentran fuera y dentro de la Matemática.

En el análisis de los textos de Matemática para el nivel superior universitario, hallamos que 60% de ellos enfocan la resolución de ecuaciones aplicando exclusivamente propiedades (metáfora objetual) y que solo uno de los libros emplea reglas de transposición de términos (metáfora operacional) luego de haber presentado las propiedades de la igualdad.

Por último, si tenemos en cuenta los modelos y métodos de resolución de ecuaciones que emplean los libros de texto de Matemática debemos destacar que existe una estrecha relación entre las metáforas que emplean los alumnos y las que presentan, o inducen, los mismos.

Conclusiones

En este trabajo hemos puesto de manifiesto que los estudiantes utilizan fundamentalmente la transposición de términos como método de resolución de ecuaciones. Este modelo, apoyado en metáforas operacionales, que seleccionan, acentúan, suprimen y reorganizan ciertos rasgos característicos de la resolución de ecuaciones, deja abiertos las puertas para que una ecuación pueda ser considerada como un objeto o dispositivo donde los términos y números. se pueden "pasar", de un miembro a otro, bajo ciertas condiciones y reglas específicas. A su vez, hallamos que este modelo es el más utilizado por los textos escolares de Matemática para el nivel secundario, no ocurriendo de este modo con los del nivel superior o universitario

Por otra parte, notamos que la forma de proceder de los alumnos y de muchos textos escolares del nivel secundario, frente a la resolución de ecuaciones, no condice con el modo en que es presentado el tema en los libros de Matemática del nivel universitario. En estos últimos pareciera existir un mayor grado de conciencia de las implicancias educativas que tiene el uso de ciertos métodos, como la transposición de términos y, posiblemente por esta razón, abordan el tema predominantemente por medio de las propiedades de la igualdad (metáfora objetual).

Finalmente, también nos fue posible verificar que el uso de transposición de términos en la resolución de ecuaciones no es inocuo para el aprendizaje de los estudiantes, en tanto conlleva a dificultades que no todos logran superar. Con esto no estamos diciendo que no debe emplearse este modelo en contextos de resolución de ecuaciones, sino más bien que los profesores deben tomar conciencia de sus efectos, con el fin de seleccionar aquellos métodos que sirvan para estructurar más adecuadamente el objeto matemático que se quiere enseñar.

Referencias

ABRATE, R.; POCHULU, M.; VARGAS, J. (2006) *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Universidad Nacional de Villa María. Buenos Aires.

ABRATE, R.; FONT, V.; POCHULU, M. (2007a) *Metáforas utilizadas en contextos de resolución de ecuaciones.* En: Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (15 al 18 de julio de 2007). CIEM. Santiago de Querétaro.

ABRATE, R.; FONT, V.; POCHULU, M. (2007b) *Implicancias educativas del uso de metáforas en contextos de resolución de ecuaciones.* En: Memorias de la XXX Reunión de Educación Matemática, 17 al 22 de septiembre de 2007. UMA y FAMAF. Córdoba, Argentina.

FILLOY, E. (1987) *Modeling and teaching of Algebra*. En J. C. Bergeron, N. Hercovics & C. Kieran (editores). Proceedings of PME-XI. Vol.1, p. 295-300. Montreal.

FILLOY, E.; ROJANO, T. (1985a) *Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies.* En L. Streefland (Editor). Proceedings of PME-IX, OW & OC, p. 154-158. State University of Utrech.

FILLOY, E.; ROJANO, T. (1985b) *Operating the unknown and models of teaching*. En S. Damarin y M. Shelton (Editores). Proceedings of PME-NA VII. P. 75-79. Columbus, Ohio.

FILLOY, E.; ROJANO, T. (1989) *Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. For the learning of Mathematics* 9(2), 19-25.

FONT, V. (2007) *Cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto*. En: Actas de la 20 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, 20, p. 55-60.

GODINO, J. D. (2002) *Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática.* RDM. 22(2/3), 237-284.

GODINO, J. (2003) *Teoría de las Funciones Semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Universidad de Granada. GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. (2007) *The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education.* ZDM. 39(1/2), 127-125.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. (2006) *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática.* RDM. 26, 1, 39-88.

HERCOVICS, N. (1980a) *Constructing meaning for linear equations: a problem of representation*. RDM. 1, 3, 351-385.

HERCOVICS, N.; KIERAN, C. (1980b) *Constructing meaning for the concept of equation.* J. Math. Teacher Educ. 73(8), 572-580.

HERCOVICS, N.; LINCHEVSKI, L. (1994) *A cognitive gap between arithmetic and algebra.* Educ Stud Math. 27, 59-78.

KIERAN, C. (1981) *Concepts associated with the equality symbol.* Educ Stud Math. 12, 317-326.

KIERAN, C. (1992) *The learning and teaching of school algebr*a. In: Grouws, D.A. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan, New York.

JOHNSON, M. (1991) *El cuerpo en la mente.* Editorial Debate. Madrid.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. (1991) *Metáforas de la vida cotidiana*. Editorial Cátedra, Madrid.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. (2000) *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books. New York.

LERMAN, S. (2001)*Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studies the teaching and learning of mathematics.* Educ. Stud. Math. 46(1-3), 87-113.

NÚÑEZ, R.; EDWARDS, L.; MATOS, J. F. (1999) *Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education.* Educ. Stud. Math. 39, 45-65.

PALMA, H. (2004). *Metáforas en la evolución de las ciencias.* Jorge Baudino, Buenos Aires.

POCHULU, M. (2005a) *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad*. RIE. Vol. 35.

POCHULU, M. (2005b) *Continuidades y discontinuidades en la enseñanza de la matemática de tres generaciones. Estudio de caso: sexto año de estudio en una escuela primaria*. RIE. Vol. 36/1.

RIVERO, F. (2000) *Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos*. Notas de Matemática. Revista del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias. Universidad de Los Andes, Mérida – Venezuela. Vol. 1, Nº. 201.