

Generador eléctrico UNDI UTN.BA: su análisis oscilatorio

Mario Pelissero, Alejandro Haim, Federico Muiño, Jorge Pozzo, Federico Gallo

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Buenos Aires, Departamento de Ingeniería Mecánica, Grupo Undimotriz, Medrano 951, (C1179AAQ), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

undimotriz@gmail.com

Recibido el 20 de marzo de 2019, aprobado el 5 de julio de 2019

Resumen

Se ha construido una máquina de generación eléctrica a escala 1:10 accionada por las olas. Este mecanismo denominado UNDI-UTN.BA fue probado en el 2017 en la pileta generadora de olas del Instituto Nacional del Agua (INA). El presente trabajo es un ejercicio conceptual que permite analizar su comportamiento. Se hace uso de ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales, ordinarias y a coeficientes constantes. Los coeficientes propios de esta ecuación son la masa puesta en juego, que para este caso es la masa del brazo oscilante más la de la boya, el coeficiente de amortiguamiento, finalmente, se tiene el factor elástico, aquel que en una condición ideal y sin rozamientos sostiene el movimiento oscilatorio. Así presentado el problema, quedaría con el segundo término igual a cero. Para este caso, ese segundo término es la motorización producida por el oleaje. En consecuencia, nuestra ecuación diferencial es con oscilación forzada, que contendrá una expresión oscilante cosenoidal y cuyo argumento tendrá la frecuencia propia del oleaje. Esta expresión estará afectada por un coeficiente que deberá ser capaz de igualar a la fuerza contra electromotriz del generador, más un porcentual que incluya las pérdidas (la ineficiencia de la máquina eléctrica, las pérdidas disipativas propias del dispositivo mecánico, las pérdidas por amortiguamiento y tensión superficial del agua, la disminución de rendimiento por la imposibilidad de estar siempre enfrentando al oleaje en la posición óptima). Fijados los parámetros, se analizarán dos casos: en marcha normal cargándola súbitamente a potencia nominal, y luego una igualmente súbita pérdida total de carga eléctrica. Se demuestra en el primer caso que la máquina rápidamente entrará en una fase estable y en la segunda situación, que la máquina tendrá un breve lapso de inestabilidad que será luego sucedido por una estabilización.

PALABRAS CLAVE: UNDIMOTRIZ - OSCILACIONES - ECUACIONES DIFERENCIALES - ESTABILIDAD - INESTABILIDAD

¹ Es también autora de este trabajo María de los Ángeles Ferré.

Abstract

The Undimotriz Group has built a 1:10 scale machine powered by waves. This UNDI.UTNBA mechanism was tested in 2017 in the INA wave generating pool. The present work is a conceptual exercise that allows to analyze its behavior. It makes use of differential equations of second order, linear, ordinary and constant coefficients. The coefficients of this equation are the mass put into play, which for our case is the weight of the oscillating arm plus that of the buoy, the damping coefficient, and finally, we have the elastic factor, which in an ideal condition and without friction sustains an oscillatory movement. Thus, presented the problem, would remain with the second term equal to zero. For this case, that second term is the motorization produced by the waves. Consequently our ODE is with forced oscillation that will contain a cosine-oscillating expression and whose argument will have the wave's own frequency. This expression will be affected by a coefficient that must be able to equal the force against electromotive generator, plus a percentage that includes the losses (the inefficiency of the electric machine, the dissipative losses characteristic of the mechanical device, the losses by damping and tension surface water, the decrease in yield due to the impossibility of always facing the waves in the optimum position). Once all parameters are set, two cases will be analyzed: in normal operation, loading it suddenly at nominal power and then an equally sudden total loss of electric charge. We will show that in the first case the machine will quickly enter a stable phase and in the second situation, we will demonstrate that the machine will have a brief lapse of instability that will be followed by a stabilization.

KEYWORDS: UNDIMOTOR - OSCILLATIONS - DIFFERENTIAL EQUATIONS - STABILITY - INSTABILITY

Introducción

De las cinco formas actuales de extraer energía del mar, a saber: mareomotriz, undimotriz, hidrocínética, maremotérmica y diferencial salino, la Facultad Regional Buenos Aires (UTN.BA) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), a través del Grupo Undimotriz, ha encarado el diseño, cálculo y construcción de un prototipo funcional en escala 1:10 de un generador undimotriz. El término alude al movimiento ondulatorio propio de las olas del mar. Este prototipo funcional ha sido probado en la pileta generadora de olas del Instituto Nacional del Agua (INA) y actualmente está en proceso de construcción de un prototipo a escala real. En la Figura 1, se observa el esquema del dispositivo (Haim, *et al.*, 2017) cuyo comportamiento oscilatorio a escala real se busca comprender. Sobre este particular es menester hacer algunas consideraciones: siempre deben hacerse concesiones, que se denominan hipótesis simplificadoras. Estas son necesarias para hacer que el tema sea manejable desde el punto de vista matemático. En caso contrario, las ecuaciones pueden no tener resolución. Esto conduce entonces a una solución de compromiso: si el modelo matemático es resoluble, significa que se aparta de la realidad en virtud de las

consideraciones simplificadoras, pero teniendo en cuenta estas limitaciones, siempre son de inestimable ayuda porque exhiben soluciones aceptables que logran reproducir *a priori* el comportamiento esperable por un mecanismo o fenómeno físico.

Modelo analítico

A los efectos de poder aplicar la modelización matemática, es necesario hacer dos esquemas que permitirán comprender cómo adoptar los coeficientes de los términos de uno de los miembros de la ecuación diferencial (2) y se entenderá también al otro miembro, el que proveerá la excitación forzada.

Si una persona solo ve el primer esquema, advertirá cómo es el mecanismo; pero si se lo tapa con una caja y no pudiendo ver el interior ni saber que estaría movido por las olas, alguien podría suponer que se acciona con un resorte y que el movimiento libre se va atenuando hasta detenerse merced a la acción de un amortiguador. Esto permite escribir la siguiente ecuación diferencial (Kiseliov, *et al.* 1979)(Torres, *et al.* 2011):

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0 \quad (1)$$

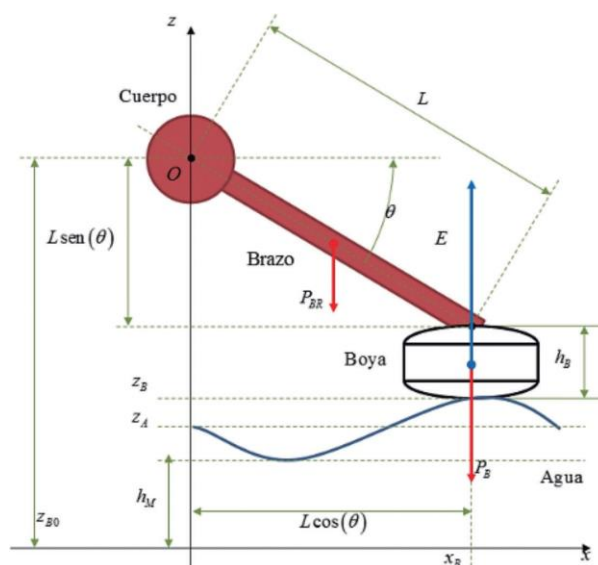


Fig. 1. Esquema del generador UNDI-UTN.BA. Adaptado para el estudio posterior, considerando el aporte de energía externa de la onda marina a través del conjunto mecánico Boya/brazo

Luego, admitiendo que haya una excitación externa, (Zachary, *et al.* 2008) la ecuación será:

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2)$$

A los coeficientes adoptados se los consideran con dimensiones implícitas que se corresponden con la función a la cual afectan.

Por lo tanto:

$$m = \text{masa} \rightarrow m = 100$$

$$c = \text{coeficiente de amortiguamiento} \rightarrow c = 500$$

$$k = \text{coeficiente de elasticidad} \rightarrow k = 800$$

F_0 = La energía externa debe ser el doble del coeficiente de amortiguamiento ($c=500$), de esta manera:

$$F_0 = c + 0,5 \cdot c + 0,49 \cdot c + 0,005 \cdot c + 0,005 \cdot c \\ c = c + c \cdot (0,5 + 0,49 + 0,005 + 0,005) = 2 \cdot c \\ c = 1000$$

Donde:

0,5. c → potencia activa, más las pérdidas internas del generador eléctrico y energía reactiva

0,49. c → compensa que el mecanismo no enfrente perpendicularmente al frente de ondas

0,005. c → compensa las pérdidas disipativas en la cadena cinemática

0,005. c → compensa las pérdidas por amortiguamiento viscoso y tensión superficial

T = período de la onda →

$$T = 7,699 \approx 7,7 \text{ segundos}^1$$

f = frecuencia de la onda →

$$\frac{1}{T} = 0,129887 \text{ Hz} \approx 0,13 \text{ Hz}$$

y = altura de la onda de pico a valle →

$$y = 1,775 \text{ m} \approx 1,8 \text{ m}^2$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \times 3,14159 \times 0,13 = 0,8168134 = 0,82 \text{ Hz}$$

Los valores seleccionados son arbitrarios pero no caprichosos. La relación que hay entre ellos es consistente con los sistemas similares que se resuelven con este tipo de ecuaciones. Sin embargo, el primer valor surge de los kg masa asignados a la boya del prototipo a escala 1:1. Los demás parámetros surgen a raíz del valor de la masa, y acordes a sistemas equivalentes con excitación forzada.

En resumen, para cualquier sistema equivalente a éste con excitación forzada, existe una relación entre m , c , k y F_0 para que el sistema funcione; por lo que se debe adoptar esa relación entre coeficientes de acuerdo a la experiencia y bibliografía.

El valor numérico de la excitación externa debe ser mayor al coeficiente de amortiguamiento para que la máquina funcione. Éste parámetro queda definido por la altura y período de ola, y la relación entre el diámetro de la boya y el largo del brazo, ellos definen el momento torsor generado en el eje del brazo que debe ser mayor al resistente generado por el generador eléctrico con su carga y las pérdidas relacionadas al sistema mecánico, por eso se consideran los coeficientes de pérdidas.

Reemplazando en la (2), se obtiene:

$$100 \cdot \ddot{y} + 500 \cdot \dot{y} + 800 \cdot y = 1000 \cdot \cos(0,82 \cdot t) \quad (3)$$

La (3) es una ecuación diferencial no homogénea, con oscilaciones forzadas, cuya solución completa es la suma de la solución de la ecuación homogénea más la solución particular. Es decir, hay que encontrar una ecuación que variará en el tiempo y que será capaz de satisfacer la ecuación diferencial (con su segunda derivada, su derivada primera y su función sin derivar). Esta ecuación $y_{(t)}$ saldrá de la suma de la ecuación homogénea y la particular:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (4)$$

¹ y ² Valores estimativos provistos por el Servicio de Hidrografía Naval.

Solución de la ecuación homogénea

Se parte de (3) y se iguala a cero quedando:

$$100 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - 500 \frac{dy}{dt} + 800 \cdot y = 0$$

Para hallar la solución hay que preparar una ecuación auxiliar característica, lo cual será dividiendo miembro a miembro por el coeficiente 100.

La ecuación característica es:

$$1 \frac{d^2y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 8 \cdot y = 0$$

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$x^2 - 5 x + 8 = 0$$

Cuya solución es la resolvente general de las ecuaciones de este tipo (Palacios, *et al.* 2006):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$x_1 = 2,5 + i \cdot 1,323$$

$$x_2 = 2,5 - i \cdot 1,323$$

Control del cálculo realizado mediante parámetros físicos:

$$\text{Parte Real} = \frac{c}{2 \cdot m} = \frac{500}{2 \cdot 100} = 2,5$$

$$\begin{aligned} \text{Parte Imaginaria} &= \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{500^2 - 4 \cdot 100 \cdot 800}}{2 \cdot 100} = \pm i \cdot 1,323 \end{aligned} \quad (5)$$

Por otro lado, la expresión sub-radical de la (5) es el llamado determinante de la ecuación pues, aunque ya se sabe que habrá amortiguamiento (por diseño), determinará si la oscilación será sub-amortiguada o críticamente amortiguada. En este caso:

$$c^2 \ll 4 \cdot m \cdot k$$

En consecuencia, por un lado, será una oscilación sub-amortiguada y por otro lado, teniendo soluciones en el campo complejo, la solución de la ecuación diferencial homogénea será una ecuación del tipo:

$$y_h(t) = e^{(-a \cdot t)} \left[A \cdot \cos(\omega_o \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_o \cdot t) \right] \quad (6)$$

Siendo:

Por lo tanto, la (6) queda expresada como sigue:

$$y_h(t) = e^{(-2,5 \cdot t)} \left[A \cdot \cos(1,323 \cdot t) + B \cdot \sin(1,323 \cdot t) \right] \quad (7)$$

El paso siguiente es calcular los coeficientes A y B, que quedarán determinados por las condiciones iniciales.

Para el tiempo inicial, $t_0=0$, la elongación es

$$a = \text{Parte Real de } x_1 \text{ y de } x_2 = 2,5$$

$$\omega_0 = \text{Parte Imaginaria de } x_1 \text{ y de } x_2 =$$

máxima, o sea $y_{t_0=0} = +0,9 \text{ m}$ y reemplazando en la (7), tenemos:

$$y_h(t) = e^{(-2,5 \cdot t)} [\underbrace{0,9}_{A} \cdot \underbrace{\cos(1,323 \cdot t)}_1 + \underbrace{B \cdot \sin(1,323 \cdot t)}_0]$$

O sea: $A=0,9$

Para calcular B, se prepara la ecuación (6) del siguiente modo:

$$\frac{y_h(t)}{e^{(-\alpha \cdot t)}} = [A \cdot \cos(\omega_o \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_o \cdot t)]$$

$$y_h(t) \cdot e^{(+\alpha \cdot t)} = [A \cdot \cos(\omega_o \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_o \cdot t)] \quad (8)$$

En $t_0=0$, la velocidad es cero, o sea $\frac{dy}{dt} = 0$ y la elongación es máxima, o sea $y_{t_0=0} = +0,9 \text{ m}$

Derivando la (8) se tiene:

$$\frac{dy}{dt} \cdot e^{(\alpha \cdot t)} + y(t_0) \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot t)} = 2,25 =$$

$$-\omega_o \cdot A \cdot \sin(\omega_o \cdot t) + \omega_o \cdot B \cdot \cos(\omega_o \cdot t)$$

$$0 + 1,323 \cdot B$$

O sea: $B = 1,7$

Por lo tanto, reemplazando valores en la (7), la solución de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_h(t) = e^{(-2,5 \cdot t)} \cdot [0,9 \cdot \cos(1,323 \cdot t) + 1,7 \cdot \sin(1,323 \cdot t)] \quad (9)$$

Esta función (9) contiene dos términos oscilantes dentro de los corchetes, afectados por un factor amortiguador. Las gráficas de dicho factor y términos oscilantes se muestran a continuación en las Figuras 4 a 6 respectivamente y la final en la Figura 7.

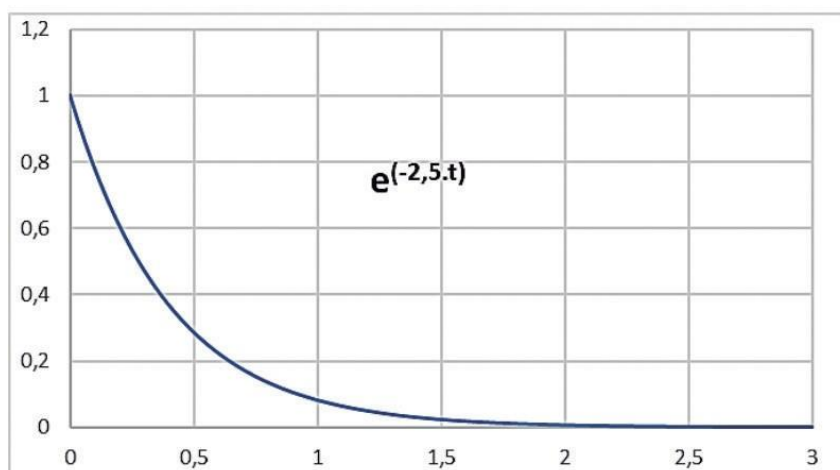


Fig. 4. Factor atenuador

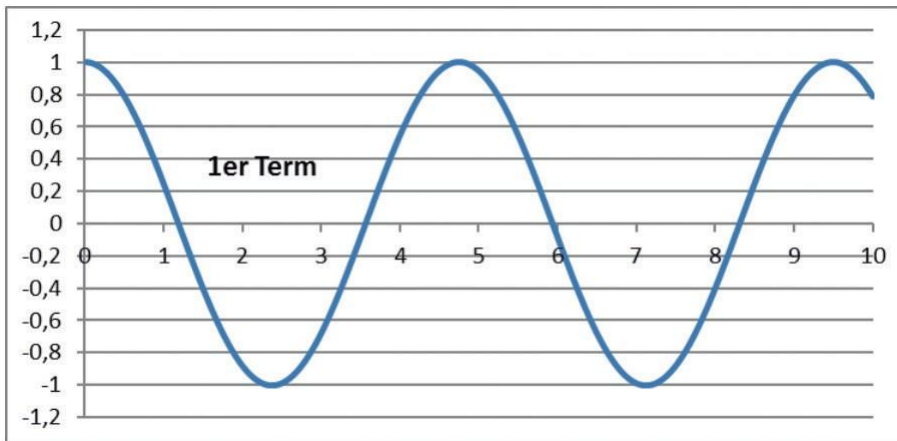


Fig. 5. 1er. término oscilante

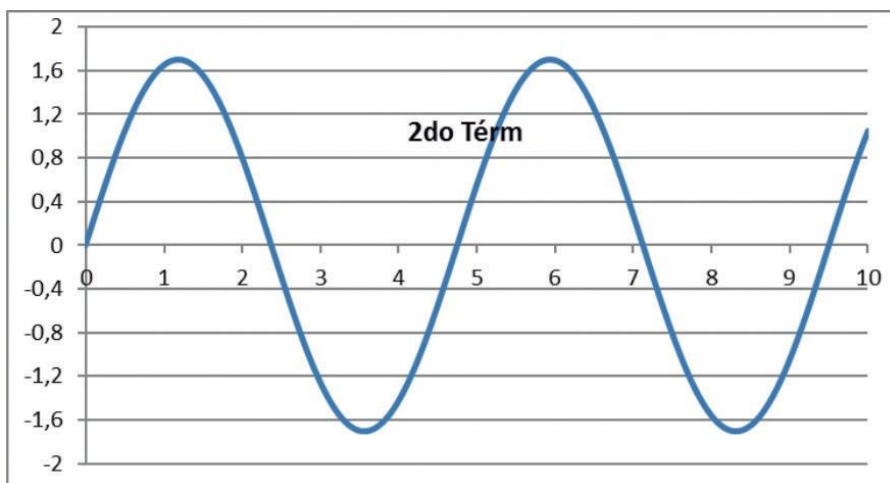


Fig. 6. 2do. término oscilante

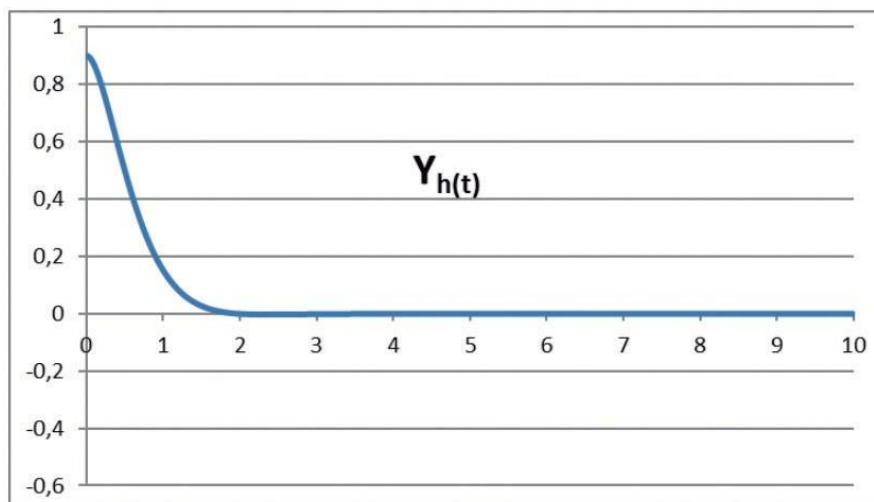


Fig. 7. $y_h(t)$ solución ecuación diferencial homogénea. Régimen transitorio

Es decir, desde el punto de vista matemático esta $y_h(t)$ es la solución de la ecuación diferencial lineal, a coeficientes constantes, homogénea, pero desde el punto de vista físico sería el comportamiento de la máquina undimétrica, sin excitación forzada externa.

Solución de la ecuación particular

Se parte de (2), la cual incluye la oscilación forzada y se reitera a continuación:

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2)$$

Tomada una cierta ecuación, en caso de ser la adecuada, al extraer la primera y segunda derivada y reemplazar en cada término, debe satisfacer la ecuación. Entonces se propone:

$$y_p(t) = [C \cdot \cos(\omega \cdot t) + D \cdot \sin(\omega \cdot t)] \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot D \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 \cdot C \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega^2 \cdot D \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Haciendo los reemplazos en la (2):

$$m \cdot [-\omega^2 \cdot C \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega^2 \cdot D \cdot \sin(\omega \cdot t)] + c \cdot [-\omega \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot D \cdot \cos(\omega \cdot t)] + k \cdot [C \cdot \cos(\omega \cdot t) + D \cdot \sin(\omega \cdot t)] = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Si $t=0$, entonces:

$$m \cdot [-\omega^2 \cdot C] + c \cdot [\omega \cdot D] + k \cdot [C] = F_0 \rightarrow (k - m \cdot \omega^2) C + (c \cdot \omega) D = F_0 \quad (11)$$

Si $y_{(t)} = 0$, entonces $(\omega \cdot t)$ debe adelantar 90°

$$-c \cdot \omega \cdot C + (k - m \cdot \omega^2) D = 0 \quad (12)$$

Por lo tanto, con (11) y (12) se puede conformar este sistema:

$$\left. \begin{aligned} (k - m \cdot \omega^2) C + (c \cdot \omega) D &= F_0 \\ -c \cdot \omega \cdot C + (k - m \cdot \omega^2) D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$C = F_0 \cdot \frac{(k - m \cdot \omega^2)}{(k - m \cdot \omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2} = 1,039$$

$$D = F_0 \cdot \frac{(c \cdot \omega^2)}{(k - m \cdot \omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2} = 0,581$$

Reemplazando en la (10):

$$y_{p(t)} = 1,039 \cdot \cos(0,82 \cdot t) + 0,581 \cdot \sin(0,82 \cdot t) \quad (13)$$

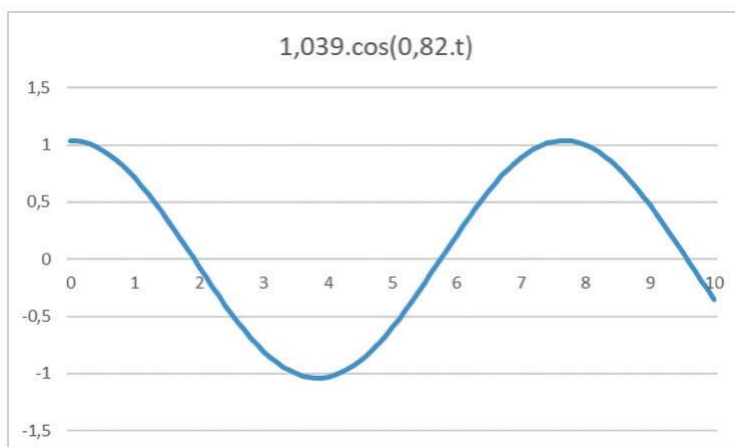


Fig. 8. 1er. término oscilante

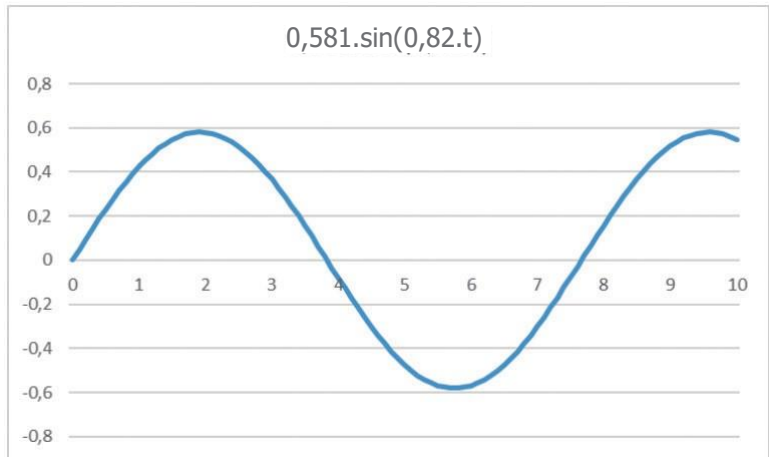


Fig. 9. 2do. término oscilante

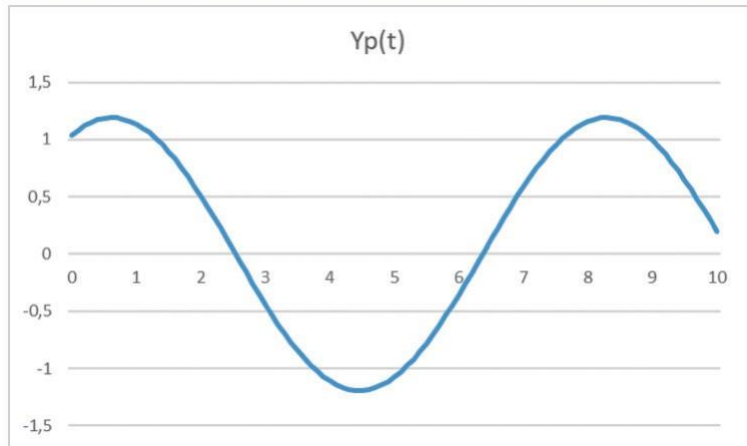


Fig. 10. $y_h(t)$. Régimen permanente

Solución de la ecuación diferencial

Aplicando la (4), ahora como las sumas de (9) y (13) tenemos:

$$Y_{(t)} = Y_{h(t)} + Y_{p(t)} \quad (4)$$

$$y_{(t)} = e^{(-2,5.t)} [0,9 \cdot \cos(1,323.t) + 1,7 \cdot \sin(1,323.t)] + [0,757 \cdot \cos(0,82 \cdot t) + 0,347 \cdot \sin(0,82 \cdot t)] \quad (14)$$

factor atenuante
solución homogénea con términos oscilantes
solución particular con términos oscilantes

componente transitoria (Bucella, 2001)
componente permanente (Bucella, 2001)

solución completa

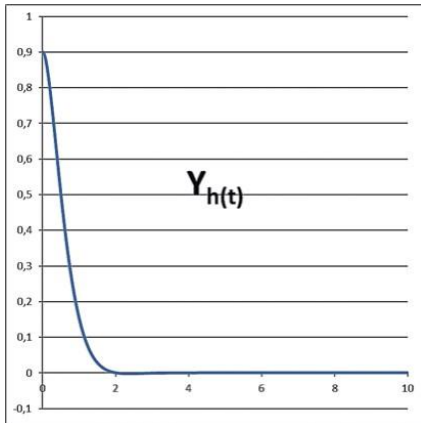


Fig. 7. Régimen transitorio

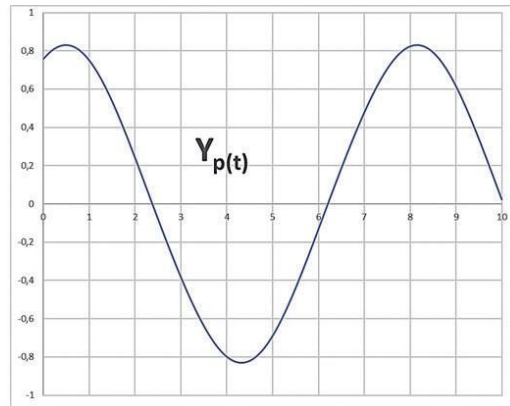


Fig. 10. Régimen permanente

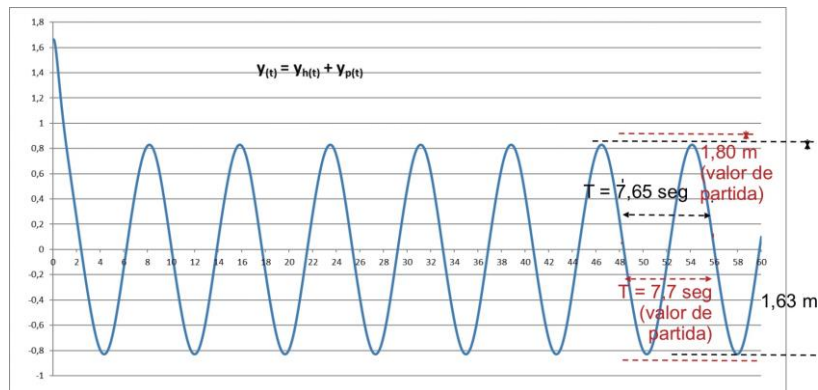


Fig. 11. Comparativa con los parámetros de partida

Análisis de la súbita pérdida de carga

Un caso crítico de análisis resulta ser la súbita pérdida de carga, la cual podría presentarse frente a un fallo en el generador eléctrico, una repentina desconexión del mismo o un desacople de la red o de la carga del generador.

lerarse (Meier, *et al.* 2006). En ese caso el único factor amortiguador serán un 0,5% por pérdidas disipativas en la cadena cinemática (cojinetes, otros) y otro 0,5% por amortiguamiento viscoso y tensión superficial, es decir un 1% del considerado inicialmente ($c = 500$).

Ante este fenómeno la máquina tenderá a ace-

Haciendo los cálculos, la gráfica resultante es:

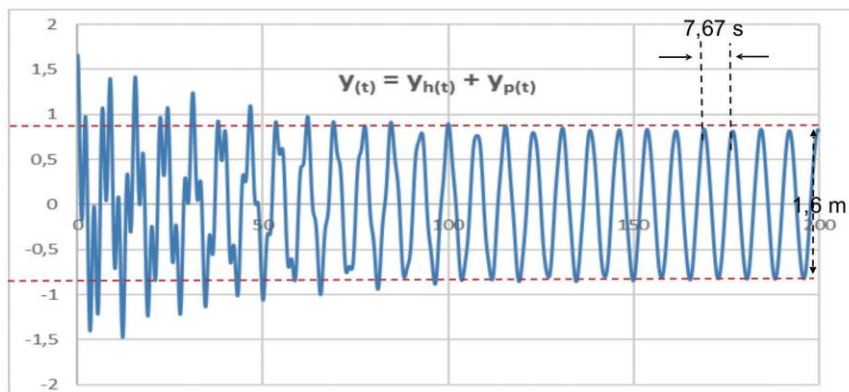


Fig. 12. Comportamiento ante súbita pérdida de carga

Conclusiones

La gráfica de Figura 11 representa el comportamiento del dispositivo en el arranque y luego en régimen permanente estabilizado, mostrando sus valores característicos.

En la Figura 12 se ve, ante una súbita pérdida de carga, que la máquina tiende a desestabilizarse, con excursiones y aceleraciones en una inestabilidad de unos 90 segundos, quedando luego la boya flotando sobre las olas en régimen estable.

A ambos resultados se los considera consistentes con los parámetros de partida, y representan un aporte útil para los diseñadores, respecto del comportamiento esperable de esta máquina.

Puede observarse que la frecuencia del modelo matemático final coincide con la frecuencia del oleaje, que es uno de los parámetros de partida; las excursiones regulares en funcionamiento normal se aproximan a las excursiones del oleaje real (Prario, 2018); la excitación parte de datos duros reales, y se

estiman los valores de k (resorte) y c (amortiguador).

Queda claro, luego de la modelación que tanto la excitación como la masa del sistema son parámetros reales y que si los factores k y c cumplen con la relación correspondiente el sistema funcionará según los parámetros esperados. Estos valores se pueden ajustar en la realidad modificando la inercia del sistema y el amortiguamiento correspondiente al generador eléctrico.

Se debe destacar que (de manera intencional) la fuerza excitatriz proveniente del oleaje coincide con una onda oscilatoria que, luego de factores de pérdida, establece el punto de partida y sobre eso se le agregan las irregularidades. Si bien la ola no es siempre una sinusoidal perfecta, se aproxima mucho a la realidad. Para los fines prácticos la aproximación es válida, ya que en los casos en que la ola incidente tenga formas extrañas, desparejas, producto de fuertes vientos y/o tormentas, el sistema saldrá de funcionamiento para evitar daños.

Referencias

- BOUZA, P., (2018). "Datos MdP Wind Guru para UTN". Datos en Excel a requerimiento Undimotriz UTN.BA. Buenos Aires, Argentina.
- BUCELLA, J., (2001). "Teoría de los circuitos I." Capítulo V, Transitorio de circuitos. Parte A: Introducción. Pág. 3. Facultad Regional Mendoza - Universidad Tecnológica Nacional. Mendoza. Argentina
- HAIM, A. et al., (2017). "Aprovechamiento de la Energía Undimotriz". Segundo Congreso de Investigación y Transferencia Tecnológica en Energía Eléctrica, Universidad Tecnológica Nacional-BA-Campus. Buenos Aires, Argentina.
- KISELIOV, A.; Krasnov, M. y Makarenko G., (1979). Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú. Tercera edición. Editorial MIR. Moscú.
- MEIER, Alexandra von, (2006). "Electric Power Systems – A conceptual introduction". Chapter 7. Power Flow Analysis. 7.3.3. Conceptualizing Power Flow. P 213. Hoboken, New Jersey. 1ra Edición. IEEE Press, a John Wiley & Sons Inc. Publication. Hoboken, New Jersey.
- PALACIOS, F., (2006). "EDOs de orden superior". Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa - Universidad Politécnica de Cataluña. Versión 1.1. Pág. 3. Cataluña.
- PRARIO, B. (2018). "Datos MdP para UTN". Datos en Excel a requerimiento Undimotriz UTN. BA. Buenos Aires, Argentina.
- TORRES, O., (2011). "Modelado con ecuaciones diferenciales de orden superior". Publicado en Issuu | Digital Publishing Platform. Capítulo 5, pág. 196. Lima
- TSENG, Z., (2008, 2012). "Second Order Linear Nonhomogeneous Differential Equations; Method of Undetermined Coefficients". Math.psu.edu. p. 2,7. Editor: Penn State, Pennsylvania State University. Pennsylvania.