

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
NACIONAL

UNIDAD ACADÉMICA CONCORDIA

Apuntes de la Cátedra:

RESISTENCIA DE LOS MATERIALES

Ing. Pedro Casal - Ing. Marcos Blanc

Transcripción: Walter Ferreira

- 1997 -

PRÓLOGO

Atento al trabajo de recopilación iniciado por el Ing. Pedro Casal en el año 1988, a los efectos de llevar a cabo un apunte de la Cátedra "Estabilidad II" para la Carrera de Ingeniería en Vías de Comunicación que se dicta en la Unidad Académica Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional; el cual fuera confeccionado tomando en consideración la bibliografía de primer nivel que se publica en la actualidad a nivel mundial al respecto, como ser las obras de los siguientes autores: Stiopin, Feodosiéf, Belluzzi, Timoshenko - Young, Serie Schaumm, Guzman, Yuan-Yu Hsieh, etc. (todos ellos de las mas variadas editoriales y nacionalidades), y con el objeto de brindarle al alumno un elemento de estudio para que pudiera lograr un seguimiento rápido del dictado de la misma. Es que se me ocurre a comienzos del año 1996 hacer pasar en limpio el mismo (con la incorporación y adecuación de algunos temas que la nueva Carrera de Ingeniería Civil exigía, de la ahora denominada "Resistencia de los Materiales" como universalmente se la llama). Acto seguido propuse al Sr. Decano de nuestra Unidad Académica Ing. José Bourren y al Secretario Académico Ing. Raúl Bobillo, la posibilidad de becar al alumno avanzado Walter Ferreira, el cual poseía buenos conocimientos de diseño gráfico y su computadora personal, para la transcripción de este resumen. Desde el primer momento se me brindó todo el apoyo y los recursos que fueron necesarios y/o disponibles para concretar este objetivo. Por lo que agradezco infinitamente la confianza que nos fue depositada.

Recomendamos al alumno en particular que bajo ningún punto de vista éste trabajo sea considerado como una herramienta única de estudio que tiene la última palabra en la materia, muy por el contrario, es solo un elemento que facilitará el seguimiento de la Cátedra pero nunca sustituirá las excepcionales obras que aquí se citaron, las cuales enfocan cada tema en particular con disímiles e ingeniosas formas de resolución, por lo que a mi juicio, deberán forzosamente ser parte del capital bibliográfico propiedad permanente del alumno y del futuro Profesional de la Ingeniería.

Este trabajo es una aporte mancomunado que realizamos con el objeto que nuestra Casa de Altos Estudios pueda contar con un elemento digno de ser referenciado en el medio académico. Apostando a la calidad de la enseñanza, al crecimiento y a la transformación permanente y vertiginosa que debemos transmitir en las aulas, para que el futuro profesional tenga conocimientos sólidos y prácticos que le permitan desenvolverse con eficiencia para que sea dueño de un criterio personalizado de los conocimientos adquiridos en su etapa universitaria.

Esto que hoy presentamos no lo consideramos terminado ni mucho menos, solo será el inicio de lo que permanentemente deberemos mejorar para lograr que tan importante materia pueda ser globalmente interpretada en un período de cuatro meses como en la actualidad el nuevo Plan de estudio lo requiere.

Marcos Roberto Blanc
Ing. en Construcciones
Jefe de Cátedra Interino Resistencia de los Materiales

INDICE

INTRODUCCIÓN	5
CONSIDERACIONES Y FUNDAMENTACIONES GENERALES DE LA MATERIA	5
HIPÓTESIS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES	6
FUERZAS EXTERIORES	8
DEFORMACIÓN LINEAL Y ANGULAR	9
FUERZAS INTERIORES	10
UNIDAD I - TENSIONES	11
TENSION DEL PUNTO - TENSION NORMAL Y TANGENCIAL - TENSIONES ADMISIBLES	11
TEOREMA DE CAUCHY - ECUACION DE EQUILIBRIO EN EL CONTORNO DEL PUNTO	13
TENSIONES PRINCIPALES - ECUACION DE LAGRANGE - INVARIANTES DE TENSION	16
REPRESENTACION GRAFICA DE MOHR	18
CAMPO DE EXISTENCIA DE σ_N Y τ_N	19
ESTADOS DE DEFORMACION	22
DEFORMACION VOLUMETRICA	24
VARIACION UNITARIA DE VOLUMEN	24
LEY DE HOOKE GENERALIZADA - MODULOS DE ELASTICIDAD - COEFICIENTE DE POISSON	24
ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION	27
ENERGIA POTENCIAL DE VOLUMEN Y FORMA	28
TENSIONES EN PLANOS INCLINADOS - CASO DE TRACCION Y COMPRESION EN UNA DIRECCION	29
CALCULO DE LAS TENSIONES EN PLANOS INCLINADOS - CASO DE TRACC. Y COMPR. EN DOS DIRRECC.	31
COEFICIENTES DE SEGURIDAD	34
UNIDAD II - TRACCION Y COMPRESION.....	37
CALCULO DE LAS FUERZAS INTERIORES	37
CALCULO DE LAS TENSIONES.....	37
CALCULO DE DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS	38
INFLUENCIA DEL PESO PROPIO	39
SOLIDO DE IGUAL RESISTENCIA	40
PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA.....	41
PROPÓSITOS Y TIPOS DE ENSAYOS	43
DIAGRAMAS DE TRACCION Y COMPRESION.....	43
FRAGILIDAD	44
AUMENTO DEL LIMITE CONVENCIONAL DE FLUENCIA POR CARGAS REPETIDAS	45
INFLUENCIA DEL TIEMPO SOBRE LA DEFORMACION - REACTIVIDAD - FLUENCIA PLASTICA. RELAJACION	45
HIPÓTESIS DE RESISTENCIA O DE ROTURA DE MATERIALES	46
PRIMERA HIPÓTESIS DE RESISTENCIA (O DE RANKINE)	47
SEGUNDA HIPÓTESIS DE RESISTENCIA (O DE SAINT VENANT -1632)	48
TERCERA HIPÓTESIS DE RESISTENCIA (O DE GUEST-1900)	48
CUARTA HIPÓTESIS DE RESISTENCIA (O DE BELTRAMI-1885)	49
QUINTA HIPÓTESIS DE RESISTENCIA (O DE HUBER-MISSES-HENCKY).....	50
SEXTA HIPÓTESIS DE RESISTENCIA (O DE COULOMB-MOHR)	50
SÉPTIMA HIPÓTESIS DE RESISTENCIA (BALANDIN)	51
CALCULO DE RECIPIENTES DE PAREDES DELGADAS- ECUACION DE LAPLACE	52
CONCENTRACION DE TENSIONES	54
TENSIONES DE CONTACTO	55
UNIDAD III - TORSION.....	57
CONSTRUCCION DE LOS DIAGRAMAS DE MOMENTO TORSOR.....	57
CALCULO DE LAS TENSIONES EN LAS BARRAS DE SECCION CIRCULAR	58

DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS QUE ACOMPAÑAN LA TORSIÓN	
DE BARRAS DE SECCIÓN CIRCULAR.....	61
ENERGÍA POTENCIAL DE TORSIÓN	62
RESULTADOS PRINCIPALES DE LA TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN NO CIRCULAR.....	63
TORSIÓN DE BARRAS DE PAREDES DELGADAS DE SECCIÓN CERRADA	64
ANGULO DE TORSIÓN	65
FORMAS CONVENIENTES DE LAS SECCIONES EN LA TORSIÓN	66
UNIDAD IV - FLEXIÓN.....	67
NOCIONES GENERALES SOBRE LA TENSIÓN EN FLEXIÓN	67
TIPOS DE APOYOS EN LAS VIGAS.....	68
CONVENCIÓN SOBRE LOS SIGNOS DE LOS MOMENTOS FLECTORES.....	68
RELACIONES ENTRE EL MOMENTO FLECTOR, LA FUERZA CORTANTE Y LA INTENSIDAD DE LA CARGA	
DISTRIBUIDA.....	69
DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES NORMALES	69
CONDICIÓN DE RESISTENCIA POR TENSIONES NORMALES	73
DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES TANGENCIALES POR ESFUERZOS CORTANTES	75
LÍNEAS ISOSTÁTICAS	78
DESPLAZAMIENTOS EN LA FLEXIÓN - ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA LÍNEA ELÁSTICA DE LA VIGA	78
ENERGÍA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN EN LA FLEXIÓN.....	81
PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO	81
SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO.....	83
LEY DE LA RECIPROCIDAD DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE MAXWELL.....	84
LEY DE BETTI.....	85
FÓRMULA GENERAL DE LA ENERGÍA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL	86
FLEXIÓN PLÁSTICA EN VIGAS ISOSTÁTICAS	86
FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DE LAS VIGAS POR CAPACIDAD PORTANTE.....	88
SISTEMAS HIPERESTÁTICOS (PLASTIFICACIÓN).....	89
MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL (MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA)	91
CONDICIONES DE PLASTICIDAD.....	93
FLEXIÓN EN DOS PLANOS, DESVIADA U OBLICUA	94
FLEXIÓN Y TRACCIÓN O COMPRESIÓN COMBINADAS	98
COMPRESIÓN O TRACCIÓN EXCÉNTRICA	99
NÚCLEO CENTRAL.....	101
TEOREMA DE MAXWELL.....	101
TORSIÓN Y CORTE COMBINADOS	102
TORSIÓN Y FLEXIÓN COMBINADAS	104
TORSIÓN Y TRACCIÓN (COMPRESIÓN) COMBINADAS.....	105
UNIDAD V - PANDEO.....	106
FORMAS ESTABLES E INESTABLES DE EQUILIBRIO	106
FÓRMULA DE EULER PARA DETERMINAR LA FUERZA CRÍTICA	107
INFLUENCIA DEL TIPO DE APOYO DE LA BARRA.....	108
DOMINIO DE LA FÓRMULA DE EULER.....	109
FÓRMULAS EMPÍRICAS PARA LA DETERMINACIÓN DE LA TENSIONES CRÍTICAS	109
MÉTODO DE LORD RAYLEIGH.....	110
FÓRMULA PRÁCTICA PARA EL CÁLCULO POR PANDEO	112
FLEXIÓN POR FUERZAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES	112
UNIDAD VI - CARGAS DINAMICAS.....	115
INTRODUCCIÓN.....	115
FLEXIÓN POR CHOQUE.....	115
FATIGA	116
CURVA DE FATIGA PARA EL CICLO SIMÉTRICO- LÍMITE DE RESISTENCIA A LA FATIGA.....	118
DIAGRAMA DE LAS TENSIONES LÍMITES	118

INTRODUCCIÓN

Consideraciones y fundamentaciones generales de la materia

Las diversas estructuras, de cuyo diseño y constitución nos ocuparemos como ingenieros, deben tener entre otras la propiedad de **Resistencia Mecánica**, es decir que esas estructuras se deben oponer a la rotura al ser sometidas a la acción de fuerzas exteriores (cargas).

Por ello, los elementos de las estructuras deberán ser diseñados en material y dimensiones adecuadas.

a) El propósito del texto es **encontrar los métodos de cálculo de la resistencia de las construcciones.**

En muchos casos es necesario determinar las variaciones de forma y dimensión (deformación) que aparecen en los elementos de la construcción sometida a cargas.

Consideraremos que los cuerpos no son totalmente rígidos (indeformables) como en la mecánica teórica. Sin embargo diremos que las deformaciones del sólido que acompañan a las cargas son pequeñas y pueden determinarse mediante instrumentos especiales (extensómetros).

Estas pequeñas deformaciones no influyen sobre las leyes de equilibrio y movimiento del sólido. Pero sin estudiar éstas deformaciones no conoceremos como puede fallar el elemento, o como podemos evitarlo.

Resulta necesario limitar la magnitud de las deformaciones para que las estructuras funcionen normalmente.

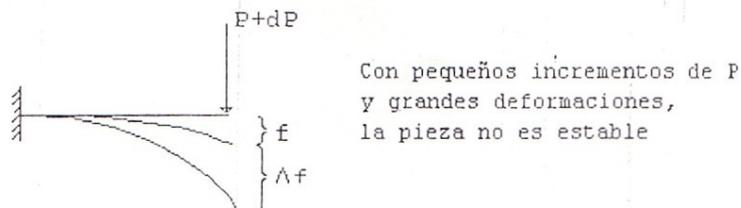
La propiedad de oponerse a la deformación de un elemento por acción de cargas lo conocemos como rigidez.

b) El segundo propósito del texto consiste en **exponer los métodos de cálculo de la rigidez de los elementos de la construcción.**

El siguiente problema se relaciona con el estudio de la estabilidad de las formas de equilibrio de los cuerpos reales (deformables).

La capacidad de oponerse a grandes perturbaciones del equilibrio inalterado, como resultado de acciones de perturbación pequeñas en los elementos, se la conoce como **Estabilidad**.

Diremos que "**el equilibrio de un elemento es estable si a una variación pequeña de la carga le corresponde una variación pequeña de las deformaciones**". La pérdida de la estabilidad puede ocurrir para valores de carga que desde el punto de vista de la resistencia o rigidez de un elemento, no es peligroso. Ejemplo:



c) El tercer propósito del texto es **exponer los métodos de cálculo de la estabilidad de los elementos.**

La realización de los métodos de cálculo expuestos nos permitirán obtener la máxima economía de material.

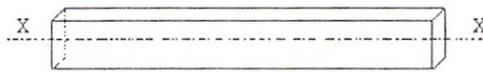
Es indispensable un estudio amplio y profundo de las propiedades de los materiales empleados y las características de las cargas que actúan sobre el elemento.

La resistencia de materiales introduce una serie de hipótesis y suposiciones para deducir fórmulas esenciales de cálculo.

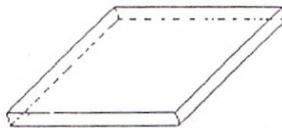
La validez de éstas fórmulas se comprueban comparando los resultados entre el cálculo y el experimento.

La mayoría de las estructuras están constituidas por elementos simples como:

1º **Vigas y columnas**, cuerpos que tienen dos dimensiones pequeñas en comparación con la tercera (sección-eje).



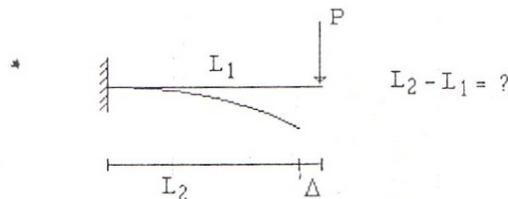
2º **Losas y bóvedas**, cuerpos limitados por dos planos separados por una pequeña distancia en relación a la plana.



3º **Bloques macizos o paralelepípedos**, cuerpos cuyas tres dimensiones son del mismo orden.

En este curso estudiaremos el comportamiento de las barras de sección constante y los sistemas más simples formados por éstas. Consideraremos que son suficientemente rígidas, o sea, no sufren deformaciones importantes cuando son cargadas.

El estudio de barras esbeltas, placas, bóvedas y bloques se estudiarán en elasticidad. Diremos que una barra es esbelta cuando la deformación que se produce al cargarse es difícil de calcular.



Hipótesis de la resistencia de materiales

Para simplificar los cálculos introduciremos ciertas hipótesis respecto a las propiedades del material, a las cargas y al carácter de interacción de las piezas.

La comprobación experimental demuestra que a los fines prácticos éstas suposiciones son válidas.

1ª Hipótesis. El material se considera macizo continuo.

Desde el punto de vista práctico se da plena justificación a esta hipótesis, puesto que los granos de la mayoría de los materiales de construcción son tan pequeños que se puede admitir esta suposición sin mucho error en los resultados. Esto se explica porque las dimensiones de los elementos son superiores a las distancias entre átomos.

2ª Hipótesis. El material de la pieza es homogéneo, tiene idénticas propiedades en todos sus puntos.

Los metales son altamente homogéneos, la madera, el hormigón y los plásticos lo son menos. El hormigón está compuesto por piedra, arena y cemento con propiedades distintas; la madera tiene nudos y las resinas del plástico son distintas. Sin embargo los experimentos dan resultados satisfactorios cuando consideramos la homogeneidad de los materiales.

3ª Hipótesis. El material de la pieza es isótropo. Sus propiedades son iguales en todas las direcciones, en materiales con grano fino, en las distintas direcciones del plano de sus cristales, por eso están orientados caóticamente.

En la madera, el hormigón y los plásticos esto es lícito con cierta aproximación.

Cuando las propiedades difieren según su orientación (cristales de cobre), se los denomina anisótropos.

4ª Hipótesis. Las fuerzas interiores, originales que preceden a las cargas, son nulas.

Las fuerzas de interacción entre partículas se oponen a la variación de forma que produce la acción de cargas. Prescindiremos de las fuerzas intermoleculares, pues estas existen en los materiales por distintas causas: en el acero aparecen por el mal templado, en la madera por el mal secado y en el hormigón por el fragüe.

5ª Hipótesis. Principio de superposición de cargas.

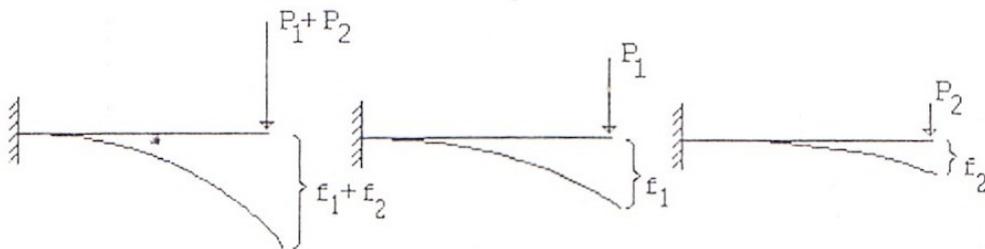
El efecto debido a la acción conjunta, sobre el cuerpo, de un sistema de fuerzas es igual a la suma de los efectos de las acciones de éstas fuerzas, aplicadas consecutivamente en orden arbitrario.

Definiremos como efecto de acción (cargas) a la deformación y fuerzas interiores que aparecen en el sólido y los desplazamientos de cada uno de los puntos de éste.

Esta hipótesis es válida cuando se cumple:

- 1) Los desplazamiento de los puntos de aplicación de las fuerzas son pequeños en comparación con las dimensiones del sólido.
- 2) Los desplazamientos que acompañan a las deformaciones del sólido dependen linealmente de la carga.

En las construcciones ordinarias éstas condiciones se cumplen, por lo que tiene gran aplicación ésta hipótesis.



Se puede llegar al mismo resultado haciendo actuar por separado cada una de las fuerzas. Las deformaciones debidas a las cargas individuales sumadas son iguales a la deformación producida por la acción conjunta de ambas cargas.

6ª Hipótesis o Principio de Saint - Venant. El valor de las fuerzas interiores (tensiones), en los puntos del sólido situados suficientemente alejados de los puntos de aplicación de las cargas, depende muy poco del modo concreto de aplicación de las cargas.

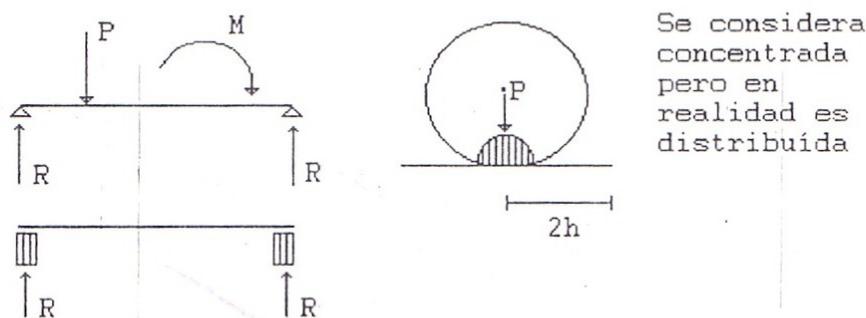
Este principio permite en muchos casos sustituir un sistema de fuerzas por otro estáticamente equivalente que simplifica los cálculos.

Los estudios demuestran que al calcular las fuerzas interiores (tensiones) en los puntos del lugar de aplicación de la carga, situados a una distancia superior a 1,5 o 2 veces la máxima dimensión del área de contacto, es posible sustituir una carga por otra estáticamente equivalente.

Fuerzas exteriores

Las cargas que actúan sobre las estructuras y sus elementos están constituidos por fuerzas y pares.

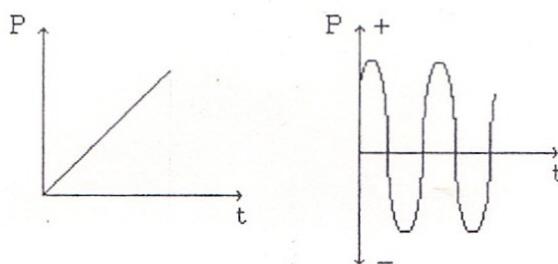
Las cargas pueden ser **concentradas** o **distribuidas**. En la naturaleza no existen fuerzas concentradas, todas las fuerzas se distribuyen sobre cierta área, por ejemplo la presión de una rueda sobre el pavimento o sobre el riel. Por el principio de Saint-Venant, en lugares alejados del área de aplicación, se puede considerar a la carga como concentrada, o sea, se puede aplicar una resultante, como fuerza estáticamente equivalente.



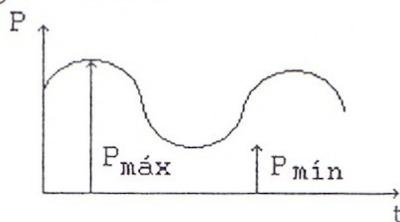
Las cargas concentradas se miden en Kg , Tn o N, las distribuidas en Kg/cm, Tn/m o N/m (de superficie). En general el peso propio se interpreta como carga lineal.

Las cargas pueden ser **estáticas** o **dinámicas**. Las estáticas hacen variar su punto de aplicación muy lento, por ello se puede despreciar la aceleración que surge al actuar la carga.

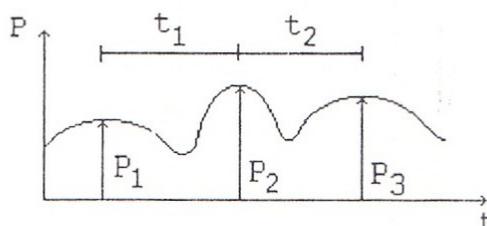
Las cargas dinámicas varían con el tiempo con una velocidad. La acción de éste tipo de fuerza va acompañado por vibración de la estructura, que al variar la velocidad de la masa que vibra aparecen *fuerzas de inercia* proporcionales (2ª Ley de Newton $F = m \cdot a$). Estas fuerzas de inercia pueden superar la carga estática.



Las leyes de variación de las fuerzas dinámicas con el tiempo pueden ser complicadas, pueden ser de carácter periódico o de régimen estable.



En muchos otros casos pueden ser cargas repetidas correspondientes a regímenes no estables (viento, nieve, motores, etc.). La probabilística nos permite conocer este tipo de curvas.

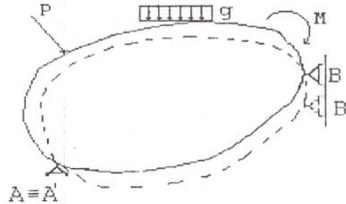


La magnitud de carga a considerar en el cálculo depende del período de servicio de la estructura y su importancia.

Las cargas se reglamentan por las convenciones técnicas y las normas de diseño.

Deformación lineal y angular

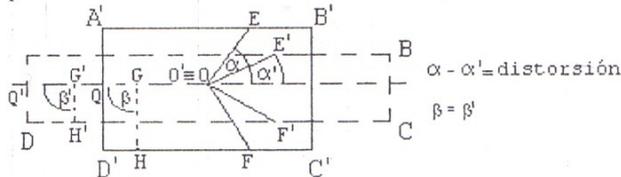
Todos los sólidos, bajo la acción de las fuerzas exteriores, se deforman en sus dimensiones o en sus formas o en ambas a la vez.



La variación lineal de las dimensiones del sólido se la llama **deformación lineal** y la variación de los ángulos, **deformación angular**.

Cuando las dimensiones aumentan se llama **alargamiento** y cuando disminuyen, **acortamiento**.

Consideremos una plancha de caucho:



La variación del ángulo inicial caracteriza la deformación angular (distorsión).

La deformación lineal la designamos por $\Delta(dz)$, $\Delta(dy)$ o Δl .

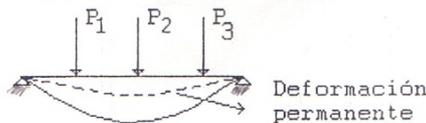
Para evitar la influencia de las dimensiones, se expresa éste concepto como deformación unitaria lineal:

$$\epsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\Delta l}{l}$$

La deformación lineal ϵ es una magnitud adimensional.

Según sea el material y la magnitud de la carga, una vez retirada ésta, la deformación puede desaparecer completa o parcialmente:

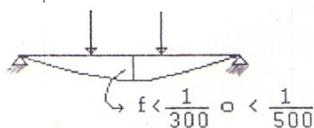
- a) Cuando las deformaciones se anulan después de retirar la carga, se llama **deformación elástica**, y a la propiedad del sólido de recuperar su forma inicial al retirar la carga se llama **elasticidad**.
- b) Cuando quedan deformaciones, luego de retirar las cargas, se llama **deformación plástica**. La propiedad del sólido de admitir deformaciones residuales se llama **plasticidad**.



Conociendo las deformaciones del cuerpo en todos sus puntos y las condiciones de apoyo, se puede calcular el desplazamiento de todos los puntos del sólido.

Para el uso normal de una estructura, las deformaciones deberán ser elásticas e inferiores a ciertos valores admisibles.

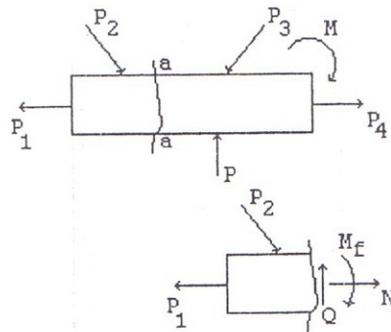
Estas condiciones se expresan mediante ecuaciones conocidas y simples, llamadas **condiciones de rigidez**. En algunos casos se pueden tolerar pequeñas deformaciones plásticas:



Fuerzas Interiores

Consideraremos que las fuerzas interiores (de elasticidad), que se producen en el sólido al aplicar la carga, se distribuyen en forma continua por lo expresado en la primera hipótesis.

Para conocer la fuerza elástica resultante de los esfuerzos que esas fuerzas producen (incluyendo también los momentos), emplearemos el **Método de las Secciones**. Consiste en trazar una sección imaginaria en el sólido, se retira una de las partes y se pone en evidencia los esfuerzos interiores que equilibran las fuerzas exteriores que actúan sobre la parte separada:



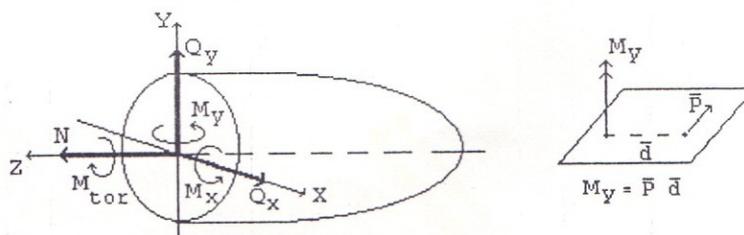
Si las fuerzas exteriores actúan sobre un mismo plano, es necesario aplicar 3 fuerzas interiores:

- a) **Fuerza Axial o Normal**, dirigida según el eje de la barra
- b) **Fuerza Transversal o de Corte**, que actúa en el plano de la sección imaginaria
- c) **Momento Flector o Flexor**, actuando en el plano normal al de la sección.

Estas fuerzas se calculan mediante ecuaciones de equilibrio de la parte separada del sólido.

Si las fuerzas exteriores, incluyendo la reacción de los apoyos, se encuentran en distintos planos, aparecen seis fuerzas interiores que son:

- a) **Fuerza Axial o Normal**, dirigida según el eje de la barra
- b) **Fuerza Transversal o de Corte**, que actúa en el plano de la sección imaginaria, pero que debe descomponerse en los dos ejes del plano.
- c) **Momento Torsor**, que actúa en el plano de la sección y tiende a torsionar la barra
- d) **Momentos Flectores**, que actúan según un plano normal al de la sección y se pueden descomponer según sus planos ortogonales.



El sistema de ejes utilizados es el destrógiro, al eje Z lo hacemos coincidir con el eje de la barra y al eje Y con la vertical.

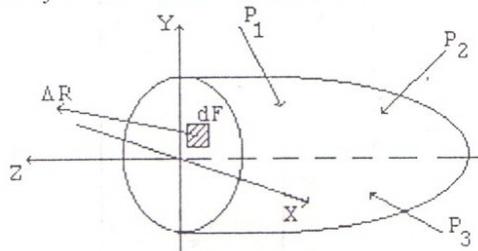
Existen casos particulares donde aparecen sólo algunas de las fuerzas interiores:

- 1- sólo una fuerza axial: ésta sollicitación se la denomina **tracción** si la fuerza actúa hacia afuera y **compresión** si es hacia adentro
- 2- sólo las fuerzas cortantes (transversales): ésta sollicitación se denomina corte puro o deslizamiento puro
- 3- sólo el momento torsor: sollicitación denominada **torsión**
- 4- sólo un momento flector: ésta sollicitación se denomina **flexión**
- 5- sólo los momentos flectores, se la denomina **flexión desviada**
- 6- cuando actúan varias fuerzas interiores simultáneamente se denomina **sollicitación compuesta**.

UNIDAD I - TENSIONES

Tensión del punto - Tensión normal y tangencial - Tensiones admisibles

Para conocer la intensidad de las fuerzas interiores, debemos considerar que en la sección imaginaria aquellas son distribuidas por las hipótesis consideradas. Esta intensidad puede variar de punto a punto en la sección y tener distintas direcciones.



Consideremos un punto A de la sección donde elegimos un área pequeña dF alrededor del punto. Sea ΔR la resultante de las fuerzas interiores correspondiente a la unidad de superficie ΔF .

Definiremos como **magnitud media** de las fuerzas interiores correspondiente a la unidad de superficie a:

$$\rho_m = \frac{\Delta R}{\Delta F} \quad \text{Tensión Media}$$

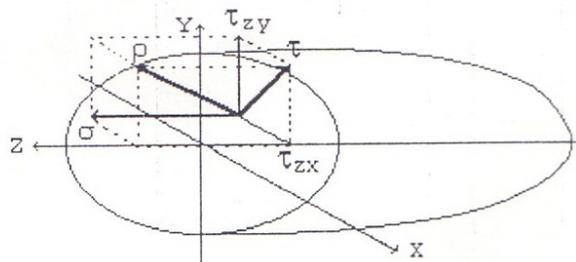
Disminuyendo el área hasta el límite obtenemos que:

$$\rho = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} \quad \text{Tensión real en A}$$

Se define la **Tensión** como "la fuerza interior correspondiente a la unidad de superficie de un punto en un plano determinado". La tensión se mide en Kg/cm^2 , Kg/m^2 o N/m^2 o múltiplos de éstos.

La tensión ρ se puede sustituir por dos componentes:

- 1- normal al plano de la sección, se la simboliza σ
- 2- en el plano de la sección, simbolizada por τ , denominada tensión tangencial. La orientación de ésta es arbitraria y se puede sustituir por sus componentes dirigidas según los ejes coordenados.



La tensión normal de tracción se considera positiva y la de compresión, negativa; lleva un índice coincidente con el eje coordenado paralelo a la tensión.

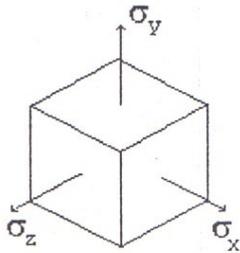
La tensión tangencial lleva signo según sea su orientación; lleva dos subíndices, el primero corresponde al eje paralelo a la normal (versor que define el plano), y el segundo corresponde al eje paralelo a la propia tensión.

La tensión normal está ligada al desplazamiento de las partículas que tienden a separarse cuando cortamos el sólido con el plano imaginario.

La tensión tangencial está ligada al desplazamiento de las partículas que tienden a deslizarse en el plano de la sección en cuestión.

"El conjunto de tensiones que actúan en todos los plano elementales, que se pueden trazar a través de un punto del sólido, forman el **Estado Tensional** del punto".

Si en las caras del cubo actúan solamente tensiones normales, éstas toman el nombre de **Tensiones principales**, y los planos sobre los que ellas actúan, **Planos principales**:



Las tensiones principales son 3 y se designan con σ_1 , σ_2 y σ_3 . La mayor es σ_1 y la menor σ_3 (con sus signos).

Los estados tensionales se clasifican en función del número de tensiones principales no nulas:

- las tres tensiones distintas de cero: **triaxial** o **de volumen**
- dos tensiones distintas de cero: **biaxial** o **plano**
- una sola tensión distinta de cero: **monoaxial** o **lineal**.

"Conocido el estado tensional de todos los puntos del sólido, se puede apreciar su resistencia".

Cuando el estado tensional del sólido es lineal, la condición de resistencia se escribe

$$\sigma \leq [\sigma]$$

σ es la tensión real y $[\sigma]$ es la **tensión admisible**, que depende de las propiedades del material y de las tensiones de trabajo.

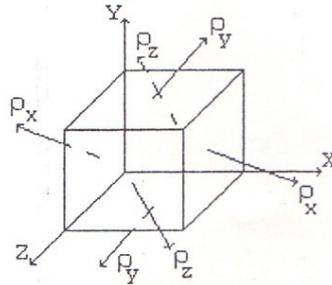
Existen otros casos donde la condición de resistencia se considera

$$\tau \leq [\tau]$$

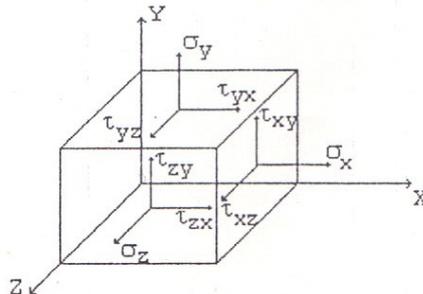
ESTADO TENSIONAL DE UN PUNTO

-- Vamos a determinar la forma de estudiar el estado tensional en un punto, si alrededor del mismo se escoge un elemento de forma cúbica infinitamente pequeño. En sus caras actuarán, en el caso general, las tensiones indicadas, que para que el sólido se mantenga en equilibrio deben cumplir con la 3ª ley de Newton (igualdad de acción y reacción).

Podemos representar las tensiones reales que actúan en cada cara según la siguiente figura:



Si ésta representación es reemplazada por los componentes de las tensiones, el cubo elemental queda:



Diremos que una tensión normal es positiva cuando, actuando en la cara de normal saliente positiva, tiene la dirección del semi-eje positivo.

Diremos que una tensión tangencial es positiva cuando, actuando en la cara de normal positiva, tiene la dirección del semi-eje positivo.

El signo positivo es válido cuando ambas tensiones, actuando en la cara de normal saliente negativa, tiene la dirección de los semi-ejes negativos.

Teorema de Cauchy - Ecuación de equilibrio en el contorno del punto

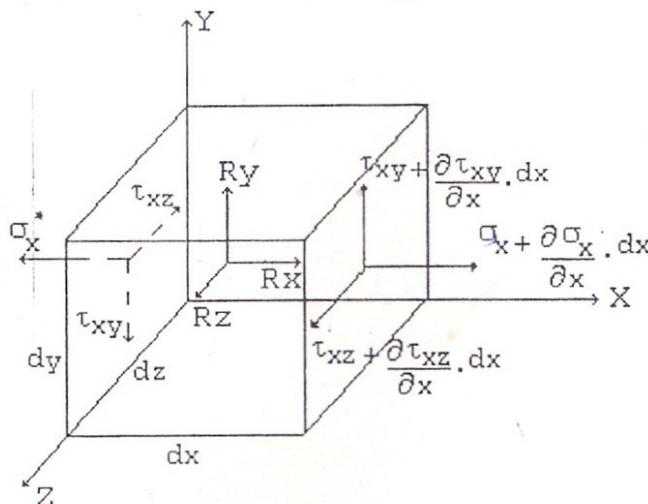
Supongamos que el cubo elemental tiene dimensiones dx , dy , dz y su volumen será:

$$V = dx \cdot dy \cdot dz$$

Llamemos R a la fuerza másica (fuerza por unidad de volumen) que actúa en elemento considerado, sus componentes serán R_x , R_y , R_z .

Nótese que, si por ejemplo la tensión normal en la cara $x = 0$ es σ_x , en la cara paralela ($x = dx$), será la tensión:

$$\sigma_x + d\sigma_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx$$



El equilibrio del cubo presupone el equilibrio de un sistema de fuerzas gaussiano. Esto se expresa mediante un sistema de seis ecuaciones escalares; la suma de las proyecciones sobre el eje x quedará:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz - \sigma_x \cdot dy \cdot dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy - \tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + R_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

El sistema que resulta, despreciando infinitésimos de orden superior, sería:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + R_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + R_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + R_z &= 0 \end{aligned}$$

Tomando momentos de las fuerzas respecto al eje x quedará:

$$\left(\tau_{yx} \cdot dx \cdot dy \right) \cdot \frac{dy}{2} + \left(\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \right) \cdot \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \right) \cdot \frac{dz}{2} - \left(\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy \right) \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

Sumando y despreciando infinitésimos de orden superior (haciéndolo extensivo a los otros ejes) nos queda:

$$\tau_{yz} dx \cdot dy \cdot dz - \tau_{zy} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot \frac{dy^2 \cdot dx \cdot dz}{2} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot \frac{dz^2 \cdot dx \cdot dy}{2} = 0$$

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0, \quad \tau_{zx} - \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$$

La expresión general que toma el teorema de Cauchy es:

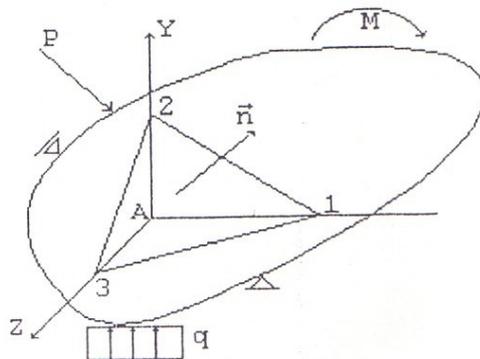
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

La expresión analítica del teorema de Cauchy se enuncia:

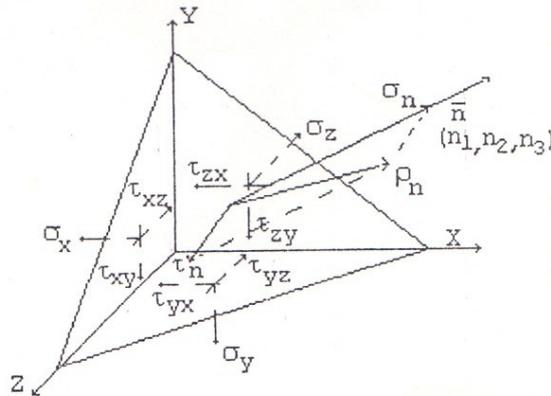
“Las componentes de las tensiones tangenciales que actúan sobre los planos ortogonales, que son normales a la arista de intersección de esos planos, son iguales en valor absoluto y se acercan o se alejan de ella”.

Entre las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de Cauchy nos quedan seis ecuaciones de equilibrio con nueve incógnitas y esto se reducirá a tres ecuaciones con seis incógnitas. El problema resulta entonces estáticamente indeterminado, y para poder resolverse es necesario recurrir a otras ecuaciones que se estudiarán en elasticidad, referidas a la deformación del cuerpo.

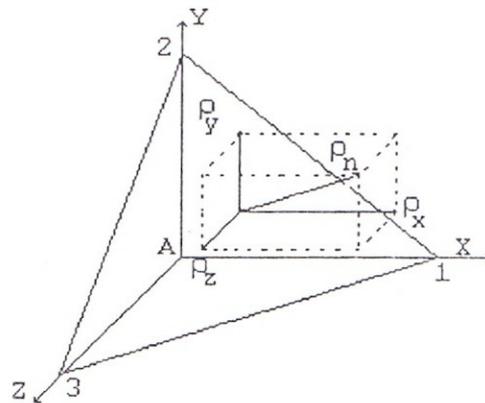
El estudio del estado de tensión en un punto del cuerpo generalmente lo llevamos a planos arbitrariamente orientados. Para ello se considera que ese plano arbitrario intercepta los ejes coordenados formando un tetraedro.



El estudio del equilibrio de ese tetraedro elemental nos permitirá conocer las relaciones entre las tensiones de los planos coordenados y las tensiones del plano arbitrario de normal saliente \vec{n} . Este plano lo hacemos tan próximo al punto A como queramos. En el límite, es un plano que pasa por el punto.



Descomponiendo ahora ρ_n según los ejes coordenados:



Los cosenos directores de \vec{n} son (n_1, n_2, n_3) . El vector tensión ρ que actúa en el plano tiene componentes $(\rho_{nx}, \rho_{ny}, \rho_{nz})$.

Llamaremos al Area 123 = dF y sus proyecciones sobre los plano coordenados serán:

$$\text{Area } A23 = \cos(\vec{n}, \vec{x}) \cdot dF = n_1 \cdot dF$$

$$\text{Area } A13 = \cos(\vec{n}, \vec{y}) \cdot dF = n_2 \cdot dF$$

$$\text{Area } A12 = \cos(\vec{n}, \vec{z}) \cdot dF = n_3 \cdot dF$$

el equilibrio del tetraedro se expresa por sólo tres ecuaciones puesto que el sistema de fuerzas que actúa es concurrente en el punto A.

Proyectando sobre el eje x tendremos:

$$\rho_{nx} \cdot dF - \sigma_x \cdot n_1 \cdot dF - \tau_{yx} \cdot n_2 \cdot dF - \tau_{zx} \cdot n_3 \cdot dF = 0$$

proyectando sobre los restantes ejes, simplificando dF:

$$\rho_{nx} = \sigma_x \cdot n_1 + \tau_{yx} \cdot n_2 + \tau_{zx} \cdot n_3$$

$$\rho_{ny} = \tau_{xy} \cdot n_1 + \sigma_y \cdot n_2 + \tau_{zy} \cdot n_3$$

$$\rho_{nz} = \tau_{xz} \cdot n_1 + \tau_{yz} \cdot n_2 + \sigma_z \cdot n_3$$

Aquí no entran las fuerzas másicas por ser infinitésimos de orden superior

Conocida la tensión ρ_n en el punto, producida por las fuerzas exteriores, a las ecuaciones anteriores, denominaremos **Ecuación de Equilibrio en el Contorno del punto**.

La tensión normal se obtiene proyectando el vector tensión sobre la normal al plano

$$\sigma_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n} = (\rho_{nx}, \rho_{ny}, \rho_{nz}) \cdot (n_1, n_2, n_3) = [(\sigma_x \cdot n_1 + \tau_{yx} \cdot n_2 + \tau_{zx} \cdot n_3) \cdot n_1 + (\tau_{xy} \cdot n_1 + \sigma_y \cdot n_2 + \tau_{zy} \cdot n_3) \cdot n_2 + (\tau_{xz} \cdot n_1 + \tau_{yz} \cdot n_2 + \sigma_z \cdot n_3) \cdot n_3]$$

operando nos queda:

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot n_1^2 + \sigma_y \cdot n_2^2 + \sigma_z \cdot n_3^2 + 2(\tau_{xy} \cdot n_1 \cdot n_2 + \tau_{yz} \cdot n_2 \cdot n_3 + \tau_{xz} \cdot n_1 \cdot n_3)$$

Conociendo las componentes $\rho_{nx}, \rho_{ny}, \rho_{nz}$ podemos calcular el módulo de ρ_n

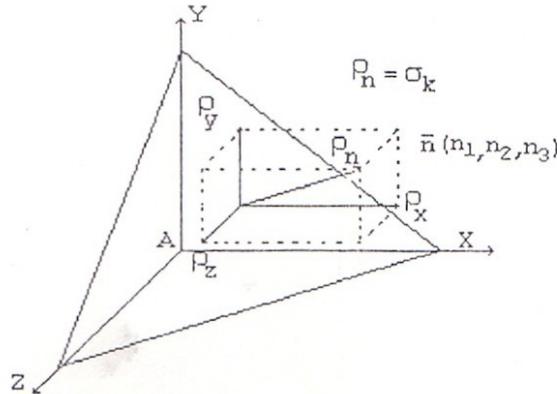
$$\rho_n = \sqrt{(\rho_{nx})^2 + (\rho_{ny})^2 + (\rho_{nz})^2}$$

La tensión tangencial surge de:

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2}$$

Tensiones Principales - Ecuación de Lagrange - Invariantes de tensión

Variando convenientemente el versor \bar{n} , es posible encontrar tres planos ortogonales entre sí, en los cuales la tensión ρ_n es normal a cada plano. Estos son conocidos como **Planos Principales**; sus versores normales, **Direcciones Principales** y sus tensiones, **Tensiones Principales**.



Las expresiones anteriores pasan a ser:

$$\rho_{nx} = \sigma_k \cdot n_1$$

$$\rho_{ny} = \sigma_k \cdot n_2$$

$$\rho_{nz} = \sigma_k \cdot n_3$$

reemplazando éstos valores en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\sigma_k \cdot n_1 = \sigma_x \cdot n_1 + \tau_{yx} \cdot n_2 + \tau_{zx} \cdot n_3$$

$$\sigma_k \cdot n_2 = \tau_{xy} \cdot n_1 + \sigma_y \cdot n_2 + \tau_{zy} \cdot n_3$$

$$\sigma_k \cdot n_3 = \tau_{xz} \cdot n_1 + \tau_{yz} \cdot n_2 + \sigma_z \cdot n_3$$

y llevando todos los términos al segundo miembro

$$(\sigma_x - \sigma_k) \cdot n_1 + \tau_{yx} \cdot n_2 + \tau_{zx} \cdot n_3 = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot n_1 + (\sigma_y - \sigma_k) \cdot n_2 + \tau_{zy} \cdot n_3 = 0$$

$$\tau_{xz} \cdot n_1 + \tau_{yz} \cdot n_2 + (\sigma_z - \sigma_k) \cdot n_3 = 0$$

Este es un sistema de ecuaciones homogéneas en n_1, n_2 y n_3 que definen al plano, o sea su dirección principal, que identifica a la tensión principal considerada.

La solución trivial nos da que $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ pero no es válida porque se debe cumplir $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Para que el sistema tenga solución única distinta de la trivial, el determinante de los coeficientes de las incógnitas debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_k) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_k) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_k) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Tensor de tensiones}$$

El desarrollo de éste determinante conduce a una expresión de la forma:

$$\sigma_k^3 - \sigma_k^2 \cdot I_1 + \sigma_k \cdot I_2 - I_3 = 0$$

Esta ecuación es conocida con el nombre de **Ecuación de Lagrange** tiene siempre raíces reales, que son las tres tensiones principales.

Los coeficientes I_1, I_2, I_3 son conocidos como **Invariantes de Tensión** y sus expresiones son:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Calculadas las raíces de la ecuación, se obtienen las tensiones principales a las que se denominan σ_1, σ_2 y σ_3 , ordenadas de mayor a menor según su valor y su signo.

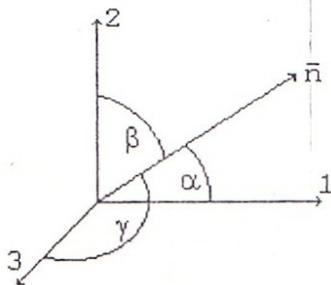
Para calcular la dirección principal del plano a través de los cosenos directores, utilizamos un sistema compuesto por dos ecuaciones cualesquiera de las expresadas anteriormente, y la suma de los cuadrados de los cosenos directores, por ejemplo:

$$(\sigma_x - \sigma_k) \cdot n_1 + \tau_{yx} \cdot n_2 + \tau_{zx} \cdot n_3 = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot n_1 + (\sigma_y - \sigma_k) \cdot n_2 + \tau_{zy} \cdot n_3 = 0$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

se obtienen entonces los valores de n_1, n_2, n_3



Teniendo como referencia ésta terna de ejes principales, se simplifican las ecuaciones, pues se eliminan las tensiones tangenciales, luego queda:

$$\rho_{nx} = \sigma_1 \cdot n_1$$

$$\rho_{ny} = \sigma_2 \cdot n_2$$

$$\rho_{nz} = \sigma_3 \cdot n_3$$

La tensión en el plano tendrá un módulo:

$$\rho_n = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2}$$

De la misma forma, la tensión tangencial será:

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2}$$

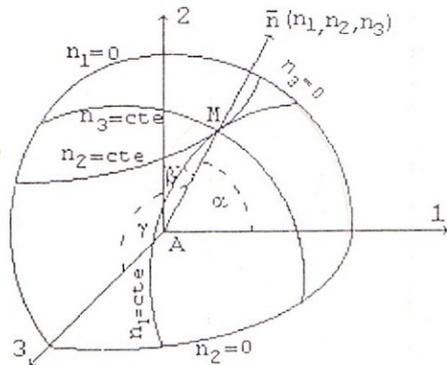
Los invariantes de tensión de la ecuación de Lagrange quedan:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

Representación gráfica de Mohr



El estado de tensión en un punto es representado en forma simple y objetiva en los gráficos de Mohr. La representación plana reemplaza al problema espacial.

Para ver el problema imaginemos ahora una esfera de radio infinitésimo, referido a la terna de ejes principales, podemos definir cualquier plano que pasa por A como tangente a la esfera elemental en algún punto, para este caso indicaremos el punto M que representa el plano π tangente a la esfera en ese punto.

Representamos un octavo de la esfera, pues con ello basta para representar a un plano de cualquier

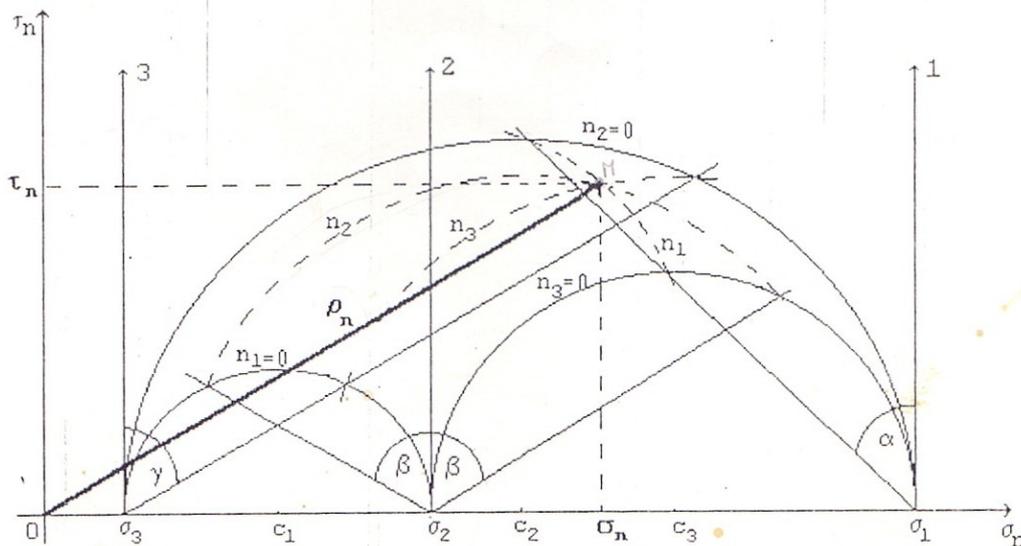
orientación. Sus cosenos directores serán en éste caso:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos \alpha \\ n_2 &= \cos \beta \\ n_3 &= \cos \gamma \end{aligned}$$

Las intersecciones del contorno de la esfera con los planos paralelos a los principales dan círculos paralelos cuya normal tiene un coseno director constante.

En la figura anterior se muestran los círculos paralelos máximos de $n_1=0$; $n_2=0$; $n_3=0$ y los paralelos que pasan por el punto M de cosenos directores n_1, n_2, n_3 que definen a plano π .

El objeto es representar la tensión ρ_n de un punto M en un sistema plano cartesiano (σ_n, τ_n) , para lo cual trazamos tres circunferencias cuyos extremos pasan por σ_1, σ_2 y σ_3 ; en correspondencia con éstos puntos trazamos tres rectas verticales a partir de las cuales determinaremos los correspondientes ángulos α, β y γ (dirección para la cual queremos determinar el ρ_n), hallando en consecuencia otras tres rectas que intersectarán cada una de ellas a dos circunferencias, determinando dos puntos particulares por los cuales deberán pasar las tres circunferencias correspondientes a: $n_1 = \cos \alpha, n_2 = \cos \beta$ y $n_3 = \cos \gamma$. La intersección de las tres circunferencias n_1, n_2 y n_3 determinarán el punto M. La distancia entre el origen de coordenadas y M (tomada en la escala correspondiente) nos dará el valor absoluto de la tensión ρ_n , que proyectada sobre los respectivos ejes cartesianos definirán los valores de σ_n (con su signo respectivo) y τ_n (\pm).



El vector \overline{OM} representa en escala el módulo de ρ_n . Utilizamos ahora un sistema de ecuaciones a los efectos de determinar que valores puede tomar τ_n , suponiendo conocidas las σ_k (σ_1, σ_2 y σ_3).

$$\rho_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cdot n_1^2 + \sigma_2^2 \cdot n_2^2 + \sigma_3^2 \cdot n_3^2$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot n_1^2 + \sigma_2 \cdot n_2^2 + \sigma_3 \cdot n_3^2$$

$$I = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

Sistema de tres ecuaciones en n_1^2 , n_2^2 y n_3^2 que resuelto nos da:

$$1) \quad n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2) \cdot (\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}$$

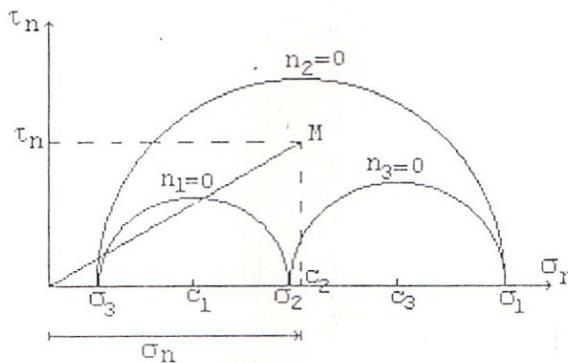
$$2) \quad n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1) \cdot (\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$3) \quad n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1) \cdot (\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Estas expresiones representan tres familias de circunferencias con centro sobre el eje de las σ_n .

Campo de existencia de σ_n y τ_n

1º) Analizando la primera ecuación se observa que σ_1 es mayor que σ_2 y que σ_3 , luego el denominador es positivo y siendo n_1^2 positivo, el numerador también lo es; aparecerá la familia de curvas o circunferencias con la primera de radio mínimo correspondiente a $n_1 = 0$ y todas las demás concéntricas a ésta y de radio mayor.



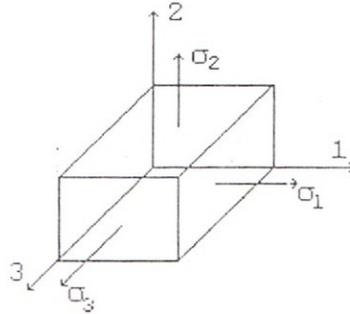
2º) Lo mismo ocurre en la tercer ecuación pues $\sigma_3 < \sigma_1$ y $\sigma_3 < \sigma_2$ lo que nos da un denominador positivo y al igual que antes habrá una circunferencia mínima de radio $n_3 = 0$ y todas las demás concéntricas a ésta y de radio mayor.

3º) En la segunda ecuación se produce un signo negativo por ser $\sigma_2 > \sigma_3$ y $\sigma_1 > \sigma_2$ por lo tanto en éste caso debe ser el numerador negativo, luego $\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1) \cdot (\sigma_n - \sigma_3) = 0$ que es la ecuación de una circunferencia con centro en el eje de σ_n y raíces: 1º) $\tau_n = 0$ y $\sigma_n = \sigma_1$

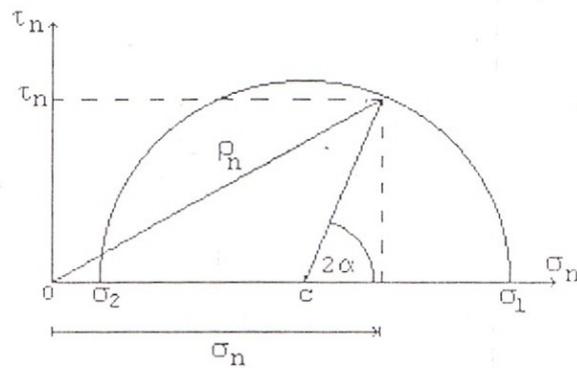
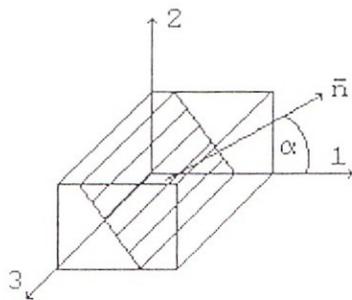
$$2^\circ) \tau_n = 0 \text{ y } \sigma_n = \sigma_3$$

Aparecerá entonces la familia de curvas con la primera de radio máximo correspondiente a $n_2 = 0$ y todas las demás concéntricas a ésta y de radio menor.

Para el cálculo de las tensiones ρ , σ y τ en planos inclinados paralelos a los ejes principales tendremos:



a) Plano paralelo al eje 3



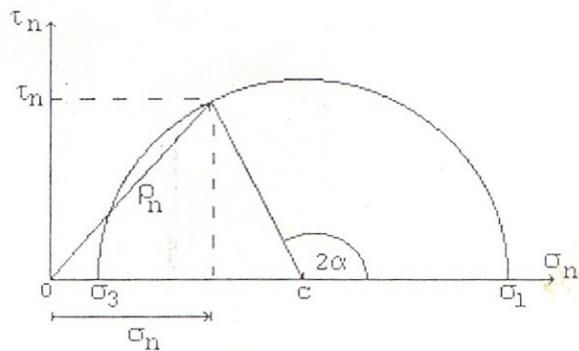
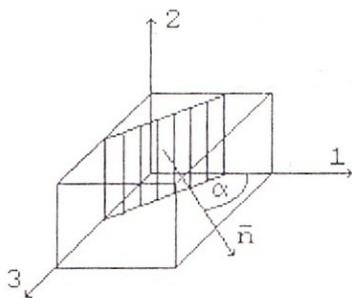
Las tensiones normales σ , las tangenciales τ y la resultante ρ en los planos de secciones inclinadas se determinan de la siguiente forma:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

b) Plano paralelo al eje 2

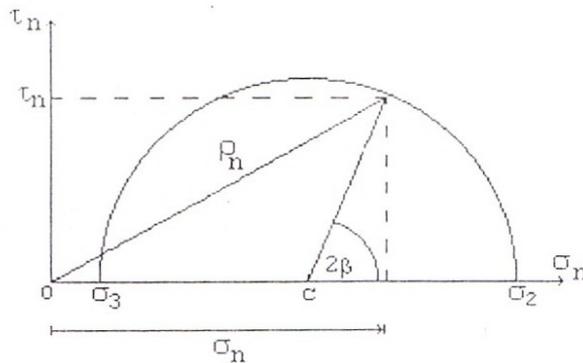
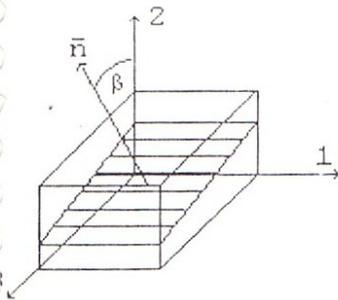


$$\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

c) Plano paralelo al eje 1



$$\sigma = \sigma_2 \cdot \cos^2 \beta + \sigma_3 \cdot \sin^2 \beta$$

$$\tau = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot \sin 2\beta}{2}$$

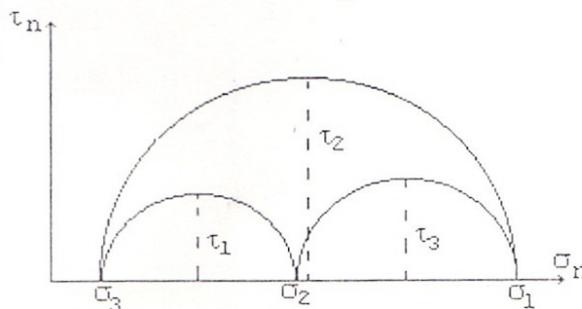
$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_2^2 \cdot \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cdot \sin^2 \beta}$$

Las tensiones tangenciales extremas valen:

$$\tau_1 = \pm \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}$$

$$\tau_2 = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

$$\tau_3 = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$



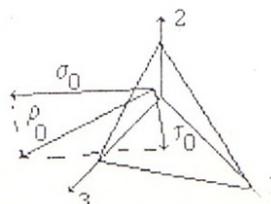
La mayor de estas tensiones en valor absoluto es τ_2 . Estas tensiones surgen en los planos inclinados 45° respecto de las direcciones de las tensiones principales (no existen tensiones normales, sólo tangenciales).

Las tensiones octaédricas normales σ_0 , tangenciales τ_0 y resultantes ρ_0 que actúan sobre el plano de igual inclinación respecto a los tres ejes principales de las tensiones, se determinan por las fórmulas:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}$$



Estados de deformación

Hasta ahora hemos desarrollado la tensión sin considerar la deformación del sólido aceptando la hipótesis de rigidez (sólido ideal). Pero debemos admitir que todos los cuerpos, en mayor o menor grado, experimentan deformaciones hasta alcanzar un estado de equilibrio, considerando que se producen deformaciones en el entorno infinitésimo del punto.

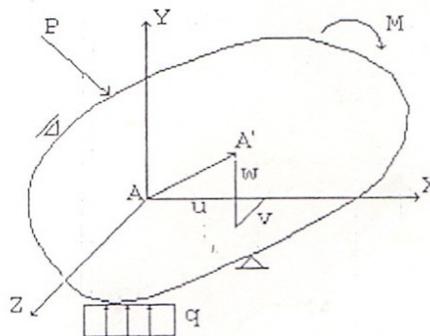
Para estudiar la deformación de un cuerpo partimos de las siguientes hipótesis:

- 1) Las cargas se aplican desde cero hasta su valor final en forma lenta, despreciando así la energía cinética que se produce.
- 2) Los desplazamientos son infinitesimales, despreciables respecto a las dimensiones del sólido.
- 3) Tanto la materia del cuerpo como sus desplazamientos son continuos, por lo tanto las funciones de desplazamiento son continuas y derivables (condición de la 5ª hipótesis de superposición de cargas).

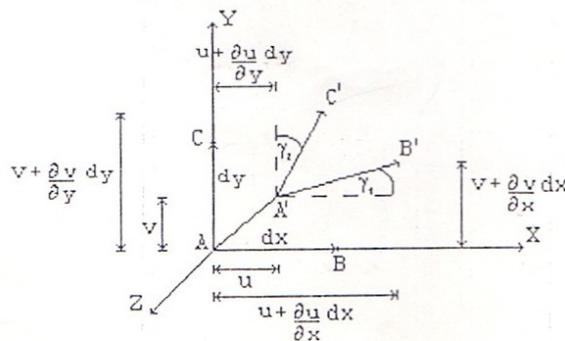
Consideremos que estamos en el período elástico,

- a) el sólido recupera su forma inicial al retirar la carga que actúa
- b) el cuerpo está fijo, no hay traslación
- c) las deformaciones producen un corrimiento de los puntos.

Llamaremos desplazamiento total de un punto A, a la distancia entre su posición original y final (antes y después de la deformación del sólido).



La componente del vector desplazamiento se dirige según los ejes x, y, z. Definiremos el vector desplazamiento $\vec{v}(u,v,w)$. Consideremos la proyección de una cara del cubo y sus lados AB y AC



La distancia AB es un infinitésimo y lo definimos como dx.

El desplazamiento del vector AB depende del eje, luego las componentes dependerán de dx. Si el punto A se desplaza en dirección del eje Y en una magnitud el punto B se desplaza en esa dirección una magnitud $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$

El incremento de longitud del segmento AB en la dirección del eje X es $\frac{\partial u}{\partial x} dx$

por lo tanto el alargamiento unitario en el punto A según el eje X será:

$$\epsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Alargamientos unitarios (o deformaciones lineales) (1)

El ángulo de giro del segmento AB en el plano XY es igual a la razón entre la diferencia de los desplazamientos de los punto A y B a lo largo del eje Y y la longitud del segmento dx

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Ángulos de giro (o deformaciones angulares)

La suma de los ángulos γ_1 y γ_2 es igual a la variación del ángulo original CAB (recto), y el producido por la deformación C'A'B' lo llamamos **ángulo de distorsión**.

$$\gamma_1 + \gamma_2 = CAB - C'A'B'$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_3 + \gamma_4 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_5 + \gamma_6 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Ángulos de distorsión (producen cambio de forma) (2)

Este sistema de ecuaciones (1) y (2) que relaciona los desplazamientos y las deformaciones en un punto se lo conoce como **estado de deformación en el punto**. Como se observa el estado de deformación en el punto se determina con seis componentes y al igual que el estado de tensión, forma un tensor: **Tensor de Deformaciones**.

El estado de tensión y el de deformación tienen iguales propiedades.

Existen tres ejes ortogonales en cuyo sistema no existen deformaciones angulares y se los llaman **ejes principales de deformación** y las deformaciones correspondientes, **deformaciones principales**. Estas se calculan resolviendo la ecuación cúbica:

$$\epsilon_k^3 - I_1 \cdot \epsilon_k^2 + I_2 \cdot \epsilon_k - I_3 = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son los invariantes del estado de deformación y se expresan:

$$I_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$I_2 = \epsilon_x \cdot \epsilon_y + \epsilon_x \cdot \epsilon_z + \epsilon_y \cdot \epsilon_z - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2$$

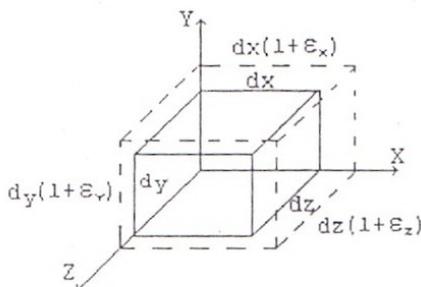
$$I_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

Comparando éstos invariantes con los de tensión se ve que el análogo de la tensión normal, es equivalente a la deformación lineal y el análogo de la tensión tangencial es la mitad del ángulo de distorsión. Utilizando ésta analogía se pueden construir los círculos de Mohr para las deformaciones.

El análisis del estado de deformación se basa en relaciones geométricas por lo que vale para cualquier sólido homogéneo, independientemente de las propiedades mecánicas del material.

Deformación volumétrica

Para conocer la deformación volumétrica definiremos las dimensiones lineales del cubo elemental como dx, dy, dz (antes de deformarse):



después de la deformación pasan a valer $dx.(1+\epsilon_x)$, $dy.(1+\epsilon_y)$, $dz.(1+\epsilon_z)$.

El aumento del volumen absoluto queda determinado por la diferencia:

$$\Delta V = V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}} = [dx.dy.dz (1+\epsilon_x) (1+\epsilon_y) (1+\epsilon_z)] - dx.dy.dz$$

resolviendo ésta ecuación y despreciando los productos de las deformaciones lineales, nos queda:

$$\Delta V = dx.dy.dz (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

Variación unitaria de volumen

Se la designa con e y es la suma de los alargamientos unitarios correspondientes a los tres ejes cartesianos:

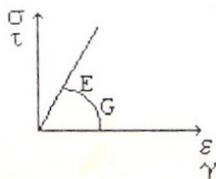
$$e = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

“Al girar los ejes del sistema, el valor de e no varía”; y como ya vimos en el invariante lineal (I_1) del estado de deformación, la e es igual para cualquier terna de ejes.

Entre los componentes del estado de tensión y de deformación existe una dependencia lineal (siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas), la ley que relaciona éstas tensiones y las deformaciones se llaman **Ley de Hooke Generalizada**.

Ley de Hooke Generalizada - Módulos de elasticidad - Coeficiente de Poisson

La forma de relación más simple se observa en el cuerpo isótropo; en éste caso los coeficientes de proporcionalidad entre los componentes de tensión y deformación no dependen de los ejes cartesianos en el punto.



Llamaremos

Módulo de Elasticidad Longitudinal:

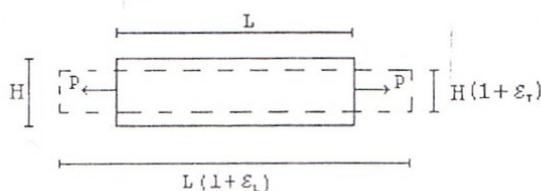
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Módulo de Elasticidad Transversal:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Coefficiente de Poisson:

$$\mu = \frac{\epsilon_T}{\epsilon_L}$$



Estos valores de E, G y μ se denominan: **constantes técnicas o mecánicas**.

En el período elástico el valor de éstas constantes depende del material pudiéndose considerar:

Acero: $E = 2,1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

$G = 8 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

$\mu = 0,3$

Hormigón: $E = 1,4 \times 10^5$ a $2,1 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

$G = 5,9 \times 10^4$ a $9,7 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2$

$\mu = 0,2$

Maderas:

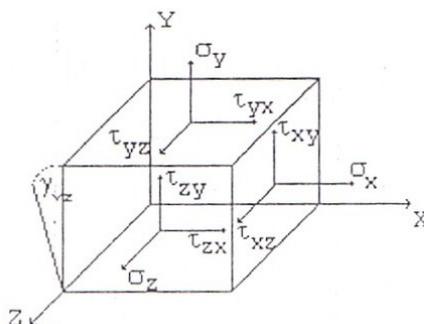
Roble $\mu_{//} = 0,084$ $\mu_{\perp} = 0,270$

Coníferas $\mu_{//} = 0,064$ $\mu_{\perp} = 0,330$

$G = 4,67 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2$

$E = 1,0 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

Para estudiar la ley generalizada de Hooke empleamos la 5ª Hipótesis de Superposición de Cargas. Veamos por separado las fuerzas que aparecen en las caras del cubo elemental:



En cualquiera de los planos de coordenadas, por ejemplo YZ, la deformación angular depende solamente de las tensiones tangenciales correspondientes: $\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$

Las otras tensiones tangenciales y las tensiones normales no influyen sobre ésta magnitud y se puede demostrar.

Podemos expresar de ésta manera las deformaciones angulares como:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad \text{Deformaciones angulares (1)}$$

De éstas expresiones se deduce que en el caso del cuerpo isótropo, los ejes principales del estado tensional coinciden con los del estado deformacional, puesto que las tensiones tangenciales desaparecen al mismo tiempo.

De igual forma las deformaciones lineales no tienen relación con las tensiones tangenciales.

El alargamiento unitario en la dirección del eje X debido a σ_x será σ_x/E ; debido a σ_y y σ_z serán $-\mu \cdot \sigma_y / E$ y $-\mu \cdot \sigma_z / E$ respectivamente, por lo que sumando dichos efectos obtenemos la deformación unitaria según el eje X:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

En forma análoga se obtiene la expresión para ϵ_y y ϵ_z

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)) \end{aligned} \quad \text{Alargamientos unitarios}$$

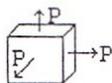
Sumando éstas expresiones se llega a que:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) conforman la **Expresión Analítica de la Ley Generalizada de Hooke**.

La expresión de deformación de volumen permite determinar el valor límite del coeficiente de Poisson para cualquier cuerpo isótropo.

Esta expresión es válida para cualquier estado tensional, en particular cuando todas las tensiones son de tracción:

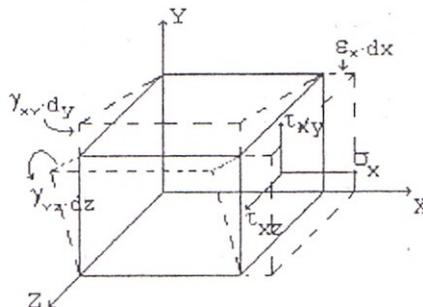


$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = p \\ e &= 3 \frac{(1-2\mu)}{E} \cdot p \end{aligned}$$

cuando p es positivo e también lo es, y cuando p es negativo e es negativo. Esto es posible para valores de $\mu \leq 1/2$, ya que así el término $(1-2\mu)$ es siempre positivo o cero. Por lo tanto el valor máximo es $\mu = 0,5$ y no puede tomar valores mayores, depende de las características del material y en el dominio de la deformación elástica no depende del estado tensional.

Energía potencial de deformación

La energía potencial de deformación es el caso general de un estado de tensión acumulada en un volumen elemental, se determina por la suma de los trabajos de las fuerzas distribuidas sobre la superficie de éste volumen



La fuerza normal $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$ realiza cierto trabajo en el desplazamiento $\epsilon_x \cdot dx$, éste trabajo es:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \epsilon_x \cdot dx$$

siendo ϵ_x el alargamiento unitario según el eje x originado por todas las fuerzas que actúan.

De igual forma los trabajos correspondientes al resto de las componentes normales será:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_y \cdot dx \cdot dz \cdot \epsilon_y \cdot dy$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_z \cdot dx \cdot dy \cdot \epsilon_z \cdot dz$$

La fuerza tangencial $\tau_{yz} \cdot dy \cdot dx$ realiza en el desplazamiento $\gamma_{yz} \cdot dz$ el trabajo siguiente:

$$W = \frac{1}{2} \tau_{yz} \cdot dy \cdot dx \cdot \gamma_{yz} \cdot dz$$

y las restantes fuerzas tangenciales:

$$W = \frac{1}{2} \tau_{zx} \cdot dz \cdot dx \cdot \gamma_{zx} \cdot dx$$

$$W = \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot dx \cdot dz \cdot \gamma_{xy} \cdot dy$$

Sumando todas las expresiones de trabajo:

$$du = \frac{1}{2} dx \cdot dy \cdot dz (\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx} + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy})$$

Si expresamos la energía interior a la unidad de volumen y tomamos la deformación en función de las tensiones respectivas nos queda:

$$u_0 = \left\{ \frac{\sigma_x}{E} \left[\frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \frac{\sigma_y}{E} \left[\frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z) \right] + \frac{\sigma_z}{E} \left[\frac{\sigma_z}{E} - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right] + \frac{\tau_{yz} \cdot (\tau_{yz})}{G} + \frac{\tau_{zx} \cdot (\tau_{zx})}{G} + \frac{\tau_{xy} \cdot (\tau_{xy})}{G} \right\}$$

simplificando la expresión:

$$u_0 = \frac{1}{2E} \{ [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \}$$

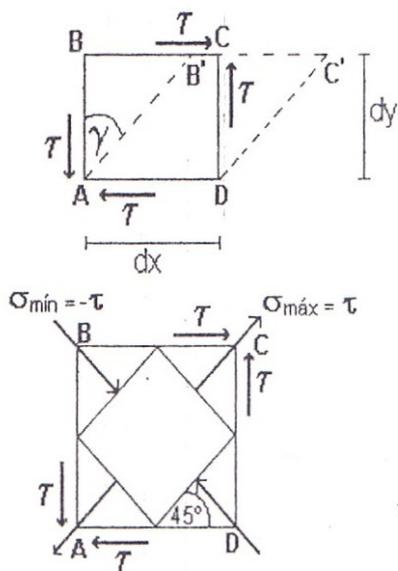
También podemos expresar la energía interior en base a las tensiones principales:

$$u_0 = \frac{1}{2E} \{ [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)] \}$$

Para conocer la energía potencial en todo el volumen del cuerpo deformado se debe integrar sobre el volumen del cuerpo:

$$U = \int_0^v u_0 \cdot dv$$

Relación entre las constantes mecánicas E, G y μ



Calculamos la energía potencial del deslizamiento. Para simplificar el problema, suponemos que la cara AD del elemento no se mueve. Entonces, al desplazarse la cara superior, la fuerza $\tau \cdot \delta \cdot dx$ (donde δ es el espesor del elemento) realizará cierto trabajo en el deslizamiento $\gamma \cdot dy$. Por lo tanto, la energía potencial de la deformación acumulada en el elemento será:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot \delta \cdot dx \cdot dy$$

y la energía potencial unitaria (específica),

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma$$

Al expresar γ a través de τ según la ley de Hooke, obtendremos:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G}$$

El coeficiente $\frac{1}{2}$ se introduce porque la fuerza es proporcional al desplazamiento.

La energía potencial puede ser expresada también por las tensiones principales normales. Para el caso del estado tensional plano, como lo es el deslizamiento puro, suponiendo $\sigma_2 = 0$, obtenemos:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + - 2\mu \sigma_1 \cdot \sigma_3)$$

Pero las tensiones principales en el deslizamiento son:

$$\sigma_1 = \tau \quad \text{y} \quad \sigma_3 = -\tau$$

por lo tanto:

$$u = \frac{\tau^2}{E} (1 + \mu)$$

Como el valor de la energía no debe depender de la orientación de las caras del elemento, igualando los segundos miembros de las expresiones (1) y (2) hallaremos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} = \frac{\tau^2}{E} (1 + \mu)$$

De aquí se obtiene la dependencia entre el módulo del deslizamiento G y el módulo de elasticidad de primer género E:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Ejemplos:

1) Para el Acero: $\mu = 0,3$ $\therefore G = \frac{2 \times 10^6}{2(1+0,3)} \cong 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

2) Para el Hormigón: $\mu = 0,2$ $\therefore G = \frac{3 \times 10^5}{2(1+0,2)} \cong 1,25 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

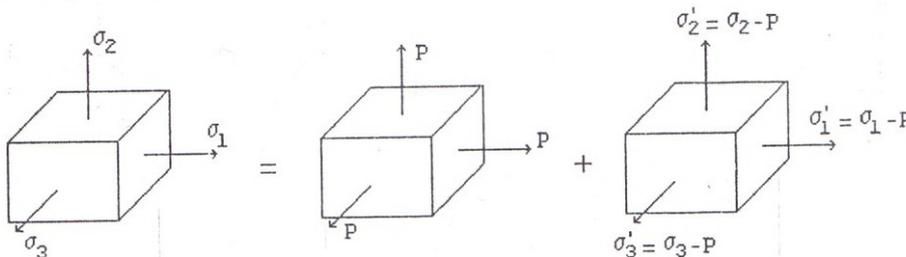
Energía potencial de volumen y forma

La energía potencial total u_0 se puede descomponer en dos energías, la primera la correspondiente a la variación de forma y la segunda a la variación de volumen.

Hay algunas hipótesis de rotura que requieren el estudio de como se rompe el cuerpo sometido a tensiones combinadas, que se haga una discriminación, o mejor aún, un desdoblamiento del trabajo interno en otros dos: un trabajo que se produce con una dilatación cúbica del cuerpo y otro que se produce sin dilatación cúbica llamado **trabajo de distorsión**.

Aclaremos éstos puntos:

sea un paralelepípedo en el espacio, sometido a la acción de tres tensiones cualesquiera que supondremos serán las principales para poder trabajar sin las tensiones de corte. Descomponemos el estado elástico en dos estados parciales, éstos estados deben ser tales que superpuestos nos den el estado final primitivo



Consideremos un primer estado en el cual actúan sobre las caras del paralelepípedo las tensiones $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ iguales en las tres caras.

Este estado es igual a una tensión uniforme hidrostática actuando sobre las caras.

En el segundo estado suponemos que actúan las tensiones $\sigma_1 - p, \sigma_2 - p, \sigma_3 - p$.

En el estado final proveniente de la superposición de éstos dos, actuarán las tensiones σ_1, σ_2 y σ_3 , es decir obtenemos el estado primitivo.

Dada la equivalencia del estado final y de la suma de los estados parciales, el trabajo interno específico total será la suma de los trabajos internos específicos de cada estado parcial, es decir:

$$u_0^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} = u^p + u^{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3}$$

Veamos cuanto vale la dilatación cúbica "e" correspondiente al segundo estado:

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_3'$$

reemplazando los valores de las tensiones :

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 - p + \sigma_2 - p + \sigma_3 - p)$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3p)$$

pero como $3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, volviendo a reemplazar:

$$e = 0$$

Luego el trabajo interno de deformación se descompone en dos trabajos:

- u^p se produce con dilatación cúbica
- $u^{\sigma-p}$ se produce sin dilatación cúbica, por lo que habrá únicamente variación de forma y éste trabajo recibe el nombre de **trabajo de distorsión**.

La dilatación cúbica será la producida solamente por el primer estado, u^p .

$$u_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)] \quad (1)$$

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1):

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Energía de variación de volumen

$$\therefore u_f = u_0 - u_v = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3)$$

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Energía de variación de forma (distorsión)

En una terna de ejes arbitrarios sería

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

Tenemos entonces:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{1-\mu^2} [\epsilon_1 + \mu(\epsilon_2 + \epsilon_3)] \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{1-\mu^2} [\epsilon_2 + \mu(\epsilon_1 + \epsilon_3)]$$

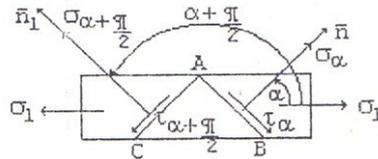
$$\sigma_3 = \frac{1}{1-\mu^2} [\epsilon_3 + \mu(\epsilon_1 + \epsilon_2)]$$

Tensiones en planos inclinados

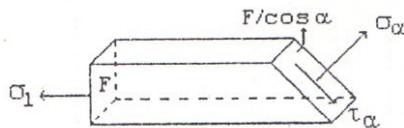
Caso de tracción y compresión en una dirección

Para conocer plenamente la resistencia del material, necesitamos conocer las tensiones que surgen en cualquier plano inclinado.

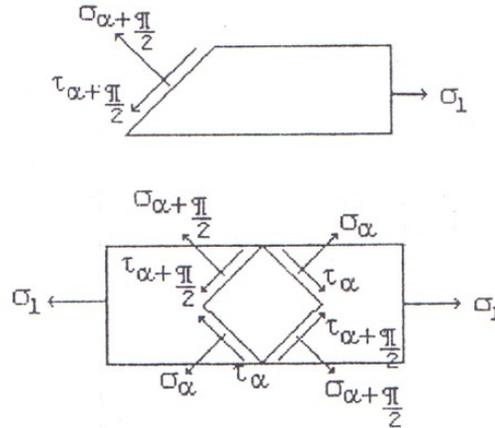
a)



b)



c)



Las tensiones normales a la sección transversal a la barra se consideran conocidas: $\sigma_1 = N/F$
 Calculemos las tensiones que aparecen en la sección inclinada AB, cuya normal forma un ángulo α con σ_1 . Consideramos positiva la dirección del ángulo medida en forma anti-horaria.

En el área $F_\alpha = F/\cos \alpha$ puede aparecer tanto σ como τ , sus valores los obtendremos de las ecuaciones de equilibrio de la figura, proyectando sobre σ_α :

$$\sigma_\alpha \cdot F_\alpha - \sigma_1 \cdot F \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha \cdot F / \cos \alpha = \sigma_1 \cdot F \cdot \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha}$$

Proyectando la fuerza sobre la dirección de τ_α :

$$\tau_\alpha \cdot F_\alpha - \sigma_1 \cdot F \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow \tau_\alpha \cdot F / \cos \alpha = \sigma_1 \cdot F \cdot \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\tau_\alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (1)$$

siendo $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (2)

reemplazando (2) en (1):

$$\boxed{\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 \sin 2\alpha}{2}}$$

De ésta fórmula podemos deducir que cuando:

- 1) $\alpha = 0^\circ \rightarrow \tau_\alpha = 0$ y $\sigma_\alpha = \sigma_1 \rightarrow \sigma_\alpha$ es máxima (tensión principal)
- 2) $\alpha = 90^\circ \rightarrow \tau_\alpha = 0$ y $\sigma_\alpha = 0 \rightarrow$ No se producen tensiones longitudinales
- 3) $\alpha = 45^\circ \rightarrow \tau_\alpha = \sigma_1 / 2$ y $\sigma_\alpha = \sigma_1 / 2 \rightarrow \tau_\alpha$ es máxima.

Estas dos funciones se pueden representar en un gráfico

Analicemos que pasa con las tensiones en el plano perpendicular al considerado, o sea cuando:

$$\alpha_i = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma_1 \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{2}) \text{ pero } \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma_1 \sin^2 \alpha}$$

$$\tau_{\alpha+\pi/2} = \frac{\sigma_1 \sin 2(\alpha + \frac{\pi}{2})}{2} \Rightarrow \boxed{\tau_{\alpha+\pi/2} = -\frac{\sigma_1 \sin 2\alpha}{2}}$$

$$\text{Analizando los valores de } \sigma \text{ vemos } \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma_1 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \Rightarrow \boxed{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma_1}$$

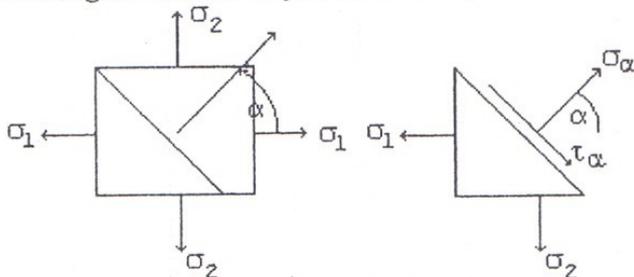
y la suma de las tensiones normales en dos planos ortogonales entre sí es constante e igual a la tensión principal.

Analizando los valores de τ vemos que en dos plano ortogonales entre sí actúan tensiones tangenciales de igual valor y de signo contrario (Teorema de Cauchy).

$$\boxed{\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+\pi/2}}$$

Calculo de las tensiones en planos inclinados - caso de tracción y compresión en dos direcciones

Veamos el estado de tensión plano cuando las dos tensiones principales son positivas (σ_1 y σ_2). Consideremos positivo el ángulo α entre σ_1 y la normal al plano en sentido anti-horario.



Las tensiones σ_α y τ_α en un plano inclinado cualquiera se puede obtener del equilibrio de la figura según σ_1 y σ_2 y por las fórmulas ya obtenidas

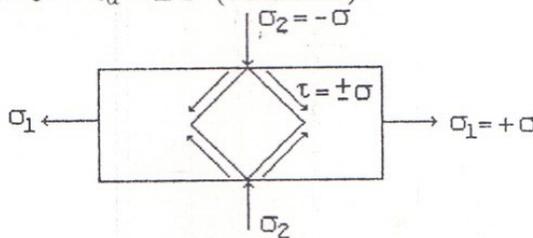
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 (\alpha + \frac{\pi}{2})}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha}{2}}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 \sin 2\alpha + \sigma_2 \sin 2(\alpha + \frac{\pi}{2})}{2} \Rightarrow \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 \sin 2\alpha - \sigma_2 \sin 2\alpha}{2}$$

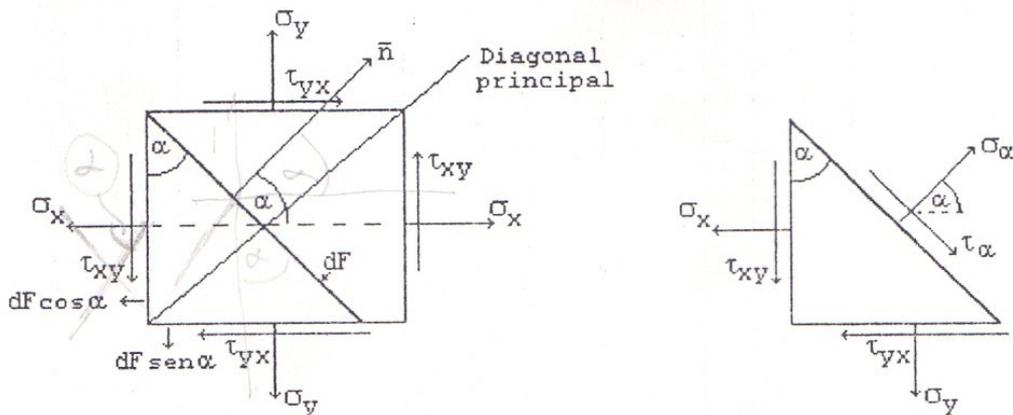
$$\Rightarrow \boxed{\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha}$$

De estas fórmulas podemos deducir que:

- si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma$ y $\tau_\alpha = 0$
- si $\sigma_1 = +\sigma$ ^ $\sigma_2 = -\sigma \Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$ ^ $\tau_\alpha = \sigma \sin 2\alpha$
- para $\alpha = 45^\circ$ se tiene $\sigma_\alpha = 0$ ^ $\tau_\alpha = \pm \sigma$ (τ máxima):



El problema opuesto será, dada las tensiones que actúan en las caras de un elemento (prismático) calcular las tensiones principales.



Proyectando sobre un eje paralelo a la tensión σ_α

$$\sigma_\alpha dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y dF \sin \alpha) \sin \alpha - (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \sin \alpha - (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

$$\boxed{\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha}$$

Ahora hacemos lo mismo sobre un eje paralelo a τ_α

$$\tau_\alpha dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dF \sin \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \cos \alpha - (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Para conocer el valor y la posición de los planos principales es necesario igualar a cero la derivada $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0$ o igualando a cero la tensión tangencial τ_α .

$d\tau_\alpha$

$$\tau_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \wedge \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \text{tg } 2\alpha \Rightarrow$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2}} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\sin 2\alpha = \text{tg } 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \cdot \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

y siendo $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ y $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

tenemos:

$$\sigma = \sigma_x (1 + \cos 2\alpha)/2 + \sigma_y (1 - \cos 2\alpha)/2 + \tau \sin 2\alpha \Rightarrow \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sigma_{nx} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \frac{(\sigma_x + \sigma_y)/2}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \cdot \frac{\tau_{xy}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

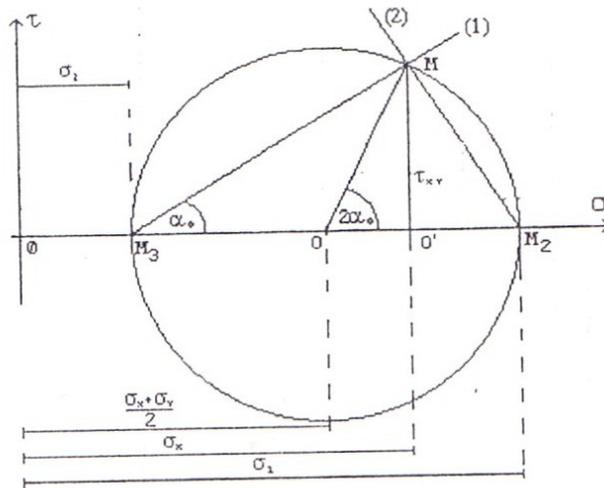
$$\Rightarrow \sigma_{nx} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Ecuación de Mohr

El círculo de Mohr nos da también el valor de ángulo α_0 (de posición del plano que hace máximo o mínimo el valor de σ), pues observando la figura :

$Tg(MOO') = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$ y el ángulo α_0 es directamente MM_3O



También el valor de τ será máximo o mínimo para cierto valor del ángulo de posición α . Gráficamente se ve que el valor máximo en valor absoluto de τ será el radio del círculo, de donde:

$$\tau_{\text{máx. - mín.}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

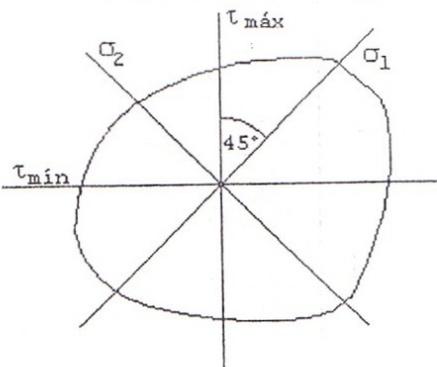
El ángulo α_1 de posición para el cual τ es máximo o mínimo se obtiene derivando la siguiente ecuación respecto de α e igualándola a cero:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau \cos 2\alpha$$

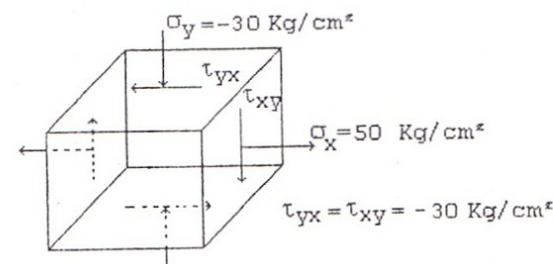
de donde obtenemos que:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \pi/2$$

lo que indica que éste ángulo difiere del ángulo para el cual σ es máxima en 45° .



Ejemplo:

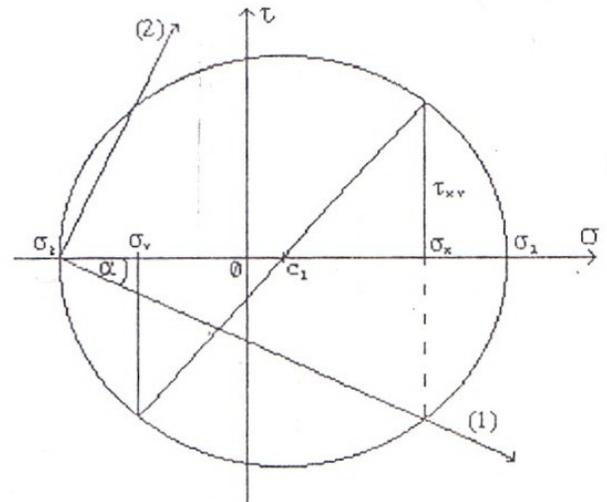


Referente a la dirección de las tensiones principales observamos que "la dirección de la tensión principal máxima algebraica σ_1 está en el ángulo principal de 45° que forman la diagonal de corte y la tensión normal algebraicamente mayor".

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= +\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} = +\frac{2(-30)}{50 - (-30)} = -0,75 \\ 2\alpha &= -38^\circ \Rightarrow \alpha = -19^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_{1,2} &= \frac{50 + 30}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(50 - 30)^2 + 4 \cdot 30^2} = \\ &= 10 \pm 63,24 \\ \sigma_1 &= 73,24 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_2 &= -53,24 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{máx. - mín.}} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{\text{máx. - mín.}} &= \pm \frac{73,24 - (-53,24)}{2} = \pm 63,24 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$



Coefficientes de seguridad

Tanto las cargas reales que actúan sobre la pieza, como las propiedades de los materiales de ésta, pueden diferenciarse considerablemente, en un sentido desfavorable, de las que se consideran en el cálculo.

Los factores que disminuyen la resistencia de la pieza (sobrecargas, heterogeneidad de los materiales, etc.) son magnitudes de carácter accidental, que no pueden ser previstas. Puesto que, sin embargo, las piezas y las estructuras tienen que trabajar en éstas condiciones desfavorables, es necesario tomar ciertas precauciones.

Con éste propósito, las tensiones que garantizan un trabajo sin fallos (explotación) de la máquina o de cualquier otra estructura deberá ser inferior a las tensiones límites que puedan conducir al fallo o al surgimiento de deformaciones plásticas.

Así, pues, se admite: $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lím}}}{\gamma}$

siendo:

$[\sigma]$, la tensión admisible

γ , el **coeficiente normativo** (impuesto por las normas de diseño de las construcciones) **de seguridad, o reserva de resistencia**

$\sigma_{\text{lím}}$, la tensión límite del material.

Se entiende por tensión límites con cargas estáticas, el límite de resistencia, en el caso de materiales frágiles, y el límite de fluencia, en el caso de materiales plásticos, puesto que cuando las tensiones son iguales al límite de fluencia, se desarrollan deformaciones plásticas considerables que son inadmisibles.

Así, pues, el coeficiente de seguridad se introduce para conseguir un funcionamiento fiable y seguro de la estructura y de sus partes, a pesar de las posibles desviaciones desfavorables de las condiciones reales de trabajo, en comparación con las que se consideran en el cálculo.

El valor normativo del coeficiente de seguridad γ , es decir, el valor que establecen las normas de diseño de construcciones, se elige teniendo en cuenta la experiencia adquirida en el mantenimiento de las estructuras y máquinas.

Ultimamente, el coeficiente unitario de seguridad γ se descompone en una serie de **coeficientes de seguridad parciales**. Cada uno de éstos coeficientes considera la influencia de un determinado factor o grupo de factores sobre la resistencia del elemento de la construcción. Por ejemplo, uno de los coeficientes refleja las desviaciones posibles de las características mecánicas del material en comparación con las que admiten en el cálculo; otro el desacuerdo entre el valor de las cargas reales y el que se toma para el cálculo, etc.

Esta división del coeficiente general de seguridad permite considerar mejor la diversidad de condiciones concretas de trabajo de las piezas de las máquinas y construcciones y diseñarlas con mayor solidez y de una manera más económica.

El coeficiente de seguridad se representa en forma de producto,

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \dots$$

No hay todavía unanimidad en lo que refiere al número de coeficientes parciales y sus valores.

Actualmente en la construcción de máquinas se emplean uno, tres, cinco y hasta diez coeficientes de seguridad parciales.

En el manual del constructor de máquinas se recomienda emplear tres coeficientes parciales de seguridad, es decir,

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \dots$$

donde

γ_1 es el coeficiente que considera el error posible al determinar las cargas y las tensiones. Cuando las tensiones se calculan con gran precisión, éste coeficiente se puede señalar igual a 1,2 - 1,5. En el caso de menor exactitud se hace igual a 2 - 3;

γ_2 es el coeficiente que considera la heterogeneidad del material, su sensibilidad a los posibles defectos en el maquinado de la pieza. El valor de γ_2 , cuando los cálculos se hacen partiendo del límite de fluencia y las cargas son estáticas, está dado en la tabla siguiente, en función de la relación entre el límite de fluencia y el de resistencia (éstos valores no reflejan la influencia de las dimensiones absolutas de la pieza).

σ_f/σ_r	0,45 - 0,55	0,55 - 0,77	0,77 - 0,9
γ_2	1,2 - 1,5	1,4 - 1,8	1,7 - 2,2

Si en los cálculos se refieren al límite de resistencia, cuando se trata de materiales frágiles y de materiales poco plásticos, γ_2 se considera igual a:

- a) $\gamma_2 = 2 - 3$ para materiales poco plásticos (aceros de alta resistencia ligeramente revenidos a bajas temperaturas);
- b) $\gamma_2 = 3 - 4$ para materiales frágiles;
- c) $\gamma_2 = 4 - 6$ para materiales muy frágiles.

En los cálculos por fatiga, el coeficiente γ_2 se considera igual a 1,5 - 2. Este coeficiente se aumenta, para materiales de poca homogeneidad (sobre todo en el caso de fundición) y en el de piezas de gran tamaño, hasta tres y más;

γ_3 es el coeficiente de las condiciones de trabajo que tiene en cuenta el grado de responsabilidad de la pieza. Su valor se admite entre 1 y 1,5.

En la tabla siguiente figuran los valores aproximados (U.R.S.S.) de las tensiones admisibles de algunos materiales, para el caso de cargas estáticas.

Material	Tracción [σ_t]	Compresión [σ_c]
Hierro fundido gris en lingotes 12-28	200 - 300	700 - 1100
Hierro fundido gris en lingotes 15-32	250 - 400	900 - 1500
Hierro fundido gris en lingotes 21-40	350 - 550	1600 - 2000
Acero de construcción al carbono, para construcción de máquinas	600 - 2500	600 - 2500
Acero aleado de construcción de máquinas	1000 - 4000	1000 - 4000
Duraluminio	800 - 1500	800 - 1500
Latón	700 - 1400	700 - 1400
Pino (en el sentido de las fibras)	70 - 100	70 - 100
Roble (en el sentido de las fibras)	90 - 130	90 - 130
Mampostería	Hasta 2	6 - 25
Hormigón	1 - 7	10 - 90

El reglamento CIRSOC recomienda

Clase de Construcción	Destino	Carga	
		P	P-S
I	A	1,6	1,4
	B	1,5	1,3
	C	1,4	1,25
II	B	1,6	1,4
	C	1,5	1,3

(1) (2) (3)

El coeficiente se basa en tres tipos de factores:

- (1) las acciones que se consideran sobre la estructura y los métodos de superposición de las mismas
- (2) el destino de la construcción y la función de la estructura resistente
- (3) los recaudos constructivos y la adaptación a los modelos de cálculo.

Las acciones pueden ser de tipo permanente, acciones debido a la ocupación y al uso, carga o acciones de viento, nieve, hielo y sísmicas, acciones térmicas, etc.

Dentro de éstas están las cargas principales (permanentes, ocupación y uso, y otras que pueden ser principales de acuerdo a la zona geográfica), y las secundarias, que son de acción casual o poco reiteradas.

El estado de carga definido como P es la superposición de acciones principales. El estado P-S es la superposición de acciones principales y secundarias.

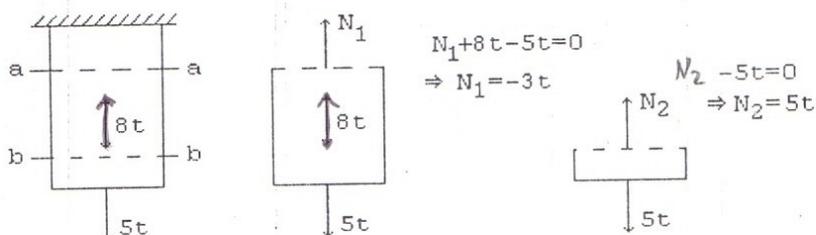
En cuanto al tipo de edificio hay tres tipos:

- A) edificios y estructuras cuyo colapso afecte la seguridad o salud pública, o a los medios de comunicación y transporte troncales
- B) edificios públicos o privados, edificios industriales con equipamiento económicamente importante o con gran cantidad de personal. Centros secundarios de salud, transporte, etc.
- C) edificios industriales de baja ocupación y equipamiento económico. Torres y carteles en zonas despobladas. Depósitos secundarios de materiales, galpones rurales, instalaciones de tipo precario.

UNIDAD II - Tracción y Compresión

Cálculo de las fuerzas interiores

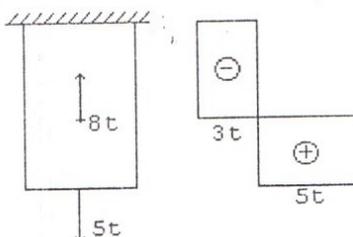
Veamos el caso de tracción o compresión axial en el que las fuerzas interiores actuarán a lo largo del eje de la barra. Para obtener las fuerzas interiores recurrimos al método de las secciones:



Trazamos una sección como la a-a y analizamos el equilibrio de la parte separada (inferior). Sustituimos la acción de la parte superior sobre la inferior por una fuerza axial que consideramos positiva.

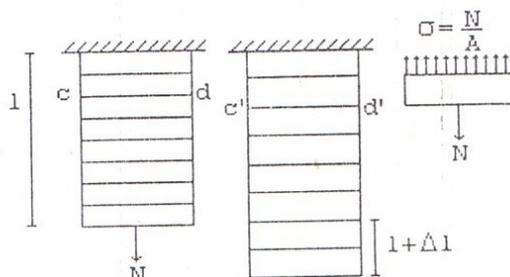
El signo negativo indica que la dirección de la acción es opuesta a la considerada, por lo que N_1 es de compresión y no de tracción como lo habíamos supuesto. En el corte b-b la dirección considerada es la correcta por lo que N_2 es de tracción.

La ley de variación de las fuerzas axiales se grafica a lo largo de la barra; el eje de las abscisas se orienta paralelamente al de la barra y el de ordenadas en dirección perpendicular. Los valores de las fuerzas axiales en las secciones transversales de la barra se trazan (con su signo) a escala.



Cálculo de las tensiones

Al someter la barra a un esfuerzo de tracción se observa que, después de la deformación, las secciones se mantienen ortogonales respecto al eje, salvo una pequeña zona donde actúa la fuerza, en ella la distancia entre las secciones varía.



La recta c-d por ejemplo se desplaza hacia abajo, permaneciendo recta y horizontal.

Generalizando éste fenómeno podemos definir:

- las secciones transversales de la barra, que eran planas y perpendiculares a su eje antes de la deformación, permanecen planas y normales al mismo después de ocurrir aquella.

En cuanto a la clase de construcción, tendremos que una construcción de acero será considerada del **Tipo I** si se verifican las siguientes condiciones:

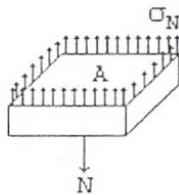
- las uniones y los apoyos verifique las condiciones de giro y desplazamiento que los modelos de vínculos adoptados imponen.
- se especificarán tolerancias dimensionales y de forma geométrica en los elementos constructivos (prever posibles errores de construcción)
- la construcción será realizada por personal altamente calificado y mediante el empleo de herramientas acorde a las etapas constructivas.

Salvo condiciones de imposibilidad se deberá realizar el montaje previo en taller.

Las construcciones que cumpliendo con las disposiciones de seguridad de los reglamentos, no cumplen o lo hacen parcialmente las condiciones indicadas para el tipo I en cuanto a cálculos o construcción, se consideran de **Tipo II**.

El coeficiente de seguridad γ se aplicará a la tensión en el límite de fluencia en el cálculo elástico, y a la carga límite o de rotura en el cálculo plástico.

Esta hipótesis es conocida como “**hipótesis de las secciones planas o de Bernoulli**”; y nos permite suponer que en las secciones sólo actúan tensiones normales, distribuidas uniformemente



Para lograr el equilibrio de este elemento :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \sigma_n A - N = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_n = \frac{N}{A}$$

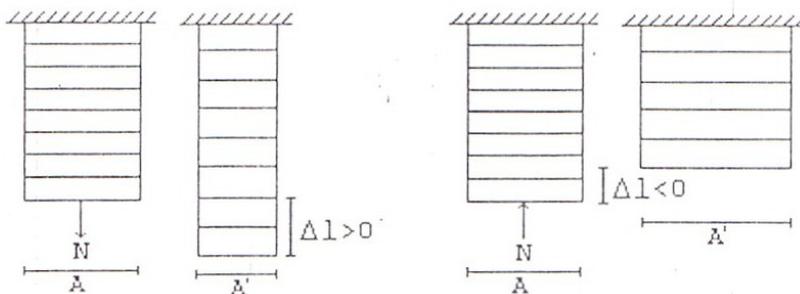
Cuando en la parte superior actúan varias fuerzas, en el numerador figura la suma algebraica de, que es igual a la fuerza axial N

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{\Sigma P_i}{A}$$

Estas fórmulas también son válidas para el caso de compresión.

Cálculo de deformaciones y desplazamientos

Cuando traccionamos una barra, su longitud aumenta, mientras que sus dimensiones transversales disminuyen; cuando comprimimos la situación es inversa.



La deformación unitaria y lineal la obtenemos por la ley de Hooke

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta l}{l}$$

Las deformaciones unitarias y lineales son proporcionales a las tensiones normales. E caracteriza la rigidez del material, es decir su capacidad de oponerse a las deformaciones, siendo ϵ adimensional las unidades de E serán [Kg/cm²].

Teniendo en cuenta que:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ y } \sigma = \frac{N}{A}$$

se obtiene el alargamiento absoluto según:

$$\Delta l = \epsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{N l}{A E}$$

Experimentalmente se comprueba que existe una correlación entre la deformación longitudinal ϵ y la transversal ϵ' :

$$\epsilon' = -\mu \epsilon$$

μ : coeficiente de deformación transversal o coeficiente de Poisson. El valor de éste coeficiente oscila entre $0 \leq \mu \leq 0,5$.

El valor de la deformación unitaria transversal la obtenemos de la fórmula:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

Cuando la barra es de sección variable, con un ángulo de conicidad $\alpha \leq 12^\circ$, se puede admitir que la tensión en la sección transversal se distribuye uniformemente, pudiéndose emplear las fórmulas $\sigma = N/A$ y $\Delta l = N.l / E.A$.

Para conocer las deformaciones en una barra de una sección variable ($\alpha > 12^\circ$) en la cual actúa una fuerza axial N, primero debemos calcular el alargamiento de un elemento dy que denominaremos Δdy ; de la ley de Hooke tenemos que

$$\Delta dy = d(\Delta l) = \frac{N \cdot dy}{E \cdot A}$$

integrando ésta ecuación entre $z = 0$ y $z = l$ obtenemos el alargamiento absoluto de la barra:

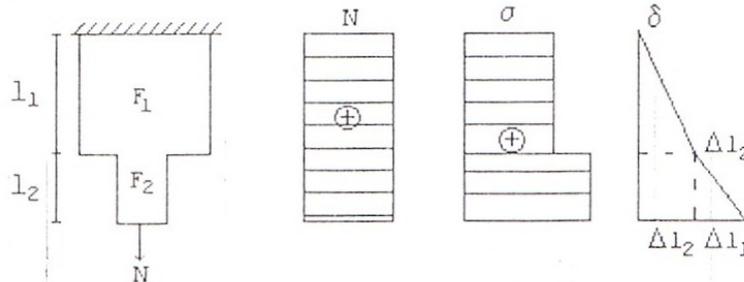
$$\Delta l = \int_{z=0}^{z=l} \Delta(dl) = \int_0^l \frac{N dz}{E \cdot A}$$

Siendo N y E constantes, nos queda conocer como varía A en función de z.

Cuando la integral varía en forma escalonada, la integral se reemplaza por la sumatoria de la deformaciones de cada sección constante (dentro de los límites donde de N, F y E son constantes)

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

Ejemplo: sea una barra de dos secciones

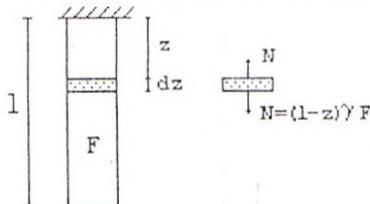


$$\Delta l = \sum \Delta l = \frac{N \cdot l_1}{E F_1} + \frac{N \cdot l_2}{E F_2} = \frac{P}{E} \left[\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right]$$

Influencia del peso propio

El peso propio de una barra de sección constante equivale a una carga uniformemente distribuida a lo largo de la barra. Designamos con γ al peso específico de la barra.

Analizaremos la deformación, los esfuerzos normales y las tensiones.



El esfuerzo normal en la sección z es igual al peso de la barra debajo de la sección [$N = \gamma F(1-z)$], por lo tanto la fuerza normal es proporcional a z.

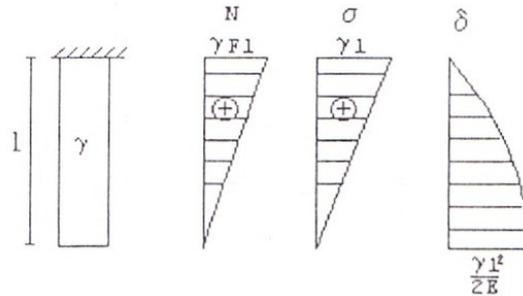
La tensión normal en la sección indicada es:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{\gamma F (1-z)}{F} = \gamma (1-z)$$

El alargamiento absoluto de la barra, y en este caso también la función desplazamiento, se halla integrando entre 0 y l:

$$\Delta l_{(z)} = \delta_{(z)} = \int_0^z \frac{N dz}{EF} = \gamma / E \int_0^z (l - z) dz$$

$$\Delta l_{(z)} = \delta_{(z)} = \frac{\gamma}{E} [l^2 - l^2/2] = \frac{\gamma l^2}{2E}$$



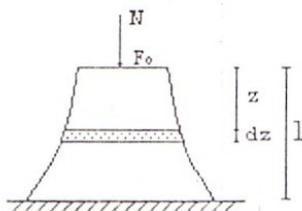
$$\Delta l = \frac{\gamma l F l}{2EF} \quad (\gamma l F = P)$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EF}$$

Se puede observar que el alargamiento originado por el peso propio de la barra es la mitad del alargamiento debido a una fuerza de igual magnitud que el peso propio de la barra aplicada en el extremo de la misma.

Sólido de igual resistencia

Consideremos ahora una barra de sección variable $F=F_{(z)}$, de forma que las tensiones en todas las secciones sean iguales ($\sigma = \frac{P}{F_0} = \text{cte.}$)



En la sección ubicada a la distancia z del borde el esfuerzo normal de compresión N es:

$$N_{(z)} = P + \gamma \int_0^z F_{(z)} dz$$

La tensión según la condición del problema debe ser:

$$\sigma = N_{(z)} / F_{(z)} = [P + \gamma \int_0^z F_{(z)} dz] / F_{(z)} = P/F_0 = \text{cte}$$

$$\Rightarrow P + \gamma \int_0^z F_{(z)} dz = P F_{(z)} / F_0$$

derivando ambos miembros respecto de z:

$$\gamma F_{(z)} = \frac{P}{F_0} \frac{dF_{(z)}}{dz} \Rightarrow dz = \frac{P}{\gamma F_0} \frac{dF_{(z)}}{F_{(z)}}$$

integrando nuevamente:

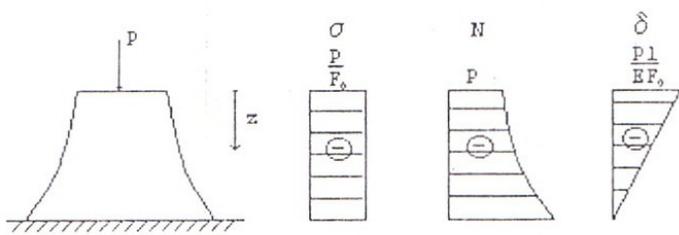
$$z = \frac{P}{\gamma F_0} (\ln F_{(z)} - \ln C)$$

resolviendo el antilogaritmo:

$$F_{(z)} = C e^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}$$

Para conocer la constante C sabemos que cuando $z = 0$ es $F=F_0$ y por lo tanto $C = F_0$ por la ley de variación de $F_{(z)}$ queda:

$$F_{(z)} = F_0 e^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}$$



$$N = \sigma F_{(z)} = \frac{P}{F_0} F_{(z)}$$

$$N_{(z)} = P e^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}$$

$$\delta_{(z)} = \frac{Nl}{EF}$$

$$\delta_{(z)} = - \int_0^z \frac{N_z dl}{EF_z}$$

$$\delta_{(z)} = - \frac{P}{EF_0} z + C \quad \text{para } z=l \quad \delta_{(z)}=0 \Rightarrow C = - \frac{Pl}{EF_0}$$

$$\delta_{(z)} = - \frac{P}{EF_0} (z-l)$$

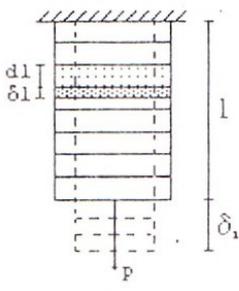
Esta barra se la conoce como sólido de igual resistencia, en ella el material se aprovecha en la forma más efectiva.

Principio de conservación de la energía

Las fuerzas interiores de tracción o compresión producen cierto trabajo debido al desplazamiento de los puntos de aplicación.

Calcularemos el trabajo de una fuerza exterior aplicada estáticamente (se aplica desde cero hasta su valor final muy lentamente).

El trabajo elemental dA de la fuerza exterior P en el desplazamiento $d\delta$ es $dA = P \cdot d\delta$ con $0 \leq \delta \leq \delta_1$



Pero entre P y δ existe una relación (Ley de Hooke)
 $\delta = \frac{Pl}{EF} \Rightarrow P = \frac{EF\delta}{l}$

Introduciendo éste valor en la ecuación de dA :
 $dA = \frac{EF}{l} \delta d\delta$

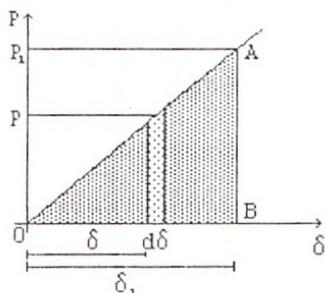
El trabajo total realizado por la fuerza se obtiene integrando ésta expresión entre 0 y el valor final del desplazamiento.

$$A = EF/l \cdot \int_0^{\delta_1} \delta d\delta = EF\delta_1^2 / 2l$$

$$\delta_1 = \frac{Pl}{EF} \Rightarrow A = \frac{EF}{2l} \frac{Pl}{EF} \delta$$

$$A = \frac{P\delta_1}{2}$$

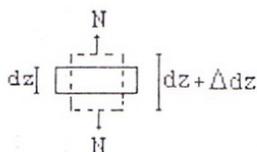
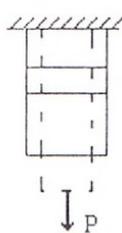
“El trabajo de una fuerza exterior, aplicada estáticamente, es igual a la mitad del producto de su magnitud definitiva por la magnitud definitiva del desplazamiento correspondiente”.



Gráficamente el trabajo de la fuerza P se representa por el área del triángulo OAB.

Durante las deformaciones, no sólo realizan trabajo las fuerzas exteriores sino que también lo hacen las fuerzas interiores.

El trabajo de las fuerzas interiores, en el caso de tracción y compresión, se puede calcular teniendo en cuenta que éstas fuerzas están dirigidas en sentido contrario al desplazamiento. Por lo que el trabajo de las fuerzas interiores, durante la carga, es siempre negativo.



El trabajo elemental de las fuerzas internas se calcula por una fórmula similar a la de dA:

$$dU = -\frac{1}{2} N \Delta(dz)$$

pero según la ley de Hooke:

$$\Delta(dz) = \frac{N dz}{E F}$$

$$\Rightarrow dU = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{E F} dz$$

El trabajo total de las fuerzas interiores se obtiene integrando a lo largo de la barra:

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{E F} dz$$

Para el caso de N, E y F constantes:

$$U = -\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{E F} = -\frac{E F \Delta l^2}{2 l}$$

La magnitud, igual al trabajo de las fuerzas interiores pero de signo opuesto, se llama “Energía Potencial de Deformación”. Esta es la energía que acumula el cuerpo al deformarse:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{E F} = \frac{E F \Delta l^2}{2 l}$$

La energía potencial referida a la unidad de volumen se llama **Energía Potencial Unitaria**:

$$u = \frac{E_{pot}}{v} = \frac{E_{pot}}{F l} = \frac{N^2 l}{2 E F F l} = \frac{\sigma^2}{2 E}$$

$$u = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma E$$

En el caso de un estado tensional de volumen, la energía potencial unitaria se obtiene de:

$$u = \frac{1}{2 E} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

aplicando Ley de Hooke

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]$$

De esta fórmula se deduce, como caso particular cuando una de las tensiones principales es nula, la fórmula coincide con la correspondiente al estado tensional plano.

Propósitos y tipos de ensayos

Para el estudio de las propiedades de los materiales y para obtener las tensiones admisibles, se ensayan probetas de éstos materiales hasta ser destruidos.

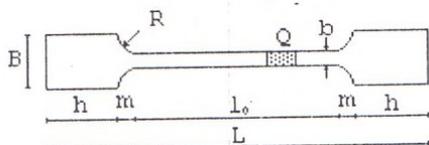
Estos ensayos se realizan con diversos tipos de cargas como ser estáticas, de impacto y cúbicas. Según el tipo de deformación de la probeta, se distinguen los ensayos a tracción, compresión, torsión y flexión. Menos frecuentes son los ensayos compuestos (tracción-torsión).

Los ensayos se realizan en condiciones atmosféricas naturales de presión y temperatura, en máquinas preparadas para ese tipo de ensayos.

Las deformaciones se miden con dispositivos especiales (extensómetros).

Diagramas de tracción y compresión

Estos son los ensayos más difundidos y más fáciles de realizar. Permiten conocer con suficiente exactitud el comportamiento del material; las probetas son cilíndricas de 10 mm de diámetro, tienen una longitud efectiva $l_0 = 10$ cm (probeta larga) o $l_0 = 5$ cm (probeta corta).

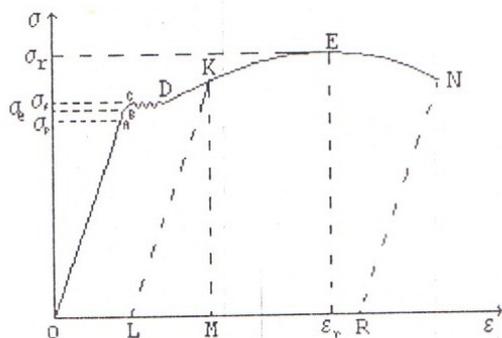


El ensayo a tracción permite conocer las características mecánicas del material. Durante el ensayo se estudia un diagrama que relaciona automáticamente la carga P de tracción con el alargamiento Δl .

El valor de la tensión normal $\sigma = P/F_0$ surge en la sección transversal de área inicial F_0 . Los alargamientos unitarios serán $\epsilon = \Delta l / l$.

El diagrama es conocido como “**diagrama convencional de tracción**”. La probeta a ensayar debe cumplir con la norma IRAM 102 de tracción.

En la figura representaremos el diagrama de tracción $\epsilon - \sigma$ de una probeta de acero de bajo contenido de carbono.



Acero Tipo	σ_e (Kg/cm ²)	σ_r (Kg/cm ²)	ϵ_r %
F-20	2000	3300	28
F-22	2200	3700	28
F-24	2400	4200	25
F-26	2600	4700	24
F-30	3000	5000	22
F-36	3600	5200	22

ST-37

ST-52

En el tramo OA las deformaciones crecen proporcionalmente a la tensión, cuando éstas son inferiores a σ_p , conocido como “**límite de proporcionalidad**”. Hasta dicho límite es válida la ley de Hooke ($\sigma_p \cong 2000$ Kg/cm²); de aumentar la carga, el diagrama comienza a curvarse, si las tensiones no superan el llamado “**límite de elasticidad**”, el material conserva sus propiedades elásticas ($\sigma_e \cong 2100$ Kg/cm²). En la práctica no se diferencian éstos valores (σ_e y σ_p).

Al seguir aumentando la carga, la deformación comienza a aumentar en una relación lineal (punto C). El tramo CD (horizontal del diagrama) se denomina “escalón de fluencia”.

La tensión que se desarrolla a partir del punto C se llama “límite de fluencia” ($\sigma_f \cong 2400 \text{ Kg/cm}^2$). En muchos materiales éste escalón no queda bien definido, es por ello que se introduce el “límite convencional de fluencia” y corresponde a la tensión que produce un 0,2 % de “deformación residual”.

Después de pasar el límite de fluencia, la probeta recibe alargamiento bajo una carga constante, el material adquiere nuevamente capacidad de oponerse al alargamiento.

Una vez pasado el punto D, el diagrama asciende con menos intensidad que antes. En el punto E la tensión toma su valor máximo, es la máxima tensión convencional y se la llama “límite de resistencia o rotura” ($\sigma_r \cong 4000-5000 \text{ Kg/cm}^2$). En éste punto la sección sufre un estrangulamiento e inmediatamente se rompe.

En éste ensayo también se determina el “alargamiento residual unitario” correspondiente al límite de rotura; característica importante que nos indica la plasticidad del material:

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100 \text{ [%]} \quad \text{Para acero común } \delta > 24 \text{ \%}$$

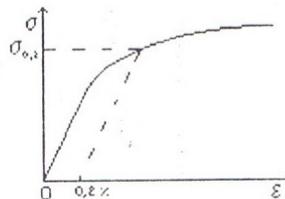
$$\text{Acero de alta resistencia } \delta > 7 - 10 \text{ \%}$$

Otra característica que surge del ensayo de tracción es la reducción residual de la sección, en el momento de la rotura:

$$\Psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100 \text{ [%]}$$

La magnitud Ψ caracteriza la plasticidad con mayor precisión que δ , pues depende menos que ésta de la forma de la probeta. Para acero común $\Psi = 50-60 \text{ \%}$.

La representación típica de los diagramas sin escalón de fluencia es la siguiente:



Para el estudio de la deformación plástica se necesita el diagrama real de tracción que relaciona la ‘deformación con la tensión efectiva’, éste diagrama se obtiene dividiendo la fuerza por la sección reducida de la probeta. Este área efectiva es menor que el área inicial, luego el diagrama de tensión efectiva se ubica por encima del diagrama de tensión convencional. Este diagrama de tracción se construye con métodos aproximados.

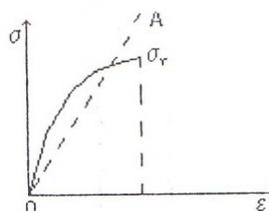
Fragilidad

Es lo opuesto de plasticidad y es la propiedad del material de destruirse al recibir deformaciones residuales insignificantes.

El desplazamiento residual de éstos materiales no supera el 2-5 % en la rotura. Son materiales plásticos el cobre, aluminio, acero común, platino. El durálmunio y el bronce son menos plásticos; el hierro fundido, acero instrumental, piedra, hormigón, vidrio son materiales frágiles.

Sin embargo es necesario hablar de **estados plásticos y frágiles**.

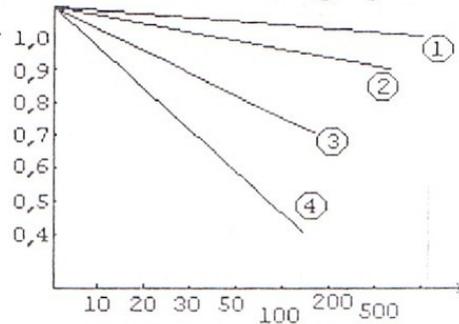
En el caso del hierro fundido, el diagrama de tracción se desvía rápidamente de la Ley de Hooke:



El límite de resistencia del hierro fundido y otros materiales frágiles depende de las dimensiones de la probeta y $\epsilon_r = \frac{\sigma_{r,d}}{\sigma_{r,10}}$ (probeta de diámetro d)

$\sigma_{r,10}$ (probeta de diámetro 10)

es un coeficiente de carga que nos permite apreciar éste,

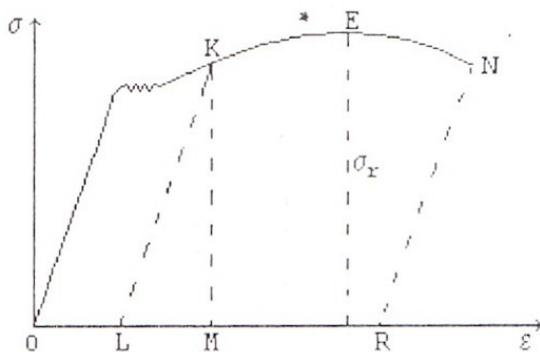


- (1) Acero alto carbono
- (2) Acero de liga
- (3) Hierro fundido modificado
- (4) Hierro fundido gris

Aumento del límite convencional de fluencia por cargas repetidas

Cuando la carga no supera el límite elástico y se descarga el cuerpo, las deformaciones desaparecen completamente; al aplicar nuevamente la carga la probeta se comporta igual que cuando se carga por primera vez.

Si se supera el límite elástico y se llega al punto K, la descarga se produce según una recta KL:



La componente elástica de deformación desaparece, quedando la componente plástica.

Si cargamos nuevamente el material, el diagrama coincide con LK hasta el punto K.

El alargamiento residual o permanente corresponde al momento de la rotura, es igual al segmento LR, será que el que se observa cuando el material se ensaya por primera vez.

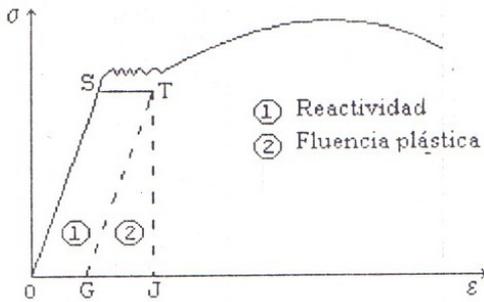
La carga de la probeta después de ser estirada inicialmente hasta la tensión de fluencia, aumenta el límite de proporcionalidad.

Si entre la descarga y la nueva solicitud transcurre cierto tiempo, el límite de proporcionalidad aumenta aún más.

El fenómeno de aumentar el límite de proporcionalidad y disminuir la plasticidad del material por cargas repetidas se llama "endurecimiento".

Influencia del tiempo sobre la deformación - Reactividad - Fluencia plástica. Relajación

En los ensayos se demuestra que las deformaciones originadas por las cargas no aparecen instantáneamente. Si paramos el proceso de carga al alcanzar el punto S y mantenemos la



probeta cargada durante un tiempo, la deformación sigue creciendo un segmento ST.

Durante la descarga la parte de deformación correspondiente al segmento GJ desaparece rápidamente, pero la otra parte del segmento OG necesita un tiempo para desaparecer. Este fenómeno consiste en la deformación elástica en función del tiempo se llama **Reactividad**, y la variación de la deformación en función del tiempo se llama **Fluencia**

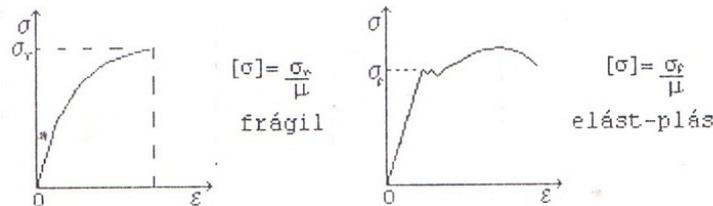
Plástica.

Esta deformación elástica del sólido después de un tiempo se convierte en plástica y como resultado varían las tensiones, sin alterar la magnitud total de la deformación; a éste fenómeno se lo denomina **Relajación**.

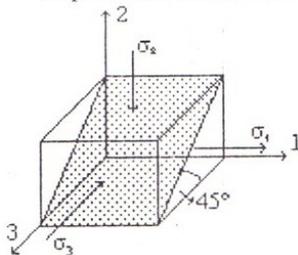
Hipótesis de Resistencia o de Rotura de Materiales

Las tensiones máximas no tienen que superar las admisibles en cada caso: normal ($\sigma_3 \leq [\sigma_c]$ ^ $\sigma_1 \leq [\sigma_t]$) o tangencial ($\tau_{máx} \leq [\tau]$).

La tensión admisible la establecemos por el límite de fluencia o de resistencia a rotura (para materiales frágiles) según valores determinados experimentalmente.



Representando el caso general de un estado tensional real tridimensional:



admitiendo que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, nos preguntamos cuanto vale $\sigma_{1 \text{ lim}}$, $\sigma_{2 \text{ lim}}$ y $\sigma_{3 \text{ lim}}$. La respuesta nos da los valores admisibles de σ_1, σ_2 y σ_3 .

El problema lo podemos resolver ensayando probetas en las condiciones planteadas y comprobando la rotura del material, o el comienzo de la fluencia. Este método no es apropiado porque se deberá ensayar cada estado tensional.

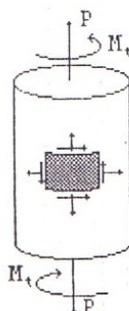
Luego planteando una hipótesis (teoría) podemos evaluar el peligro relacionado con el material al estado límite.

Desde el punto de vista físico, la destrucción del material consiste en:

- 1) la separación de las partículas (destrucción frágil)
- 2) el deslizamiento de las partículas (destrucción dúctil).

Según las condiciones del ensayo el material rompe de una u otra forma.

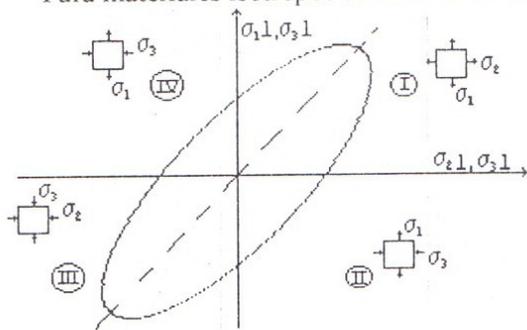
La naturaleza del estado límite del material y las condiciones necesarias para que ese material pase al límite depende de muchos factores. Es lógico considerar en calidad de éstos factores a las tensiones y a las deformaciones, como así también a la energía potencial de deformación.



La idea de las hipótesis de resistencia consiste en que cada una de ellas escoge uno y sólo uno de la gran cantidad de factores que influyen en un material ignorando los demás.

La seguridad de cada hipótesis se comprueba experimentalmente, por ello se emplean los estados biaxiales pues por distintas relaciones de las tensiones principales se obtienen con facilidad, ensayando tubos de paredes delgadas sometidos a presión interna y sollicitación axial simultáneas.

Para materiales isotrópicos se obtiene un diagrama de las tensiones límites:



Los puntos situados en el primer cuadrante del diagrama representan la tracción biaxial ($\sigma_3=0$; $\sigma_1>0$; $\sigma_2>0$).

Los puntos situados en el segundo y cuarto cuadrante representan la tracción-compresión ($\sigma_1>0$; $\sigma_2=0$; $\sigma_3<0$).

Los puntos situados en el tercer cuadrante representan la compresión biaxial ($\sigma_2<0$; $\sigma_3<0$; $\sigma_1=0$).

Para el caso del estado tridimensional existen muchos menos datos experimentales que para los ensayos tridimensionales. *Bidimensionales.*

Las hipótesis que expondremos se confirman tanto con ensayos como por hipótesis que determinan la resistencia del material a la destrucción.

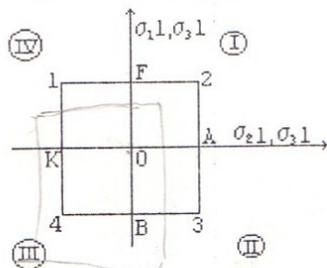
Primera hipótesis de resistencia (o de Rankine)

A ésta hipótesis también se la conoce como **hipótesis de las tensiones máximas**: “el estado límite del material, en el caso de un estado tensional surge cuando la tensión normal máxima alcanza el valor de la tensión límite correspondiente al estado tensional monoaxial”.

$$\sigma_{\text{máx lím}} = \sigma_{\text{lím}}$$

La tensión máxima límite es el valor límite de la tensión normal máxima en el momento del fallo.

$\sigma_{\text{lím}}$ es el valor límite para la compresión o tracción monoaxial) límite de rotura o resistencia) El diagrama de las tensiones límites según ésta hipótesis se representa según la siguiente figura:



Los segmentos OA=OF representan las tensiones límites correspondiente a la tracción monoaxial.

Los segmentos OB=OK representan las tensiones límites correspondientes a la compresión monoaxial.

En el caso de materiales frágiles, $OB>OF$.

Dividiendo los miembros de la igualdad por el coeficiente de seguridad:

$$\frac{\sigma_{\text{máx lím}}}{n} = \frac{\sigma_{\text{lím}}}{n}$$

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma]$$

siendo $\sigma_{\text{máx}}$ el valor real máximo de la tensión principal (en valor absoluto), que surge en el punto peligroso de la pieza y $[\sigma]$ el valor admisible de la tensión monoaxial correspondiente a la tracción o compresión monoaxial.

Teniendo en cuenta esto podemos enunciar la primera hipótesis:

“La resistencia del material en el caso de un estado tensional compuesto, se garantiza si la tensión normal máxima no sobrepasa la tensión normal admisible, correspondiente al estado monoaxial”

Esta hipótesis considera solo la influencia de la tensión principal máxima (en valor absoluto) prescindiendo de la influencia de las otras dos tensiones principales sobre la resistencia del material.

Los materiales plásticos no confirman ésta hipótesis, los ensayos realizados no establecen el criterio de surgimiento de la fluencia. Los materiales frágiles confirman ésta hipótesis, los

ensayos realizados concuerda con la hipótesis en el primero, segundo y cuarto cuadrante. Por lo que se deberá considerar ésta hipótesis sólo para el criterio de destrucción frágil.

Segunda hipótesis de resistencia (o de Saint Venant -1632)

A ésta hipótesis se la conoce también como **hipótesis de las deformaciones lineales máximas**.

Según ésta hipótesis, la resistencia del material en el caso de un estado tensional compuesto, se considera garantizada si la deformación lineal unitaria máxima no es superior a la deformación lineal unitaria admisible para la tracción monoaxial:

$$\varepsilon_{\text{máx}} \leq [\varepsilon]$$

Suponiendo que es válida la ley de Hooke para el material, hasta su rotura, podemos pasar de las deformaciones a las tensiones mediante la ley generalizada de Hooke:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

El valor admisible de la deformación, conocido el valor admisible de la tensión es:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

∴ la condición anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

σ_{eq} es la tensión reducida o equivalente.

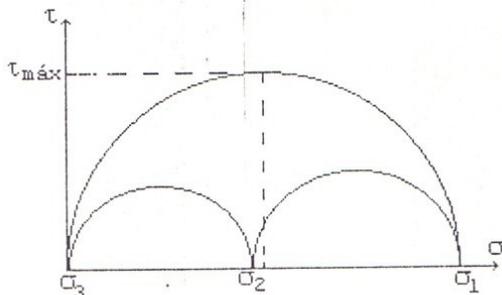
Esta hipótesis no se confirma con los resultados de los ensayos. Según ésta hipótesis, la probeta que está sometida a tracción en dos direcciones deberá resistir mayor tensión que cuando se somete a tracción en una sola dirección.

Tercera hipótesis de resistencia (o de Guest-1900)

Conocida también como **hipótesis de las tensiones tangenciales máximas**.

“La resistencia del material en el caso de un estado tensional compuesto se considera garantizada si la tensión tangencial máxima no es superior a la tensión tangencial admisible, establecida sobre la base de los ensayos realizados para un estado tensional monoaxial”:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau]$$



Se conoce que en el estado biaxial las tensiones tangenciales máximas surgen en la sección a 45° respecto de la dirección de las tensiones principales, y son iguales a la semi-diferencia de éstas

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

La tensión tangencial admisible $[\tau]$ para un estado tensional monoaxial, se relaciona con la tensión

normal admisible $[\sigma]$ por la fórmula $[\tau] = [\sigma]/2$

(para $\sigma_3=0$).

Así pues, la condición de resistencia según la tercera hipótesis, a través de las tensiones normales nos queda:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Para comparar esta hipótesis con los resultados de los ensayos, analizamos el caso del material al estado límite:

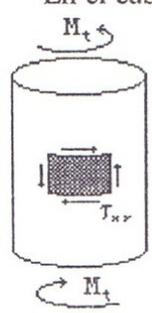
$$\sigma_{lím} = \sigma_{1 lím} - \sigma_{2 lím}$$

$\sigma_{lím}$ es la tensión límite correspondiente a la sollicitación de tracción o compresión monoaxial.

$\sigma_{1 lím}$ y $\sigma_{2 lím}$ son los valores de las tensiones principales correspondientes al estado límite.

Se comprueba que esta hipótesis es válida para materiales plásticos y caracteriza la resistencia de los mismos a las deformaciones plásticas.

En el caso de deslizamiento puro (torsión)



$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2]^{1/2}}{2}$$

$$\sigma_1 = +\tau_{xy}$$

$$\sigma_3 = -\tau_{xy}$$

Cuando $\sigma_1 = \tau$ y $\sigma_3 = -\tau$, según la fórmula de las tensiones límites:

$$2 \tau_f = \sigma_f \Rightarrow$$

$$\tau_f = \frac{1}{2} \sigma_f$$

τ_f es el límite de fluencia para deslizamiento puro y σ_f el límite de fluencia para tracción monoaxial. Esta fórmula no se ajusta con precisión a los ensayos.

Cuarta hipótesis de resistencia (o de Beltrami-1885)

Es la primera hipótesis energética (hipótesis energética de resistencia).

“La resistencia del material en el caso de un estado tensional compuesto se considera garantizada si la energía potencial unitaria de deformación no es superior a la energía potencial unitaria admisible, obtenida de los ensayos con estados tensionales monoaxiales”

$$u \leq [u]$$

La energía unitaria potencial de deformación en el caso de un estado tensional de volumen es:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)]$$

ésta magnitud es siempre positiva

En esta hipótesis se debe considerar siempre que:

$$[\sigma_1] = [\sigma_2] = [\sigma_3] = [\sigma]$$

La energía potencial unitaria admisible en el caso de un estado tensional monoaxial, cuando $\sigma_1 = [\sigma]$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ nos deja de la fórmula de energía potencial unitaria que:

$$[u] = \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

igualando ambas expresiones ($[u] = u$) nos queda,

$$\sigma_{eq} = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)]^{1/2} \leq [\sigma]$$

Para el estado tensional plano:

$$\sigma_{eq} = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \mu \sigma_1 \sigma_2]^{1/2} \leq [\sigma]$$

Los ensayos demuestran que esta hipótesis da mejores resultados cuando se considera sólo la energía relacionada a la variación de forma (con lo que aparecería la quinta hipótesis de resistencia).

Quinta hipótesis de resistencia (o de Huber-Misses-Hencky) (1904 - 1913 - 1925)

La energía debida a la variación de forma se expresa por:

$$u_f = \frac{1}{12 G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

para el estado tensional monoaxial ($\sigma_1 = \sigma_f, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) resulta:

$$u_f = \frac{1}{12 G} 2\sigma_1^2 = \frac{\sigma_f^2}{6G} \quad (1)$$

para el estado biaxial ($\sigma_3=0$):

$$u_f = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2] = \frac{1}{12G} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]$$

$$u_f = \frac{1}{6G} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2] \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\sigma_f^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2$$

aplicando el coeficiente de seguridad:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq [\sigma]^2 \Rightarrow \sigma_{eq} = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2]^{1/2}$$

Luego de calcular σ_1 y σ_2 mediante la fórmula $\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} [(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau^2]^{1/2}$ calculamos la tensión equivalente:

$$\sigma_{eq} = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2]^{1/2} \leq [\sigma]$$

En el caso particular de una tensión normal monoaxial y una tensión tangencial la expresión tomará la forma:

$$\sigma_{eq} = [\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2]^{1/2} \leq [\sigma]$$

Para deslizamiento puro se tiene que:

$$3\tau_f^2 = \sigma_f^2 \Rightarrow$$

$$\tau_f \cong 0,58 \sigma_f$$

resultado que se aproxima con mucha exactitud al experimental.

Esta hipótesis es satisfactoria para materiales dúctiles, como hipótesis de plasticidad y como hipótesis de resistencia, pero no satisface a los materiales frágiles.

Sexta hipótesis de resistencia (o de Coulomb-Mohr)

Enunciada por Coulomb en 1775: $\tau = \tau_0 + \sigma \operatorname{tg} \phi$.

Mohr la publica en 1882 estudiando particularmente cuando los materiales tienen distintas resistencias a tracción y compresión.

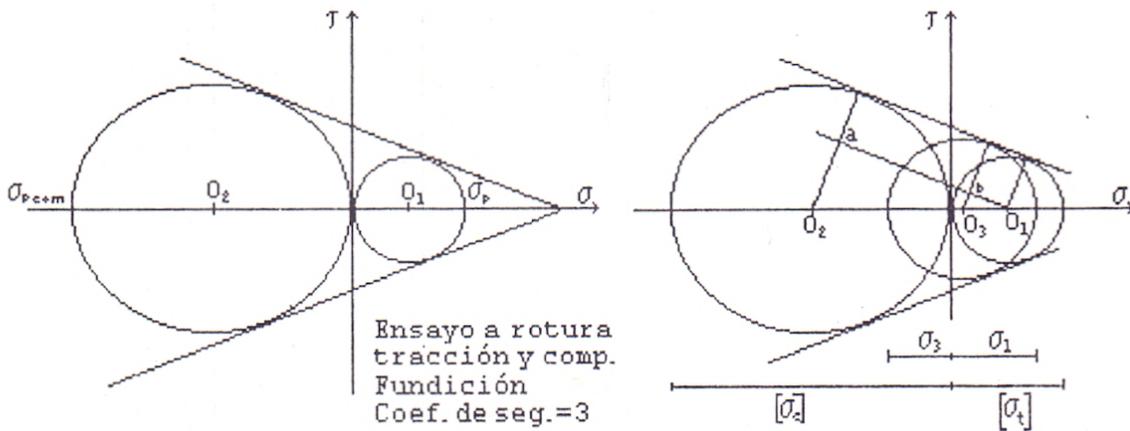
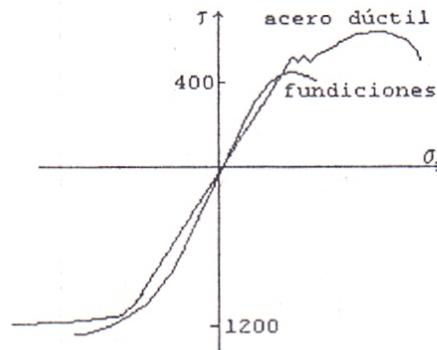
Constituye una generalización de la tercera hipótesis y permite considerar la diferencia de la resistencia de los materiales a tracción y compresión.

La condición de resistencia se escribe:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \gamma \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$\gamma = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

cuando $\gamma = 1$ (materiales dúctiles), ésta hipótesis de Mohr coincide con la tercer hipótesis (de Guest).



Del examen de la semejanza de triángulos O_1O_2A y O_1O_3B hallamos la condición de resistencia:

$$\frac{\sigma_1 - [\sigma_c]}{[\sigma_c]} \leq \frac{\sigma_3}{[\sigma_t]}$$

Séptima hipótesis de resistencia (Balandin)

Constituye una generalización de la cuarta hipótesis y permite considerar la resistencia de los materiales a tracción y compresión.

La condición de resistencia se escribe:

$$\sigma_{eq} = \frac{1-\gamma}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2} \{ [(1-\gamma)^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2] + 4\gamma[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)] \}^{1/2}$$

Para el estado tensional biaxial ($\sigma_3=0$):

$$\sigma_{eq} = \frac{1-\gamma}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} \{ [(1-\gamma)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)^2] + 4\gamma[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2)] \}^{1/2}$$

En el caso de materiales de igual resistencia a tracción y compresión $\gamma=1$ por lo que esta hipótesis coincide con la quinta hipótesis.

Ejemplo 1 (material dúctil)

$$\sigma_y = -800 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_z = 2000 \text{ Kg/cm}^2; \tau_{yz} = 800 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 2212 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_3 = -1012 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_r = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_t = 5000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$[\sigma] = \frac{4200}{1,75} = 2400 \text{ Kg/cm}^2$$

3ª o 5ª hipótesis:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = 2212 - (-1012) = 3224 > [\sigma] \Rightarrow \text{No verifica}$$

$$\sigma_{eq} = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2]^{1/2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = [2212^2 + 1012^2 - 2212 \cdot 1012]^{1/2} = 2855 > [\sigma] \Rightarrow \text{No verifica.}$$

Ejemplo 2 (material frágil)

$$\sigma_y = -800 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_x = 400 \text{ Kg/cm}^2; \tau_{xy} = -300 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 471 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_3 = -871 \text{ Kg/cm}^2$$

$$[\sigma_c] = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$[\sigma_t] = 500 \text{ Kg/cm}^2$$

1ª Hipótesis

$$\sigma_1 \leq [\sigma_t] \rightarrow 471 \leq 500 \Rightarrow \text{Verifica}$$

$$\sigma_3 \leq [\sigma_c] \rightarrow 871 \leq 1000 \Rightarrow \text{Verifica}$$

6ª Hipótesis

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \gamma \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_t] \rightarrow 471 - \frac{500}{1000} (-871) = 906 > [\sigma_t] \Rightarrow \text{No verifica 6ª hipótesis}$$

Hipótesis de Balandin

$$\sigma_{eq} = \frac{1-\gamma}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} \{[(1-\gamma)^2 (\sigma_1 + \sigma_3)^2] + 4\gamma[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_3)]\}^{1/2}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1-0,5}{2} (471 - 871) + \frac{1}{2} \{[(1-0,5)^2 (471 - 871)^2] + 4 \cdot 0,5[471^2 + 871^2 - 471 \cdot (-871)]\}^{1/2}$$

$$\sigma_{eq} = 740 > [\sigma_t] \Rightarrow \text{No verifica hipótesis de Balandin.}$$

Ejemplo 3

$$\sigma_x = 80 \text{ MN/m}^2; \sigma_y = -20 \text{ MN/m}^2; \sigma_z = 40 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau_{yz} = 0; \tau_{xy} = 30 \text{ MN/m}^2; \tau_{xz} = -20 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_1 = 78 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_2 = 23 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_3 = -8,6 \text{ MN/m}^2$$

$$[\sigma] = 120 \text{ MN/m}^2$$

3ª hipótesis:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = 78 - (-8,6) = 86,6 < [\sigma] \Rightarrow \text{Verifica}$$

5ª hipótesis:

$$\sigma_{eq} = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)]^{1/2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = [6084 + 529 + 74 - (-671 + 1794 - 198)]^{1/2} = 76 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] \Rightarrow \text{Verifica.}$$

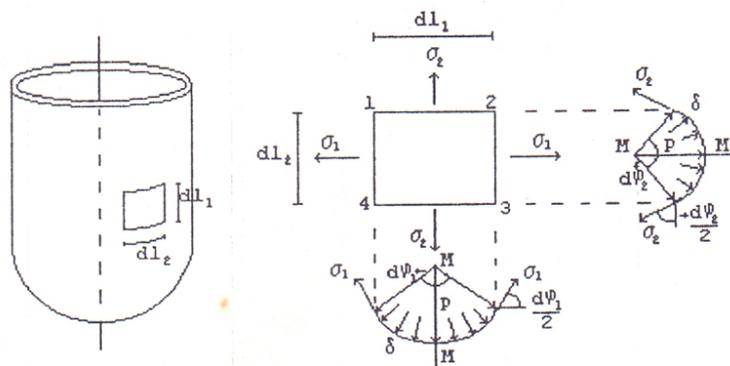
Cálculo de recipientes de paredes delgadas - Ecuación de Laplace

Con frecuencia se utilizan recipientes cuyas paredes resisten la presión de los líquidos, gases y materiales movidos (calderas de vapor, depósitos, cámaras de trabajo de motores, cisternas, etc.)

Si los recipientes tiene forma de cuerpo de revolución y si el espesor de las paredes es insignificante con relación al radio de revolución, se puede considerar, sin cometer un gran error, que en las paredes sólo aparecen tensiones normales.

Esas tensiones normales se distribuyen uniformemente dentro del espesor de la pared. Las experiencias nos dan cálculos para espesores que no superan la décima parte aproximadamente del radio de curvatura mínimo de la pared:

$\delta = \frac{p}{10}$



Analizamos un elemento de dimensiones dl_1 dl_2 , de espesor de pared δ , de radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 . Sobre el elemento actúa la presión interior p perpendicular a la superficie. Sustituimos la interacción entre el elemento y el resto del recipiente por las fuerzas interiores, cuyas intensidades son σ_1 y σ_2 . Puesto que el espesor de las paredes es pequeño, se puede considerar que las tensiones se distribuyen uniformemente en el espesor de la pared.

Planteamos la ecuación de equilibrio del elemento, proyectando las fuerzas sobre la dirección M-M normal a la superficie: $p \cdot dl_1 \cdot dl_2$ es la proyección de la carga, σ_1 $\text{sen } d\phi_1/2$ es la proyección de la tensión σ_1 que actuando sobre la cara 1-4 y 2-3 es: $2\sigma_1 \delta dl_2 \text{ sen } d\phi_1/2$. $\sigma_2 \text{ sen } d\phi_2$ es la proyección de la tensión σ_2 que actuando sobre las caras 1-2 y 3-4 es: $2\sigma_2 \delta dl_1 \text{ sen } d\phi_2/2$. De esto resulta:

$$p \cdot dl_1 \cdot dl_2 - 2\sigma_1 \delta dl_2 \text{ sen } d\phi_1/2 - 2\sigma_2 \delta dl_1 \text{ sen } d\phi_2/2 = 0$$

Puesto que las dimensiones del elemento son pequeñas podemos considerar que:

$$\text{sen } \frac{d\phi_1}{2} \cong \frac{d\phi_1}{2} \text{ y } \text{sen } \frac{d\phi_2}{2} \cong \frac{d\phi_2}{2}$$

con lo cual la ecuación nos queda:

$$p \cdot dl_1 \cdot dl_2 - \sigma_1 \delta dl_2 d\phi_1 - \sigma_2 \delta dl_1 d\phi_2 = 0$$

advertimos que:

$$d\phi_1 = dl_1 / \rho_1 \text{ y } d\phi_2 = dl_2 / \rho_2$$

reemplazando:

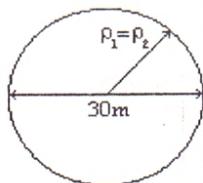
$$p \cdot dl_1 \cdot dl_2 - \sigma_1 \delta dl_2 dl_1 / \rho_1 - \sigma_2 \delta dl_1 dl_2 / \rho_2 = 0$$

simplificando:

$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{p}{\delta}$	Ecuación de Laplace
--	---------------------

Ejemplo 1:

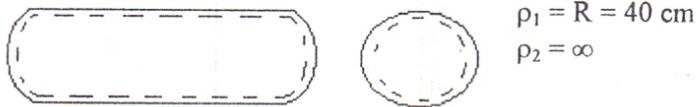
1) Determinar el espesor de la pared de un recipiente esférico en cuyo interior se encuentra un fluido a 20 atm de presión y cuyo diámetro es de 30 m, suponiendo que $[\sigma_{ac}] = 1400 \text{ Kg/cm}^2$.



$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_2 = \rho = 15\text{m} \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_1 \rho_2} &= \frac{p}{\delta} \Rightarrow \frac{2\sigma}{\rho^2} = \frac{p}{\delta} \Rightarrow \sigma = \frac{p \rho}{2\delta} \leq [\sigma] \\ \sigma_{eq} &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2} \leq [\sigma] \\ \Rightarrow \delta &\geq \frac{p \cdot \rho}{2 [\sigma]} = \frac{20 \cdot 1500}{2 \cdot 1400} = 10,7 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

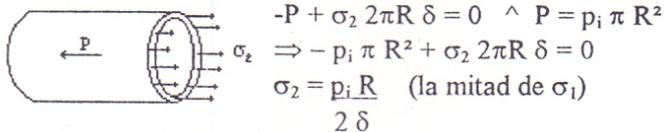
Determinar el espesor de la pared de un cilindro que esté sometido a una presión interior de 10 atm y cuyo diámetro es de 80 cm.



$$\frac{\sigma_1}{R} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{p}{\delta} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{p_i R}{\delta}$$

Para conocer σ_2 seccionamos el recipiente con un plano normal al eje y analizamos la condición de equilibrio.

Proyectamos sobre el eje del recipiente todas las fuerzas que actúan en esa dirección:



$$\sigma_{eq} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = (1 + 1/4 - 1/2)^{1/2} \sigma_1 = (3/4)^{1/2} \sigma_1 = 0,816 \sigma_1 = 0,816 p_i R / \delta \leq [\sigma]$$

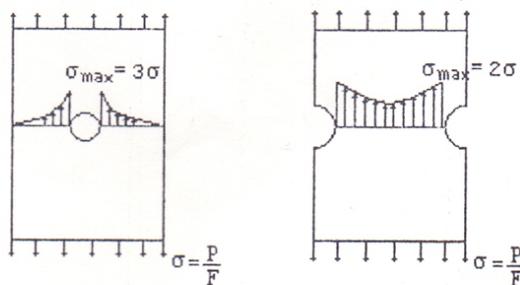
$$\Rightarrow \delta \geq 0,816 \frac{p_i R}{[\sigma]} = \frac{0,816 \cdot 10 \cdot 40}{1400} = 0,23 \text{ cm}$$

Concentración de tensiones

La distribución uniforme de la tensión en la sección transversal de una barra traccionada o comprimida tiene lugar sólo a cierta distancia del punto de aplicación de la fuerza (de acuerdo al principio de Saint Venant) si al mismo tiempo la sección no varía a lo largo de la barra o varía muy suavemente. Si la sección varía abruptamente, en esos lugares la distribución de las tensiones ya no es uniforme.

Este fenómeno consiste en un aumento brusco de las tensiones en donde la forma geométrica cambia súbitamente y se lo denomina “concentración de tensiones”.

La determinación de la tensión en esa sección se realiza por métodos experimentales o por la teoría de la elasticidad



En ambos casos la tensión máxima en los bordes de los agujeros es 2 y 3 veces la tensión nominal.

La razón de la mayor tensión sobre la tensión nominal se denomina **Coefficiente Teórico de Concentración de Tensión**:

$$\alpha_\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} / \sigma$$

La tensión nominal se calcula como $\sigma = P/F$ siendo F el área de la sección debilitada: el coeficiente teórico de concentración de tensión se obtiene suponiendo que el material sigue la ley de Hooke al deformarse.

En muchos casos éste coeficiente nos da una idea correcta de la influencia de la concentración de tensiones sobre la resistencia de la pieza. Los ensayos demuestran en la mayoría de los materiales, que la disminución de la resistencia como consecuencia de la concentración resulta menor que σ_c . Esta reducción se establece experimentalmente como la razón del límite de rotura (σ_{re}) de la pieza con una concentración determinada:

$$k_s = \sigma_r / \sigma_{re}$$

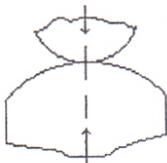
se lo conoce como "Coeficiente efectivo de concentración de tensiones".

En el caso de materiales plásticos con carga estática, el coeficiente es prácticamente $k_s=1$, luego cuando se trata de éste tipo de cargas, la concentración deberá considerarse sólo en el caso de materiales frágiles o de poca plasticidad.

Cuando las cargas son alternadas, la concentración se tiene en cuenta en todos los materiales.

Tensiones de contacto

Las tensiones locales grandes aparecen también en los lugares de transmisión de la presión de un cuerpo a otro. Estas tensiones se denominan "Tensiones de Contacto" o "Tensiones de Aplastamiento".



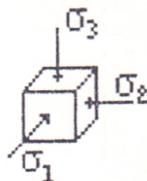
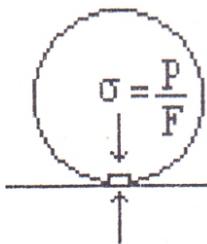
Si antes de entrar en contacto los cuerpos tenían superficies planas, entonces se puede considerar que la distribución de las tensiones en el plano de contacto es uniforme y se pueden calcular como:

$$\sigma_{apl} = P/F$$

Pero si las superficies fuera curvilíneas (en los cojinetes por ejemplo) se necesita recurrir a métodos de la teoría de la elasticidad.

Este problema se puede resolver basándose en las siguientes suposiciones:

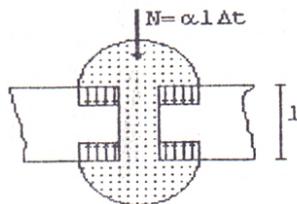
- 1.- los materiales de los cuerpos en contacto se sujetan a la ley de Hooke
- 2.- las dimensiones lineales del área en contacto son pequeñas en comparación con los radios de curvatura de las superficies en contacto
- 3.- las fuerzas de compresión son normales al área de contacto
- 4.- en la superficie de contacto sólo surgen tensiones normales.



Los ensayos demuestran que se pueden obtener valores de tensión de contacto muy altos.

Estas tensiones disminuyen rápidamente al alejarse del área de contacto; el material contiguo a ésta zona está sometido a tensión triaxial y no monoaxial.

Este problema aparece en la presión entre la superficie de un remache y la superficie cilíndrica del agujero.



Se resuelve por métodos prácticos. Las tensiones de aplastamiento son de dos a dos y medio veces mayores que las admisibles a tracción o compresión.

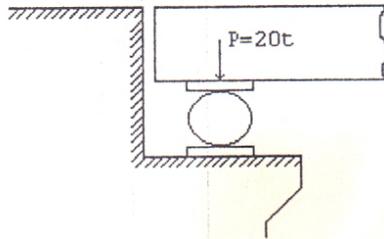
Acero moldeado $[\sigma_{apl}] = 8500 - 10000 \text{ Kg/cm}^2$

Acero forjado $[\sigma] = 9500 - 12000 \text{ Kg/cm}^2$

Acero especial para rodillos $[\sigma_{apl}] = 23000 - 25000 \text{ Kg/cm}^2$

Ejemplo

Determinar el diámetro del cilindro para el apoyo de encuentro de la figura, suponiendo que por el mismo se descaiguen 200 t.



$[\sigma_{apl}] = 23.000 \text{ Kg/cm}^2$ $E = 2,1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$
 long. cilindro $l = 50 \text{ cm}$

Tensión máxima $\sigma_{m\acute{a}x} = 0,418 (PE/lR)^{1/3} = 23000 \text{ Kg/cm}^2$
 $PE = 1,67 \times 10^{14} \Rightarrow R = \frac{PE}{l \cdot \sigma_{m\acute{a}x}^3} = 4,2 \times 10^{11}$

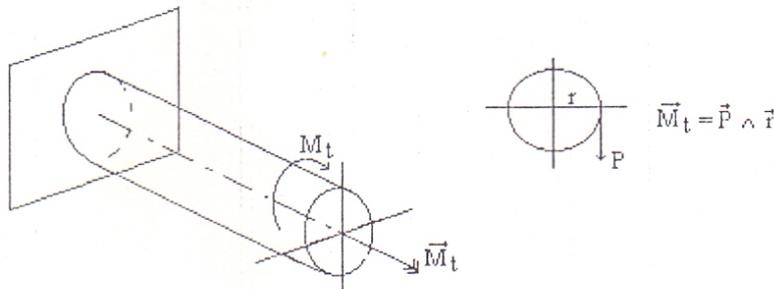
Para $l = 25 \text{ cm}$, $R = 5,6 \text{ cm}$

Forma de los cuerpos en contacto		Coeficientes de la ecuación de la elipse		Tensión máxima
Esquema de contacto	Dimensiones de los cuerpos en contacto	A	B	$\sigma_{m\acute{a}x}$
	Dos esferas de radios R_1 y R_2	$\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}$	$\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}$	$0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2 (R_1+R_2)^2}{(R_1R_2)^3}}$
	Esfera de radio R_1 y esfera circular de radio R_2	$\frac{R_2-R_1}{2R_1R_2}$	$\frac{R_2-R_1}{2R_1R_2}$	$0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2 (R_2-R_1)^2}{(R_1R_2)^3}}$
	Esfera de radio R y plano ($R_2 = \infty$)	$\frac{1}{2R}$	$\frac{1}{2R}$	$0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R^2}}$
	Esfera de radio R_1 y cilindro de radio R_2 ($R_2 > R_1$)	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$	$\propto \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_1^2}}$
	Esfera de radio R_1 y canalón cilíndrico radio R_2 ($R_2 > R_1$)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$	$\frac{1}{2R_1}$	$\propto \sqrt[3]{\frac{PE^2 (R_2 - R_1)^2}{(R_1R_2)^3}}$
	Bolilla de radio R_1 y canalón curvo de radios R_2 y R_3 (Cojinete esférico) ($R_2 > R_3$)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3})$	$\propto \sqrt[3]{\frac{PE^2 (R_2 - R_1)^2}{(R_1R_3)^3}}$
	Cojinete de rodillos de radios R_1 y R_2 y canalón curvo de radios R_3 y R_4	$\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3})$	$\propto \sqrt[3]{\frac{PE^2 (R_4 - R_1)^2}{(R_2R_3)^3}}$
	Dos cilindros cruzados de radios R_1 y R_2 ($R_1 > R_2$)	$\frac{1}{2R_2}$	$\frac{1}{2R_1}$	$\propto \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_2^2}}$
	Dos cilindros con ejes paralelos de radios R_1 y R_2	—	$\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$	$0,418 \sqrt[3]{\frac{PE}{l} \cdot \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}$
	Cilindro de radio R y plano ($R_2 = \infty$)	—	$\frac{1}{2R}$	$0,418 \sqrt[3]{\frac{PE}{lR}}$

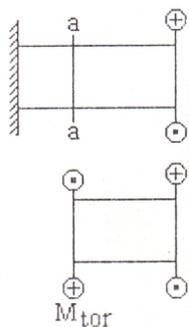
UNIDAD III - Torsión

Construcción de los diagramas de momento torsor

Una barra está sometida a torsión, si en sus secciones transversales surgen momentos que se encuentran en el plano de la sección. Estos momentos aparecen cuando hay poleas y engranajes. También se producen cuando una carga se aplica con cierto desorden (excentricidad) respecto del eje de la barra, pero también aparecen simultáneamente otros esfuerzos como ser corte, flexión, etc.



Analizaremos el cálculo por torsión para cargas estáticas. Los momentos torsos tanto exteriores como interiores los representaremos por una línea con dos círculos. En uno irá un punto, que es el comienzo de la flecha (hacia el lector) y en el otro irá una cruz, final de la flecha (desde el lector).



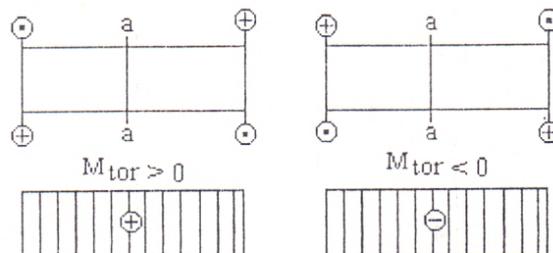
Para calcular el momento torsor M_{tor} que surge debido a un momento torsor exterior o por una carga transversal, empleamos el método de las secciones.

Trazamos mentalmente una sección por a-a, separamos una de las partes y analizamos el equilibrio de la otra. La interacción entre las partes la sustituimos por un momento torsor M_{tor} que equilibra al momento exterior M_t . Este equilibrio nos permite asegurar que $M_{tor} = M_t$.

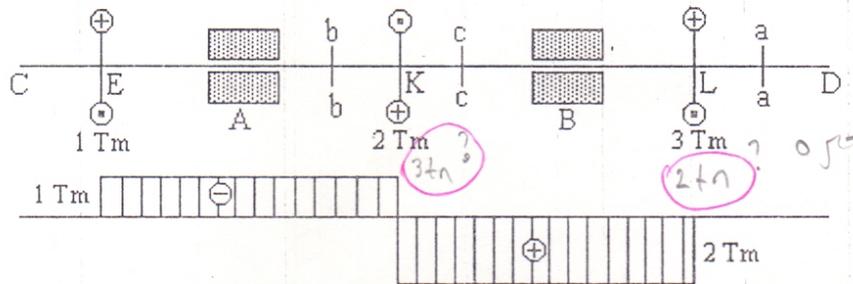
Si existen varios momentos exteriores actuando sobre la sección diremos: "El momento torsor en la sección es numéricamente igual a la suma algebraica de los momentos torsos exteriores que actúan sobre la otra parte de la sección".

Para ilustrar la distribución y magnitud de los momentos torsos a lo largo de la barra, se construye el diagrama de los momentos torsos. Su construcción es análoga a la de los gráficos de las fuerzas axiales.

Para los signos, admitiremos que el momento torsor es positivo cuando el momento exterior hace girar la parte separada en sentido antihorario, si se observa ésta parte desde la sección de la separación:



Ejemplo: construir el gráfico de los momentos torsores de la barra de la figura.

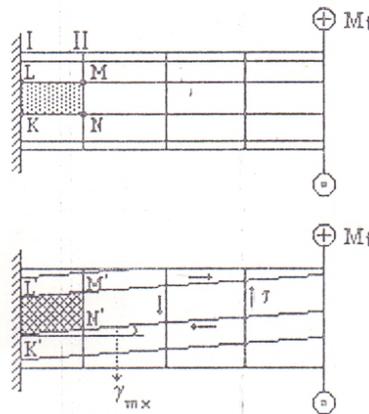


Sea una barra C-D apoyada en A y B, con momentos exteriores aplicados en E, K y L. Trazamos las secciones a-a, b-b, c-c y analizamos el equilibrio de la parte separada derecha; en el tramo D-L, donde aparece la sección a-a, el momento torsor es igual a cero; en el tramo L-K, donde aparece la sección b-b, el momento torsor es igual a $2 T_m$; en el tramo K-E, donde aparece la sección c-c, el momento torsor es igual a $-1 T_m$; en el tramo E-C el momento torsor se cierra con el último momento y queda en cero.

Si existiera alguna carga transversal, se calculará previamente el momento torsor exterior debido a la fuerza y se incluyen en el gráfico.

Cálculo de las tensiones en las barras de sección circular

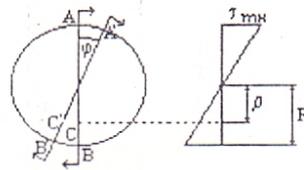
Los momentos torsores no son más que esfuerzos resultantes interiores. En realidad en la sección transversal de una barra torsionada actúan fuerzas tangenciales, distribuidas de una manera continua.



Si a la barra de la figura le trazamos una red compuesta por rectángulos, entonces después de ocurrir la deformación se observa lo siguiente:

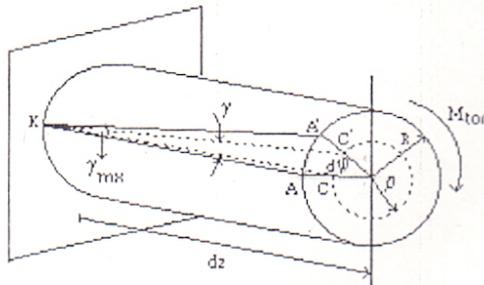
- 1.- La red rectangular se transforma en una red compuesta por paralelogramos, esto indica que en las secciones transversales de la barra existen tensiones tangenciales, y por la ley de reciprocidad de Cauchy aparecen también en las secciones longitudinales.
- 2.- Las distancias entre las circunferencias, por ejemplo entre la I y la II, no varían. Tampoco varía la longitud de la barra ni su diámetro. Esto demuestra la ausencia de tensiones normales en las secciones transversales y longitudinales de la barra.

Por esto, durante la torsión, en las secciones transversales y longitudinales sólo actúan tensiones tangenciales, lo que nos permite decir que el estado tensional de los puntos de la barra torsionada es deslizamiento puro.



3.- El diámetro AB de la sección extrema girará cierto ángulo φ respecto de su posición inicial, permaneciendo recto. El punto exterior se desplaza por el arco de circunferencia AA' y el punto C por el arco menor CC'.

Analicemos la deformación del sector que se encuentra en las secciones I y II:



El ángulo de distorsión del rectángulo que se encuentra sobre la superficie de la barra es igual al cociente del segmento NN' y la longitud del elemento diferencial dz:

$$\gamma_{\text{mx}} = \frac{NN'}{dz} \Rightarrow NN' = \gamma_{\text{mx}} \cdot dz \Rightarrow NN' = R \cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow \gamma_{\text{mx}} = R \frac{d\varphi}{dz}$$

Consideramos un punto C a una distancia radial ρ .

El ángulo de distorsión correspondiente es:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

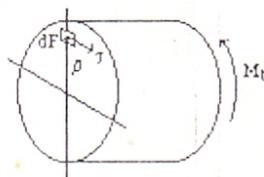
Según la ley de Hooke para el deslizamiento es $\tau = G \gamma$, reemplazando:

$$\tau = G \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

Como vemos, en la torsión, la deformación por deslizamiento y las tensiones tangenciales son proporcionales a la distancia al centro de gravedad.

El gráfico de las tensiones tangenciales es el visto anteriormente, siendo nulo en el centro de gravedad y máximo en la superficie de la barra.

Analizamos la magnitud de esta tensión mediante la condición de equilibrio.



Seccionamos la barra y consideramos el equilibrio de la parte derecha. La suma de los momentos, respecto del eje de la barra, que actúa en la parte separada es nula:

$$\sum M_{\text{tor}} = 0 \Rightarrow M_t \approx - \int_A \tau \rho \, dF = 0$$

el término integral es el momento torsor en la sección considerada.

Introduciendo el valor conocido de τ :

$$M_t - G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 \, dF = 0$$

pero como esta integral es el momento de inercia polar:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{G J_p}$$

reemplazando este valor en la fórmula de τ nos queda:

$$\tau = \frac{M_t \rho}{J_p}$$

Cuando actúan varios momentos exteriores, se considera la suma de los momentos que actúan en la sección y éstos deben ser igual al momento torsor interior M_{tor} .

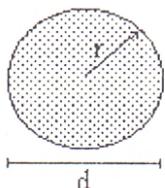
Luego el valor de la tensión tangencial en función de la torsión queda: $\tau = M_{\text{tor}} \rho / J_p$.

De ésta fórmula se deduce que la tensiones tangenciales a distancias equidistantes al centro de gravedad son iguales.

La tensiones máximas situadas en los puntos extremos serán

$$\tau_{\max} = M_{\text{tor}} \frac{R}{J_p} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_p}$$

siendo W_p el módulo resistente a la torsión de la sección. En el caso de una sección maciza:

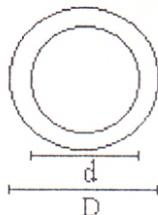


$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32 \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16}$$

3 R?

$$W_p \cong 0,2 d^3$$

En el caso de sección anular:



$$W_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 \frac{d}{2}} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16 D}$$

$C = \frac{d}{D}$

$$\Rightarrow W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - C^4) \cong 0,2 D^3 (1 - C^4)$$

La condición de resistencia estática de una barra sometida a torsión se escribe

$$\tau_{\max} = M_{\text{tor}} / W_p \leq [\tau]$$

Cuando se trata de cargas estáticas $[\tau] = (0,5 - 0,6) [\sigma_t]$.

Además de la resistencia, ésta fórmula nos permite conocer el diámetro de la barra o el momento torsor admisible, cuando son conocidas las otras magnitudes. Entonces podemos conocer el diámetro partiendo de la condición de resistencia.

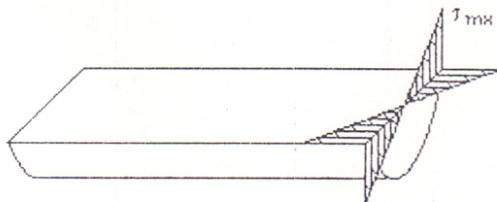
$$\frac{M_{\text{tor}}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow W_p \geq \frac{M_{\text{tor}}}{[\tau]} \wedge W_p = 0,2 d^3 \Rightarrow 0,2 d^3 \geq \frac{M_{\text{tor}}}{[\tau]} \Rightarrow d = (M_{\text{tor}} / 0,2 [\tau])^{1/3}$$

$$\therefore d \geq 1,72 M_{\text{tor}}$$

El momento torsor admisible, partiendo de la misma fórmula, es:

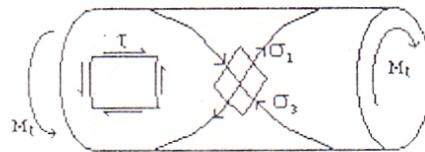
$$[M_{\text{tor}}] = W_p [\tau]$$

Como se demuestra con el teorema de Cauchy, existen tensiones en la sección transversal y en la sección longitudinal:



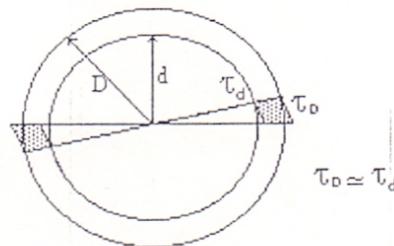
Como es sabido, la tensiones tangenciales máximas se producen a 45° de las tensiones normales máximas, por lo tanto se representan éstas según la figura. Su magnitud es

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \tau \wedge \sigma_3 = \sigma_{\min} = -\tau$$



Los ensayos demuestran que los materiales frágiles se destruyen, durante la torsión, por un plano inclinado (superficie helicoidal) a 45° respecto del eje.

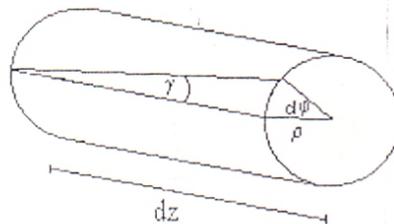
En la torsión, en todos los puntos de la barra, excepto los ubicados en el eje, aparece el estado de tensión biaxial de deslizamiento puro. Este estado no es homogéneo en una barra maciza, en el exterior es máximo y disminuye hacia el centro de gravedad. El estado se puede considerar homogéneo en el caso de una sección anular.



El límite de fluencia por deslizamiento τ_f se estudia en barras de sección anular (tubos de paredes delgadas).

Deformaciones y desplazamientos que acompañan la torsión de barras de sección circular

Para calcular las deformaciones que acompañan a la torsión de una barra, analizamos la ecuación de τ :



$$\gamma dz = \rho d\varphi \Rightarrow \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho$$

$$\tau = G \gamma \Rightarrow \tau = G \frac{d\varphi}{dz} \rho$$

$$M_{tor} = \int \rho \tau dF \Rightarrow M_{tor} = \int \rho G \frac{d\varphi}{dz} \rho dF \Rightarrow M_{tor} = G \frac{d\varphi}{dz} \int \rho^2 dF$$

$$\Rightarrow M_{tor} = G J_p \frac{d\varphi}{dz} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{tor}}{G J_p} \quad (1) \Rightarrow d\varphi = \frac{M_{tor} dz}{G J_p}$$

El ángulo de torsión φ corresponde a la longitud z medida desde el empotramiento; integrando ésta última ecuación:

$$\varphi = \int_0^z \frac{M_{tor} dz}{G J_p}$$

Si el momento torsor y la rigidez de la sección a torsión son constantes en todo el intervalo de integración queda:

$$\varphi = \frac{M_{tor} z}{G J_p}$$

Vemos que a medida que nos alejamos de empotramiento, el ángulo de torsión aumenta linealmente. El ángulo de torsión máximo se produce en el extremo de la barra ($z=l$)

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{\text{tor}} l}{G J_p}$$

El ángulo de torsión correspondiente a la unidad de longitud, llamado **Ángulo de Torsión Unitario**, es igual a:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{\text{tor}}}{G J_p}$$

La condición de rigidez de una barra, es que el ángulo de torsión unitario máximo no supere el ángulo de torsión admisible

$$\theta = \frac{M_{\text{tor}}}{G J_p} \leq [\theta]$$

Esto es aplicado a árboles; en la mayoría de los casos la magnitud del ángulo de torsión unitario admisible se da en grados por metro de longitud.

$$\theta = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{\text{tor}}}{G J_p} \cdot 100 \leq [\theta]$$

En la construcción de máquinas se recomienda que $[\theta]$ sea igual a $0,5^\circ$ por metro de longitud.

Energía potencial de torsión

Durante la torsión, los momentos exteriores realizan un trabajo, como consecuencia del giro de las secciones a las que están aplicadas.

Este trabajo se gasta en crear una reserva de energía potencial de la deformación, que numéricamente es igual al trabajo de las fuerzas interiores.

Se demuestra análogamente al caso de tracción, que el trabajo de un momento torsor exterior aplicado estáticamente es igual a la mitad del producto del valor definitivo del momento por el ángulo de torsión definitivo:

$$A = \frac{1}{2} M_t \varphi$$

El trabajo de las fuerzas interiores que es de signo contrario, y la energía potencial de torsión, se calculan como en el caso de tracción:

$$dU = -\frac{1}{2} M_{\text{tor}} d\varphi$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1):

$$d\varphi = \frac{M_{\text{tor}} dz}{G J_p} \Rightarrow dU = -\frac{1}{2} \frac{M_{\text{tor}}^2 dz}{G J_p}$$

El trabajo completo de la fuerzas interiores surge integrando la expresión del trabajo elemental en toda la longitud l

$$U = -\frac{1}{2} \int \frac{M_{\text{tor}}^2 dz}{G J_p}$$

La energía potencial surge como la magnitud del trabajo de las fuerzas interiores pero de signo contrario

$$E_{\text{pot}} = -U = \frac{1}{2} \int \frac{M_{\text{tor}}^2 dz}{G J_p}$$

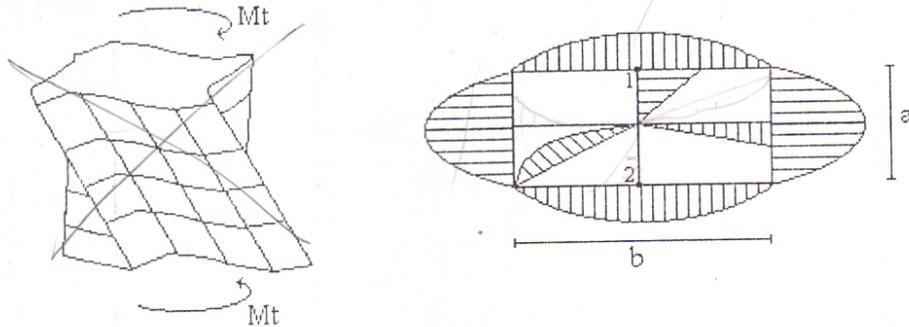
Si el momento torsor y la rigidez no varían a lo largo del eje nos queda

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{M_{\text{tor}}^2 l}{G J_p}$$

similar a la expresión de tracción ($E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} N^2 l / E A$).

Resultados principales de la torsión de barras de sección no circular

En las barras de sección no circular, las secciones no permanecen planas sino que se curvan.



Si el alabeo no es restringido, entonces en las secciones transversales no aparecen tensiones normales. Esta torsión se denomina **Torsión Pura o Libre**.

Este estado sólo es posible si el momento torsor y la sección son constantes y los extremos de la barra no están empotrados.

El cálculo de las tensiones tangenciales se obtiene por los métodos de la teoría de la elasticidad. Para el caso de barras de sección rectangular $a > b$, las tensiones tangenciales máximas surgen en los puntos 1 y 2, en el centro o coincidentemente con el centro del lado mayor y son iguales a

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{tor}}}{\alpha a b^2}$$

El ángulo de torsión es

$$\varphi = \frac{M_{\text{tor}} l}{G \beta a b^3} = \frac{M_{\text{tor}} l}{G J_{\text{tor}}}$$

Las magnitudes W_{tor} y J_{tor} son características geométricas de la resistencia y la rigidez a la torsión respectivamente, de una barra rectangular.

Los coeficientes α y β dependen de la relación entre los lados, y sus valores se consignan en la siguiente tabla:

a/b	1	2	3	4	5	10	20	∞
α	0,21	0,25	0,27	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33
β	0,14	0,23	0,26	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33

Como podemos ver, para relaciones $a/b \geq 10$ es $\alpha = \beta \cong 0,33 = 1/3$.

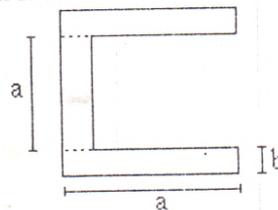
Como se aprecia en la figura, la distribución de las tensiones tangenciales en el perímetro, a lo largo de un eje y en las diagonales, son de distinto valor y en particular en los vértices $\tau = 0$.

Para perfiles compuestos con relación de lados $a/b \geq 10$ la característica geométrica se puede calcular como

$$J_{\text{tor}} = \frac{1}{3} \eta \sum a b^3$$

siendo η un coeficiente de forma, a el lado mayor y b el menor

Tipo de sección	η
Angular	1,00
Doble T	1,20
T	1,15
Canal U	1,12



La tensión tangencial máxima tiene lugar, en el rectángulo, en el lado mayor su valor es:

$$\tau_{mx} = \frac{M_{tor} \cdot b_{mx}}{J_{tor}}$$

siendo b_{mx} el valor máximo del lado menor del rectángulo.

El ángulo de torsión se determina por la fórmula:

$$\varphi = \frac{M_{tor} \cdot l}{G J_{tor}}$$

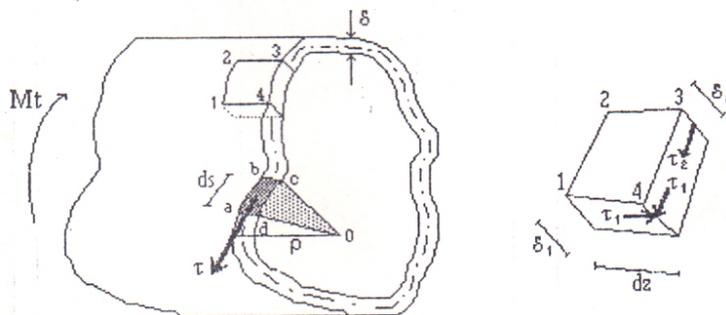
Para perfiles laminados, el valor de J_{tor} se obtiene por tablas, pero como a igual superficie el momento torsor es muy pequeño en relación a barras circulares macizas o anulares, no se recomienda su uso en torsión.

Cuando la torsión es restringida, no se puede extender el uso de éstas fórmulas.

Para perfiles laminados, el valor de J_{tor} se obtiene por tablas, pero como a igual superficie el momento torsor es muy pequeño en relación a barras circulares macizas o anulares, no se recomienda su uso en torsión.

Torsión de barras de paredes delgadas de sección cerrada

Sea una barra de espesor δ suavemente variable a lo largo de la línea de contorno, pudiéndose prescindir de la concentración de tensiones, y admitimos una distribución uniforme de las tensiones tangenciales en el espesor de la pared.



Admitimos que el producto de la tensión tangencial por el espesor de la pared es constante en todo el desarrollo de la sección y vale

$$c = \tau \delta$$

Analizando la figura, la magnitud de la tensión tangencial que produce el momento torsor la obtenemos considerando el equilibrio de una pared de la barra.

La fuerza que actúa sobre el área elemental δds es $dF = \tau \delta ds$, mientras que el momento torsor debido a esa fuerza, respecto de un punto arbitrario O, ubicado en el plano de la sección es:

$$dM_{tor} = dF \rho = \tau \delta ds \rho$$

Para que la parte considerada esté en equilibrio, la suma de los momentos torsores debe ser cero:

$$M_t - \int_s \tau \delta \rho ds = 0$$

(integrado a lo largo del contorno S)

El producto ρds es igual al doble del área del triángulo aOb

$$\rho ds = 2 d\omega$$

reemplazando:

$$M_t - \int_{\omega} \tau \delta \, 2d\omega = 0$$

como dijimos, el producto $\tau \delta$ es constante en todo el contorno, quedando la expresión:

$$M_t - 2 \tau \delta \int_{\omega} d\omega = 0$$

siendo ésta integral el área de la sección maciza, limitado por la línea media de la pared; en definitiva:

$$M_t - 2\tau\delta\omega = 0$$

Cuando actúan varios momentos exteriores se debe considerar la suma de los momentos exteriores que actúan sobre la parte separada, de valor igual al momento torsor interior. Despejando de la ecuación anterior obtenemos el valor de la tensión tangencial:

$$\tau = \frac{M_{\text{tor}}}{2\delta\omega}$$

La tensión tangencial máxima surge en el punto donde δ es mínimo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{2\omega\delta_{\text{mín}}}$$

Angulo de torsión

El ángulo de torsión φ de una barra de longitud l se calcula por la condición de que el trabajo del momento torsor exterior es igual al de las fuerzas interiores:

$$A = \frac{1}{2} M_t \varphi$$

“La energía potencial de la deformación es numéricamente igual al trabajo de las fuerzas interiores”.

La energía potencial unitaria en función de las tensiones tangenciales se obtiene por:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$$

La energía potencial correspondiente a un elemento de volumen $\delta \, l \, ds$ es:

$$dE_{\text{pot}} = \frac{\tau^2 \delta \, l \, ds}{2G}$$

La energía potencial total para toda la barra será:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2G} \int_s \tau^2 \delta \, ds$$

reemplazando $\tau = M_{\text{tor}} / 2\delta\omega$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2G} \int_s \frac{M_{\text{tor}}^2}{\delta^2 4\omega^2} \delta \, ds$$

sacando las constantes fuera de la integral:

$$E_{\text{pot}} = \frac{M_{\text{tor}}^2 l}{8G\omega^2} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

y teniendo en cuenta la fórmula del trabajo de las fuerzas exteriores, que es numéricamente igual a la energía potencial, calculamos el ángulo de torsión

$$\varphi = \frac{M_{\text{tor}} l}{4G\omega^2} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Formas convenientes de las secciones en la torsión

Si poseemos dos barras de secciones con un mismo momento polar de inercia (de la misma característica W_{tor}) y con igual momento torsor admisible, será más conveniente emplear la que tenga menor sección.

Puesto que la relación W_{tor} / F (cm^3/cm^2) es una magnitud dimensional, nos resulta incómodo para la comparación, por lo que emplearemos la magnitud adimensional

$$\omega_{tor} = \frac{W_{tor}}{F^{3/2}}$$

que llamaremos Módulo Unitario de la sección a la torsión y que se obtiene de la siguiente tabla:

Tipo de sección	W_{tor}	ω
Canal	0,04 - 0,05	0,010 - 0,015
Doble T	0,05 - 0,07	0,009 - 0,015
Rectangular a/b=10	0,10	0,031
Rectangular a/b=2	0,18	0,115
Cuadrada	0,21	0,14
Circular maciza	0,28	0,16
Anillo Circular d/D=0,5	0,37	0,264
Anillo Circular d/D=0,8	1,16	1,52

Como se aprecia en la tabla, las secciones menos convenientes son la canal y doble T y la más conveniente es la anular.

Comparemos el peso de una barra de sección tubular (P_t) con el de una barra de sección maciza (P_m) para distintos valores de la relación $c = d/D$, partiendo de la condición de igual resistencia. Para ello igualamos los módulos W_p de cada una:

$$W_{p_m} = \frac{\pi d_m^3}{16} = \frac{\pi D^3}{16} (1-c^4) = W_{p_t}$$

despejando tenemos la relación de diámetros, para obtener igual resistencia:

$$D = \frac{d_m}{(1-c^4)^{1/3}}$$

La relación de áreas (y peso) será:

$$\frac{P_t}{P_m} = \frac{\pi/4 (D^2 - d^2)}{\pi/4 d_m^2} = \frac{D^2 (1-c^2)}{d_m^2}$$

Introduciendo el valor calculado de D:

$$\frac{d_m^2}{(1-c^4)^{2/3}} \frac{(1-c^2)}{d_m^2} = \frac{1-c^2}{(1-c^4)^{2/3}}$$

La relación de pesos la tabulamos en función de c,

c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
P_t/P_m	1	0,99	0,96	0,92	0,85	0,79	0,70	0,61	0,51	0,39

De ésta tabla se observa que los tubos de paredes delgadas nos dan la mayor economía.

Cuando se considera la condición de rigidez como criterio de análisis, empleamos una magnitud adimensional que es:

$$j_{tor} = \frac{J_{tor}}{F^2}$$

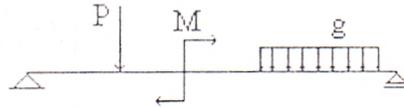
que se conoce como Momento Unitario Polar de inercia, que está tabulado.

Aquí también se aprecia que las secciones anulares de paredes delgadas son más ventajosas.

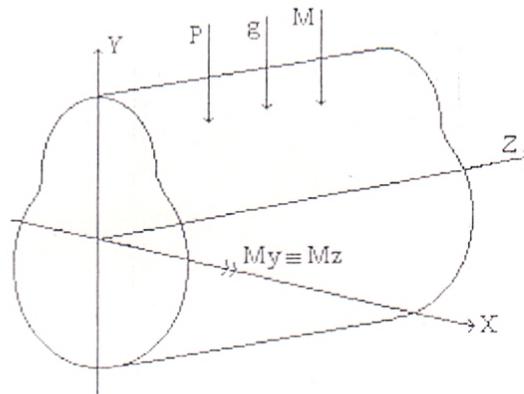
UNIDAD IV - Flexión

Nociones generales sobre la tensión en flexión

Muy a menudo la barra se somete a la acción de una carga transversal o pares exteriores cuyo plano de acción pasa por el eje de la barra,



en la sección aparecen momentos flectores, es decir, momentos interiores que actúan en un plano perpendicular al de la sección transversal de la barra:



Por acción de éste tipo de cargas, el eje de la barra se curva. El tipo indicado de sollicitación se denomina "**Flexión**". Las barras que trabajan principalmente a flexión se denominan comúnmente vigas. La flexión se denomina pura si el momento flector es la única fuerza interior en la sección.

Con mayor frecuencia, en las secciones de las barras aparece el esfuerzo de corte simultáneamente con el momento flector. A esa sollicitación la llamamos **Flexión Transversal**.

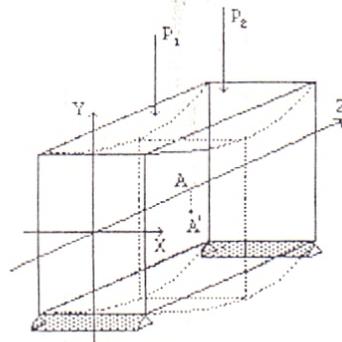
Cuando el plano de acción de la flexión pasa por uno de los planos principales de inercia de la sección, se lo denomina **Flexión Plana**; caso contrario se lo denomina **Flexión Desviada**.

En la flexión plana el eje de la barra permanece (incluso después de la deformación), en el plano de acción de las fuerzas exteriores o de sollicitación.

En la flexión desviada el plano de la deformación no coincide con el de la sollicitación.

En la flexión plana de barras de paredes delgadas, cuando el plano de las fuerzas coincide con un plano principal de inercia pero no con un plano de simetría de la sección transversal de la barra, aparecen deformaciones por torsión.

La flexión desviada pertenece a la resistencia compuesta de barras.



Tipos de apoyos en las vigas

Los apoyos de las vigas que se consideran como sistemas planos son de tres tipos:

1) Apoyo articulado móvil



2) Apoyo articulado fijo



3) Empotramiento



Cálculo de las fuerzas interiores en la flexión

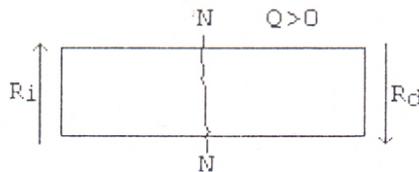
Como se observó anteriormente en la flexión plana, en las secciones transversales de la viga aparecen dos esfuerzos interiores que son el momento flector M_f y el esfuerzo de corte Q .

“La fuerza cortante Q en la sección transversal de la viga es numéricamente igual a la suma algebraica de las proyecciones, sobre el plano de la sección, de todas las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección”.

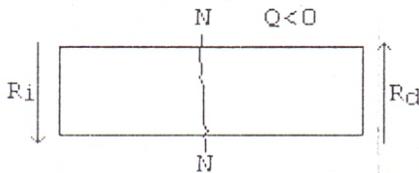
“El momento flector en la sección transversal de la viga es numéricamente igual a la suma algebraica de los momentos (respecto al centro de gravedad de la sección) de las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección dada”.

Convención sobre los signos de los momentos flectores

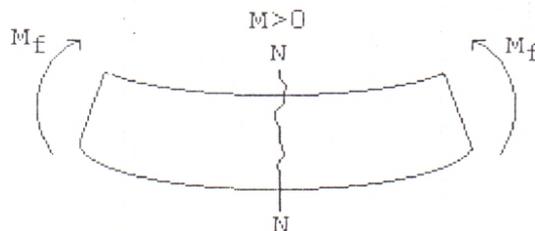
La fuerza cortante* en una sección de la viga, por ejemplo la sección N-N, se considera positiva si la resultante de las fuerzas exteriores a la izquierda de la sección, está dirigida hacia arriba y de las fuerzas a la derecha hacia abajo,



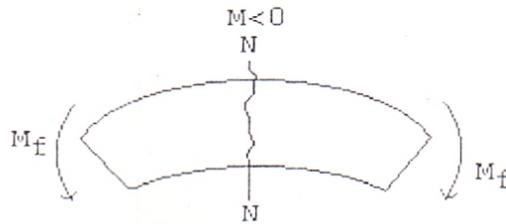
en caso contrario la fuerza cortante se considera negativa.



El momento flector en la sección de la viga, por ejemplo en la sección N-N, se considera positivo si el momento resultante de las fuerzas exteriores a la izquierda de la sección, está orientado en sentido horario y el de las fuerzas a la derecha en sentido antihorario,

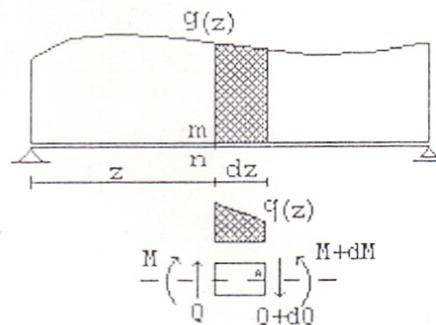


en caso contrario, el momento resulta negativo



Relaciones entre el momento flector, la fuerza cortante y la intensidad de la carga distribuida

Veamos una viga solicitada por una carga arbitraria y calculemos la fuerza cortante en una sección ubicada a una distancia z de del apoyo izquierdo



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q - q_{(z)} dz - Q - dQ = 0$$

$$q_{(z)} = -\frac{dQ}{dz}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M + Q dz - q_{(z)} dz \frac{dz}{2} - M - dM = 0 \quad (\text{se desprecia el término } q_{(z)} \frac{dz^2}{2})$$

$$Q = \frac{dM}{dz}$$

\Rightarrow

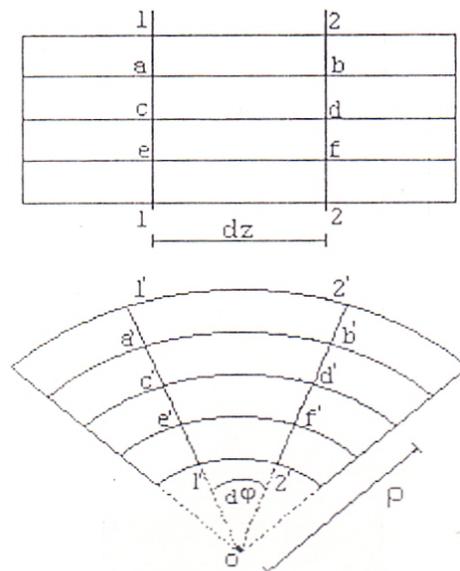
$$q_{(z)} = \frac{d^2M}{dz^2}$$

Determinación de las tensiones normales

Para el estudio de las tensiones normales, definimos tres hipótesis:

- 1ª) El material es isótropo y homogéneo, podemos aplicar la ley de Hooke
- 2ª) Los desplazamientos son infinitesimos por lo que los puntos de aplicación de la carga no cambian.
- 3ª) Por la ley de Bernoulli o de las secciones planas, en la flexión plana pura, en las secciones transversales de las vigas, surgen sólo momentos flectores, que actúan en el plano que pasa por uno de los ejes principales de inercia de las sección transversal.

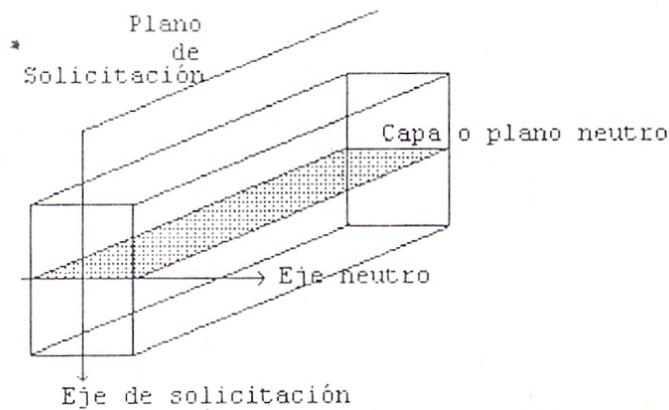
Si una viga sobre cuya superficie se ha marcado una red, se somete a flexión plana pura, podemos observar lo siguiente:



1) Las líneas 1-1 y 2-2, de la superficie de la viga, giran cierto ángulo $d\phi$. Supondremos que las secciones transversales de la viga, que eran planas antes de ocurrir la deformación, permanecen planas luego de la deformación. Los ensayos confirman ésta suposición.

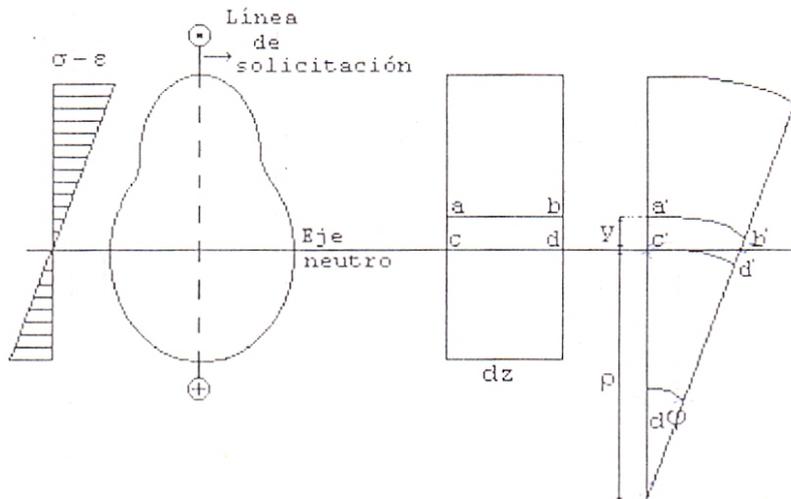
2) La fibra a-b situada en la parte convexa de la viga se alarga, lo que certifica que éstas fibras se traccionan; mientras que la fibra e-f se acorta, lo que demuestra su compresión.

La longitud de la fibra c-d no se altera y por lo tanto no sufre ni tracción ni compresión. La capa de la viga (al nivel de la fibra c-d) que no sufre ni tracción ni compresión se denomina **Capa Neutra**.



La línea por la que se corta el plano de sollicitación con el plano de la sección transversal de la viga, se denomina **Línea o Eje de Solicitación**.

Demostraremos que las deformaciones varían linealmente según la altura de la sección de la viga.



Como resultado del giro de las secciones la variación de la curvatura de la capa neutra será,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{dz}$$

El segmento arbitrario $ab = dz$ recibirá un incremento $a'b' - ab$. Como las secciones permanecen planas,

$$a'b' - ab = (\rho + y) d\phi - \rho d\phi = y d\phi$$

siendo y la distancia desde el segmento ab analizado hasta la capa neutra. El alargamiento unitario de la capa ab será

$$\epsilon = \frac{y d\phi}{dz} \quad \text{reemplazando}$$

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}$$

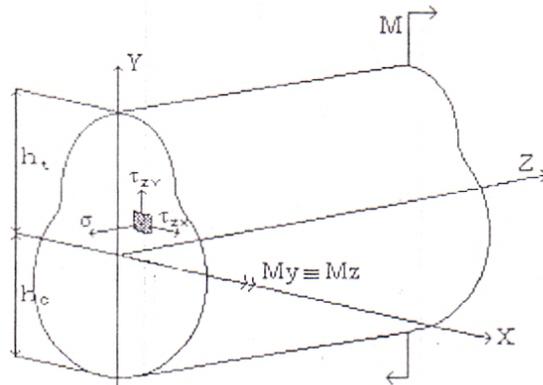
Agreguemos otra hipótesis, supongamos que las fibras de la viga no permanecen una sobre otra, es decir que la tensión en dirección perpendicular al eje de la viga es cero. Así pues cada fibra está sometida a tracción o compresión monoaxial.

Esto se confirma con los ensayos, y aplicando la ley de Hooke para éste caso monoaxial decimos que

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}$$

Diremos que las tensiones normales varían según la altura de la sección transversal, proporcionalmente a la distancia del eje neutro. Luego las tensiones máximas tendrán lugar en los bordes superior e inferior de la sección.

Analicemos el equilibrio de la parte de la viga que se encuentra sometida a la acción de un momento interior M y de las fuerzas interiores que surgen en la sección transversal,



para que esa parte se encuentre en equilibrio se tienen que satisfacer las ecuaciones de proyección y de momento, en total seis

- 1) $\Sigma Z = 0 \Rightarrow \int_F \sigma_z dF = 0$
- 2) $\Sigma X = 0 \Rightarrow \int_F \tau_{zx} dF = 0$
- 3) $\Sigma Y = 0 \Rightarrow \int_F \tau_{zy} dF = 0$
- 4) $\Sigma M_z = 0 \Rightarrow \int_F (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{zy} \cdot x) dF = 0$
- 5) $\Sigma M_x = 0 \Rightarrow \int_F \sigma \cdot y dF = M$
- 6) $\Sigma M_y = 0 \Rightarrow \int_F \sigma \cdot x dF = 0$

Las ecuaciones 2) y 3) son identidades pues σdF son fuerzas internas perpendiculares a éstos ejes y por las hipótesis enunciadas anteriormente decimos que las fibras no presionan unas sobre otras y las tensiones en dirección perpendicular al eje son nulas, luego $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

En la ecuación 1) si reemplazamos σ por $E \cdot y / \rho$:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

como E/ρ es $\neq 0$, puesto $\rho \neq 0$ ya que se supone la viga curvada, debe ser entonces $\int_F y dF = 0$ siendo ésta integral el momento estático del área de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro.

Puesto que la integral es cero, la línea neutra en la flexión pasará por el centro de gravedad de la sección.

La ecuación 4) también se convierte en una identidad por lo expuesto anteriormente dado que $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

En la ecuación 6), si reemplazamos σ por $E \cdot y / \rho$:

$$\frac{E}{\rho} \int_F x \cdot y dF = 0$$

como E/ρ es $\neq 0$ debe ser $\int_F x \cdot y dF = 0$

ésta integral representa el momento centrífugo de la sección respecto de los ejes X e Y, y siendo $J_{xy} = \int_F x \cdot y dF = 0$ deben ser ambos ejes X e Y ejes principales de inercia de la sección y el momento exterior M debe encontrarse en plano que pasa por uno de los ejes principales, condición que se cumple en el caso de flexión plana. De ésta condición se deduce que la línea de sollicitación y la línea neutra son perpendiculares entre sí en la flexión plana.

En la ecuación 5) reemplazamos σ por $E \cdot y / \rho$:

$$M = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF$$

la integral es el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro X, luego

$$J_x = \int_F y^2 dF$$

Como siempre en la parte separada pueden actuar varios momentos flectores, luego la expresión quedará:

$$M_f = \frac{E J_x}{\rho}$$

de dónde podemos expresar que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{E J_x}$$

el valor $1/\rho$ lo definimos como la curvatura de la capa neutra de la viga

$$K = \frac{1}{\rho}$$

Como hemos demostrado, el eje neutro pasa por el centro de gravedad de la sección, y siendo el eje de la viga el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones transversales, éste se encuentra en la línea neutra.

Decimos que la curvatura del eje de la viga en la flexión, es proporcional al momento flector M_f e inversamente proporcional a $E J_x$, que se denomina rigidez de la sección a flexión.

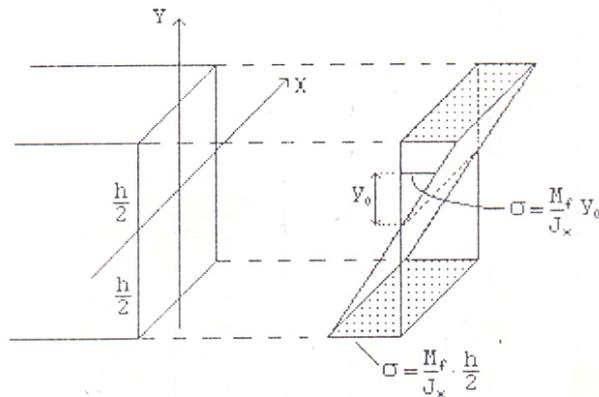
Despejando de la fórmula

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} \quad \text{la curvatura} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{E y} \Rightarrow \frac{\sigma}{E y} = \frac{M_f}{E J_x}$$

despejando σ

$$\sigma = \frac{M_f y}{J_x}$$

Fórmula que nos permite calcular el valor de la tensión normal en cualquier punto de la sección transversal de la viga, si se conoce el momento flector y el momento de inercia.

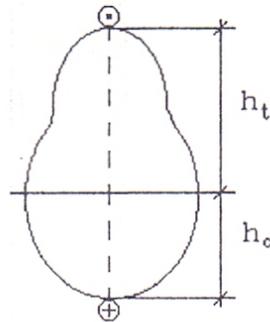


Esta fórmula es válida también para el caso de flexión transversal plana cuando en la viga actúa un momento flector y una fuerza de corte (lo demuestran los ensayos).

Condición de resistencia por tensiones normales

Para garantizar la resistencia de una viga es necesario que durante la flexión, las tensiones máximas de tracción y compresión en la sección peligrosa, donde M_f es máximo, no supere los valores admisibles.

Designemos con h_t la distancia de las fibras traccionadas más alejadas del eje neutro y con h_c a la distancia de las fibras comprimidas más alejadas del eje neutro.



Entonces la tensión máxima de tracción en flexión será

$$\sigma_{t \text{ máx}} = \frac{M_f h_t}{J_x}$$

y la tensión máxima de compresión en flexión será

$$\sigma_{c \text{ máx}} = \frac{M_f h_c}{J_x}$$

En los materiales frágiles, las tensiones admisibles son distintas, y $[\sigma_c] = 3-5 [\sigma_t]$. Es por esto que generalmente se emplean secciones que no son simétricas respecto al eje neutro.

La sección se coloca de manera que h_t sea menor que h_c y se emplea la desigualdad

$$\sigma_{t \text{ máx}} < \sigma_{c \text{ máx}}$$

En éstos casos se plantean dos condiciones de resistencia

$$\sigma_{t \text{ máx}} \leq [\sigma_t] \quad \wedge \quad \sigma_{c \text{ máx}} \leq [\sigma_c]$$

El valor de M_f a introducir en éstas fórmulas es el máximo M_f en valor absoluto.

En los materiales plásticos, por ser las tensiones admisibles iguales, conviene emplear secciones simétricas, es decir que $h_c = h_t$, luego existirá una única expresión

$$\sigma = \frac{M_f h}{J_x}$$

pero J_x es el momento resistente W_x ,
 $h/2$

luego la condición de resistencia será:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_f}{W_x} \leq [\sigma]$$

El valor de W_x depende de la sección de cada viga:

- 1) viga rectangular $W_x = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$
- 2) viga circular $W_x = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32}$
- 3) viga anular $W_x = \frac{\pi D^4}{64} (1-c^4) \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi D^4}{32} (1-c^4)$

4) perfiles laminados: los valores de W_x se obtienen de tablas de los surtidos de perfiles.

Para calcular la sección de una viga se parte de la expresión

$$W_x \geq \frac{M_f}{[\sigma]}$$

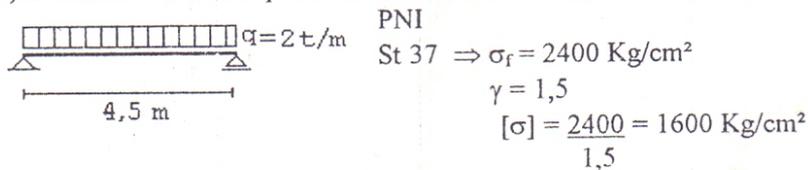
Para conocer el momento flector admisible, se calcula de:

$$[M_f] = W_x [\sigma]$$

Para conocer la carga admisible, una vez obtenido el momento flector admisible, y conociendo la relación entre el momento flector y la carga, se puede hallar el valor de la carga admisible.

Ejemplos

- 1) Determinar el menor perfil normalizado doble T, para la siguiente situación de carga:



$$M_{f \text{ máx}} = q \frac{l^2}{8} = \frac{20 \cdot 450^2}{8} = 506250 \text{ Kg cm}$$

$$W_x \geq \frac{M_f}{[\sigma]} = \frac{506250}{1600} = 316,4 \text{ cm}^3 \Rightarrow \text{de tablas PNI 24a } (W_x = 317 \text{ cm}^3)$$

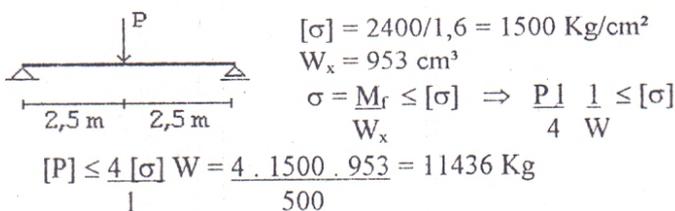
- 2) Calcular el momento admisible de la viga anterior para un perfil PNI 30, con $\gamma = 1,7$

$$W_x = 472 \text{ cm}^3$$

$$[\sigma] = \frac{2400}{1,7} = 1410 \text{ Kg/cm}^2$$

$$[M_f] = W_x [\sigma] = 472 \cdot 1410 = 665500 \text{ Kg cm}$$

- 3) Determinar la carga admisible P, para un perfil PNI 40 y $\gamma = 1,6$



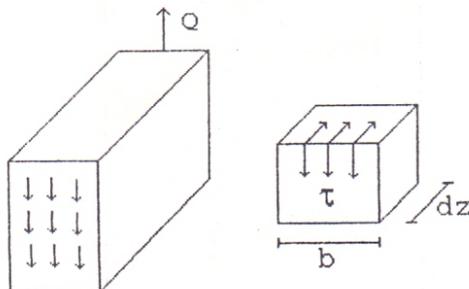
Determinación de las tensiones tangenciales por esfuerzos cortantes

En el caso de flexión transversal, en la secciones transversales de la viga surgen momentos flectores y fuerzas cortantes.

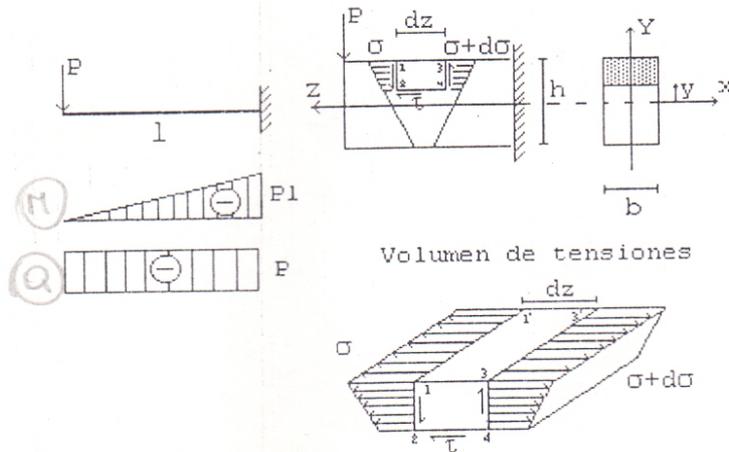
La existencia del momento flector está relacionada con las tensiones normales que se calculan con la fórmula ya conocida ($\sigma = M_f \cdot y / J_x$).

La existencia de la fuerza cortante está relacionada con las tensiones tangenciales que surgen en la sección transversal de la viga.

Por la ley de reciprocidad, aparecen tensiones tangenciales en las secciones longitudinales:



Para hallar las tensiones tangenciales, veamos primeramente el caso de una viga de sección rectangular de poco ancho. Separemos de la viga un elemento de longitud dz y ancho b igual al de la viga, sobre éste elemento actúan las siguientes fuerzas:



Sobre la cara 1-2/1'-2' actúan las tensiones normales según la fórmula:

$$\sigma_1 = \frac{M_f}{J_x} \text{ y}$$

y será M_f el momento en la cara 1-2/1'-2'.

Al mismo tiempo sobre la sección actúan también tensiones tangenciales τ , que pueden ser consideradas uniformemente distribuidas a lo ancho de la viga, debido a que el ancho de la sección es pequeño (hipótesis de Zhuravski).

Sobre la cara 3-4/3'-4' actúan tensiones normales según la fórmula:

$$\sigma_2 = \sigma + d\sigma = \frac{M_f + dM_f}{J_x} \text{ y}$$

y también las tensiones tangenciales τ .

Sobre la cara 2-4/2'-4' actúan solamente tensiones tangenciales, por la ley de reciprocidad de Cauchy, y son iguales a las τ que actúan sobre las caras verticales.

Planteando las ecuaciones de equilibrio sobre el eje horizontal, el esfuerzo tangencial sobre la cara 2-4/2'-4' se proyecta sin variar y vale

$$\tau b dz$$

Sobre la cara 1-2/1'-2' los esfuerzos normales tiene una resultante

$$N_1 = \int_{A_1} \sigma_1 dF = \int_{A_1} \sigma dF$$

Sobre la cara 3-4/3'-4' los esfuerzos normales tienen una resultante

$$N_2 = \int_{A_2} \sigma_2 dF = \int_{A_2} (\sigma + d\sigma) dF.$$

Estas integrales deben calcularse sobre el área de la parte separada.

De la ecuación de equilibrio $\Sigma F_z = 0$ se obtiene:

$$N_1 + \tau b dz - N_2 = 0$$

luego

$$\int_{A_1} \sigma dF + \tau b dz + \int_{A_2} (\sigma + d\sigma) dF = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} \frac{M_f}{J_x} y dF + \tau b dz - \int_{A_2} \left(\frac{M_f + dM_f}{J_x} y \right) dF = 0$$

siendo $A_1 = A_2$

$$\tau b dz - \frac{dM_f}{J_x} \int_{A_2} y dF = 0$$

la integral representa el momento estático del área de la parte separada de la sección respecto del eje neutro

$$S_x = \int_{\Lambda_2} y \, dF$$

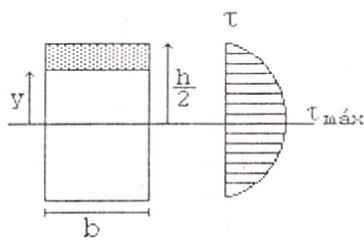
reemplazando

$$\frac{S_x}{J_x} dM = \tau \, b \, dz$$

y siendo $\frac{dM}{dz} = Q$

$$\tau = \frac{Q S_x}{J_x b} \quad \text{Fórmula de Zhuravsky}$$

La ley de distribución de las tensiones tangenciales, en la sección de una viga rectangular, se determina por la variación del momento estático S_x , puesto que las otras magnitudes permanecen constantes



$$J_x = \frac{b h^3}{12}$$

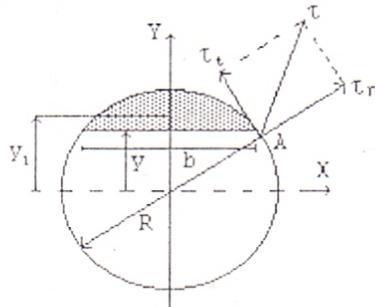
$$S_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h/2 + y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Reemplazando ambos valores en la expresión de Zhuravsky:

$$\tau = \frac{Q \, b/2 \, (h^2/4 - y^2)}{b \, h^3/12 \, b} = \frac{6 Q}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Se observa que la tensión tangencial máxima se produce en la línea neutra para una sección rectangular.

Con cierta aproximación la ecuación de Zhuravsky nos permite calcular las tensiones tangenciales en vigas de sección transversal de cualquier configuración. En el caso de una sección circular, se obtiene el siguiente gráfico de τ :



Si el momento estático es $S_x = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$ $J_x = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$ y $b_0 = 2 (R^2 - y^2)$

Reemplazando éstas ecuaciones en la de τ nos queda:

$$\tau = \frac{Q S_x}{J_x b} = \frac{Q \, 2/3 (R^2 - y^2)^{3/2}}{\frac{\pi R^4}{4} \, 2 (R^2 - y^2)^{1/2}} = \frac{4 Q}{3 \pi R^4} (R^2 - y^2)$$

Para $y = \pm R$ $\tau = 0$

Para $y = 0$ $\tau = \frac{4 Q}{3 A}$

El valor de la tensión tangencial para una sección circular es aproximado. Analizamos la tensión tangencial en el punto A descomponiendo en dos direcciones, una normal τ_n y otra tangencial τ_t . Según las condiciones de sollicitación la superficie exterior de la barra está libre de tensiones tangenciales, luego las tensiones recíprocas a τ_n que yacen sobre la superficie exterior

son nulas y también lo debe ser τ_n . Es decir que las tensiones tangenciales en las proximidades del contorno no se orientan según la tangente al contorno.

La suposición que τ está dirigida según el eje y es errónea, y aparecen luego tensiones según la dirección de x. Para conocer éstos valores debemos recurrir a la teoría de la elasticidad, que demuestra que los valores de τ_x son inferiores a los de τ_y .

Líneas isostáticas

Si en cualquier parte de la viga sometida a flexión, se presentan simultáneamente σ y τ , σ perpendicular a la sección transversal y τ de igual magnitud en dirección vertical y horizontal, se originan en determinados elementos superficiales y oblicuos los llamados esfuerzos principales máximos y mínimos (tracción y compresión).

Sabemos que actúan en las direcciones de las superficies en las cuales no existen esfuerzos de corte y se calculan por las fórmulas:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma \pm (\sigma^2/4 + \tau^2)^{1/2}}{2}$$

la dirección se obtiene por:

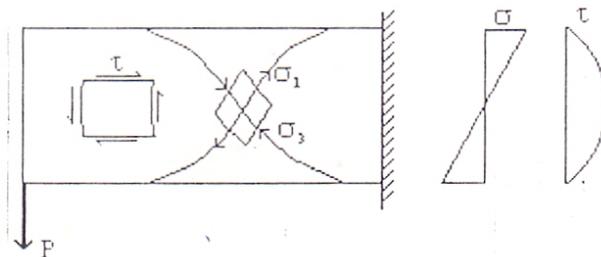
$$\text{tg } \varphi = \frac{2\tau}{\sigma}$$

Si partimos de un punto de la viga, seguimos la dirección de los elementos en que se presentan $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$, se obtienen dos curvas que en ese punto son perpendiculares.

El conjunto de todas esas curvas en toda la viga forman dos haces de líneas que se cortan en ángulo recto, y se llaman líneas isostáticas (tracción y compresión).

Las trayectorias de las tensiones principales cortan a la línea neutra a 45°, donde $\sigma = 0$, luego los esfuerzos principales allí toman el valor de τ en ese punto.

Correspondiendo a la marcha de la trayectoria se forman en el material de la viga bóvedas de compresión y tracción, que están en equilibrio mutuo, y dan las direcciones según las cuales se verifica la fatiga sólo por compresión o por tracción.



Desplazamientos en la flexión - Ecuación diferencial de la línea elástica de la viga

La forma de la línea elástica se puede obtener mediante la fórmula ya conocida

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{Ej_x}$$

siendo ρ la curvatura que toma el eje flexionado de la viga. En un sistema inmóvil de coordenadas XY, la ecuación matemática de la curvatura se escribe:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Debido a la hipótesis de desplazamientos pequeños, la tangente del ángulo entre la línea elástica y el eje z es muy pequeña. Por tanto podemos despreciar el término y' en comparación con la unidad, luego la expresión matemática de la curvatura podemos expresarla como:

$$\frac{1}{\rho} \cong y''$$

de donde obtenemos que:

$$y'' = \frac{M_f}{E J_x}$$

comparando ésta expresión con la obtenida para relacionar el momento flector con el corte y la carga, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q \text{ (carga)}$$

$$\theta = y'$$

$$M_f = E J_x y''$$

$$\frac{dM}{dz} = Q = \frac{d(E J_x y'')}{dz} = E J_x y'''$$

$$\frac{dQ}{dz} = q = \frac{d^2(E J_x y'')}{dz^2} = E J_x y^{iv}$$

Para el caso que la sección transversal de la viga sea constante, éstas expresiones quedan:

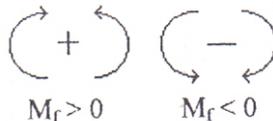
$$\theta = y' = \frac{1}{E J_x} \int M_f dz + c_1$$

$M_f = E J_x y''$ integrando $E J_x y' = \int M_f dz + c_1$ luego:

$$\frac{dM}{dz} = Q = \frac{d(E J_x y'')}{dz} \text{ integrando } E J_x y' = \int dz \int M_f dz + c_1 z + c_2$$

$$y = \frac{1}{E J_x} \iint M_f dz + c_1 z + c_2$$

Convenciones de signos:



Si además la carga q fuera uniformemente distribuida resulta:

$$y^{iv} = \frac{q}{E J_x} = \text{cte.}$$

Lo que nos permite asegurar que la forma de la barra flexionada se representa por una curva de cuarto orden.

Si la carga distribuida q fuera nula, la forma de la barra flexionada se representa por una curva de tercer orden.

“Si el sistema elástico es capaz de mantener las propiedades elásticas en los casos de grandes desplazamientos, se lo denomina sistema flexible”.

En flexión, la magnitud de los desplazamientos elásticos límites se determinan por las propiedades del material y por la magnitud de la razón entre la longitud de la barra y la dimensión de la sección transversal en el plano de la sección.

El alargamiento máximo en flexión es:

$$\epsilon_{\max} = \frac{y_{\max}}{\rho}$$

por lo que la tensión será:

$$\sigma_{\max} = \frac{E y_{\max}}{\rho}$$

La barra puede recibir grandes desplazamientos cuando varía considerablemente la curvatura ($1/\rho$). Esto es posible cuando y_{\max} es suficientemente pequeña.

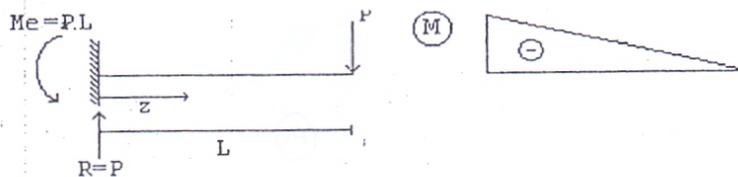


La barra flexible tiene por lo tanto la forma de una banda fina, y frecuentemente se la denomina barra fina flexible. En la barra flexible, la ecuación diferencial de la línea elástica está dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{E J_x} = \frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

la expresión de M_f en la barra flexible se calcula teniendo en cuenta los desplazamientos que aparecen en la barra

Ejemplo:



$$M_z = -M_e + R \cdot z = -P \cdot L + P \cdot z \Rightarrow \boxed{M(z) = P(z-L)}$$

$$y'' = \frac{M(z)}{E J_x}$$

$$y' = \int \frac{M(z)}{E J_x} dz + C_1 = \int_0^L \frac{P(z-L)}{E J_x} dz + C_1 = \frac{P}{E J_x} \left[\frac{z^2}{2} - Lz \right]_0^L + C_1 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{P}{E J_x} \left(\frac{z^2}{2} - Lz \right) + C_1}$$

$$y = \iint \frac{M(z)}{E J_x} dz + C_1 z + C_2 = \int \frac{P}{E J_x} \left(\frac{z^2}{2} - Lz \right) dz + C_1 z + C_2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{P}{E J_x} \left(\frac{z^3}{6} - L \frac{z^2}{2} \right) + C_1 z + C_2}$$

Ec. de la línea elástica

Vamos a determinar las constantes de integración:

$$\text{Para } z = 0 \Rightarrow y' = \theta = 0 \rightarrow y' = \frac{P}{E J_x} \left(\frac{z^2}{2} - Lz \right) + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\text{Para } z = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow y = \frac{P}{E J_x} \left(\frac{z^3}{6} - L \frac{z^2}{2} \right) + C_1 z + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\boxed{y' = \frac{P}{E J_x} (z^2 - Lz)}$$

$$\boxed{y = \frac{P}{E J_x} \left(\frac{z^3}{6} - L \frac{z^2}{2} \right)}$$

Giro máximo:

$$y'(z=L) = \frac{P L^2}{2 E J_x}$$

Flecha máxima:

$$y(z=L) = -\frac{P L^3}{3 E J_x}$$

$\theta = \int_0^L \frac{M}{E J_x} dz = \frac{M \cdot L}{E J_x}$

Energía potencial de deformación en la flexión

En la flexión, al igual que en todas las deformaciones, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores se gasta en alterar la energía potencial de la barra deformada.

Calculemos la energía potencial para el caso de la flexión pura. "El trabajo del momento exterior se puede expresar como el producto del momento por la mitad del ángulo de giro de la sección":

$$dA = \frac{1}{2} M d\varphi$$

El trabajo de los momentos flectores exteriores será igual a $dU = \frac{1}{2} M_f d\varphi$

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho}$$

conocemos la expresión de curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{E J_x}$$

luego

$$dU = \frac{1}{2} M_f \frac{dz}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{E J_x} dz$$

En flexión pura el momento flector M_f es constante y por lo tanto el trabajo total de las fuerzas interiores de una viga de longitud l es:

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_f^2 l}{E J_x}$$

La energía potencial es igual al trabajo de las fuerzas interiores pero de signo opuesto.

$$E_{pot} = -U = \frac{1}{2} \frac{M_f^2 l}{E J_x}$$

Esta fórmula es análoga a la de la energía potencial de tracción y torsión. En el caso general de flexión transversal, es decir donde aparece flexión y corte simultáneamente en las secciones transversales, la energía potencial de la deformación se compone de dos partes, una correspondiente al momento flector y la otra correspondiente al esfuerzo de corte, que como lo demuestran los cálculos, en general la energía potencial por corte es muy pequeña y se puede prescindir de ella.

Primer teorema de Castigliano

En 1876, Alberto Castigliano publicó un notable artículo en el que presentaba dos importantes teoremas. En el primer teorema de Castigliano, que proporciona un método general para la determinación de las deformaciones elásticas en las estructuras, puede enunciarse como sigue:

"La primera derivada parcial de la energía total de deformación de la estructura con respecto a una de las acciones aplicadas es igual al desplazamiento a lo largo de esa acción".

Siendo P la acción (fuerza o par), Δ_p el correspondiente desplazamiento (lineal o angular) según P , y W la energía total de deformación, lo enunciado puede expresarse en la forma

$$\Delta_p = \frac{\partial W}{\partial P}$$

Para demostrar el teorema, considérese la viga cargada de la figura 3. La posición deformada está representada por la línea de trazos.

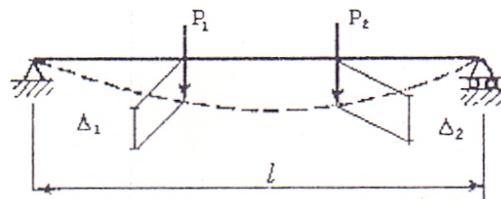


Fig. 3

Si se considera sólo el trabajo interno resultante del momento flector, se tiene como energía total de deformación para la viga la siguiente expresión

$$W = \int \frac{M^2}{2.E.J} dx$$

Sea M_1 el momento flector en cualquier sección debido a la aplicación gradual de P_1 , y M_2 el momento flector en la misma sección debido a la aplicación gradual de P_2 . el momento flector total en cualquier sección de la viga está dado por

$$M = M_1 + M_2 = m_1.P_1 + m_2.P_2$$

m_1 : momento flector en cualquier sección debido a una carga unitaria en el lugar de P_1

m_2 : momento flector en la misma sección debido a una carga unitaria en el lugar de P_2

Así

$$\frac{\partial W}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \int \frac{M^2}{2.E.J} dx = \int \frac{M(\partial M / \partial P_1)}{E.J} dx = \int \frac{M.m_1}{E.J} dx = \Delta_1$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial P_2} = \frac{\partial}{\partial P_2} \int \frac{M^2}{2.E.J} dx = \int \frac{M(\partial M / \partial P_2)}{E.J} dx = \int \frac{M.m_2}{E.J} dx = \Delta_2$$

El último paso de la igualdad de las dos expresiones anteriores se basa en la ecuación (12) del trabajo virtual.

Volviendo ahora a la cercha cargada de la figura 4. La energía total de deformación es

$$W = \sum \frac{S^2.L}{2.A.E}$$

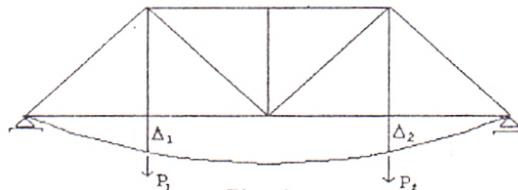


Fig. 4

Si se hace

S_1 = fuerza interna en cualquier barra debido a la fuerza P_1 gradualmente aplicada

S_2 = fuerza interna en cualquier barra debido a la fuerza P_2 gradualmente aplicada

se tiene que la fuerza interna total sobre cualquier barra está dada por

$$S = S_1 + S_2 = P_1.u_1 + P_2.u_2$$

en donde

u_1 : fuerza interna en cualquier barra debida a una carga unitaria en el lugar de P_1

u_2 : fuerza interna en cualquier barra debida a una carga unitaria en el lugar de P_2

Así

$$\frac{\partial W}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \sum \frac{S^2}{2.A.E} dx = \sum \frac{S(\partial S / \partial P_1)}{A.E} L = \int \frac{S.u_1}{A.E} L = \Delta_1$$

$$\frac{\partial W}{\partial P_2} = \frac{\partial}{\partial P_2} \sum \frac{S^2}{2.A.E} dx = \sum \frac{S(\partial S / \partial P_2)}{A.E} L = \int \frac{S.u_2}{A.E} L = \Delta_2$$

El último paso de la igualdad en cada una de las expresiones anteriores se basa en la ecuación (6) del trabajo virtual.

Es interesante resaltar que el primer teorema de Castigliano no difiere básicamente del método del trabajo virtual para el análisis de estructuras lineales sometidas a cargas externas. La diferencia es solamente cuestión de disposición en los cálculos. Utilizando el método del trabajo virtual, se obtiene de las ecuaciones (11) y (6):

$$1. \Delta = \int \frac{M \cdot m}{E \cdot J} dx \quad \text{para una viga o un pórtico rígido}$$

$$\text{y} \quad \Delta = \sum \frac{S \cdot u \cdot L}{A \cdot E} \quad \text{para una cercha}$$

mientras con la aplicación del primer teorema se obtiene

$$\Delta = \int \frac{M(\partial M / \partial P)}{E \cdot J} dx \quad \text{para una viga o un pórtico rígido}$$

$$\Delta_2 = \sum \frac{S(\partial S / \partial P_2) L}{A \cdot E} \quad \text{para una cercha}$$

Segundo teorema de Castigliano

El método de las deformaciones compatibles aplica el principio de superposición en las deformaciones elásticas de la estructura primaria, en los puntos de aplicación de las hiperestáticas X_1, X_2, \dots, X_n , siendo la estructura primaria estable y estáticamente determinada y sometida a las cargas externas y a n fuerzas hiperestáticas. Las expresiones que establecen que el desplazamiento de cada hiperestática es igual a cero para una estructura cargada con apoyos que no sufren asentamientos, pueden plantearse aplicando el primer teorema de Castigliano en la forma:

$$\Delta_1 = \frac{\partial W}{\partial X_1} = 0$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0$$

$$\Delta_n = \frac{\partial W}{\partial X_n} = 0$$

donde W es la *energía total de deformación* de la estructura primaria y es, por tanto, función de las cargas externas y de las hiperestáticas desconocidas X_1, X_2, \dots, X_n . Habrá pues, tantas ecuaciones simultáneas como hiperestáticas desconocidas aparecen en el problema. La ecuación

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = \frac{\partial W}{\partial X_2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial X_n} = 0$$

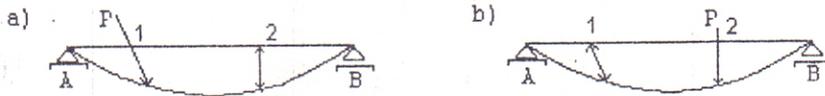
se conoce con el nombre de Segundo Teorema de Castigliano, teorema que puede enunciarse como sigue: "las acciones hiperestáticas deben tener un valor tal que la energía de deformación de la estructura sea un mínimo compatible con el equilibrio. Por ésta razón se le denomina a veces Teorema del Trabajo Mínimo.

Por la demostración anterior es evidente que el método del trabajo mínimo y el método de las deformaciones compatibles son en realidad idénticos. La elección entre los dos métodos es cuestión de preferencia personal. Para tener un enunciado más sencillo, el método del trabajo mínimo es utilizado, más ampliamente por los ingenieros de estructuras. Sin embargo, éste método está limitado al cálculo de fuerzas internas producidas solamente por cargas externas sobre estructuras con apoyos que no sufren asentamientos. No puede utilizarse para determinar esfuerzos producidos por cambios de temperatura, movimientos de apoyo, defectos de fabricación, etc., y por tanto, no es tan general como el método de las deformaciones compatibles.

Ley de la reciprocidad de los desplazamientos de Maxwell

Refiriéndonos a las figuras 5-a y 5-b, observemos que la ley establece simplemente que

$$\Delta_{1,2} = \Delta_{2,1}$$



donde

$\Delta_{1,2}$ = desplazamiento en el punto 2 debida a la carga P aplicada en el punto 1

$\Delta_{2,1}$ = desplazamiento en el punto 1 a lo largo de la línea de acción primitiva de P debido a la misma carga aplicada en el punto 2 a lo largo del desplazamiento primitivo de $\Delta_{2,1}$.

Para probar lo expuesto, calculamos ambos desplazamientos por el método del trabajo virtual. Así pues, y según la figura 5-a, tenemos

$$\Delta_{2,1} = \int \frac{M_1 \cdot m_2}{E \cdot J} dx$$

donde

M_1 = momento en cualquier sección debido a la carga P aplicada en el punto 1

m_2 = momento en la misma sección debido a la aplicación de la carga unitaria aplicada en el punto 2 a lo largo del desplazamiento deseado.

De igual modo, de la figura 5-b obtenemos

$$\Delta_{1,2} = \int \frac{M_2 \cdot m_1}{E \cdot J} dx$$

pero $M_1 = P \cdot m_1$ y $M_2 = P \cdot m_2$

Fácilmente se puede ver que:

$$\Delta_{2,1} = \int \frac{(P \cdot m_1)}{E \cdot J} m_2 dx = \int \frac{(P \cdot m_2)}{E \cdot J} m_1 dx = \int \frac{M_2 \cdot m_1}{E \cdot J} dx = \Delta_{1,2}$$

Para el caso particular en que $P=1$ podemos escribir:

$$\delta_{2,1} = \delta_{1,2}$$

donde

$\delta_{2,1}$: desplazamiento en el punto 2 resultante de la aplicación de la carga unitaria en el punto 1

$\delta_{1,2}$: desplazamiento en el punto 1 a lo largo de la línea de acción primitiva debida a la carga unitaria aplicada en el punto 2, a lo largo del desplazamiento

primitivo.

Hasta aquí hemos demostrado la ley en relación con las fuerzas aplicadas y sus correspondientes desplazamientos lineales. Sin embargo la reciprocidad se extiende al caso de desplazamientos angulares. En el caso de dos momentos o pares unitarios que actúan en dos puntos de una estructura, la ley establece: "El desplazamiento angular en el punto 2 de una estructura, originado por un momento o par unitario en el punto 1, es igual al desplazamiento en el punto 1 debido a un momento unitario en el punto 2".

Basándonos en el trabajo virtual, se puede observar también que el desplazamiento angular en el punto 2 debido a una fuerza unitaria aplicada en el punto 1 es igual en magnitud al desplazamiento lineal del punto a lo largo de la fuerza primitiva debido a un par unitario aplicado en el punto 2.

La ley de Maxwell es completamente general y se aplica a cualquier tipo de estructura, siempre y cuando el material de la misma sea elástico y cumpla con la ley de Hooke.

Ley de Betti

El teorema de reciprocidad de Maxwell es un caso particular de la ley de Betti que puede expresarse brevemente en la forma:

$$W_{1,2} = W_{2,1} \quad (13)$$

donde:

$W_{1,2}$ es el trabajo externo realizado por un sistema de fuerzas P_1 ya aplicado sobre la estructura, durante la deformación producida por otro sistema de fuerzas P_2 , aplicado después.

$W_{2,1}$ es el trabajo externo realizado por un sistema de fuerzas P_2 ya aplicado sobre la estructura, durante la deformación producida por otro sistema de fuerzas P_1 , aplicado en segundo lugar.

Para demostrar éste teorema consideremos la viga de la figura 6-a, a la que aplicamos en primer lugar P_1 (representa el sistema de fuerzas 1). La curva elástica a que da lugar P_1 se indica por medio de la línea de trazos.

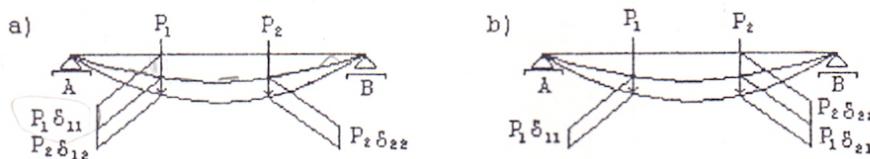


Fig. 6

El trabajo realizado durante ésta operación es:

$$\frac{1}{2} P_1(P_1 \cdot \delta_{1,1})$$

P_2 (representa el sistema de fuerzas 2) se aplica a continuación dando lugar a un desplazamiento adicional de la viga.

El trabajo adicional es:

$$P_1(P_2 \cdot \delta_{1,2}) + \frac{1}{2} P_2(P_2 \cdot \delta_{2,2})$$

El trabajo total realizado es entonces

$$\frac{1}{2} P_1(P_1 \cdot \delta_{1,1}) + P_1(P_2 \cdot \delta_{1,2}) + \frac{1}{2} P_2(P_2 \cdot \delta_{2,2}) \quad (14)$$

Si invertimos el orden de aplicación de los dos sistemas de fuerzas (figura 6-b), el trabajo total, obtenido en forma similar, puede expresarse como

$$\frac{1}{2} P_2(P_2 \cdot \delta_{2,2}) + P_2(P_1 \cdot \delta_{2,1}) + \frac{1}{2} P_1(P_1 \cdot \delta_{1,1}) \quad (15)$$

Igualando las ecuaciones (14) y (15) obtenemos

$$P_1(P_2 \cdot \delta_{1,2}) = P_2(P_1 \cdot \delta_{2,1}) \quad (16)$$

como se estableció en la ecuación (13).

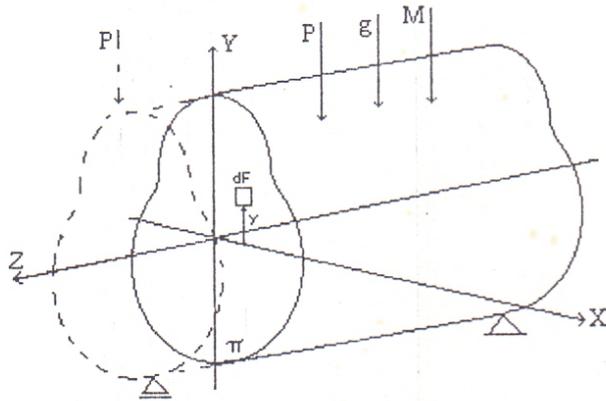
La ecuación (16) indica también que

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$$

lo cual se conoce como "Ley de Reciprocidad de Desplazamientos".

Debe observarse que la ley de Betti se basa en el principio de independencia de efectos de las cargas, el cual es cierto siempre y cuando los desplazamientos sean pequeños y también independientes. La ley se aplica a cualquier tipo de estructura elástica con apoyos sin asentamientos y temperatura constante. Se cumple para cualquier tipo de cargas y desplazamientos, esto es, tanto para momentos y rotaciones como para fuerzas y desplazamientos lineales.

Fórmula general de la energía de la sección transversal



$$u_{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2 E} = \frac{M^2 y^2}{2 J_x^2 E}$$

$$u_{\tau} = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2 G} = \frac{Q^2 S_y^2}{2 J_x^2 b_y^2 G}$$

$$U = \int \int \int_V (u_{\sigma} + u_{\tau}) dv = \int_0^1 dz \int_A (u_{\sigma} + u_{\tau}) dF$$

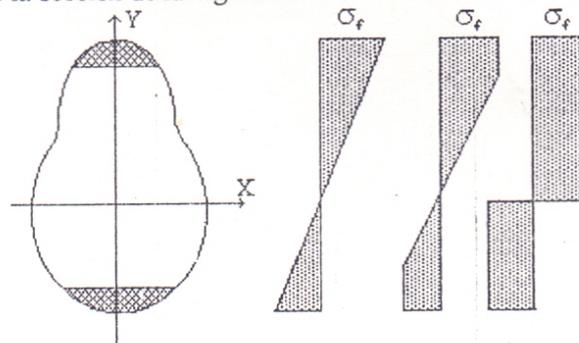
$$U = \int_0^1 dz \left[\frac{M_{f(z)}^2}{2 J_x^2 E} \int_A y^2 dF + \frac{Q_{f(z)}^2 A}{2 J_x^2 G A} \int_A \frac{S_y^2}{b_y^2} dF \right]$$

siendo $J_x = \int_A y^2 dF$ y $K = \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_y^2}{b_y^2} dF$

$$U = \int_0^1 \left[\frac{M_{f(z)}^2}{2 E J_x} + \frac{K Q^2}{2 G A} \right] dz \Rightarrow \boxed{U = \int_0^1 \frac{M_f^2}{2 E J_x} dz + \frac{K Q^2}{2 G A} dz}$$

Flexión plástica en vigas isostáticas

En la flexión elástica se entendía por estado peligroso aquel en que las tensiones normales en los puntos extremos de la sección de la viga alcanzaban el límite de fluencia.



El momento flector resultaba ser:

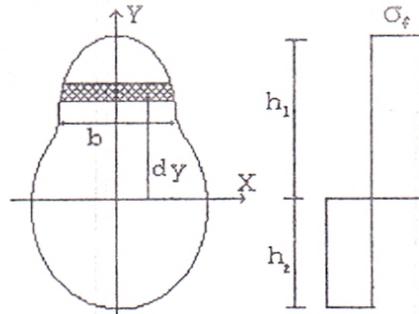
$$M_f = W_x \sigma_f$$

sin embargo como se ve en los ensayos, éste estado no es el estado límite. Es posible que la carga aumente como consecuencia de la propagación de la fluencia en las fibras interiores de la viga.

El aumento posterior de la carga no se tiene en cuenta por que resulta imposible. En la sección peligrosa donde actúa el momento flector máximo surge una rotulación plástica. En esa sección el momento flector alcanza un valor límite $M_{f \text{ lfm}}$.

La magnitud de éste momento se obtiene de la condición de que todas las tensiones normales en todos los puntos de la sección peligrosa son iguales (en valor absoluto), e iguales al límite de fluencia σ_f .

En el caso de flexión pura, hallamos la posición de la línea neutra de la sección transversal teniendo en cuenta que la fuerza axial resultante de las fuerzas interiores $\sigma_f dF$, es igual a cero.



$$N = \int_F \sigma_f dF = 0$$

$$N = \sigma_f \int_0^{h1} b dy - \sigma_f \int_0^{h2} b dy = 0$$

siendo b el ancho de la viga (variable); las integrales representan el área de las partes traccionada y comprimida F_1 y F_2 , de ésta manera $\sigma_f (F_1 - F_2) = 0$, de donde se obtiene que $F_1 = F_2$.

Por lo tanto en la flexión plástica, la línea neutra divide la sección en dos partes de igual área. La expresión del momento flector límite se obtiene como el momento resultante de las fuerzas normales interiores $\sigma_f dF$:

$$M_{flim} = \int_F \sigma_f y dF = \sigma_f \int_{F1} y dF + \sigma_f \int_{F2} y dF$$

las integrales representan los momentos estáticos S_{1x} y S_{2x} de las áreas comprimida y traccionada respecto de la línea neutra:

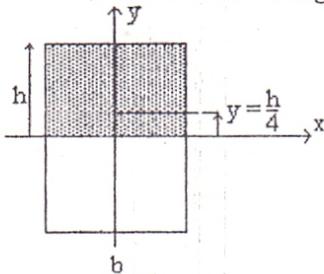
$$M_{flim} = \sigma_f (S_{1x} + S_{2x})$$

Para las secciones que son simétricas respecto del eje perpendicular al plano de sollicitación, surge que $S_{1x} = S_{2x} = S_{0x}$. Siendo S_{0x} el momento estático de la mitad de la sección respecto de la línea neutra. La expresión queda ahora:

$$M_{flim} = \sigma_f \cdot 2 S_{0x} = \sigma_f \cdot W_{xplást}$$

siendo $W_{xplást}$ el Módulo Plástico de la sección en flexión.

Para una sección rectangular:



$$S_{0x} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8}$$

$$W_{xplást} = 2 \frac{b h^2}{8} = \frac{b h^2}{4}$$

La relación de los momentos

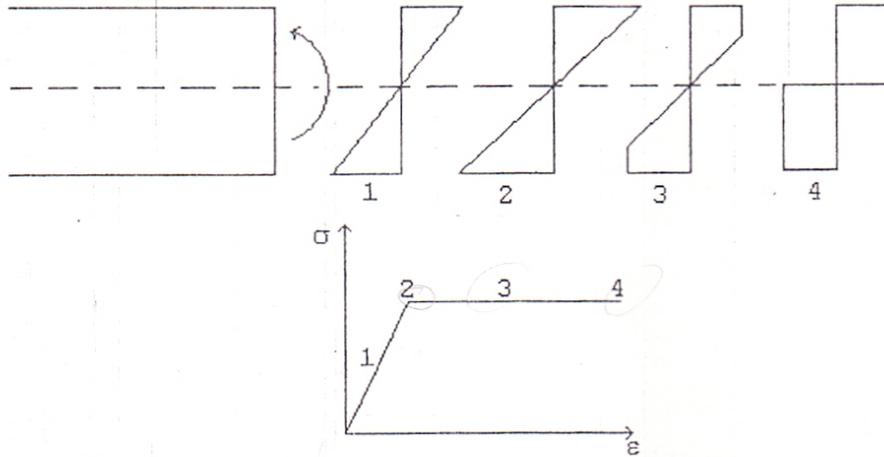
$$\frac{M_{flim}}{M_{fluen}} = \frac{W_{xplást}}{W_{xelás}} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = 1,5$$

Esto nos indica que el momento flector límite (considerando las deformaciones plásticas) aumenta 1,5 veces.

En el caso de una sección circular la razón entre momentos es 1,7. Para una sección anular con relación $D/d = 0,5$, la razón de momentos es 1,57. En una sección doble T la razón es 1,15.

En el caso de flexión transversal, todo lo expuesto es válido, como primera aproximación, así lo demuestran los ensayos.

Fundamentos del cálculo de la resistencia de las vigas por capacidad portante



Las diferencias entre el cálculo de la resistencia por tensiones admisibles y por capacidad resistente, en el caso de materiales plásticos (material ideal de Prandtl como ser los aceros de bajo contenido de carbono F-20, F-22 de CIRSOC), radica en las diferentes etapas del estado de deformación de la viga que se consideran como estado peligroso.

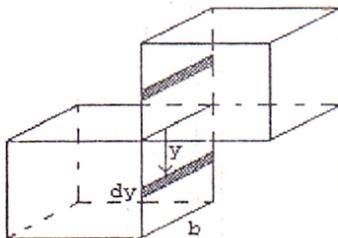
El cálculo por capacidad resistente (rotura) se realiza generalmente por las tensiones normales, sin considerar el endurecimiento del material de la viga originado por la deformación plástica. Se escoge como base el diagrama de tracción y compresión idealizado del material de la viga (Prandtl).

Al calcular por tensiones admisibles se considera peligroso el estado de la viga cuando en la fibra extrema más tensionada, la tensión normal alcanza el límite de fluencia del material σ_f .

De acuerdo con el gráfico σ - ϵ , el momento correspondiente al estado peligroso de la viga será cuando $M_f = \sigma_f \cdot W_x$. Introduciendo el coeficiente de seguridad n se obtiene la siguiente expresión para el momento flector admisible:

$$M_{\max} = \frac{\sigma_f \cdot W_x}{n} = [\sigma] \cdot W_x \quad (1)$$

Al calcular por la capacidad resistente, se considera peligroso el estado de la viga cuando en todos los puntos de la sección peligrosa las tensiones normales alcanzan valores iguales al límite de fluencia del material (Estado II). Este estado, de acuerdo con el diagrama σ - ϵ , le corresponde el siguiente valor del momento flector:



$$\begin{aligned} dA &= b \cdot dy \\ M_f &= \int \sigma_f \cdot dA \cdot y \cdot 2 \\ M_f &= 2 \cdot \sigma_f \int y \cdot dA = 2 \cdot \sigma_f \cdot S \end{aligned}$$

Siendo S el momento estático de la mitad del área de la sección transversal de la viga respecto al eje central z . Puesto que el aumento posterior del momento flector en esta sección es imposible, se dice que en la sección surge una "Articulación Plástica" o "Rótula Plástica", y la viga se convierte así en un sistema cinemáticamente variable, también llamado "Mecanismo".

La fórmula para la determinación del momento flector admisible se obtienen introduciendo el coeficiente de seguridad:

$$M_{\max} = \frac{2 \cdot \sigma_f \cdot S}{n} = 2 \cdot [\sigma] \cdot S \quad (2)$$

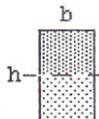
Comparando las fórmulas (1) y (2) se puede advertir que "en el caso de coeficientes η ", el momento flector admisible $M'_{m\acute{a}x}$ al calcular por capacidad resistente es η veces mayor que el admisible $M_{m\acute{a}x}$ obtenido del cálculo por tensiones admisibles, siendo

$$\eta = \frac{M'_{m\acute{a}x}}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2 \cdot [\sigma] \cdot S}{[\sigma] \cdot W_x} = \frac{2 \cdot S}{W_x}$$

la magnitud η depende solamente de la configuración de la sección transversal de la viga.

Ejemplos:

1) Sección rectangular



$$\eta = 2 \cdot \frac{\frac{b \cdot h^2}{6} \cdot h}{\frac{b \cdot h^2}{2}} = \frac{3}{2}$$

2) Perfil doble te

PNI N°8

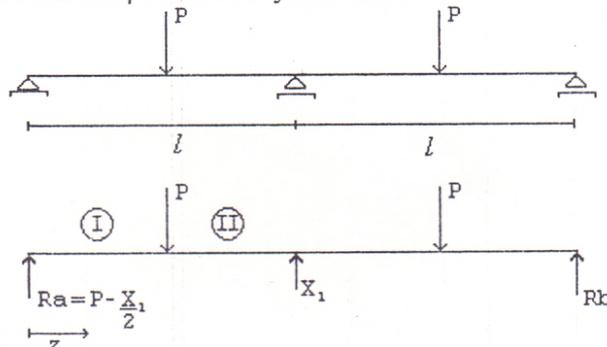
$$\eta = \frac{2 \cdot 11,4 \text{ cm}^3}{19,5 \text{ cm}^3} = 1,17$$

Sistemas hiperestáticos (plastificación)

Se dice que una estructura ha llegado al "colapso" o en otras palabras, que su capacidad de carga ha sido totalmente agotada cuando la elástica del sistema a dejado de ser una curva continua, para transformarse en un diagrama de desplazamiento del mecanismo cuyas barras se pueden considerar prácticamente rectas debido a la pequeñez de las deformaciones elásticas frente a las plásticas.

Consideremos una viga de dos tramos iguales y sometida a dos cargas concentradas en los centros de los tramos.

Como primera medida deberemos calcular el valor de alguna de sus incógnitas superabundantes utilizando cualquier método ya conocido:



I) $0 \leq z \leq L/2$

$$M_I = R_a \cdot z = \frac{(P - X_1) \cdot z}{2}$$

$$M_I^2 = R_a^2 \cdot z^2 = \frac{(P - X_1)^2 \cdot z^2}{2}$$

II) $L/2 \leq z \leq L$

$$M_{II} = R_a \cdot z - P \cdot (z - L/2) = \frac{(P - X_1) \cdot z}{2} - P \cdot (z - L/2) = \frac{P \cdot L}{2} - z \cdot \frac{X_1}{2}$$

$$M_{II}^2 = \frac{P^2 \cdot L^2}{4} - P \cdot X_1 \cdot \frac{L \cdot z}{2} + X_1^2 \cdot \frac{z^2}{4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \Rightarrow U = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{L/2} \frac{M_I^2}{E \cdot J} dz + \frac{1}{2} \int_{L/2}^L \frac{M_{II}^2}{E \cdot J} dz \right]$$

$$U = \frac{1}{E \cdot J} \int_0^{L/2} \frac{(P - X_1)^2 \cdot z^2}{2} dz + \frac{1}{E \cdot J} \int_{L/2}^L \left[\frac{P^2 \cdot L^2}{4} - P \cdot X_1 \cdot \frac{L \cdot z}{2} + X_1^2 \cdot \frac{z^2}{4} \right] dz$$

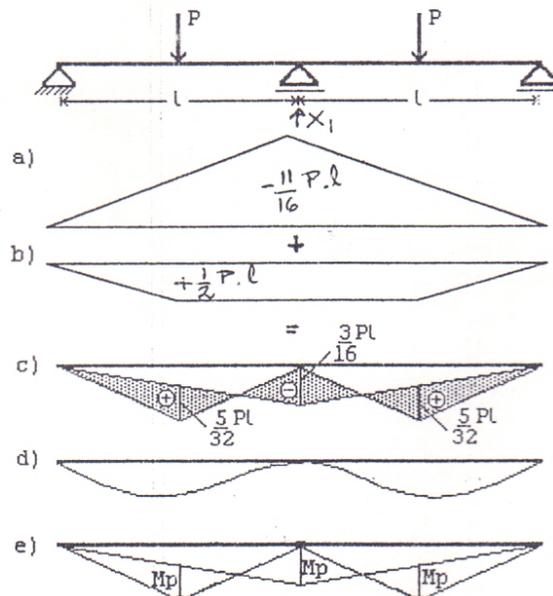
$$U = \frac{1}{E \cdot J} \left[\frac{(P - X_1)^2}{2} \cdot \frac{1}{3} |z^3|^{L/2} + \frac{P^2 \cdot L^2}{4} |z|^L - P \cdot X_1 \cdot \frac{L}{2} |z^2|^{L/2} + \frac{X_1^2}{4} \cdot \frac{1}{3} |z^3|^{L/2} \right]$$

$$U = (P^2 - P \cdot X_1 + \frac{X_1^2}{4}) \cdot \frac{l^3}{24} + \frac{1}{8} P^2 l^3 - \frac{3}{16} P X_1 l^3 + \frac{7}{96} X_1^2 l^3$$

$$U = (-\frac{1}{24} - \frac{3}{16}) P X_1 l^3 + (\frac{1}{96} + \frac{7}{96}) X_1^2 l^3 + (\frac{1}{24} + \frac{1}{8}) P^2 l^3$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \Rightarrow -\frac{11}{48} P l^3 + \frac{1}{6} X_1 l^3 = 0 \Rightarrow \boxed{X_1 = \frac{11}{8} P}$$

Una vez hallado el valor de esta incognita hiperestática, estamos en condiciones de resolver nuestro diagrama de momentos flectores.



Como vemos en la figura c), el diagrama de momentos presenta tres picos, uno en el apoyo de valor $3/16 P.l$ y dos en los centros de tramos de valore $5/32 P.l$. Un aumento gradual en el valor de la carga P conducirá a que el mayor de éstos dos picos (el del apoyo) alcance el momento plástico de la sección M_p .

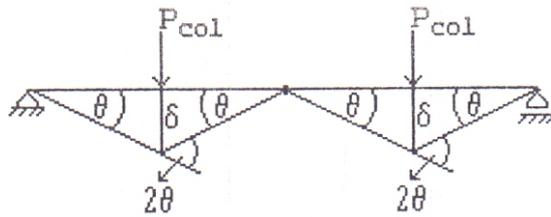
A partir de éste instante, la sección del apoyo comienza a comportarse como una articulación plástica no aumentando allí el momento con posteriores aumentos de la carga. este instante marca el punto de partida para una "redistribución" de momentos. Este proceso tiene un límite que se alcanza cuando los picos de momentos en los tramos llegan a ser iguales a M_p . En éste estado de las cosas la estructura presentará tres articulaciones plásticas que la transforman en un mecanismo cinemático de un grado de libertad; deja de admitir posteriores incrementos de carga y se deforma indefinidamente siguiendo el diagrama de Prandtl.

El diagrama de momentos en el colapso será el indicado en la figura e). A partir de éste diagrama puede, por consideraciones estáticas, determinarse el valor de la carga P_{col} de colapso de la estructura. Este procedimiento se conoce como Criterio Estático.

Por otra parte, el mecanismo de colapso permite la aplicación del principio de los trabajos virtuales: "el trabajo externo desarrollado por las cargas debe ser igual al trabajo interno absorbido en las articulaciones plásticas". Este análisis nos lleva a otra forma de cálculo que constituye el Criterio Cinemático.

a) Criterio Estático

El caso concreto de nuestro problema, la primera articulación se producirá en el apoyo central, luego, en segunda instancia se producirán las dos articulaciones en los tramos, en coincidencia con las cargas, como indica la figura e), con lo cual teniendo en cuenta el diagrama de M_p podríamos determinar la carga de colapso.



se obtiene dando a los puntos de aplicación de las cargas un desplazamiento arbitrario δ . Los giros en las articulaciones plásticas serán:

$$\theta = \frac{\delta}{l/2}$$

La ecuación de trabajos virtuales nos dice que el trabajo virtual externo debe ser igual al trabajo virtual interno.

El trabajo virtual externo vale:

$$T_{ve} = P_{col} \cdot \delta + P_{col} \cdot \delta = 2 \cdot P_{col} \cdot \delta$$

El trabajo virtual interno vale:

$$T_{vi} = M_p \cdot 2\theta + M_p \cdot 2\theta + M_p \cdot 2\theta = 3 \cdot M_p \cdot 2\theta = 3 \cdot M_p \cdot 2 \cdot \frac{\delta}{l/2}$$

$$T_{vi} = 12 \cdot M_p \cdot \delta / l$$

$$T_{ve} = T_{vi}$$

$$2 \cdot P_{col} \cdot \delta = 12 \cdot M_p \cdot \delta / l \Rightarrow P_{col} = \frac{6 \cdot M_p}{l}$$

Método del trabajo virtual (Método de la carga unitaria)

Considérese el caso de las siguientes figuras. La figura 1-a) representa una estructura elástica deformada (vigá, pórtico rígido o cercha) sometido a la acción de un grupo de cargas gradualmente aplicadas P_1, P_2 , cuyos puntos de aplicación se desplazan unas distancias $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ respectivamente.

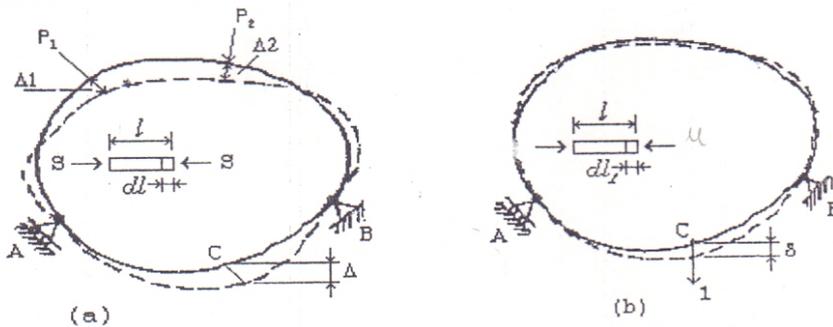


Fig. 1

Para encontrar una expresión de la deformación en un punto cualquiera de la estructura, por ejemplo, la componente vertical del desplazamiento en el punto C, observemos la figura 1-b) que representa la misma estructura sin ninguna de las cargas reales anteriores, pero con una carga virtual unitaria aplicada gradualmente en el punto C en la dirección del desplazamiento buscado. Sea δ el desplazamiento producido por la carga unitaria en su punto de aplicación. Obsérvese que la carga virtual se supone de valor despreciable y lo mismo son las deformaciones virtuales correspondientes.

También se representa en la figura 1-a) un elemento tipo deformado (puede ser una fibra de una viga, o de un pórtico rígido, o una barra de una cercha) de longitud L sometido a las fuerzas internas S , con su correspondiente variación de longitud dL . En la figura 1-b), el mismo elemento está sometido a fuerzas internas u , con una variación correspondiente en la longitud igual a dL_1 .

Puesto que el trabajo interno realizado por las cargas debe ser igual a la energía interna de deformación de todos los elementos de la estructura, se obtiene para el estado de cargas de la figura 1-a)

$$\frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot \Delta_2 = \frac{1}{2} \sum S \cdot dL \quad (1)$$

y para el de la figura 1-b)

$$\frac{1}{2} (1) \cdot \delta = \frac{1}{2} \sum u \cdot dL_1 \quad (2)$$

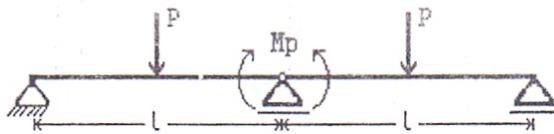


Diagrama de momentos libres

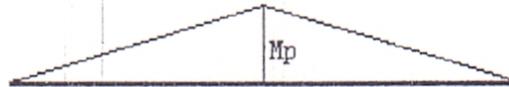
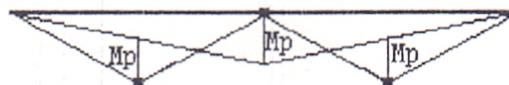


Diagrama de momentos fijos



Para ello comenzamos por trazar el diagrama de momentos en el isostático, a este diagrama se lo designa como “diagrama de momentos libres”. Debemos superponerlo con el diagrama producido por la incógnita hiperestática que llamaremos “diagrama de momentos fijos”. De esta superposición se desprende que en el apoyo intermedio se formará una articulación plástica, o sea el momento en ese punto será M_p . Ahora bien, para que la estructura se transforme en un mecanismo debe aparecer otra articulación plástica en el tramo. Para ubicarla hacemos uso de la “condición de plasticidad” que establece que ningún punto de la viga podrá tener un momento mayor que M_p , es decir, debe verificarse: $|M| \leq M_p$
 Con esta condición resulta inmediatamente que la ubicación de tales articulaciones plásticas serán los puntos de aplicación de las cargas concentradas.
 Sobre esta base podemos escribir para dicho punto la ecuación:

$$M = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{1}{2} M_p + M_p = \frac{3}{2} M_p$$

$$P_{col} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \frac{M_p}{1} = \frac{6M_p}{1}$$

También recibe el nombre de Primer Teorema de Grinberg-Prager o Teorema del Límite Inferior. Este nos dice que: “la carga correspondiente a una configuración de equilibrio, con valores de las incógnitas hiperestáticas arbitrariamente elegidas, es menor y lo sumo igual al valor de la carga última o de colapso, siempre que se cumpla que el $|M| \leq M_p$ ”.

Significa esto que, satisfecha la condición de plasticidad $|M| \leq M_p$, el valor verdadero de la carga de colapso es el mayor entre todos los que pueden determinarse eligiendo arbitrariamente el valor de las incógnitas hiperestáticas.

b) Criterio Cinemático

Llamado también Segundo Teorema de Grinberg-Prager o Teorema del Límite Superior, y nos dice que: “una carga calculada sobre la base de un mecanismo supuesto, será siempre mayor o a lo suma igual a la carga última o de colapso”.

En éste criterio el teorema nos está dando la condición que debe cumplir el mecanismo adoptado y que es la carga mínima. Significa en otras palabras, que el verdadero mecanismo de colapso es aquel que conduce a una carga mínima de rotura.

Para obtener el mecanismo de colapso introducimos 3 articulaciones plásticas: una en el apoyo intermedio y dos en los puntos de aplicación de las cargas, arrojando el siguiente diagrama de desplazamientos:

Ahora imagínese que producimos primero el estado de cargas y deformaciones de la figura 1-b); las cargas reales P_1 y P_2 se aplican después gradualmente. Igualando el trabajo total realizado y la energía total de deformación almacenada durante ésta aplicación sucesiva, se tiene

$$\frac{1}{2} (1) \cdot \delta + \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot \Delta_2 + 1 \cdot \Delta = \frac{1}{2} \sum u \cdot dL_1 + \frac{1}{2} \sum S \cdot dL + \sum u \cdot dL \quad (3)$$

Puesto que la energía de deformación y el trabajo realizado deben ser los mismos, si las cargas se aplican a la vez o separadamente, sustrayendo de la ecuación anterior la suma de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene lo siguiente

$$\underbrace{1 \cdot \Delta}_{\text{virtual}} = \underbrace{\sum u \cdot dL}_{\text{real}} \quad (4)$$

Esta es la ecuación básica del método de la carga unitaria. Cuando se quiere obtener la rotación de la tangente en cualquier punto de la estructura, solamente es necesario reemplazar la fuerza virtual unitaria por un *par virtual unitario* en el procedimiento descrito anteriormente, y se obtiene

$$\underbrace{1 \cdot \theta}_{\text{virtual}} = \underbrace{\sum u \cdot dL}_{\text{real}} \quad (5)$$

en donde u es la fuerza interna originada por el par unitario en un elemento tipo, y θ es el ángulo de rotación buscado.

Para obtener una fórmula práctica que utilizarse para resolver las deformaciones en una viga, considere la viga estáticamente determinada sometida a las cargas P_1 y P_2 , representada en la figura 2-a; el eje longitudinal de la viga coincide con el eje x . Para encontrar el desplazamiento vertical Δ de un punto arbitrario C, se coloca una fuerza unitaria vertical en C, como se indica en la figura 2-b., y se aplica la ecuación (1)

$$1 \cdot \Delta = \sum u \cdot dL \quad (6)$$

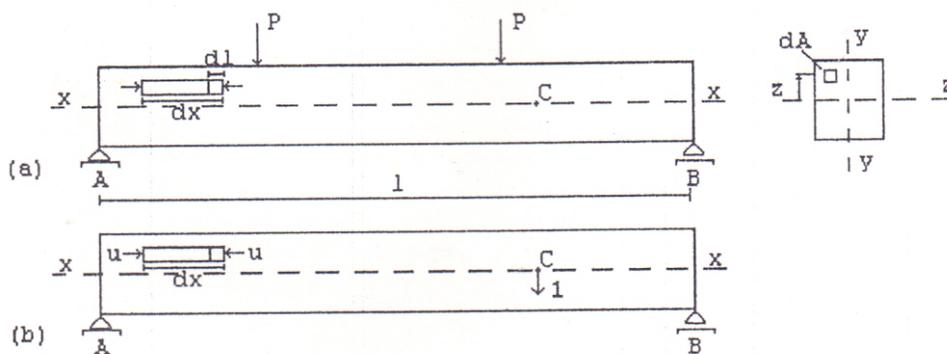


Fig. 2

Para interpretar los términos dL y u incluidos en la ecuación anterior, observemos en la figura 2-a que en el caso presente dL es el cambio de longitud de cualquier fibra cuya longitud inicial es dx y cuya sección tiene un área dA , producido por las cargas reales P_1 y P_2 . dL es el alargamiento unitario multiplicado por dx y puede ponerse en la forma

$$\frac{M \cdot y}{E J} dx \quad (7)$$

en donde M es el momento flector en la sección considerada, resultante de las cargas reales, J el momento de inercia de la sección recta de la viga respecto al eje de flexión, y la distancia de la fibra al eje de flexión, y E el módulo de elasticidad.

A continuación, en la figura 2-b se observa que \underline{u} en éste caso, es la fuerza interna en la misma fibra, resultante de la aplicación de una carga unitaria ficticia en el punto C; \underline{u} es igual a la tensión de flexión de la fibra multiplicada por dA , esto es

$$u = \frac{m \cdot y \cdot dA}{J} \quad (8)$$

en donde m es el momento flector en la misma sección, debido a la carga unitaria.

Al sustituir dL por la expresión (7) y u por (8) en la ecuación básica se obtiene

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{(m \cdot y \cdot dA) \cdot (M \cdot y \cdot dx)}{J \cdot E \cdot J} \quad (9)$$

$$= \int \frac{M \cdot m}{E \cdot J^2} dx \cdot \int y^2 \cdot dA \quad (10)$$

y teniendo en cuenta que $\int y^2 \cdot dA = J$, se obtiene

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{M \cdot m}{E \cdot J} dx \quad (11)$$

Esta ecuación es la fórmula práctica que se utiliza en la determinación del desplazamiento en cualquier punto de una viga. Si se busca la rotación de la tangente en C, se coloca un par unitario en C y se aplica la fórmula básica (5), obteniéndose por el mismo procedimiento

$$1 \cdot \theta = \int \frac{M \cdot m}{E \cdot J} dx \quad (12)$$

en donde \underline{m} es el momento flector en cualquier sección debido a un par unitario en C.

Condiciones de plasticidad

En la flexión pura es imposible determinar los valores límites de las fuerzas interiores, basándose solamente en las ecuaciones de la estática. Para su determinación, además de las ecuaciones de equilibrio y de las de continuidad de las deformaciones, se emplean las condiciones de plasticidad, que surgen de las hipótesis que marcan criterios de aparición de la fluencia del material.

En los cálculos prácticos y en investigaciones teóricas se emplean las siguientes hipótesis:

1ª) Condición de Plasticidad de Saint Venant

Independientemente del tipo de estado tensional, la fluencia del material surge cuando la tensión tangencial máxima alcanza cierto valor, que será constante para cada material. Este valor de $\tau_{\text{máx}}$ se establece por ensayos de tracción monoaxial.

La formulación matemática de ésta condición de plasticidad conduce al criterio de equivalencia según la 3ª Hipótesis de Resistencia:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq \tau_f$$

2ª) Condición de Plasticidad de Hubert - Von Misses

Independientemente del tipo de estado tensional, la fluencia del material surge cuando la energía potencial unitaria correspondiente a la variación de la forma, alcanza cierto valor, que será constante para cada material.

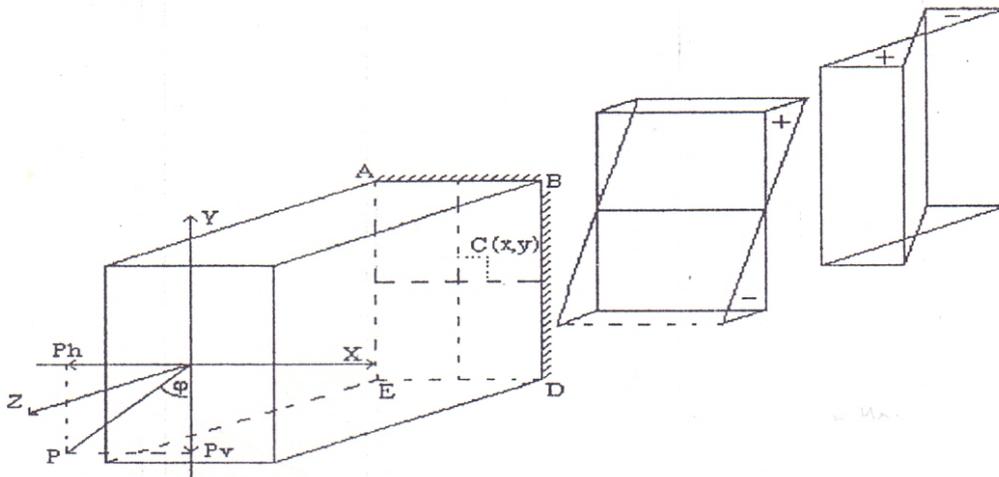
$$\sigma_e = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3)^{1/2} \leq \sigma_f$$

Este valor de u_f se establece experimentalmente por ensayos de tracción monoaxial.

La formulación matemática de ésta condición de plasticidad conduce al criterio de equivalencia según la 4ª Hipótesis de Resistencia.

La segunda hipótesis concuerda mejor con los ensayos, pero las correlaciones de cálculo resultan más complicadas.

Flexión en dos planos, desviada u oblicua



Se produce flexión oblicua cuando las fuerzas exteriores, que son perpendiculares al eje de la barra, no se encuentran en plano que pasa por un eje principal de inercia de la sección transversal.

En éste caso el momento flector que aparece en la sección transversal se puede descomponer en dos momentos, que actúan en los planos que pasan por los ejes principales de inercia de la sección.

Podemos considerar a la flexión oblicua como la combinación de dos flexiones planas en dos planos ortogonales (principio de superposición de efectos).

Las tensiones normales en cualquier punto de la sección transversal serán iguales a la suma algebraica de las tensiones producidas por los momentos flectores que actúan en los dos planos. Por ejemplo el punto C de coordenadas (x,y) de la sección del apoyo:

a) tenemos un momento flector que surge como consecuencia de la flexión de la barra en el plano vertical con el eje neutro x que vale:

$$M_x = P_v \cdot l = P \cdot \cos \varphi \cdot l$$

b) además tenemos otro momento que surge de la flexión de la barra en el plano horizontal con el eje neutro y, que vale:

$$M_y = P_h \cdot l = P \cdot \sin \varphi \cdot l$$

Aquí P_v y P_h son las componentes vertical y horizontal de la fuerza P ; l la longitud de la viga y φ el ángulo que forma la fuerza P con la vertical.

En la mitad superior de la viga, donde se encuentra el punto C, como consecuencia del momento M_x se producen tensiones de tracción; y en la mitad inferior se producen tensiones de compresión.

El valor de la tensión en el punto C, generada por M_x se obtiene por:

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_x} \cdot y$$

donde y es la distancia del eje neutro (z) al punto considerado.

En la mitad derecha de la viga, donde se encuentra el punto C, como consecuencia del momento M_y se producen tensiones de tracción; y en la mitad izquierda se producen tensiones de compresión.

El valor de la tensión en el punto C, originado por el momento flector M_y , se obtiene de forma análoga a la anterior:

$$\sigma_2 = \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

siendo x la distancia del eje neutro al punto considerado.

La tensión total en el punto C será:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

Estas fórmulas son válidas para cualquier otra forma de la sección de la viga. Si en la sección existen puntos angulares dónde aparecen $X_{m\acute{a}x}$ e $Y_{m\acute{a}x}$ simultáneamente (rectángulos, doble T), entonces las tensiones máximas en valor absoluto aparecen en éstos puntos, por lo que la fórmula queda:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \pm \frac{M_x}{J_x/Y_{m\acute{a}x}} \pm \frac{M_y}{J_y/X_{m\acute{a}x}}$$

lo nos queda:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

siendo para secciones rectangulares o doble T

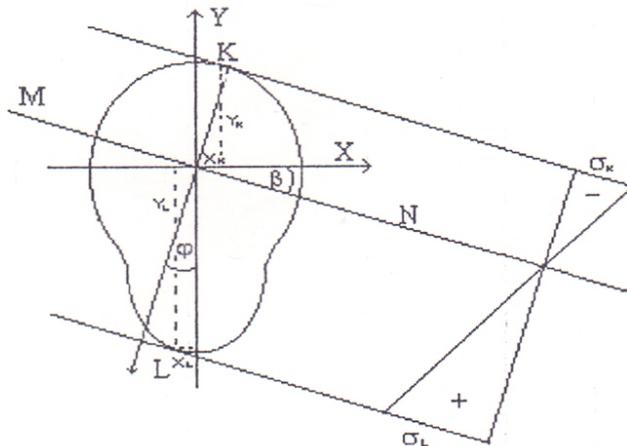
$$W_x = 2 J_x / h \quad y \quad W_y = 2 J_y / b$$

Los puntos peligrosos de la sección son aquellos donde las tensiones debidas a ambos momentos poseen el mismo signo. En nuestro ejemplo serían los puntos B (traccionado) y E (comprimido). Las tensiones en éstos puntos valen:

$$\sigma_B = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

$$\sigma_C = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}$$

Para una sección arbitraria, que no tiene ángulos salientes, resulta necesario definir los puntos peligrosos donde las tensiones son máximas. Esto lo analizamos de la siguiente forma: Primero hallamos la posición de la línea neutra en la sección, o sea el lugar geométrico de los puntos de la sección donde se anula la tensión normal (separa la zona traccionada de la comprimida). La llamamos MN:



En la flexión, las tensiones crecen a medida que nos alejamos de la línea neutra, por lo tanto las paralelas al eje neutro tangente a la figura nos da los puntos K y L más peligrosos. Cuando el material trabaja de la misma forma a tracción y compresión, el punto más peligroso será aquel en el cual surjan las tensiones máximas en valor absoluto.

La ecuación de la línea neutra se obtiene igualando a cero la expresión:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y_0 + \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0$$

Si consideramos la relación:

$$k = \frac{M_y}{M_x}$$

podemos expresar la ecuación en función de M_x :

$$M_x \left(\frac{y_0}{J_x} + k \frac{x_0}{J_y} \right) = 0$$

x_0 e y_0 son las coordenadas de los puntos de línea neutra. Teniendo en cuenta que M_x no puede anularse quedará:

$$\frac{y_0}{J_x} + k \frac{x_0}{J_y} = 0$$

Ecuación de la línea neutra

(Los momentos flectores se considerarán positivos en ambos casos cuando produzcan tensiones de tracción en el primer cuadrante).

Por otro lado, dividiendo toda la expresión por x_0 nos queda:

$$\frac{y_0}{x_0 \cdot J_x} + \frac{k}{J_y} = 0$$

teniendo en cuenta que $x_0/y_0 = \text{tg } \beta$ (ángulo de inclinación de la línea neutra respecto del eje X) y el coeficiente angular o pendiente de la recta la definimos por geometría analítica como $m = \text{tg } \beta$, luego:

$$\frac{\text{tg } \beta}{J_x} + \frac{k}{J_y} = 0$$

$$\Rightarrow m = \text{tg } \beta = -k \frac{J_x}{J_y}$$

La ecuación de la recta en forma canónica queda expresada:

$$y_0 = m x_0 = -k \frac{J_x}{J_y} \cdot x_0$$

De la figura se observa que $k = \text{tg } \varphi$, por tanto el coeficiente angular de la línea neutra será:

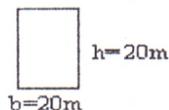
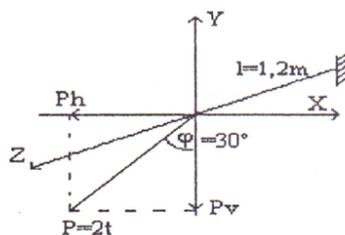
$$\text{tg } \beta = -\text{tg } \varphi \frac{J_x}{J_y}$$

De ésta ecuación se desprende que cuando J_x es distinto de J_y , el ángulo β no es igual al ángulo φ , es decir la línea neutra no se hace perpendicular a la línea de sollicitación, como ocurre en la flexión plana.

Sólo en las secciones simétricas (circulares, cuadradas), el J_x es igual al J_y , y la línea neutra se hace perpendicular a la línea de sollicitación, lo que produce la desaparición de la flexión desviada, pues cualquier eje central que pasa por el centro de gravedad de la sección es eje principal de inercia.

Hay que tener en cuenta que la línea de sollicitación y la línea neutra pasan por cuadrantes distintos de la sección. En el caso que estamos analizando la línea de sollicitación pasa por el primer y tercer cuadrante en tanto que la línea neutra pasa por el segundo y el cuarto cuadrante.

Ejemplo:



$$M_x = P \cdot \cos 30 \cdot l = 2000 \cdot \cos 30 \cdot 120$$

$$M_x = 207846 \text{ Kg.cm}$$

$$M_y = P \cdot \sin 30 \cdot l = 2000 \cdot \sin 30 \cdot 120$$

$$M_y = 120000 \text{ Kg.cm}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 106667 \text{ cm}^4$$

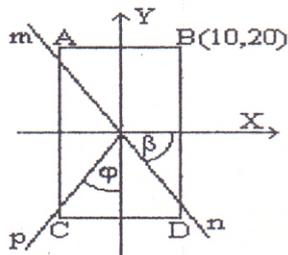
$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = 26667 \text{ cm}^4$$

$$k = \frac{M_y}{M_x} = 0,577$$

$$\Rightarrow \frac{y_0}{106.667} + \frac{x_0}{26.667} = 0$$

$$\text{tg } \beta = -k \frac{J_x}{J_y} = 0,577 \cdot \frac{106667}{26667} = 2,3 \Rightarrow \beta = -66,5^\circ$$

$$y_0 = m \cdot x_0 = \text{tg } \beta \cdot x_0 \Rightarrow \boxed{y_0 = -2,3 x_0}$$



$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{mín}} = \pm \frac{M_x}{J_x} y_{\text{máx}} \pm \frac{M_y}{J_y} x_{\text{máx}}$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{mín}} = \pm 38,97 \pm 45,0 = \pm 83,93 \text{ Kg/cm}^2$$

Después de definida la línea neutra y los puntos más alejados de la sección, realizaremos la comprobación de la resistencia a la compresión o tracción, si la sección trabaja a compresión y tracción deberá hacerse la comprobación de los puntos peligrosos. Las expresiones son las siguientes:

$$\sigma_k = - \frac{M_x}{J_x} y_k - \frac{M_y}{J_y} x_k \leq [\sigma_c]$$

$$\sigma_L = \frac{M_x}{J_x} y_L + \frac{M_y}{J_y} x_L \leq [\sigma_t]$$

Cuando el material trabaja de igual forma a tracción y compresión, o sea $[\sigma_c] = [\sigma_t]$ (en el caso de materiales plásticos), se considera el punto peligroso más alejado del eje neutro, o sea en éste caso el punto k $[\sigma_k] > [\sigma_L]$.

En las secciones tipo rectángulo o doble T, la condición de resistencia se establece como:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_x}{J_x} + \frac{M_y}{J_y} \leq [\sigma]$$

Cuando el material es frágil (ej. fundición), la fórmula para la condición de resistencia pasa a ser:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_x}{J_x} + \frac{M_y}{J_y} \leq [\sigma_t]$$

El cálculo de las dimensiones necesarias de la sección transversal se realiza empleando las fórmulas $\sigma_{\text{máx}}^{\text{mín}}$ ya vista para la condición de resistencia.

Generalmente es necesario realizar cálculos por tanteos sucesivos.

Una vez admitida cierta dimensión para la sección, se comprueba el cumplimiento de las condiciones de resistencia. Si la diferencia entre la tensión de trabajo y la admisible es importante, se determina otra dimensión y se repite el cálculo hasta que ésta diferencia no supere el 5 % o 10%:

$$\frac{\sigma_{\text{máx}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = 5 - 10 \%$$

Tiene interés práctico el problema de como escoger la forma de la sección transversal, de forma que el gasto de material sea mínimo. Para la sección rectangular, el gasto mínimo de material se obtiene cuando se cumple la condición:

$$\frac{h}{b} = \frac{M_x}{M_y}$$

Sin embargo la sección rectangular no es la más apropiada en la flexión desviada; para ésta sollicitación resulta más adecuada la sección cajón.

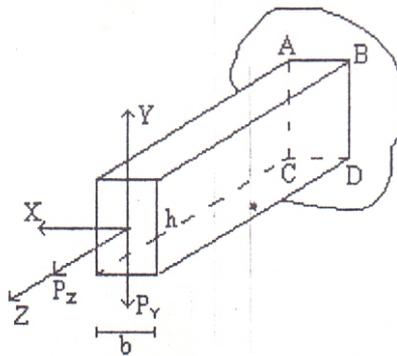
La flecha en la flexión desviada se calcula en cada plano por separado y también integrando la ecuación diferencial de la línea elástica, por la fórmula universal o por el método de Mhor. La flecha total se obtiene como la suma geométrica de las componentes:

$$y_{tot} = (y_h^2 + y_v^2)^{1/2}$$

la condición de rigidez se escribe:

$$y_{m\acute{a}x} \leq [y]$$

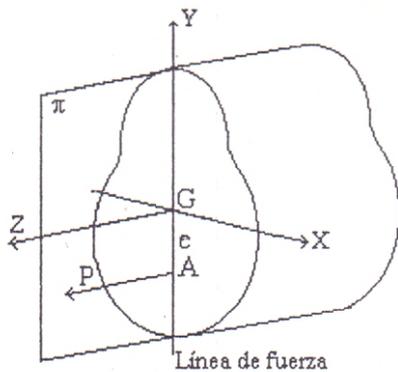
Flexión y tracción o compresión combinadas



En la figura se representa el caso de la acción simultánea de flexión y tracción central. La carga transversal que origina la flexión puede ser más compleja (par concentrado, carga distribuida, etc.).

Para calcular las tensiones completas recurrimos al principio de superposición de las fuerzas. Las tensiones de tracción originadas por la fuerza P_z son, en todos los puntos de la sección transversal iguales, y se obtienen por la fórmula ya conocida $\sigma = P_z/F$; en el caso general, para cualquier carga axial la fórmula queda $\sigma = N/F$, siendo N la fuerza axial en la sección transversal.

- π : Plano de fuerzas
- A : Centro de presión
- e : excentricidad



Las tensiones debidas al momento flector son:

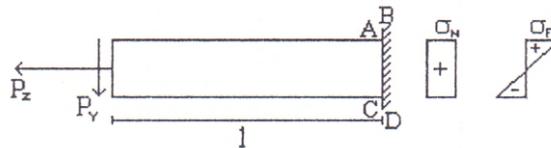
$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{J_x}$$

por lo tanto la tensión total en cualquier punto es:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x \cdot y}{J_x}$$

En el caso que estamos analizando, la sección peligrosa se encuentra en el empotramiento donde el momento es máximo: $M_{m\acute{a}x} = P_y \cdot l$

Los puntos peligrosos son los que se encuentran en la línea AB donde se suman ambas tensiones:



En los puntos C y D las tensiones se restan quedando:

$$\sigma_{min} = \frac{N}{F} - \frac{M_x}{W_x}$$

Para las barras que trabajan igual a tracción que a compresión, la condición de resistencia se escribe:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_t]$$

Si la carga transversal es compleja, para determinar el momento flector máximo, y la sección peligrosa, será necesario construir los gráficos de momentos flectores y normales.

Las fórmulas son válidas también cuando las sollicitaciones axiales son de compresión, en éste caso la tensión de compresión resta, la expresión queda:

$$\sigma = -\frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y$$

Las tensiones máximas se producen en los puntos de la línea CD y valen $\sigma_{\text{máx}} = -\frac{N}{F} - \frac{M_x}{W_x}$

Cuando se combina la sollicitación axial con la flexión oblicua las tensiones se calculan mediante la fórmula:

$$\sigma = \pm \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x$$

En el caso de barras de igual tensión admisible (material plástico) con puntos angulares que son los más alejados de los ejes principales, la tensión será:

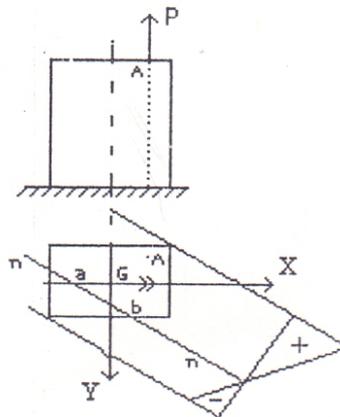
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \leq [\sigma_t]$$

En el caso de barras con tensiones admisibles distintas, se comprobará la resistencia tanto a tracción como a compresión.

Compresión o tracción excéntrica

A menudo la carga axial no se aplica sobre el centro de gravedad de la sección transversal de barra, sino con cierta desviación, lo que se llama excentricidad respecto a los ejes principales de inercia de la sección.

Por el método de las secciones, hallamos en una sección arbitraria de la barra, una fuerza axial $N=P$ y momentos flectores que son según los ejes $M_x = P \cdot y_A = N \cdot y_A$, y $M_y = P \cdot x_A = N \cdot x_A$, por



eso, la tensión en un punto cualquiera de la sección transversal de coordenadas (x,y) se obtendrá como en el caso de tracción y flexión en dos planos como:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

Para las secciones de puntos angulares las tensiones extremas se calcularán como:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \pm \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

donde W_x y W_y son los módulos resistentes de la sección respecto a X e Y.

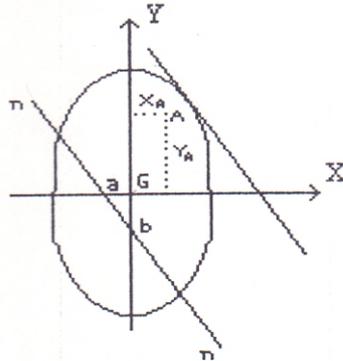
En la sección representada en la figura, las tensiones máximas que surgen en los puntos E y D serán:

$$\sigma_{\max E} = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_t]$$

Si el punto de aplicación de la fuerza se encuentra sobre alguno de los ejes principales de inercia de la sección (por ejemplo sobre el eje Y) entonces la fórmula se reduce a

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

En el caso de una sección transversal de forma arbitraria, para calcular la posición de los puntos peligrosos es necesario hallar la posición de la línea neutra.



La ecuación se obtiene igualando a cero las tensiones

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot y_A \cdot y_0}{J_x} + \frac{N \cdot x_A \cdot x_0}{J_y} = 0$$

siendo $(x_0; y_0)$ las coordenadas de la línea neutra.

Introducimos aquí la notación siguiente:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F} \quad \wedge \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F}$$

llamaremos **radio de giro** respecto a los ejes X e Y a:

$$i_x = (J_x / F)^{1/2} \quad i_y = (J_y / F)^{1/2}$$

caracterizan la geometría de la sección y se miden en unidades de longitud.

La expresión de la línea neutra la podemos escribir:

$$\frac{N}{F} \left(1 + \frac{x_A \cdot x_0}{i_y^2} + \frac{y_A \cdot y_0}{i_x^2} \right) = 0$$

como N/F es distinto de cero puesto que existe la fuerza N , debe ser entonces

$$1 + \frac{x_A \cdot x_0}{i_y^2} + \frac{y_A \cdot y_0}{i_x^2} = 0$$

luego podemos expresar la ecuación de la línea neutra como la ecuación de la recta en forma segmentaria o canónica:

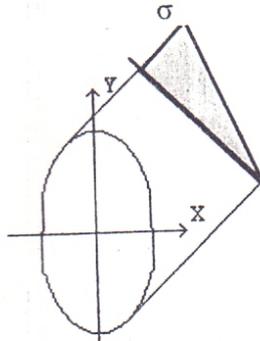
$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 \quad a = -i_y^2/x_A \quad b = -i_x^2/y_A$$

a y b representan las distancias de la intersección de la recta con los ejes coordenados X e Y. Como el radio de giro es siempre positivo, las magnitudes a , x_A y b , y_A son de signo opuesto. "El centro de presión y la línea neutra están a ambos lados del baricentro de la sección" (en el cuadrante opuesto).

? ?

Núcleo central

Si la línea neutra no cruza la sección, entonces en todos los puntos de ésta sección las tensiones tienen el mismo signo



Busquemos las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza de modo tal que la línea neutra sea tangente a la sección, y las tensiones sean todas del mismo signo, emplearemos **a** y **b**

$$\Rightarrow x_A = -i_y^2/a \quad y \quad y_A = -i_x^2/b$$

aquí los segmentos **a** y **b** son la intersección de la tangente a la sección sobre los ejes XY.

Cuando el contorno es continuo, para las distintas posiciones de la tangente obtendremos las coordenadas de un conjunto de puntos, que representan una línea cerrada alrededor del centro de gravedad.

La parte del área de la sección que se encuentra dentro de ésta línea se llama "Núcleo Central". Luego, el núcleo central tiene la propiedad de que cuando se aplica una fuerza dentro de ésta área que es paralela al eje de la barra, las tensiones normales en todos los puntos de la sección serán del mismo signo.

En el caso de una sección con contorno poligonal de **n** lados, obtendremos **n** puntos del núcleo central. El contorno del núcleo central se obtiene uniendo los **n** puntos con líneas rectas.

En materiales frágiles como ser hormigón y madera es importante que el eje neutro no sea secante a la sección. O sea, es importante aplicar la fuerza de compresión dentro del núcleo central para no ocasionar tensiones de tracción.

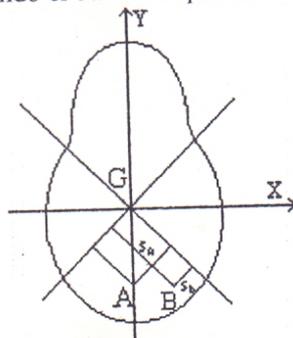
Teorema de Maxwell

La tensión en un punto B cuando el centro de presión es A, es igual a la tensión que se produce en A cuando el centro de presión es B:

$$\begin{matrix} \text{(A)} \\ \sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{N}{J_s} R_A R_B + \frac{N}{J_R} S_A S_B \end{matrix} \quad (1)$$

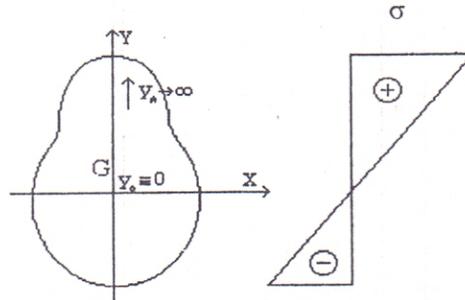
$$\begin{matrix} \text{(B)} \\ \sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{N}{J_s} R_B R_A + \frac{N}{J_R} S_B S_A \end{matrix} \quad (2)$$

En (1): tensión σ_z en el punto B cuando el centro de presión es A
 En (2): tensión σ_z en el punto A cuando el centro de presión es B

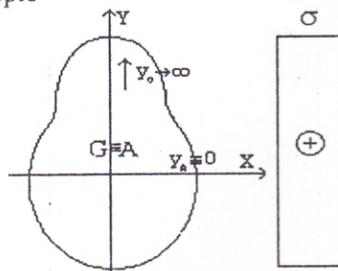


Existen dos casos límites en la flexión compuesta:

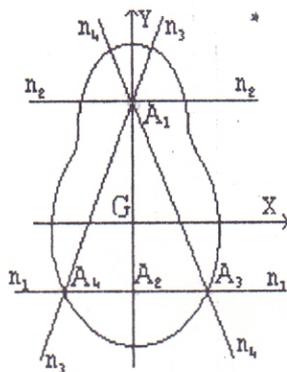
1.- cuando $y_A \rightarrow \infty$; $y_0 \rightarrow 0$; es el caso de flexión pura, o sea que cuando el eje neutro pasa por G el punto A es impropio



2.- Cuando $y_A \rightarrow 0$; $y_0 \rightarrow \infty$; es el caso de sollicitación axial pura, cuando el centro de presión A pasa por G el eje neutro es impropio



El núcleo central es una propiedad del teorema de Maxwell

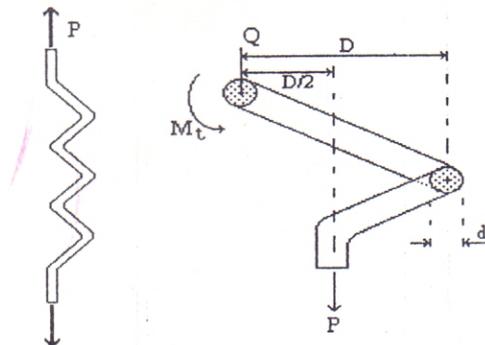


Siendo A_1 el centro de presión, el eje neutro es conjugado del eje Y. Si hacemos que el punto A_2 del eje neutro sea centro de presión, el eje neutro pasará por A_1 y será paralelo a n_1-n_1 . Si tomamos otro punto A_3 de n_1 , el eje neutro varía pero sigue pasando por A_1 ; si consideramos donde corta el eje neutro n_3 al eje neutro n_1 , el punto A_4 como centro de presión, tendrá un eje neutro n_4 que pasará por A_1 y A_3 .

Luego, mientras los centros de presión generen una recta, los ejes neutros correspondientes a esos centros generan un haz, cuyo punto común es el centro de presión correspondiente a la recta de los centros de presión considerada como eje neutro.

Torsión y corte combinados

La acción combinada de una fuerza de corte y un momento torsor ocurre en las secciones transversales de las espiras del resorte en hélice de pequeño paso comprimido o traccionado por una fuerza P

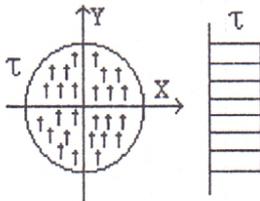


Analicemos una sección A, sea D el diámetro medio del resorte, n el número de espiras y d el diámetro de la sección de la espira.

El equilibrio se consigue aplicando en la sección un esfuerzo Q=P y un momento torsor:

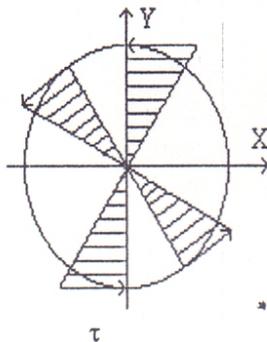
$$M_t = P \frac{D}{2}$$

Suponemos que las tensiones tangenciales que se producen por el corte se distribuyen uniformemente en la sección



$$\tau_1 = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Admitimos que las tensiones tangenciales que se producen por la torsión, se distribuyen en la sección transversal de la espira de igual forma que en una barra de eje neto de sección circular:



$$\tau_2 = \frac{M_t}{W_t} = \frac{P \cdot D/2}{\pi d^3/16} = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

El punto peligroso estará ubicado en el contorno donde coincidan las direcciones de τ_1 y τ_2 . Luego $\tau_{\text{máx}}$ será:

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{1+d}{2D} \right)$$

En general $d/2D$ es muy pequeño y se puede despreciar, lo que equivale a despreciar la influencia del corte en comparación a la influencia de la torsión; entonces:

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

En la práctica, el cálculo de resortes en hélice de pequeño paso se realiza por la fórmula:

$$\tau_{\text{máx}} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

siendo k un coeficiente de corrección que está dado en función de la relación D/d

D/d	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Para hallar la flecha δ igualamos el trabajo de la fuerza exterior P y la energía potencial de la deformación por torsión

$$A = \frac{1}{2} P \delta$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{M_t^2 l}{G J_p} = \frac{1}{2} \frac{(P \cdot D/2)^2 l}{G J_p}$$

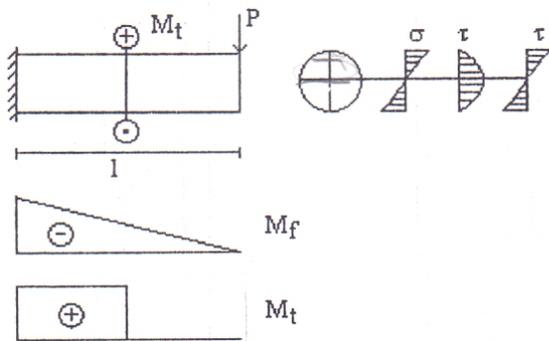
donde $l = \pi D n$ es la longitud del hilo del resorte.

Puesto que $A = E_{\text{pot}}$ obtenemos:

$$\frac{1}{2} P \delta = \frac{P^2 D^2 \pi D n}{8 G \pi d^4/32} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{8 P D^3 n}{G d^4}$$

Torsión y flexión combinadas



La barra representada en la figura a torsión y flexión. En las construcciones de máquinas es frecuente que las piezas trabajen a torsión y flexión (árboles).

Empecemos por calcular por separado y basándonos en la hipótesis de superposición. Durante la flexión aparecen tensiones normales en las secciones transversales de la barra que valen $\sigma = M_f/W_x$ y también tensiones tangenciales que se calculan $\tau_1 = Q S_x / J_x b_0$.

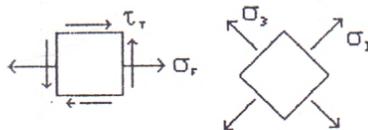
Durante la torsión aparecen tensiones tangenciales que son máximas en el contorno $\tau_2 = M_t/W_p = M_t / 2 W_x$.

En las secciones circulares y en general en las secciones macizas $\tau_1 \ll \tau_2$ y se pueden prescindir.

En nuestro caso las tensiones máximas se producen en el empotramiento donde son máximos el momento flector y torsor. los puntos peligrosos son A y B.

En plano de la sección transversal que pasa por éstos puntos, actúan las tensiones normales máximas debidas a la flexión y las tensiones tangenciales máximas debidas a la torsión.

Observamos el punto desde la parte superior



Puesto que el estado tensional es triaxial, para comprobar la resistencia empleamos una de las hipótesis de resistencia (aplicamos 3ª o 4ª).

Cuando el material es de igual resistencia $[\sigma] = [\sigma_t] = [\sigma_c]$, las tensiones principales se

obtienen por la fórmula $\sigma_{1,3} = \sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2)^{1/2}$

El ángulo de inclinación de los planos principales no es necesario calcularlos.

La condición de resistencia según la tercera hipótesis o de las tensiones tangenciales máximas

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Introducidos los valores de σ_1 y σ_3 queda:

$$\sigma_e = (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2)^{1/2} \leq [\sigma]$$

pero teniendo en cuenta que $\sigma = M_f/W_x$ y $\tau = M_t/2W_x$:

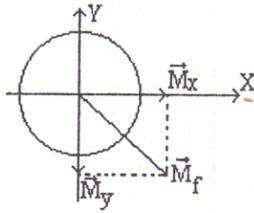
$$\sigma_e = \frac{(M_f^2 + M_t^2)^{1/2}}{W_x}$$

Para calcular la sección obtenemos de aquí:

$$W_{nec} = (M_f^2 + M_t^2)^{1/2} / [\sigma]$$

Recordando que cuando el árbol está sometido a flexión en dos planos perpendiculares:

$$M_f = (M_x^2 + M_y^2)^{1/2}$$



Según la cuarta hipótesis de resistencia o de la energía potencial unitaria debida al cambio de forma, la condición para el estado tensional es $\sigma_e = (\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_1\sigma_3)^{1/2} \leq [\sigma]$.

Introduciendo aquí los valores de σ_1 y σ_3 obtenidos anteriormente, llegamos a que $\sigma_e = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma]$, pero teniendo en cuenta que $\sigma = M_f/W_x$ y $\tau = M_t/2W_x$, la tensión equivalente queda expresada por

$$\sigma_e = \frac{(M_f^2 + 0,75 M_t^2)^{1/2}}{W_x} \leq [\sigma]$$

De ésta obtenemos la expresión para calcular la sección necesaria:

$$W_{nec} \geq (M_f^2 + 0,75 M_t^2)^{1/2} / [\sigma]$$

Cuando el material tiene diferente resistencia a tracción que a compresión, empleamos la hipótesis de Mohr:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \gamma \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_t] \quad \text{donde } \gamma = [\sigma_t]/[\sigma_c].$$

Introduciendo los valores de σ_1 y σ_3 obtenidos queda que:

$$\sigma_e = \frac{1-\gamma}{2} \sigma + \frac{1+\gamma}{2} (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2}$$

En función de los momentos:

$$\sigma_e = \frac{1-\gamma}{2} \frac{M_f}{W_x} + \frac{1+\gamma}{2} (M_f^2 + M_t^2)^{1/2} \leq [\sigma_t]$$

De aquí se obtiene la relación necesaria para calcular la sección necesaria:

$$W_{nec} = \frac{M_f(1-\gamma) + (1+\gamma) \cdot (M_f^2 + M_t^2)^{1/2}}{2 \cdot [\sigma_t]}$$

Torsión y tracción (compresión) combinadas

En éste caso en las secciones transversales de la barra surgen simultáneamente los dos esfuerzos. En una barra de sección circular, las tensiones tangenciales máximas debido a la torsión surgen en los puntos del contorno y son:

$$\tau = M_t/W_p$$

La tracción ocasiona en todos los puntos de la sección tensiones normales:

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Como en el caso de torsión y flexión, debemos conocer las tensiones principales y emplear la hipótesis de resistencia correspondiente al tipo de material utilizado.

1) Materiales con $[\sigma] = [\sigma_t] = [\sigma_c]$

Por tercera hipótesis: $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2)^{1/2}$

y $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \wedge \sigma_e = (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2)^{1/2} \leq [\tau]$,
reemplazando:

$$\sigma_e = \left[\left(\frac{N}{F} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_t}{W_p} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Por la cuarta hipótesis:

$$\sigma_e = \left[\left(\frac{N}{F} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_t}{W_p} \right)^2 \right]^{1/2} \leq [\sigma]$$

2) Materiales con $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$

$$\sigma_e = \frac{1-\gamma}{2} \frac{N}{F} + \frac{1+\gamma}{2} \left[\left(\frac{N}{F} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_t}{W_p} \right)^2 \right]^{1/2} \leq [\sigma_t]$$

Cuando se trata de flexión, torsión y tracción, mediante el mismo procedimiento se obtiene según la cuarta hipótesis:

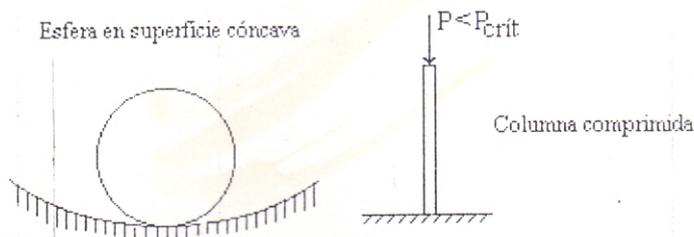
$$\sigma_e = \left[\left(\frac{N}{F} + \frac{M_f}{W_x} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_t}{W_p} \right)^2 \right]^{1/2} \leq [\sigma]$$

UNIDAD V - PANDEO

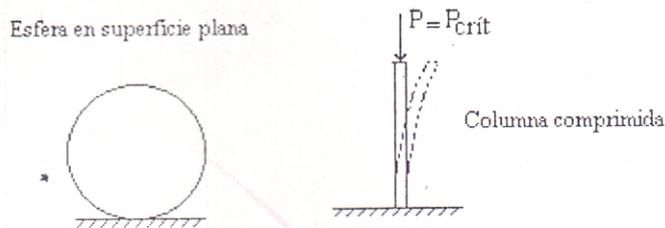
Formas estables e inestables de equilibrio

El equilibrio de un sólido puede ser estable, indiferente o inestable. Analicemos las distintas situaciones de una esfera:

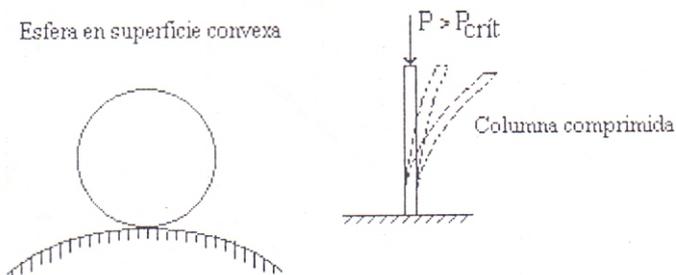
EQUILIBRIO ESTABLE



EQUILIBRIO INDIFERENTE



EQUILIBRIO INESTABLE



La misma analogía hacemos para una barra larga, actuando sobre ella una carga axial de compresión relativamente pequeña (menor que cierto valor crítico); al retirarla la barra vuelve a su posición original, el equilibrio es estable. Si el valor de la carga es igual al de la carga crítica, la barra queda en la última posición, el equilibrio es indiferente. Y finalmente si la carga supera el valor de la carga crítica el equilibrio es inestable, no guarda ninguna posición de equilibrio, la barra trabaja a flexión y compresión combinadas, un pequeño aumento de la carga produce grandes flechas en la barra, apareciendo grandes tensiones. Por lo que se debe considerar a la carga crítica como carga peligrosa ("Carga límite").

"La fuerza crítica se puede definir como aquella fuerza para la cual el equilibrio de la barra comprimida es indiferente, en otras palabras, la fuerza para la cual tanto la forma rectilínea como la curvilínea contigua a ella son formas posibles de equilibrio".

En la práctica se admite que la fuerza pueda actuar con cierta excentricidad en la barra y a su vez puede tener cierta curvatura inicial. Por eso se observa flexión ya al comienzo de su sollicitación longitudinal.

Los ensayos demuestran que mientras la fuerza de compresión sea menor que la crítica, las flechas de la barra serán pequeñas, pero al acercarse al valor crítico comienza a crecer rápidamente. A éste criterio se lo conoce como "Criterio de la pérdida de estabilidad".

Una vez establecido el valor de la carga crítica es necesario establecer el valor de la carga admisible que naturalmente será menor que la crítica:

$$[P] = \frac{P_{crit}}{n_e}$$

n_e : coeficiente de seguridad por estabilidad (pandeo) de Euler

El coeficiente n_e será tal que garantizará el trabajo seguro de la barra. Se admite el valor de éste coeficiente algo mayor que el coeficiente por resistencia, debido a la consideración de la curvatura inicial de la barra y a la excentricidad de la carga:

Material	n_e
Acero	1,8 - 3
Hierro fundido	5 - 5,5
Madera	2,8 - 3,2

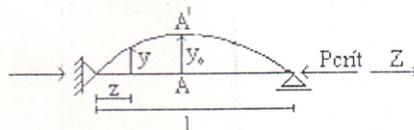
Los alemanes toman para el acero un valor de 1,71 - 3,5.

Al igual que en un cálculo de resistencia aquí también es conveniente hacer uso de varios coeficiente de seguridad en lugar de un único coeficiente general.

La pérdida de estabilidad de equilibrio elástico puede ocurrir también en la torsión, flexión y en las deformaciones compuestas, y éste problema fue la causa de numerosas catástrofes y averías en construcciones.

Fórmula de Euler para determinar la fuerza crítica

Analizaremos el estado crítico de una barra comprimida cuando la fuerza de compresión alcanza la fuerza crítica y suponiendo que la barra pandea ligeramente.



Si los momentos de inercia respecto a los ejes principales no son iguales, entonces el pandeo ocurrirá en el plano de menor rigidez.

La ecuación de la línea elástica de una viga es

$$EJ_{min} \cdot y'' = M_f$$

En éste caso el momento flector respecto del centro de gravedad de la sección A de la barra curvada (A') es:

$$M_f = -P_{crit} \cdot y$$

luego

$$E \cdot J_{min} \cdot y'' = -P_{crit} \cdot y$$

Llamaremos $k^2 = -P_{crit} / E \cdot J_{min}$ y la ecuación quedará :

$$\boxed{y'' + k^2 \cdot y = 0} \quad \text{Ecuación diferencial lineal de 2º orden}$$

La solución de ésta ecuación es:

$$y = A \cdot \cos(kz) + B \cdot \text{sen}(kz)$$

siendo A y B constantes de integración, para calcularlas emplearemos las condiciones de los extremos de la barra:

$$1) z = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow A \cdot \cos(k \cdot 0) + B \cdot \text{sen}(k \cdot 0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$2) z = l \rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 \cdot \cos(k \cdot l) + B \cdot \text{sen}(k \cdot l) = 0 \Rightarrow B \cdot \text{sen}(k \cdot l) = 0$$

Esta relación se cumple en dos casos:

a) $B = 0$, pero siendo $A=0$ resulta la ecuación nula y la flecha resultaría nula lo que contradice la suposición inicial.

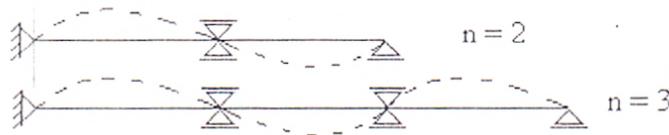
b) $\text{sen}(k \cdot l) = 0$, condición que se cumple para los siguientes valores: $k \cdot l = 0, 2 \cdot \pi, 3 \cdot \pi, \dots, n \cdot \pi$

$$k \cdot l = n \cdot \pi \Rightarrow k = \frac{n \cdot \pi}{l}, \text{ puesto que } k^2 = \frac{P_{\text{crít}}}{E \cdot J_{\text{mín}}} \Rightarrow \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} = \frac{P_{\text{crít}}}{E \cdot J_{\text{mín}}} \therefore$$

$$P_{\text{crít}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\text{mín}} \cdot n^2}{l^2}$$

De ésta forma se obtiene una infinidad de valores de la carga crítica que corresponden a distintas formas de pandeo de la barra.

En la práctica nos interesa conocer la fuerza crítica mínima para la cual tiene lugar la pérdida de la estabilidad de la barra.



El valor mínimo posible de n es 1:

$$P_{\text{crít}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\text{mín}}}{l^2} \quad \text{Fórmula de Euler}$$

A ésta fuerza corresponde la flexión de la barra por una senoide con una semi-onda.

$$y = B \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot z}{l}\right)$$

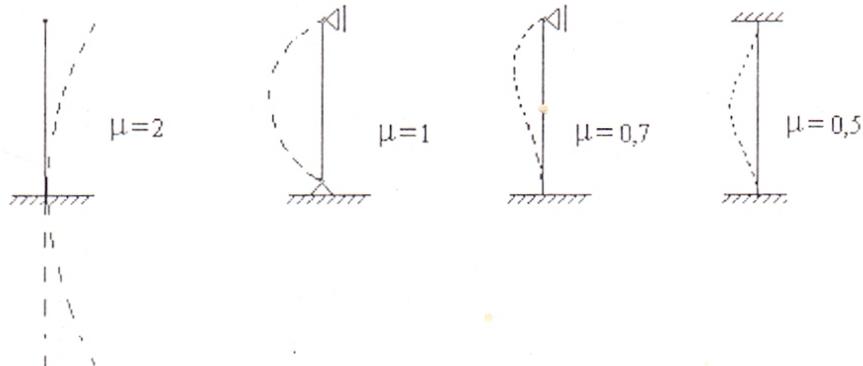
el resto de las raíces dan valores de la carga crítica mayores. Estos valores corresponden a la flexión de la barra por una senoide de varias semi-ondas que resulta cuando existen ligaduras intermedias en la barra.

Se deben tener en cuenta que en éste análisis no hemos definido el valor de B y consecuentemente desconocemos el valor de la flecha.

Si utilizamos la ecuación diferencial exacta de la línea elástica y no la aproximada, podemos conocer el valor de la fuerza crítica y la relación de ésta con la flecha.

Influencia del tipo de apoyo de la barra

Las formas de apoyo son las indicadas en las siguientes figuras:



La segunda situación es la ya analizada; para los otros tipos de apoyos, la fórmula generalizada de Euler para el cálculo de la carga crítica es:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot l)^2}$$

dónde μ es un coeficiente de reducción de la longitud de la barra. Cuanto menor sea μ , mayor será la carga crítica. Por ejemplo la carga que actúa sobre la barra empotrada en sus dos extremos puede ser 16 veces mayor que la que actúa sobre la barra empotrada en un sólo extremo. Como conclusión, dónde sea posible se deberá empotrar la barra rígidamente, aunque para los cálculos se recomienda considerar como articulados los extremos.

También para calcular la carga crítica de Euler existen dos métodos:

- 1.- Criterio energético o de Lord Rayleigh
- 2.- Diferencias finitas

Dominio de la fórmula de Euler

No siempre se puede emplear la fórmula de Euler como empleamos la ecuación de la línea neutra que se basa en la ley de Hooke, ésta es válida mientras las tensiones no rebasan el límite de proporcionalidad.

Para establecer el dominio de la fórmula de Euler calcularemos la tensión crítica:

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot F}$$

siendo F el área de la sección transversal de la barra, y puesto que $i_{min} = (J_{min}/F)^{1/2}$ (radio de giro mínimo) tenemos:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(\mu \cdot l / i_{min})^2}$$

la magnitud $\mu \cdot l / i_{min}$ caracteriza:

- la influencia de las dimensiones de la barra
- el modo de apoyo de los extremos.

Esta magnitud se la denomina esbeltez de la barra y se lo denota con la letra λ (magnitud adimensional). Reemplazando su valor en la fórmula:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Para que sea válida la fórmula de Euler se debe cumplir que $\sigma_{crit} \leq \sigma_p$, siendo σ_p el límite de proporcionalidad del material. Despejando la esbeltez resulta:

$$\lambda = (\pi^2 \cdot E / \sigma_p)^{1/2}$$

Para el acero, $\sigma_p = 2000 \text{ Kg/cm}^2$ por lo que $\lambda \cong 100$; así, para las barras de acero de bajo carbono, la fórmula de Euler se puede aplicar, si la esbeltez de aquella es mayor que 100. Para las barras de hierro fundido λ debe ser mayor de 80.

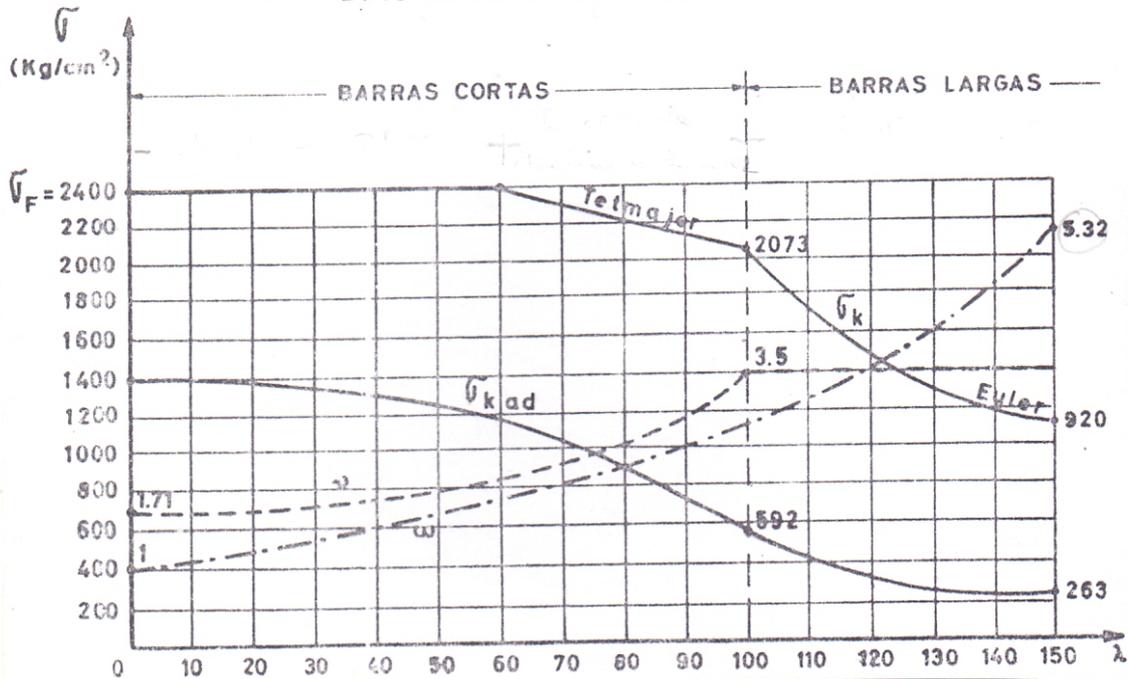
Fórmulas empíricas para la determinación de la tensiones críticas

Si λ es menor que los valores calculados, la fórmula de Euler no es aplicable. Existen métodos teóricos aproximados para el cálculo de las fuerzas críticas, cuando la pérdida de la estabilidad ocurre en el dominio no elástico, en éste caso se emplea la fórmula:

$$\sigma_{crit} = a - b \cdot \lambda$$

siendo a y b coeficientes que dependen de cada material en particular.

DIAGRAMA $\bar{\sigma}$ - λ PARA ACERO COMUN



Para barras con λ menor de 60 se las calcula por resistencia (tensiones admisibles) y no por pandeo.

Método de Lord Rayleigh

El procedimiento de Euler en problemas de Pandeo difícil, lleva a ecuaciones diferenciales de solución engorrosa, sobretodo cuando el momento de inercia es variable, el método que estudiaremos a continuación permite resolver los problemas de pandeo más fácilmente, sin necesidad de integrar ecuaciones diferenciales.

Está basado en un criterio energético, que como se ha visto, se puede aplicar a los distintos estados de equilibrio de un cuerpo. El procedimiento no fue establecido especialmente para el problema que nos ocupa: Lord Rayleigh en su libro "Teoría del sonido" lo aplicó para estudios de vibraciones, pero el método es extensivo al caso de pandeo.

Supongamos tener una barra delgada, articulada en sus extremos, sobre la cual actúa el esfuerzo de compresión F .

Para conocer el estado equilibrio perturbamos la posición recta de la barra y luego dejamos de ejercer la acción perturbadora: así la barra vuelve a la posición originaria, el equilibrio es estable; si se aleja es inestable y si permanece en su nueva posición es indiferente.

El criterio de Rayleigh es el siguiente: al perturbar la barra, se acumula en ella una cierta energía interna de deformación T_i (se ha ganado energía potencial) y también el punto de aplicación de F se desplaza recorriendo un cierto camino λ de descenso y produciendo por lo tanto un cierto trabajo

$$T_e = F \cdot \lambda$$

que significa una disminución o pérdida de energía potencial.

Se ha tomado el trabajo de F como un trabajo físico, pues F tiene un valor cualquiera, pero constante durante la perturbación; si el valor de F aumentara linealmente a medida que su punto de aplicación recorre el camino λ , el trabajo es elástico y vale la mitad del trabajo físico.

Si la energía interna es mayor que la externa, la barra curvada tiene acumulada, una vez cesada la perturbación, energía suficiente como para vencer la oposición de F y retornar a la posición recta primitiva, llevando la carga F a su posición inicial. Luego si:

$$T_i > T_e$$

tendremos equilibrio estable. Esto significa que $T_i - T_e > 0$, es decir, que durante la perturbación la barra gana energía potencial. Si $T_i < T_e$ la barra no tiene suficiente energía para poder volver a la posición originaria, y sigue deformándose: el equilibrio es inestable.

Si $T_i - T_e < 0$ la barra perturbada a perdido energía potencial.

En el caso de que las dos energía sean iguales, la barra permanece en su posición deformada y estaremos en el caso de equilibrio indiferente:

$$T_i = T_e$$

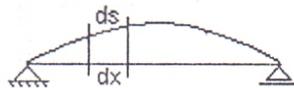
Aquí es $T_i - T_e = 0$; la energía potencial del sistema perturbado se mantiene estacionaria.

Calculemos ahora los valores de T_i y T_e .

Ya dijimos que:

$$T_e = F \cdot \lambda$$

Si tomamos una longitud dx sobre la recta y la correspondiente ds sobre la curva, la diferencia entre éstas dos longitudes elementales no será más que un camino elemental $d\lambda$ que habrá recorrido la fuerza F, es decir:



$$d\lambda = ds - dx$$

e integrando entre 0 y l :

$$\lambda = \int (ds - dx)$$

recordando que $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = dx \cdot [1 + (dy/dx)^2]^{1/2} = dx (1 + y'^2)^{1/2}$ tendremos:

$$\lambda = \int dx [(1 + y'^2)^{1/2} - 1]$$

El valor de y' (el valor de la tangente a la elástica), es muy pequeño y podemos tomar con suficiente aproximación:

$$[1 + y'^2]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} y'^2 \quad (\text{desarrollando en serie binómica})$$

de donde:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int y'^2 dx$$

luego:

$$T_e = \frac{F}{2} \int y'^2 dx \quad (1)$$

Al estudiar el trabajo interno de deformación por flexión, vimos que estaba dado por:

$$T_i = \frac{1}{2} \int \frac{M_x^2}{E \cdot J} dx$$

La ecuación de la elástica es:

$$E \cdot J \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x$$

Reemplazando el valor del momento en la expresión del trabajo interno de deformación, tenemos:

$$T_i = \frac{1}{2} \int E \cdot J y''^2 dx \quad (2)$$

La igualación de los dos trabajos nos permitirá obtener el valor de la carga crítica:

$$\frac{F}{2} \int y'^2 dx = \frac{1}{2} \int E.J y''^2 dx$$

Como el equilibrio es indiferente, la carga F será la crítica, luego

$$F_{crit} = \frac{\int E.J y''^2 dx}{\int y'^2 dx} \quad (3)$$

o bien:

$$F_{crit} = \frac{\int M_x dx}{\int y'^2 dx} \cdot \frac{E.J_z}{E.J_z}$$

La (3) es la expresión general de la carga crítica en el método de Rayleigh; si J es constante, sale fuera de la integral, si es variable, función de x, permanece dentro.

Este método tiene la ventaja de no necesitar conocer la ecuación exacta de la elástica pues una expresión aproximada de la misma, cumpliendo las condiciones de borde, nos lleva a resultados que ofrecen suficiente seguridad en las aplicaciones técnicas.

Fórmula práctica para el cálculo por pandeo

Es lógico utilizar una fórmula que sea válida para todos los valores de λ . Esa fórmula práctica es:

$$[P] = \varphi [\sigma_c] \cdot F$$

φ : coeficiente de disminución de la tensión por pandeo

F: área de la sección transversal de la barra.

Se utiliza la expresión de la tensión admisible en los cálculos por pandeo

$$\sigma_e = \varphi \cdot [\sigma_c]$$

La tensión admisible básica a compresión vale:

$$[\sigma_c] = [\sigma_{lim}] / n$$

σ_{lim} : límite de fluencia para materiales plásticos y límite de resistencia para materiales frágiles. la relación entre el coeficiente φ , la tensión crítica, la tensión límite y los coeficientes de seguridad por resistencia n y por pandeo n_e se puede establecer como:

$$\sigma_e = \varphi \cdot [\sigma_c] = \sigma_{crit} / n_e$$

de donde $\varphi = \sigma_{crit} / [\sigma_c] n_e$ y reemplazando $[\sigma_c]$ queda:

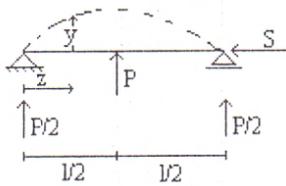
$$\varphi = \frac{\sigma_{crit} \cdot n}{[\sigma_c] \cdot n_e}$$

Método ruso: $\frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma]$

Método Omega (alemán): $[\sigma] \omega \leq \frac{P}{F}$

Flexión por fuerzas longitudinales y transversales

Veamos un nuevo caso de acción combinada sobre una barra, de una fuerza axial de compresión y de una carga transversal.



Bajo la acción de éstas cargas, la barra se deforma como se indica en la figura. Si las deformaciones son pequeñas en relación con las dimensiones de la sección, entonces las tensiones que surgen en la barra se pueden determinar partiendo del principio de superposición de las fuerzas.

La tensión por la fuerza de compresión será:

$$\sigma_1 = -S/F$$

la tensión por la carga transversal que origina el momento flector vale:

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_{of}}{W}$$

siendo M_{of} el momento flector que produce exclusivamente la fuerza transversal.

La tensión total será:

$$\sigma_e = \sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{S}{F} \pm \frac{M_{of}}{W}$$

En las barras de pequeña rigidez es necesario considerar también el momento flector suplementario ocasionado por la fuerza axial:

$$M_s = S \cdot y$$

Las tensiones serán entonces

$$\sigma_T = -\frac{S}{F} \pm \frac{M_{of} + M_s}{W}$$

El valor de la flecha no se conoce, y como depende tanto de la fuerza de compresión como de la fuerza transversal, no se puede aplicar el método de superposición, pues la flecha depende del momento flector suplementario que a su vez depende de la flecha.

El método aplicable en éste caso es el de aproximaciones sucesivas. Primero calcularemos la flecha que produce la carga transversal que en el caso de la figura será:

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

El momento flector máximo debido a la carga transversal se produce en la sección de aplicación de la fuerza:

$$M_{of} = \frac{P \cdot l}{4}$$

Luego la flecha máxima la podemos expresar como:

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{M_{of} \cdot l^2}{12 \cdot E \cdot J}$$

conociendo $y_{m\acute{a}x}$ se puede obtener el momento flector máximo de la fuerza de compresión, quedando $M_s = S \cdot y_{m\acute{a}x}$ y el momento total será:

$$M_T = M_{of} + M_s = \frac{P \cdot l}{4} + S \cdot y_{m\acute{a}x}$$

Si el segundo sumando es importante frente al primero, se debe introducir éste valor en la fórmula de $y_{m\acute{a}x} = M_{of} \cdot l^2 / 12 \cdot E \cdot J$, obteniendo así un nuevo valor de $y_{m\acute{a}x}$ más exacto que el anterior, de esa forma se procede hasta que $M_s \ll M_T$.

Hay un método más exacto (de la secante), el que demuestra que en la flexión por fuerzas de compresión y transversales, la flecha se determina por la fórmula $y = y_0 \cdot C$. Siendo y_0 la flecha debido a la fuerza transversal y

$$C = \frac{1}{1 - S / S_e}$$

y se llama coeficiente de corrección que refleja la influencia de la fuerza de compresión, y

$$S_e = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{(\mu \cdot l)^2}$$

El momento flector total se determina por la fórmula:

$$M_f = M_{of} + S \cdot y = M_{of} + S \cdot y_0 / (1 - S/S_e)$$

Las tensiones máximas en las fibras extremas se obtienen por la fórmula:

$$\sigma = -\frac{S}{F} + \frac{M_f}{W}$$

o definitivamente:

$$|\sigma| = \frac{S}{F} + \frac{M_{of}}{W} + \frac{S \cdot y_0}{W \cdot (1 - S/S_e)} \leq [\sigma_c]$$

De ésta fórmula se deduce que las tensiones crecen con mayor rapidez que la carga, esto es, si la carga P y la S aumentan proporcionalmente (por un valor n), la magnitud y_0 también aumenta proporcionalmente pero el último sumando aumenta entonces con n^2 lo que hace que no aumente en la misma proporción. Por lo tanto el cálculo por resistencia en la flexión de la viga sometida a las fuerzas de compresión y transversal, no se puede realizar por las tensiones admisibles. Este cálculo se realiza por las cargas admisibles, que es el valor de la fuerza para la cual la tensión en el punto peligroso de la sección transversal alcanza el límite de fluencia. Dividiendo ésta fuerza por el coeficiente de seguridad necesario, se obtiene la carga admisible.

El número n indica en cuantas veces se debe aumentar las fuerzas exteriores para que la tensión en el punto peligroso alcance la tensión límite. Luego n es el coeficiente efectivo de seguridad de las cargas.

Cuando la carga transversal origina la flexión en el plano de máxima rigidez, la comprobación de la resistencia no excluye la necesidad de comprobar la estabilidad de la viga en el plano de mínima rigidez.

UNIDAD VI - CARGAS DINAMICAS

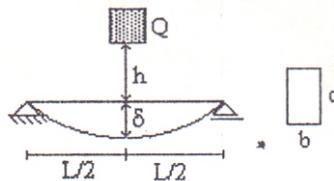
Introducción

Hasta aquí hemos supuesto que las cargas que actúan en una estructura o pieza son aplicadas en forma gradual y que las mismas permanecerán en equilibrio estable (sin aceleración) en cada instante o estado de carga. En cambio cuando una carga es producida por un cuerpo en movimiento se la llama **carga dinámica**.

Cuando la aplicación de la carga se efectúa en forma muy prolongada, se produce un incremento lento de la deformación llamado "**creep**" y si por el contrario el intervalo de tiempo es extremadamente corto estamos frente a un fenómeno denominado **impacto de alta velocidad**.

El método general de cálculo por cargas dinámicas se basa en el conocido principio de D'Alembert, que dice: "cualquier bólide en movimiento se puede considerar en estado de equilibrio instantáneo, si se agrega a las fuerzas exteriores que sobre él actúan, la fuerza de inercia, igual al producto de su masa por su aceleración, y dirigida en dirección opuesta a la aceleración".

Flexión por choque



Supongamos que un peso Q cae guiado sobre el centro de una viga simplemente apoyada. Sean

h: altura de caída

l: luz de la viga

delta: flecha producida por el choque

El trabajo externo de deformación vale:

$$T_e = Q.(h+\delta).$$

Para el trabajo interno emplearemos una expresión que sea independiente de la carga; en flexión se dedujo que:

$$\delta = \frac{P.l^3}{48.E.J} \Rightarrow P = 48.E.J.\delta / l^3$$

El trabajo interno en su expresión más general estaba dado por:

$$T_i = \frac{1}{2} P.\delta$$

reemplazando el valor de P obtenido anteriormente en ésta nos queda:

$$T_i = 48.E.J.\delta^2 / 2.l^3$$

igualando los trabajo interno y externo:

$$Q.(h+\delta) = 48.E.J.\delta^2 / 2.l^3$$

pero $Q.l^3/48.E.J$ es la flecha estática producida por Q, y la indicaremos como δ_{ST} , por lo que la expresión finalmente quedará:

$$\delta^2 - 2.\delta_{ST}.\delta - 2.\delta_{ST}.h = 0$$

que resolviéndola obtenemos que:

$$\delta = \delta_{ST} + (\delta_{ST}^2 + 2.\delta_{ST}.h)^{1/2}$$

Casos particulares

1.- Los valores de δ_{ST} en general son de fracciones de milímetro, es decir, son valores muy pequeños frente a h. Con suficiente aproximación podemos despreciar el término δ_{ST} , quedando entonces la anterior expresión:

$$\delta \cong (2.\delta_{ST}.h)^{1/2}$$

2.- Cuando la altura de caída es nula $h=0$, la expresión toma la forma $\delta = 2.\delta_{ST}$. La tensión que produce la flecha $\delta = (2.\delta_{ST}.h)^{1/2}$ surge al deducir el momento equivalente que corresponde a esa flecha.

Sea P_{eq} la fuerza estática equivalente que produce (sin caer) la misma flecha $\delta = P_{eq}.l^3/48.E.J \Rightarrow P_{eq} = 48.E.J.\delta / l^3 \Rightarrow P_{eq} = 48.E.J.(2.\delta_{ST}.h)^{1/2}/l^3$

El momento flector que produce ésta fuerza será:

$$M_{eq} = P_{eq} . l / 4 = 48.E.J.(2.\delta_{ST}.h)^{1/2} . l / 4 . l^3 \Rightarrow M_{eq} = \frac{(144.E^2.J^2 . 2.Q.l^3.h)^{1/2}}{l^4} \cdot 48.E.J$$

operando obtenemos que:

$$M_{eq} = (6.E.J.Q.h / l)^{1/2}$$

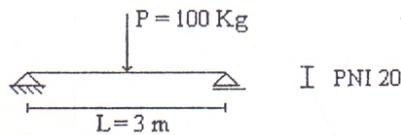
siendo $\sigma = \frac{M_{eq}}{W} = \frac{M_{eq}}{J} \cdot \frac{c}{2}$:

$$\sigma = \frac{(6.E.J.Q.h / l)^{1/2}}{J} \cdot \frac{c}{2} \Rightarrow \sigma = \left(\frac{3.E.Q.h}{2 J.l} \right)^{1/2} . c$$

Conclusión: vemos que la tensión es directamente proporcional a la altura de la viga y a la raíz cuadrada de la altura de caída, al módulo de elasticidad E y a la carga Q; e inversamente proporcional a la luz y al momento de inercia de la sección.

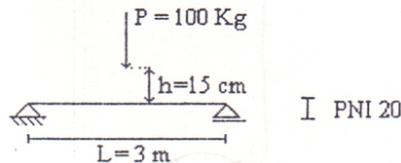
Ejemplo

1)



$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{P.L}{4.W} = \frac{100.300}{4.184} = 40,76 \text{ Kg/cm}^2$$

2)



$$\sigma = \left(\frac{3.E.Q.h}{2 J.l} \right)^{1/2} . c = \left(\frac{3 . 2,1.10^6 . 100.15}{2 \cdot 1840.300} \right)^{1/2} . 20/2 = 925,2 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (23 veces mayor que } \sigma_{est})$$

Fatiga

Es muy característico que cuando actúan cargas alternadas repetidas, la destrucción ocurre como consecuencia del desarrollo progresivo de grietas, que se denominan grietas de fatiga.

El término fatiga debe su procedencia a la suposición errónea de los primeros investigadores de éste fenómeno, de que bajo la acción de tensiones alternadas cambia la estructura del metal.

Actualmente se ha demostrado que cuando actúan cargas periódicas, la estructura del metal no se altera. Parece que se debe a la heterogeneidad de la estructura del material. Los distintos cristales del metal tienen diferente resistencia en las diferentes direcciones. Por ello cuando las tensiones adquieren cierto valor, en algunos cristales aparecen deformaciones plásticas (fisuras).

En el caso de cargas y descargas alternadas, aparece el endurecimiento, aumentando así la fragilidad del metal. En definitiva, cuando es grande el número de repeticiones de la carga, la capacidad del material a aumentar el endurecimiento se agota y aparecen grietas microscópicas en uno de los planos de deslizamiento. Esta grieta se convierte en un fuerte concentrador de

tensiones y teniendo en cuenta el debilitamiento progresivo de la sección, se convierte en lugar de fallo definitivo.

Para el surgimiento y desarrollo de las grietas de fatiga tienen gran importancia no solamente los defectos de la estructura interior del material (grietas interiores, incrustaciones de escorias, etc.), sino también los defectos superficiales de la elaboración de la pieza (rasguños, huellas de la cuchilla o piedra esmeril, etc.).

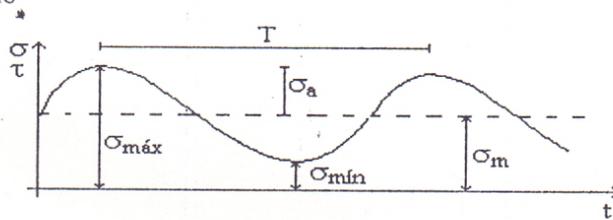
“La acumulación de transformaciones mecánicas irreversibles en el material al apilar cargas cíclicas se denomina fatiga y la destrucción como consecuencia del desarrollo paulatino de las grietas, se denomina destrucción por fatiga”.

El conjunto de todos los valores de las tensiones en el intervalo de tiempo correspondiente a un período se denomina ciclo. Se puede decir también que se llama ciclo a cada cambio unitario de tensiones.

La influencia de la forma de la curva de la variación de tensión sobre la resistencia de la pieza por fatiga, permite considerar que no es grande, sino que el papel decisivo lo juegan los valores de la tensión máxima y mínima del ciclo, así como la relación que guardan entre ellas. Por eso, en adelante consideraremos que la variación de las tensiones en función del tiempo tienen carácter senoidal.

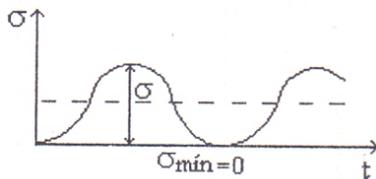
El ciclo de las tensiones alternadas se caracteriza por:

- 1) $\sigma_{m\acute{a}x}$: tensión máxima en el sentido algebraico de la palabra
- 2) $\sigma_{m\acute{i}n}$: tensión mínima " " " " " " " "
- 3) σ_m : tensión media, promedio entre $\sigma_{m\acute{a}x}$ y $\sigma_{m\acute{i}n}$ (puede ser positiva o negativa)
- 4) σ_a : amplitud del ciclo $(\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n})/2$
- 5) R: coeficiente de asimetría del ciclo $(R = \sigma_{m\acute{i}n} / \sigma_{m\acute{a}x})$
- 6) T: período del ciclo



Casos particulares

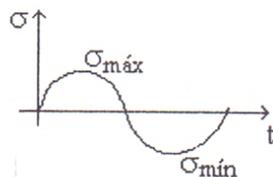
1) Ciclo pulsante



$$\sigma_m = \sigma/2 = \sigma_a$$

$$R = 0$$

2) Ciclo simétrico



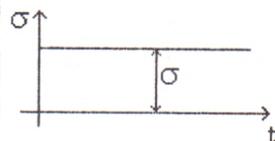
$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma$$

$$\sigma_{m\acute{i}n} = -\sigma \quad \sigma_m = 0$$

$$\sigma_a = \sigma$$

$$R = -1$$

3) Tensión estática



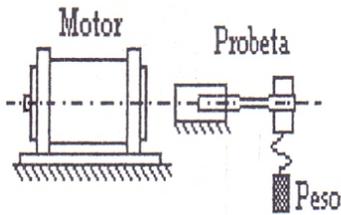
$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma$$

$$\sigma_{m\acute{i}n} = \sigma \quad \sigma_m = \sigma$$

$$\sigma_a = 0$$

$$R = 1$$

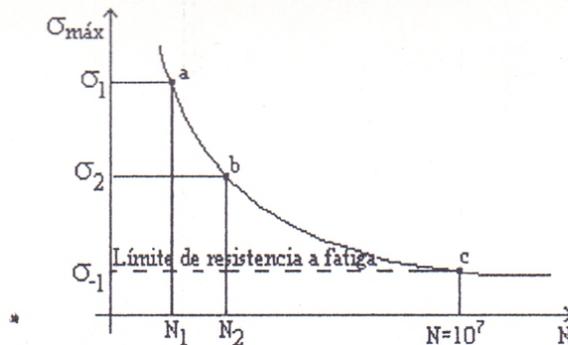
Curva de fatiga para el ciclo simétrico - Límite de resistencia a la fatiga



En el ensayo, las tensiones simétricas cíclicas surgen a costa de la rotación de la probeta, cargada con el peso sujeto al extremo mediante un cojinete.

Se escogen 10 probetas iguales de superficie pulida cuyo diámetro puede oscilar entre 6 y 10 mm. Los resultados del ensayo se trazan sobre un diagrama $\sigma_{\text{máx}} - N$. La curva obtenida se denomina **Curva de fatiga o de Wöhler**.

A menor tensión de ensayo, la probeta soportará mayor número de revoluciones. La curva se caracteriza por ser, a partir de cierta tensión, prácticamente horizontal (tramo c-d), quiere decir que: "Cuando la tensión adquiere cierto valor σ_1 , la probeta puede resistir sin destruirse un número infinito de ciclos y recibe el nombre de límite de resistencia a la fatiga" (σ_1).

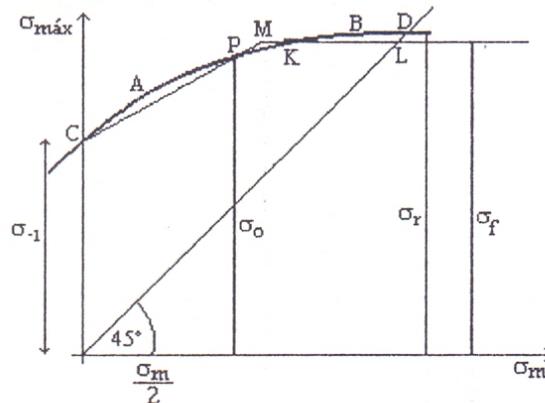


- 1) Las probetas de acero al carbono pueden resistir o superar el valor de $N=10^7$ ciclos, llamándose a éste número "base de los ensayos", por lo que a partir de éste valor se suspende el ensayo.
- 2) Para metales no ferrosos y aceros templados, no se consigue establecer un número de ciclos tal que después del mismo la probeta no se destruya. En éstos casos se introduce el concepto de "Límite de resistencia restringido" ($N=10^8$).

Diagrama de las tensiones límites

1) Diagrama de Smith ($\sigma_{\text{máx}} - \sigma_m$)

Para caracterizar la resistividad del material a las tensiones cíclicas para diferente asimetría del ciclo se construye el llamado diagrama de las tensiones límites.



Se comienza por trazar sobre el eje $\sigma_{\text{máx}}$ el punto c cuya ordenada es el límite de resistencia a la fatiga en el ciclo simétrico σ_{-1} (en el ciclo simétrico $\sigma_m = 0$).

