UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional General Pacheco

Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2do año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros

Tesina para la obtención de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Presenta:
Prof. Yanel Eliana Martínez

Director de Tesina:
Dr. Marcel David Pochulu

2018

Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2do año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros

....

Prof. Yanel Eliana Martínez

....

Dr. Marcel David Pochulu

Director de Tesina

TRIBUNAL

....

....

....

Lugar y fecha

PLANTEAMIENTO Y RESUMEN

ESTA INVESTIGACIÓN TUVO COMO PROPÓSITO IDENTIFICAR LOS ERRORES Y DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ALUMNOS AL RESOLVER LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS ENTEROS. COMO MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO, SE UTILIZARON LAS HERRAMIENTAS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA, CUYO PRINCIPAL EXPONENTE ES JUAN DÍAZ GODINO.

COMO CONTEXTO DE INVESTIGACIÓN, SE ANALIZARON LOS ERRORES Y DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ALUMNOS DE SEGUNDO AÑO DEL INSTITUTO DEL SOL, DE GENERAL PACHECO, PROVINCIA DE BUENOS AIRES, DURANTE EL AÑO 2018.

PARA EL ESTUDIO, SE DISEÑÓ, VALIDÓ Y APLICÓ UN INSTRUMENTO QUE PONE EN JUEGO LA RED DE RELACIONES QUE ACTIVA UN ALUMNO AL RESOLVER CONSIGNAS VINCULADAS A LA SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS. EL DISEÑO DEL INSTRUMENTO TUVO EN CUENTA EL DOCUMENTO CURRICULAR Y EL ANÁLISIS DIDÁCTICO REALIZADO SOBRE LAS ACTIVIDADES PRESENTES EN SEIS LIBROS ESCOLARES DE MATEMÁTICA QUE SON UTILIZADOS FRECUENTEMENTE POR LOS DOCENTES Y ATIENDEN A LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS ENTRE NÚMEROS ENTEROS.

ADEMÁS DE CONTAR CON LAS PRODUCCIONES ESCRITAS DE LOS ESTUDIANTES, SE REALIZARON ENTREVISTAS CLÍNICAS CON EL OBJETIVO DE DETERMINAR EN PROFUNDIDAD CUÁLES SON LOS ELEMENTOS PRIMARIOS QUE SE PONEN EN MARCHA AL RESOLVER EL INSTRUMENTO DISEÑADO; Y, DE ESTE MODO, PONER EN EVIDENCIA AQUELLOS ERRORES Y DIFICULTADES EN QUE PERSISTEN.

AGRADECIMIENTOS

Especialmente a mi Director: Marcel David Pochulu.

Gracias Marcel por ser tan generoso con tu tiempo y tus conocimientos, por cada corrección que me ayudó a mejorar. Gracias por tu paciencia, por responderme las dudas, por infundirme ánimo cuando sentía que no iba a poder. Para mí ha sido un privilegio y una fuente de gran aprendizaje hacer esta investigación con tu dirección.

Gracias a Ariel, mi esposo, por animarme a continuar y acompañarme en las largas jornadas de estudio.

Gracias a mis padres, Viviana y Alberto, por enseñarme desde pequeña la importancia del estudio. A mi hermano Gaspar, que es mi ejemplo de lucha.

Gracias a los directivos de la escuela, que me permitieron realizar la investigación; y a los estudiantes, que colaboraron con su valiosa participación.

Gracias a los investigadores: Dra. María Laura Distéfano, Lic. Mario Alvarez, Lic. Raquel Abrate y Mg. Fabián Espinoza, que hicieron su aporte para dar mayor fiabilidad al instrumento de evaluación.

Gracias al Director de la Carrera, Mario Di Blasi Regner y a los miembros del tribunal, desconocidos al momento de escribir estas palabras, por la lectura y la evaluación de esta tesina.

ÍNDICE

1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN 9

1.1 Consideraciones generales 9
1.2 Delimitación del problema de investigación 12
1.3 Objetivos de la investigación 13
1.4 Justificación y alcances del estudio 13
1.5 Organización de la memoria de la investigación 14

2. ESTADO DEL ARTE Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA 17

2.1 Introducción 17
2.2 Antecedentes históricos de los números enteros 17
2.3 Antecedentes de errores y dificultades en el trabajo con números enteros 18
2.4 La incidencia de los libros de texto en la comprensión de números enteros 24

3. MARCO TEÓRICO 27

3.1 Introducción 27
3.2 Los objetos matemáticos 28
3.3 Los objetos matemáticos y su significado personal e institucional 30
3.4 La configuración epistémica y la configuración cognitiva 30
3.5 La comprensión matemática 31
3.6 Sobre obstáculos, errores y dificultades 32

4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 35

4.1 Introducción 35
4.2 Fases de la investigación 35
4.3 Documento Curricular, textos escolares y estudiantes participantes 39
4.3.1 El Documento Curricular analizado 39
4.3.2 Los textos escolares analizados 40

5. LOS NÚMEROS ENTEROS EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES Y EN LOS TEXTOS ESCOLARES 43

5.1 Introducción 43
5.2 Configuración epistémica de referencia del objeto matemático “Números Enteros” 43
5.3 Los Números Enteros en los textos escolares 46

5.4 Configuraciones epistémicas del objeto matemático “Números Enteros” en los textos escolares analizados....46
5.4.1 Descripción general del Libro 1 46
5.4.1.1 Identificación de los objetos primarios del Libro 1 47
5.4.1.2 Tabla de objetos primarios y emergentes de las situaciones problema propuestas del Libro 1 69
5.4.1.3 Configuración epistémica del Libro 1 71
5.4.2 Descripción general del Libro 2 73
5.4.2.1 Identificación de los objetos primarios del Libro 2 73
5.4.2.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 2....86
5.4.2.3 Configuración epistémica del Libro 2 87
5.4.3 Descripción general del Libro 3 89
5.4.3.1 Identificación de objetos primarios del Libro 3....89
5.4.3.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 3....114
5.4.3.3 Configuración epistémica del Libro 3 115
5.4.4 Descripción general del Libro 4 117
5.4.4.1 Identificación de objetos primarios del Libro 4....117
5.4.4.2 Tabla de objetos primarios del Libro 4 127
5.4.4.3 Configuración epistémica del Libro 4 127
5.4.5 Descripción general del Libro 5 129
5.4.5.1 Identificación de objetos primarios del Libro 5....129
5.4.5.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 5....140
5.4.5.3 Configuración epistémica del Libro 5 141
5.4.6 Descripción general del Libro 6 142
5.4.6.1 Identificación de objetos primarios del Libro 6....142
5.4.6.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 6....162
5.4.6.3Configuración epistémica del Libro 6 163

6. DISEÑO Y VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO 166

6.1 Diseño del Instrumento 166
6.1.1 La selección de las consignas....167
6.1.2 Configuración epistémica del instrumento 195
6.2 Validación del instrumento por pares expertos....196
6.3 Aplicación del instrumento 198
6.4 Configuraciones cognitivas de los estudiantes, detección de errores y dificultades 199
6.4.1 Configuración cognitiva y detección de errores y dificultades del alumno 1....200
6.4.2 Configuración cognitiva y detección de errores y dificultades del alumno 2....203
6.4.3 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 3 208
6.4.4 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 4 213
6.4.5 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 5 216

6.4.6Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 6 220
6.4.7 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 7 224
6.4.8 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 8 229
6.4.9 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 9 233
6.4.10 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 10..................238
6.4.11 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 11..................242
6.4.12 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 12..................245
6.5 Errores persistentes en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes......................248
6.6 Determinación de la presencia o ausencia de elementos primarios del objeto matemático......255
6.6.1 El tipo de lenguaje utilizado en el proceso de argumentación...258

7. CONCLUSIONES 260

7.1 Consideraciones generales 260
7.2 Los objetos primarios a los que recurren los alumnos cuando resuelven actividades vinculadas a números enteros 261
7.3 Las estrategias a las cuales recurren los alumnos cuando operan con números enteros 263
7.4 Los errores y dificultades que generan algunas estrategias de resolución vinculadas a la operatoria con números enteros 263
7.5 Sobre los textos escolares que involucran a los números enteros 264
7.6Reflexiones finales..265
7.7 Limitaciones de la investigación y futuras perspectivas 266

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS...269

ANEXOS 275

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Consideraciones generales

Resulta indiscutible la importancia que tiene la educación en las sociedades actuales; puesto que se le atribuye la capacidad de transmitir el legado cultural de generación en generación, de aportar al crecimiento de los países, de promover el ascenso social de las personas y hasta es considerada como la garantía de la democracia. Para alcanzar estos propósitos, los gobiernos destinan recursos y esfuerzos para mejorar sus sistemas educativos. Sin embargo, a pesar de las distintas políticas aplicadas y de la utilización de recursos tecnológicos en el aula, el aprendizaje en el área de Matemática es una preocupación recurrente.

Los profesores de Matemática suelen adjudicar las deficiencias en los aprendizajes al nivel educativo que lo precede, mientras que gran cantidad de alumnos afirman que es la materia más complicada y que carece de sentido. Inclusive, los adolescentes que están a punto de finalizar el nivel secundario sostienen que la presencia o ausencia de la materia en los programas de estudio define qué carrera van a seguir en la Universidad. Sin embargo, la realidad es que los errores forman parte de las producciones de la mayoría de los estudiantes en todos los niveles educativos y, generalmente, son un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Es notable observar que las recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinando sus causas y organizando la enseñanza. Teniendo en cuenta esa información, el profesor debe ser sensible a las ideas previas de los estudiantes y valerse de estrategias adecuadas para lograr el progreso del aprendizaje (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006). Específicamente, en el Diseño Curricular para la Escuela Secundaria (DCES, 2006, p. 43) de la Provincia de Buenos Aires, se expresa claramente que el docente debe “trabajar con los errores de los alumnos/as como fuente de información de los procesos intelectuales que están realizando y gestionar al error como parte de un proceso de construcción de significados”.

A su vez, en el DCES3 (2009) se alude a cuatro cuestiones relevantes de la Situación Problema docente, entre las que se tienen las intervenciones del docente y los errores del alumno. En lo que atañe a la detección de errores, el DCES2 (2007, p. 299) y el DCES3 (2009, p. 26) expresan:

> Para poder brindar la ayuda adecuada, el docente deberá escuchar las explicaciones de sus alumnos para averiguar, a través de ellas, el estado de situación en el que se encuentran en relación con la comprensión del problema propuesto, cuáles son las cuestiones que ya han logrado resolver en forma adecuada y cuáles son los errores que han cometido hasta el momento.

A su vez, las intervenciones del docente y los errores que cometen los alumnos en el tema que se aborda, tienen que ser considerados en el diseño de las actividades. En este sentido, el DCES2 (2007, p. 300) y el DCES3 (2009, p. 27) son claros cuando se señalan:

> Al diseñar una secuencia didáctica, el docente deberá prever posibles errores y respuestas de los alumnos. Esto le permitirá anticipar sus intervenciones durante el trabajo en el aula, así como las cuestiones a considerar en la puesta en común o en el cierre. El posterior análisis de la distancia entre estas previsiones y lo que realmente haya sucedido brindará elementos a tener en cuenta para la preparación de propuestas futuras y para la previsión de intervenciones más ajustadas.

Abrate, Pochulu y Vargas (2006) remarcan que la detección del error, como parte de las ideas previas del alumno, es un primer paso para la aplicación de un modelo constructivista de enseñanza de la Matemática. Este primer paso, permite identificar los contenidos que son más susceptibles de errores y dificultades; por lo tanto, contribuye positivamente en el proceso de aprendizaje de conocimientos matemáticos. No obstante, analizar los errores y las dificultades que tienen los alumnos en términos de la prevención y corrección, supone un gran desafío para los profesores; con el agravante de que aquello considerado como un error por un profesor, puede no ser visto de la misma manera por otro. En tal sentido, se acepta en este trabajo la definición de error que proponen Godino, Batanero y Font (2003, p. 69) cuando subrayan que “hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar”.

Más allá de que ciertas prácticas puedan ser consideradas o no como error por parte del profesor, son numerosos los trabajos de Educación Matemática que reportan los errores que cometen los alumnos sobre todos los temas del currículo escolar (Rico, 1995; Esteley y Villarreal, 1996; Gamboa, 1997; Villagrán, Alcalde Cuevas, Marchena Consejero y Navarro

Guzmán, 1998; Caputo y Soto, 2002; Hitt, 2003; Di Blasi Regner, Espro, Lois y Milevicich,2003). En consecuencia, el desafío estaría en que los docentes pudieran generar estrategias en sus alumnos que permitan ayudar a salvar estos errores que se reiteran en el tiempo, proponiendo procesos de enseñanza y aprendizaje cuidadosamente planificados y que los contemplen. Sobre esta situación, en el DCES2 (2007, pp. 300-301) y en el DCES3 (2009, p. 28) se propone:

> La previsión de los posibles errores que podrían cometer los alumnos en la resolución de las situaciones planificadas para la clase permitirá al docente anticipar estrategias para intervenir durante la misma.
>
> Los errores no deben ser considerados como ausencia de conocimiento sino como la expresión de un determinado estado de conocimiento matemático que necesita ser revisado en algún sentido. La superación de estos errores no se logrará mediante la imposición del saber. Será necesaria una planificación de acciones tendientes a que los alumnos tomen conciencia de ellos y puedan hacerse cargo de su reparación o ajuste.

Para ello, será de vital importancia proponer actividades en las que deban ponerse en práctica los conocimientos matemáticos que el alumno posea de manera que, si los mismos tuvieran aspectos para corregir, estos se evidencien al tratar de resolverlas.

Uno de los contenidos que presenta dificultades para su enseñanza y aprendizaje en la escuela secundaria, son los números enteros. No es extraño que los estudiantes se sientan confundidos respecto a las propiedades y la operatoria y, por lo tanto, cometan errores al resolver las actividades planteadas por el docente. Al respecto, varios estudios e investigaciones como los de Bell (1986), Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991), Bruno (1997), Fory (2010), Eva Cid (2002),Eva Cid y Pilar Bolea (2002; 2010) manifiestan que una gran cantidad de alumnos no alcanza una comprensión adecuada del concepto de Número Entero ni consiguen resolver correctamente operaciones con ellos.

Cabe aclarar que, en la presente investigación, el término comprensión se entiende en el siguiente sentido:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra o extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto,

> los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFD, 2010, p. 122)

Por lo tanto, si el alumno comprende cierto objeto matemático, debiera articular seis elementos que le refieren: las situaciones problema en las que se involucra al objeto, los conceptos y definiciones, las propiedades y proposiciones, los procedimientos, los argumentos, y el lenguaje.

1.2 Delimitación del problema de investigación

La enseñanza de los números a lo largo de la escuela primaria y secundaria, debiera tener un hilo conductor; es decir, enlaces que permitan un desarrollo fluido de los contenidos. Para ello, es preciso que los conjuntos numéricos no estén aislados, sino conectados entre sí. Al concebirlos como un todo, es importante que no existan errores de interpretación conceptual ni de operatoria. Llamativamente, gran cantidad de profesores y de investigadores en educación matemática reportan que uno de los conjuntos numéricos más dificultoso para los estudiantes es el de los números enteros.

En Argentina, el Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires (2007) propone trabajar la noción de Número Entero a partir de la necesidad de ampliar los conjuntos numéricos anteriores. También, sugiere profundizar en el concepto desde una perspectiva algebraica y geométrica, además de resolver operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Respecto de las propiedades para números enteros, su aporte tiene que ver con retomar las propiedades de los números naturales que conocen los estudiantes y discutir su vigencia para los enteros. A su vez, "se propone trabajar la forma de operar con números enteros a través de problemáticas apropiadas, que permitan darle significado a cada operación, tratando de evitar recurrir a reglas impuestas, como podría ser la regla de los signos" (DCES2, 2007, p. 325).

Sin embargo, se sabe que el estudio de los números negativos en las aulas pone de relieve diversas dificultades en los alumnos relacionadas con la comprensión del concepto de Número Entero y con la operatoria con ellos. Por otro lado, investigadores como Ashlock, Reisman, Robitaille, Bell, Ginsburg, Erlwanger y otros, citados en Rico (1995), consideran que los errores en Matemática no tienen un carácter accidental o casual, sino más bien que surgen por las estrategias y reglas personales empleadas en la resolución de problemas, y devienen de experiencias particulares e interpretaciones realizadas con base en los conocimientos matemáticos iniciales que tienen los estudiantes.

De este modo, se hace necesario abordar un análisis como el de la presente investigación, definida por ser de naturaleza diagnóstico-descriptiva y cualitativa, de corte etnográfico y hermenéutico. Para su desarrollo, se tuvieron en cuenta las herramientas que proveen el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática de Godino, Batanero y Font (2007) como lineamiento teórico y metodológico de la Didáctica de la Matemática. En relación al contexto de estudio, se consideraron las prácticas matemáticas, tanto escritas como orales, realizadas por alumnos del 2^{do} año de la escuela secundaria, durante el año 2018. Las mismas, se basaron en la resolución de actividades que involucran las operaciones elementales con números enteros, con la finalidad de interpretar algunas de las causas de los errores y dificultades más habituales que resultan un obstáculo para la correcta comprensión.

1.3 Objetivos de la investigación

Con el propósito de analizar los errores y dificultades que tienen frecuentemente los alumnos cuando enfrentan actividades referidas a la operatoria con los números enteros, se proponen los siguientes objetivos:

- Determinar los conceptos, propiedades, procedimientos, técnicas, tipo de argumentaciones y uso de lenguaje puestos en práctica en la resolución de actividades que involucran números enteros.
- Identificar las estrategias a las cuales recurren los alumnos cuando operan con números enteros.
- Detallar los obstáculos y dificultades que generan algunas estrategias de resolución de actividades vinculados con la operatoria con números enteros.

1.4 Justificación y alcances del estudio

Con esta investigación se ofrecen aportes teóricos que invitan a la reflexión y al análisis crítico sobre la práctica docente. Dichos aportes, se encuentran vinculados a las siguientes cuestiones:

- Contar con información sobre las estrategias que utilizan frecuentemente los alumnos al operar con los números enteros.
- Brindar información sobre los errores y las problemáticas frecuentes que emergen al abordar números enteros para tenerlas presente en el diseño de actividades de clase.
- Proponer criterios para capacitaciones docentes en las que el diseño de problemas y situaciones de enseñanza que involucran la comprensión de los números enteros se establezcan como un propósito destacado.

1.5 Organización de la memoria de la investigación

La presente tesina cuenta con siete Capítulos, cuyos resúmenes se presentan a continuación:

- Capítulo 1: Se realiza el planteamiento de la investigación delimitando el problema y enunciando los objetivos, la justificación de la investigación y los alcances del estudio.
- Capítulo 2: Se muestran los antecedentes históricos de números enteros y se registran investigaciones que reporten errores y dificultades en su operatoria. Además, se hace una breve reseña de la incidencia de los libros de texto en la comprensión de los números negativos.
- Capítulo 3: Se describe el Marco Teórico utilizado para la investigación.
- Capítulo 4: Se detalla la metodología de la investigación y las fases que componen la misma.
- Capítulo 5: En primer lugar, se analiza lo propuesto en el documento curricular para la enseñanza de operaciones con números enteros; en segundo lugar, se estudia el capítulo de números enteros presente en cada uno de los seis textos de uso frecuente en las escuelas, específicamente, las actividades referidas a la suma, resta, multiplicación y división de números enteros.
- Capítulo 6: Se muestra el diseño del instrumento, la validación por pares expertos y la aplicación del mismo a un grupo de estudiantes. Asimismo, se estructuran las configuraciones cognitivas de los alumnos participantes y la detección de los errores y dificultades que se evidenciaron al resolver las actividades propuestas en el instrumento.

- Capítulo 7: Se registran las conclusiones, las limitaciones y las perspectivas de la de la investigación.

Por último, se presentan las referencias bibliográficas y los anexos que dan cuenta del recorrido de la investigación.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

2. ESTADO DEL ARTE Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introducción

En este Capítulo, se lleva a cabo un recorrido por aquellos antecedentes vinculados al tema de estudio, provenientes de investigaciones realizadas en diversos contextos. De cada una de ellas, se destacan los aspectos más valiosos que sirven a esta investigación.

2.2 Antecedentes históricos de los números enteros

Los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el campo de los números enteros es una temática que tiene larga data. Se sabe que la aceptación de los números negativos, por parte de los propios matemáticos, fue conflictiva durante mucho tiempo y su formalización resulta más artificial que la de otros conjuntos numéricos, por ejemplo, la de los racionales. Abrate, Pochulu y Vargas (2006) expresan que el proceso de reconocimiento, aceptación y legitimación de los números enteros requirió espacios prolongados de tiempo y, por eso, no debería resultar extraño que esos mismos procesos se reflejen en las aulas y con los estudiantes.

Con respecto a la Situación Problema docente de planificar una clase, por lo general, se repara en el tipo de problema a plantear y en las características de ejercicios a proponer. Sin embargo, pocas veces se piensa en la importancia de incluir los aspectos históricos que encuadran los temas que se van a trabajar. No obstante, Giraldo Osorio (2014), en sus estudios acerca del concepto del número negativo durante el período de la matemática moderna y la matemática actual en la educación colombiana, afirma que estudiar y analizar los aspectos históricos y epistemológicos aporta información valiosa que el docente puede considerar en su práctica.

En este punto, cabe preguntarse: ¿por qué razón se inventaron los números negativos?, ¿qué es lo que condujo a los matemáticos a considerar que el campo numérico de los naturales ya no era suficiente? Para responder a estos interrogantes, Cid (2002) explica que la génesis de estos números está en el seno del álgebra a fines del siglo XV. El avance en las técnicas de resolución de ecuaciones algebraicas obligó a los matemáticos a trabajar con términos que expresaban operaciones. Pero la aceptación del sustraendo como solución de ecuaciones no fue tan sencilla. Desde tiempos antiguos, se asoció el concepto de número a actividades diarias, al comercio, a la medición de tierra, a elementos tangibles, a agregar y quitar. En este contexto, un número negativo carecía de sentido. Aceptarlo equivalía a restar donde no había nada para sustraer, a pensar en algo menor que la nada misma. Por tales motivos, para Gerolamo Cardano, las soluciones negativas de las ecuaciones eran descartadas o consideradas como falsas porque aceptar los valores negativos como números era algo impensado.

Giraldo Osorio (2014, p. 45) cita una reflexión de Gonzalez que sintetiza muy bien la dificultad de la época:

> Con el desarrollo del álgebra, los negativos aparecen de nuevo en escena, provocando entre los algebristas reacciones diversas que van del rechazo a la tolerancia, pasando por el espanto que hace que se les califique de falsos, ficticios o absurdos. Pero este rechazo es ya un síntoma de que los matemáticos se han detenido en ellos y una forma de reconocer su existencia aunque sea a través de negársela. Quizás el término "negativo" provenga de esta época, ya que eran los valores negados cuando se obtenían como raíces de una ecuación.

Según Gallardo y Hernández (2007) fue Chuquet en su obra "*Triparty en la science des nombres*" quien introdujo una notación para los números negativos. Por ejemplo, para denotar el negativo, se debe añadir la palabra "menos" de la siguiente manera: $\bar{m}\,120$. También, insertó una escritura especial para exponentes menores que cero. Con Chuquet, fueron aceptadas y representadas simbólicamente las soluciones negativas a ecuaciones y problemas. Conforme fue transcurriendo el tiempo y según mencionan Gallardo y Basurto (2010), Herman Hankel logró superar los obstáculos que refieren a estos números y le dio el status de construcción formal.

En síntesis, en la indagación histórica del Número Entero se puede observar cómo la construcción del mismo llevó muchos años y superó gran cantidad de obstáculos. En relación a ello, Giraldo Osorio (2014) sostiene que las dificultades que poseen los alumnos actuales tienen antecedentes en la construcción histórica de los números enteros. Conocer la historia del conjunto numérico permite a los docentes comprender las razones por las cuales, a los estudiantes, les cuesta apropiarse del tema y anticiparse a los errores frecuentes.

2.3 Antecedentes de errores y dificultades en el trabajo con números enteros

Una de las primeras investigaciones registradas es la de Bell (1986), quien afirma que lo más apropiado para que los alumnos logren comprender cómo se trabaja con los números enteros es presentar el tema contextualizado en situaciones que les resulten familiares y en las que se tenga que memorizar la mínima cantidad de reglas posibles. En su artículo, expone los resultados de varias entrevistas y consignas escritas aplicadas durante dos clases a un grupo de cuatrocientos estudiantes. Las actividades constan de la realización de problemas con una operación que requiere tablas a completar, la representación de posiciones en un ranking, el cálculo de temperaturas, y los problemas con dinero. De acuerdo a su observación, Bell distingue, en relación a los obstáculos de índole conceptual, una serie de cuatro dificultades:

- las vinculadas con la conceptualización de las cantidades enteras, su orden y su uso para representar cierta posición o movimiento;
- aquellas para resolver problemas que necesiten la inversión del pensamiento;
- las vinculadas al "atravesar" el cero; y
- las asociadas a las combinaciones de cambio o transacciones.

Más adelante, el autor concluye en que sería conveniente presentar en las aulas un amplio abanico de problemas que involucren diversas situaciones para que los alumnos exploren con los números negativos y, de esta forma, logren un status familiar. Sostiene, además, que no tiene sentido intentar enseñar reglas de manipulación para operar con números enteros hasta tanto no se comprenda cabalmente las situaciones que las involucran. Siguiendo este pensamiento, sugiere un método de enseñanza basado en hacer surgir un conflicto, dar lugar a la reflexión y discusión, para luego superar los errores conceptuales.

Otro destacable aporte, es el trabajo desarrollado por Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) con estudiantes de 8vo año de la Escuela General Básica y de Magisterio en la Enseñanza Universitaria. En el mismo, los autores proponen preguntas a los jóvenes sobre el orden de los números enteros y cuestiones de álgebra; sus respuestas indican la existencia de algunas ideas obstaculizadoras en el aprendizaje en este conjunto numérico, a saber:

- Lo real como obstáculo

  Históricamente, la noción de número fue directamente asociada con la cantidad, sin embargo, esta idea sufrió una ruptura cuando aparecieron los números negativos como objeto de estudio. Dentro de aquella concepción, se pueden diferenciar algunas nociones frecuentemente naturalizadas en los alumnos:

a) El número como expresión de la cantidad: relacionar un número con cantidades obstaculiza no solo la idea de número, sino también las operaciones aritméticas y el orden.
b) La suma como aumento: se asocia la suma como el agregado de una cantidad a la otra.
c) La multiplicación como multiplicación natural: la idea de suma como aumento trae aparejada la idea de que el producto entre dos números siempre es mayor a alguno de los factores. Este aspecto, pone de relieve cuán dificultoso resulta la justificación de la regla de los signos por parte de los alumnos.
d) La sustracción como disminución: la resta se encuentra relacionada a quitar y, por lo tanto, produce disminuciones.
e) La división como división natural: la división se asocia a la acción de repartir.
f) El orden de los negativos es el mismo que los positivos: en el campo numérico de los naturales, los números son más grandes a medida que se alejan del origen. Trasladar esa secuencia a los negativos, provocael error en muchos estudiantes.
g) Ignorar el signo: algunos alumnos olvidan el signo “menos” y operan como si se tratara de números naturales.
h) La identificación de símbolos literales con números positivos: en enunciados donde a y b son números enteros, los asocian solamente a positivos.

- La imposición de lo formal como obstáculo

  La enseñanza de números enteros parece ser reducida a un formalismo vacío que no solo obstaculiza, sino que genera errores. Algunas ideas fuertemente arraigadas en los alumnos, y que los llevan por un camino equivocado, son:

a) El manejo del orden lineal: se vincula al fracaso en la inversión de una relación de orden, la secuencia temporal como fuente de errores y la identificación de una relación con su recíproca.
b) Las reglas de cálculo como un formalismo vacío: la regla de los signos es fácil de olvidar y confundir; por ejemplo, la regla de la adición resulta difícil de recordar y es fuente de muchos errores, más aún, si el problema corresponde a un contexto algebraico.
c) Estudiar los enteros y olvidarlos: mecanismo asociado a las dificultades en la escritura del número negativo.

Aquí, los autores remarcan que el origen de estos obstáculos se halla en que durante mucho tiempo primó el resultado por encima del análisis de los procesos involucrados en la resolución de los problemas. También, los autores destacan la existencia del paralelismo que se da entre los obstáculos históricos y los que se manifiestan en las aulas con los estudiantes. Finalmente, los analistas hacen referencia a la ausencia de un modelo unificador de números enteros que explique todas las propiedades y operaciones.

Por otra parte, Bruno (1997) investiga sobre la enseñanza de los números negativos a estudiantes de doce y trece años de edad durante un período de dos años, en base a la resolución de pruebas escritas y entrevistas. La investigación se centra en averiguar cómo los alumnos identifican la operación de la suma o resta en la dimensión contextual. Las consignas son estudiadas en seis contextos: deber-tener, temperatura, cronología, nivel del mar, carretera y ascensor. Luego de reflexionar sobre los resultados obtenidos, la autora realiza una categorización donde se manifiesta el aprendizaje de los números negativos. De este modo, concibe al conocimiento numérico como la capacidad de movilidad o transferencia entre las dimensiones:

- abstracta, referida a la forma de escritura de los números y estructuras matemáticas;
- de la recta, referida a la representación gráfica de los números y su utilización para operar; y
- contextual, asociada a las aplicaciones y utilidades del campo numérico.

Las reflexiones de Bruno, en este caso, tienen que ver con la posibilidad de enseñar este conjunto numérico a partir de la extensión por adjunción de los enteros positivos a los negativos; es decir, explicar que son opuestos de los números positivos, sin comunicar inicialmente a los alumnos que corresponden a un conjunto numérico distinto. Con esta precaución, se intenta evitar que los alumnos entiendan los números negativos como disociados de los saberes anteriormente adquiridos y los que obtendrán luego. Es frecuente que los docentes, durante el tiempo en que trabajan con números negativos, abandonen, por ejemplo, los racionales. Esto crea en los alumnos la idea errónea de que son dos temas de estudio que poco tienen que ver el uno con el otro.

Otro análisis destacable que efectúa la autora, es el estudio del uso de la recta como herramienta que favorece la adquisición del concepto de sumas y restas entre números negativos y su posterior aplicación a problemas contextualizados. Pues, se evidencia que las consignas contestadas a partir de una recta, generan más seguridad en los alumnos que las obtenidas mediante algún cálculo. Por tal motivo, Bruno sostiene que el trabajo en el aula con la recta numérica necesita profundizarse; ya que, cuando los alumnos están familiarizados con ella, dejan de cometer muchos de los errores.

Por otro lado, Bruno (2001) afirma que el hecho de que un número sea negativo modifica radicalmente los conceptos adquiridos, incluso antes de comenzar la escolaridad. Desde las primeras nociones de número, asociadas a contar elementos tangibles, hasta la operatoria formal en el campo de los números naturales, transportan a los estudiantes a considerar que solo existen los números mayores que cero o que el producto entre dos números es mayor. Además, debido a que generalmente la operatoria en este campo numérico está asociada a varias reglas como la supresión de paréntesis, la regla de los signos, signo de la potencia dependiendo del exponente y, también, una nueva forma de escritura $(+a = a)$, se provoca una gran confusión en los aprendices y normalmente las clases quedan reducidas a una especie de tecnicismo. En respuesta a ello, la autora enfatiza la idea de que sería favorable enseñar el tema desde una visión unitaria, donde el tema estudiado anteriormente se amplíe y lleve a un conocimiento nuevo que complete al anterior.

Por su parte, Cid (2002) afirma que parece existir un consenso generalizado en que el tema números enteros hay que introducirlo a través de los “modelos concretos”, según su propia denominación, y parecen resultar apropiados por la aparente familiaridad con la cotidianidad del alumno, además de permitir un nivel de abstracción indicado para la edad; puesto que actúan por analogía. En tal sentido, la clasificación de los llamados modelos concretos es:

- Modelos de neutralización

  Objetos que representan cantidades de magnitud en el mismo sentido o sentidos opuestos. Aquí, los signos predicativos dan cuenta del sentido de la cantidad de magnitud mientras que los signos operativos se vinculan a añadir o quitar. Algunos ejemplos de este tipo de modelo son los que incluyen a personas que entran o salen de un lugar, deudas y haberes, juegos en los que la puntuación sea positiva o negativa, entre otros.
- Modelos de desplazamiento

> Los números enteros se relacionan con posiciones y desplazamientos. Aquí, los signos predicativos indican el sentido del desplazamiento o la posición, mientras que los signos operativos se relacionan con composiciones de desplazamientos. Algunos ejemplos son los que usan el termómetro, el ascensor, problemas con escaleras, estar por encima o por debajo del nivel del mar, tiempo antes o después de Cristo, recta real, etc.

Cid, en sus investigaciones, duda acerca de las bondades de enseñar a través de los modelos concretos y expone los efectos contra producentes que ocasiona; pues, estos permiten justificar de modo aceptable la estructura aditiva de los números negativos pero, sin embargo, no justifican razonablemente el producto de enteros, además de explicarse con cierto grado de dificultad la estructura ordinal. Por estos motivos, afirma que lo más conveniente es introducir el tema en el mismo contexto que lo permitió surgir históricamente: el entorno algebraico. Cid y Bolea (2010), desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, realizan una aproximación a un sistema epistemológico de referencia para este tema. En vista de que no se puede avanzar mucho en álgebra sin los números negativos, proponen introducirlo paralelamente, considerándolo como una aritmética generalizada.

Respecto a los obstáculos que surgen al trabajar con productos y cocientes entre enteros en el aula, Díaz Mora (2015) expresa que si se opta por privilegiar un único modelo (el de las deudas, por ejemplo), los estudiantes no pueden apropiarse del significado de multiplicación de enteros, ya que no entienden el porqué de la ley de los signos. Puede que muchos estudiantes piensen que el resultado de multiplicar (-3).(-2) es -6 porque dos deudas no pueden generar un número positivo. Se plantean problemas que no tienen sentido para los alumnos. No es frecuente encontrarnos en nuestra cotidianidad con situaciones donde se tenga que multiplicar o dividir dos cantidades negativas. Evidentemente, las dificultades son el resultado de no encontrar sentido a estas operaciones.

En relación al producto de números enteros, Pluvinage y Flores (2016) aseguran que hay una carencia general en la justificación de la multiplicación de dos números con signos: la regla de los signos y una ausencia de representación sensible de este producto. Y las consecuencias de la incomprensión de la justificación de la regla de los signos no son menores. Muchos libros de texto ponen un fuerte énfasis en las operaciones y los algoritmos operatorios (por ejemplo, la regla de los signos), mientras que se evidencia cierta carencia respecto de la génesis discursiva. Esto ocurre al pasar por alto la visualización gráfica como una parte didáctica fundamental con la que toman sentido algunos conceptos y puede construir la base de una enseñanza que no pondere el álgebra sobre la geometría.

2.4 La incidencia de los libros de texto en la comprensión de números enteros

Fory (2010) realizó un trabajo de identificación cuya pregunta generatriz fue ¿qué obstáculos didácticos introducen los textos escolares de séptimo grado en la enseñanza de la adición de enteros? En él, se muestra que de ninguna manera se deben tomar los libros de texto como el centro del proceso educativo. Más bien, son una guía, un recurso organizativo de lo que sucede en el aula porque brinda seguridad a la comunidad escolar; ya sea a los padres, a los alumnos o a los propios docentes, puesto que detalla los objetivos, los contenidos y las actividades. Por este motivo, es preciso revisar las propuestas de los libros para asegurar su carácter facilitador del aprendizaje y no sean un obstaculizador.

La investigación afirma que los textos deben presentar a los números enteros de modo que el alumno los acepte, comprenda para qué le sirven y cómo aplicarlos a un problema en particular. Se cotejó una gran cantidad de libros que, por la forma en la que proponen las actividades, abren las puertas a las confusiones en el aula. Un caso que refleja esta cuestión es en la notación de los cálculos; por ejemplo:$(+2) - (-5)$, donde el signo negativo posee un doble significado, mientras que el primer signo “menos” denota la operación resta, el segundo hace referencia al opuesto de cinco. Esa doble valoración podría resultar confusa en los estudiantes. Es por ello que el autor concluye en la necesidad urgente de trabajar sobre la ampliación del significado de este signo para que sea posible su entendimiento y aceptación por parte de los alumnos.

En cuanto al tratamiento de los números negativos, Díaz Mora (2015) coincide con Fory (2010) en que predomina el planteamiento de situaciones en contextos inadecuados. Se evidencia una introducción forzada a los números con signo, como pensar en cantidades de dinero negativo. Las actividades que suelen ofrecer los textos consisten, por ejemplo, en asociar palabras a números positivos o negativos; lo cual, puede llevar a la confusión y ocasionar obstáculos y dificultades para construir formalmente el concepto. Esto se evidencia en el hecho de que las expresiones del lenguaje natural y los objetos y conceptos matemáticos no son lo mismo. A esto se suma que, generalmente, el punto de referencia es ignorado;

prácticamente, son nulas las actividades en las que aparece mencionado y, cuando se hace, el significado del mismo no es enfatizado.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Introducción

En este Capítulo se presentan las principales ideas teóricas que fundamentan el avance de la investigación. Particularmente,se utiliza el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) como línea investigativa en la Didáctica de la Matemática, cuyo comienzo de desarrollo data de 1994 por Juan Díaz Godino y su grupo de colaboradores.

Según la mirada del EOS, la Didáctica de la Matemática debe atender dos aspectos esenciales:

- Permitir que los docentes comprendan los procesos que se ponen en juego al momento de enseñar y aprender matemática.

Para ello, son necesarias herramientas teóricas que permitan describir, interpretar y explicar dichos procesos. Para lograrlo, es preciso llevar adelante investigaciones que originen y desarrollen marcos teóricos; porque son estos los que se aplican en el estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y permiten ampliarse a sí mismos. Esto resulta fundamental en tanto que el EOS pretende tener poder descriptivo y explicativo.

- Realizar propuestas para la mejora de la calidad educativa y, para lograrlo, es necesario valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática bien fundamentada.

Por eso, resulta importante atender a al EOS cuando propone criterios de idoneidad para las facetas que se ponen en juego en el proceso de estudio matemático.

El aspecto ontológico del EOS deviene del análisis de la existencia o inexistencia de entidades u objetos. El aspecto semiótico se encarga de descubrir y analizar la verdadera significación que tienen esos objetos o entidades, su importancia, los vínculos que los relacionan, y otras características que los hacen diferenciables entre sí; incluso donde esas diferencias no pudieran o no debieran presentarse.

Por los motivos antes expuestos, se justifica la elección del EOS como marco teórico para esta investigación, puesto que sirve a la misma como herramienta de observación y de aplicación de los métodos más adecuados para analizar y defender los argumentos planteados desde el comienzo.

3.2 Los objetos matemáticos

El EOS propone redefinir ciertos conceptos básicos, tales como la noción de objeto matemático, significado y comprensión. En este enfoque, se diferencian dos dimensiones independientes: personal e institucional. Por otra parte, se le asigna un papel relevante al lenguaje y a los procesos de comunicación e interpretación.

Godino (2003, p. 147) define "objeto matemático" como "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia". En otras palabras, como indica Pochulu (2012), es todo aquello que puede individualizarse en Matemática. Cuando se describe la actividad matemática que tiene lugar en una clase, se puede hacer referencia a muchos objetos de carácter primario; los mismos, se consideran según la siguiente tipología:

- Lenguaje: son los términos, notaciones, expresiones, gráficos, etc., y pueden manifestarse mediante un registro escrito, oral, corporal o gestual.
- Situaciones problema: son las actividades o ejercicios que pueden ser intra-matemáticas o extra-matemáticas.
- Conceptos y definiciones: son las descripciones de los objetos.
- Proposiciones: son los enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.
- Procedimientos: son los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o formas de hacer cierta actividad matemática.
- Argumentos: son los enunciados y los razonamientos que se utilizan para dar validez, justificar o explicar las proposiciones o los procedimientos que se ponen en práctica en la actividad matemática.

Estos seis objetos primarios se organizan para constituir estructuras más complejas como sistemas conceptuales y teorías. Se relacionan entre sí formando configuraciones, es decir, redes de objetos intervinientes y emergentes de las prácticas tipificadas de la siguiente forma:

- Epistémicas: son las redes de objetos institucionales.
- Cognitivas: son las redes de objetos personales.

Tanto los sistemas como las prácticas, proponen herramientas de tipo teóricas que describen los conocimientos matemáticos en lo personal e institucional. En ambos tipos de configuración, la razón de ser de las actividades son las situaciones problema. Se considera al lenguaje como instrumento para la acción y la comunicación y es regulado por los argumentos que justifican los procedimientos y las proposiciones.

Dentro del EOS, se considera a los objetos matemáticos como entidades que emergen de los sistemas de prácticas. La práctica tiene un lugar preponderante mientras que al objeto se le asigna un estatuto derivado. Al respecto, Godino (2003, pp. 91-92) define una práctica como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas".

Entonces, definir objeto matemático en términos de prácticas, implica que su concepto se encuentra ligado a otros significados y a otros objetos, ya que en el hacer intervienen varios objetos. Por ello, es necesario diferenciar sentido de significado. Mientras que el sentido se interpreta como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto, el significado de un objeto matemáticopuede separarse en distintas clases de prácticas específicas utilizadas en cierto contexto y con cierta notación, produciendo un determinado sentido. Es decir, los sentidos pueden ser entendidos como un recorte de los significados.

Godino (2003), desde la Teoría de los Campos Conceptuales, realiza una clasificación del significado sistémico de un objeto matemático, el cual incluye los siguientes tipos de elementos:

- Situaciones problema o aplicaciones que provocan actividades matemáticas.
- Lenguaje con todo tipo de representaciones ostensivas que tienen lugar en la actividad matemática como términos, símbolos, gráficos, tablas, diagramas, entre otros.
- Generalizaciones, abstracciones, ideas matemáticas, tales como conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías, etc.

Hay que tener en cuenta, además, las acciones que llevan a cabo los sujetos ante la resolución de problemas como la aplicación de algoritmos u otros procedimientos o estrategias, y los argumentos que sirven para validar las acciones, las propiedades del objeto y la resolución de los problemas. Por la diversidad que presentan estos elementos entre sí, es imprescindible analizar las características que poseen y qué errores y dificultades cometen los estudiantes al involucrarse con ellos.

3.3 Los objetos matemáticos y su significado personal e institucional

Para Godino y Batanero (1994), las herramientas teóricas que propone el EOS tienen como propósito describir los conocimientos matemáticos desde dos miradas: la personal y la institucional. Se hace referencia a objetos personales si se trata de una manifestación individual del sujeto (una respuesta en una prueba, un trabajo práctico, el desarrollo de una Situación Problema), ya que ponen en evidencia los conocimientos de la persona. Por otra parte, se hace referencia a objetos institucionales si se trata de normativas o sugerencias aplicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje (diseño curricular, libros de texto, explicaciones del docente en la clase).

Sobre esto, Godino (2003) expresa que la diferenciación entre las facetas personal e institucional de los saberes matemáticos es clave para poder describir y explicar las interacciones entre el docente y los estudiantes en la dinámica del aula. Además, en la clase de Matemática, los objetos son nombrados, se definen y enuncian sus propiedades provocando que sean identificados a través de las mismas. No obstante, también suele ocurrir que se designe a un objeto matemático el nombre de otro o se confunda el efecto con la causa. Al respecto, Godino (2003) comenta que un concepto no puede limitarse a su definición. Puesto que un objeto personal surge de un sistema de prácticas vinculadas a un campo de problemas, la práctica significativa es situada en ese contexto.

3.4 La configuración epistémica y la configuración cognitiva

Para el EOS, los seis objetos matemáticos que se mencionaron en la sección 3.2 se relacionan formando configuraciones (figura I), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y que conforman los elementos del significado de cierto objeto matemático.

Las configuraciones pueden ser:

- Epistémica o institucional: si representan redes de objetos institucionales (obtenidas de un texto escolar, extraídas de la clase que brinda el docente)
- Cognitivas: si representan redes de objetos personales (tomados de la actividad de los estudiantes)

Dentro del EOS, los sistemas de prácticas y las configuraciones son herramientas teóricas fundamentales para describir los objetos matemáticos en su versión personal e institucional.

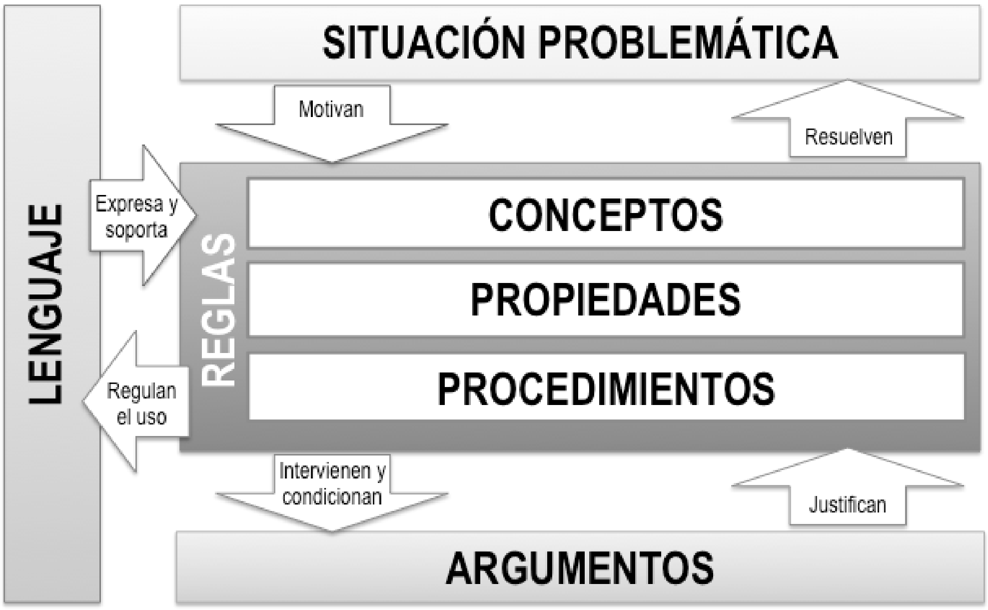


Figura I: Componentes de una configuración epistémica/cognitiva.

Como explica Pochulu (2012), dentro de las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones problema son las originarias de la actividad matemática y las que motivan las reglas subyacentes. Por otra parte, el lenguaje sirve de instrumento para accionar en la actividad. Los argumentos sirven para justificar las definiciones, los procedimientos y las proposiciones reguladas por el lenguaje, que es el instrumento de la comunicación.

Es importante aclarar que, dependiendo del nivel de análisis de cada objeto matemático, puede estar compuesto por entidades de los otros tipos; por ejemplo, un argumento puede poner en juego conceptos o procedimientos, cuyo soporte es el lenguaje.

3.5 La comprensión matemática

El término "comprensión" tiene distintas acepciones según el contexto, aunque predomina el enfoque psicológico que la entiende como un proceso de carácter mental. Sin embargo, tomar este concepto para la actividad matemática resulta absolutamente reduccionista, ya que las teorías de la comprensión derivadas de esta concepción no ejemplifican adecuadamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en especial, los aspectos sociales y culturales implicados en dichos procesos (Godino, 2000). Como consecuencia, la comprensión del objeto matemático, en sentido integral, exige que el sujeto identifique en el objeto una intencionalidad, un para qué.

Según el EOS, la comprensión es más bien una competencia. Godino (2003) afirma que una persona comprende un objeto matemático o se ha apropiado del significado de cierto concepto cuando es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, propiedades, argumentaciones, representaciones, características, relacionarlos con otros objetos matemáticos en todas las situaciones planteadas institucionalmente. En otras palabras, existe comprensión cuando el sujeto lo utiliza de manera competente en diferentes prácticas. O como definen este concepto Godino, Batanero y Font (2003) "A comprende la técnica t que permite realizar la Situación Problema T, queremos decir que A sabe por qué dicha técnica es adecuada, conoce su ámbito de validez y la relaciona con otras técnicas (p. 62)".

Para el EOS, la comprensión que puede alcanzar una persona en cierto momento no puede ser ni total ni nula, sino que abarca parcialmente aspectos de los componentes y niveles de abstracción. La apropiación del sujeto deviene de un proceso dinámico, progresivo, no lineal, como resultado de las experiencias hasta el momento y de los contextos institucionales.

3.6 Sobre obstáculos, errores y dificultades

Los primeros aportes referidos al concepto de obstáculo fueron realizados por Bachelard (1972), quien afirma que estos son inherentes al acto mismo de conocer produciendo confusión, estancamiento y retroceso. Más adelante, Brousseau (1989) traslada este concepto al plano de la didáctica de la matemática y propone una lista de aserciones respecto a los obstáculos:

- Un obstáculo es un conocimiento y no una carencia del mismo.
- Este conocimiento, en determinado contexto, produce respuestas correctas.
- Cuando el conocimiento es utilizado en un contexto diferente, produce respuestas incorrectas.
- El estudiante se resiste a aceptar las contradicciones que produce el obstáculo y a reemplazar el conocimiento anterior por uno nuevo.
- Pese a que el estudiante comprende que su conocimiento es un obstáculo, lo continúa manifestando con frecuencia.

Además, Brousseau plantea que los obstáculos pueden tener orígenes diversos:

- Ontogénico: causados por las limitaciones del estudiante al momento de su evolución donde desarrolla sus conocimientos.
- Didáctico: surgen del modo como se enseñan los conocimientos debido a las elecciones didácticas.
- Epistemológico: se trata de dificultades intrínsecas del conocimiento matemático.

Es importante destacar que, si bien existen varios autores que han realizado sus aportes referidos a los obstáculos, este es un concepto que ha ocasionado controversias. Además, en muchas fuentes bibliográficas se utiliza indistintamente las palabras obstáculo, dificultad y error, considerándolas como sinónimos. Sin embargo, dentro de EOS es necesario hacer una diferenciación. Godino, Batanero y Font (2003) detallan las siguientes definiciones:

- Se considera error cuando el estudiante realiza una práctica (como una acción, una argumentación, etc.) que carece de validez desde la óptica de la matemática escolar.
- Se hace referencia al término dificultad para indicar el mayor o menor grado de éxito de los estudiantes frente una Situación Problema o tema de estudio. Si hay más respuestas incorrectas que correctas, se dice que el índice de dificultad es elevado o que la dificultad es alta. Si sucede lo contrario, la dificultad es baja.

Respecto al término “obstáculo”, para esta tesina se considera apropiada la definición de diccionario en lugar de la que propone Brousseau. En vista de que la investigación utiliza el EOS como marco teórico, la palabra obstáculo no es clave. En caso de que se hubiera basado en Teoría de Situaciones Didácticas, la acepción que le da Brousseau al término sería la apropiada.

En este sentido, aquí se considera al obstáculo como un impedimento, estorbo, dificultad o inconveniente que surge en la resolución de actividades donde se involucran los números enteros, lo cual guarda relación con la acepción dada para el EOS y no en otras teorías y líneas de la Didáctica de la Matemática.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 Introducción

En esta sección de detallan los aspectos metodológicos tenidos en cuenta en la investigación. Se puede afirmar que es de naturaleza diagnóstico-descriptiva y cualitativa, de corte etnográfico y hermenéutico, y se desarrolla según el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática de Godino, Batanero y Font (2007) como líneas teóricas y metodológicas de la Didáctica de la Matemática.

La investigación se caracteriza, de acuerdo a Arias (2006), Tamayo y Tamayo (2000) y Hernández Sampieri, Fernandez Collado y Baptista Lucio (2010), de la siguiente manera:

- exploratoria, ya que se recoge y analiza información que pudiera servir para orientar investigaciones futuras;
- diagnóstica, porque se basa en el análisis de situaciones;
- descriptiva, porque se produjeron informes narrativos a partir del trabajo de campo realizado;
- de campo, porque se realizó en el lugar de estudio de los alumnos;
- interpretativa, porque se tuvo en cuenta el sentido de las acciones de los sujetos investigados;
- cualitativa, debido a que el objeto de estudio se describe, no se cuantifica;
- hermenéutica, porque se hicieron interpretaciones de las interpretaciones que hacían los sujetos investigados; y
- etnográfica, porque se intentó comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados mediante aproximaciones a su pensamiento y su práctica, sin modificar la realidad estudiada.

A continuación, se describen las cinco fases que distinguen la investigación, para luego, caracterizar los sujetos que fueron objeto de estudio, el diseño y la validación del instrumento utilizado; así como también, los fundamentos relacionados con los datos que permitieron extraer conclusiones.

4.2 Fases de la investigación

El trabajo se organizó sobre la base de cinco fases diferenciadas, a saber:

Primera fase

Para llevarla a cabo, se analizaron las actividades que proponen los libros de Matemática de escuela secundaria que son utilizados frecuentemente por profesores. Específicamente, la atención estuvo puesta en aquellas donde se aborda la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones elementales con números enteros. Asimismo, se tuvieron en cuenta las actividades que propone el DCES2 (2007) sobre este tema en particular.

Este análisis permitió estructurar una configuración epistémica de referencia del tema de acuerdo a lo que establecen Godino, Batanero y Font (2007). Dicha configuración, está compuesta por:

- tipo de situaciones problema o ejercicios, tanto intramatemáticas como extramatemáticas que se proponen;
- conceptos y definiciones, que son necesarios para resolver la actividad;
- propiedades que se necesita conocer y dominar;
- procedimientos, algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones;
- argumentos y razonamientos necesarios para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o dar cuenta de la validez de la solución a un problema; y
- los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., que aparecen en la resolución de la actividad.

Segunda fase

Teniendo en cuenta la configuración epistémica de referencia elaborada en la fase anterior- a partir de textos escolares, el diseño curricular, la revisión bibliográfica de investigaciones que reporten errores y dificultades que tienen frecuentemente los alumnos cuando trabajan con números enteros- , se diseñó un instrumento que pone en juego la red de relaciones que activa un estudiante cuando evidencia comprensión al trabajar en situaciones donde se involucran las operaciones con números negativos y se manifiestan a través de prácticas operativas y discursivas.

Este instrumento está compuesto por una serie de actividades que los alumnos resolvieron de forma escrita y una entrevista semiestructurada que se elaboró teniendo en cuenta las respuestas brindadas en el escrito.

Para la elaboración del instrumento, se consideraron los siguientes aspectos:

- El análisis de los contenidos tomando como referencia el significado institucional global o experto.
- Los criterios para la selección de consignas propuestos por Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017) que llevaron a la elección de las consignas de los libros de texto analizados.
- La apreciación detallada de cuatro jueces expertos (docentes e investigadores idóneos en el área de Matemática y Educación Matemática) que analizaron el instrumento y ofrecieron sus recomendaciones para que se considere válido. Se entiende validez en el sentido de qué tan bien mide el instrumento lo que pretende (en este caso, los errores y dificultades) y la capacidad que tiene el propio instrumento para proporcionar la misma medición en diferentes ocasiones.

  Se describe a continuación la formación académica y ámbito de investigación y docencia de los pares de expertos que participaron del proceso de validación del instrumento de indagación.

  Ricardo Fabián Espinoza: Estudiante del Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales de la Universidad Nacional de Misiones. Magister en Docencia Universitaria y Especialista en Docencia Universitaria por la Facultad de Humanidades en la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). Profesor de Matemática y Cosmografía, egresado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNNE. Sus trabajos de investigación para la tesis de Doctorado y Maestría fueron realizados utilizando EOS y trataron sobre divisibilidad en $\mathbb{N}$ y extensión de propiedades a $\mathbb{Z}$. Se desempeñó como docente en escuelas secundarias y actualmente ejerce su profesión en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE. Integra equipos de investigación en la Universidad Nacional del Nordeste y en la Universidad Nacional de Villa María. Publicó trabajos en revistas, congresos y dictó conferencias y cursos de capacitación docente.

  Raquel Susana Abrate: Licenciada en Pedagogía de la Matemática de la Universidad Blas Pascal, de la ciudad de Córdoba. Estudiante de la Maestría en Procesos

Educativos mediados por Tecnología, en la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Córdoba. Tiene amplia trayectoria como docente en nivel secundario, terciario y universitario. Ha presentado varios trabajos de investigación y ha participado como expositora en numerosos congresos de Educación Matemática

María Laura Distéfano: Doctora en Enseñanza de las Ciencias con mención en Matemática, en la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Es Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior, en la Universidad Nacional de Tucumán, y Profesora en Matemática, egresada de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Se desempeña como docente e investigadora en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata y es especialista en el EOS, el marco teórico utilizado para esta investigación. Ha presentado varios trabajos de investigación en revistas nacionales e internacionales y participó de numerosos congresos de Educación Matemática como expositora.

Mario Gustavo Álvarez: Estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con orientación en Matemática, de la Universidad Nacional del Comahue. Licenciado en Enseñanza de la Matemática por la Universidad de Concepción del Uruguay. Profesor de Matemática y Cosmografía, egresado del Instituto Profesorado Concordia. Participó como docente investigador en numerosos proyectos de matemática y educación matemática. Ha presentado varios trabajos de investigación y participó en congresos y ponencias como expositor.

Tercera fase

Se administró el instrumento llevado a cabo en la segunda fase, en calidad de evaluación diagnóstica, a un grupo de alumnos de 2do año de la escuela secundaria “Instituto del Sol”, de la localidad de General Pacheco, Provincia de Buenos Aires, que aceptaron voluntariamente participar de la investigación. Posteriormente, se seleccionaron las producciones escritas que lograron resolver al menos el 50% de las actividades planteadas. Los escritos se estudiaron teniendo en cuenta el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los alumnos. Luego, se efectuaron entrevistas clínicas, previamente diseñadas para cada alumno, con la finalidad de generar un análisis profundo de la comprensión sobre los temas en cuestión y las estrategias que ponen en juego para resolver la actividad.

Cuarta fase

Considerando los resultados obtenidos en la fase anterior, se estructuraron las configuraciones cognitivas de cada estudiante sobre los temas abordados, las cuales pusieron de manifiesto no solo las estrategias que emplearon en la resolución de actividades referidas a números enteros, sino también, los errores y dificultades que se presentaron frecuentemente en esta temática.

Quinta fase

Se compararon las configuraciones cognitivas con la configuración epistémica, a fin de valorar la comprensión global alcanzada por los estudiantes, las estrategias que ponen en juego, los errores y dificultades que presentan. Estos actos de semiosis tienen como resultado final una aproximación a la configuración cognitiva de los alumnos, lo que permite, por un lado, construir categorías de errores con sus respectivos indicadores, y por el otro, valorar la comprensión que tienen sobre los contenidos en cuestión. Esta fase permite, además, proponer mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje que se implementen sobre el tema.

4.3 Documento Curricular, textos escolares y estudiantes participantes

Se trabajó con el documento curricular, con los textos escolares de Matemática de segundo año de la escuela secundaria que contaban con la unidad didáctica referida a los números enteros, y con estudiantes de segundo año de secundaria. Con la finalidad de estructurar la investigación, a continuación, se describen y caracterizan los mismos.

4.3.1 El Documento Curricular analizado

En la primera fase de la investigación, se analizó el Diseño Curricular para la Escuela Secundaria de 2do Año, de la Dirección General de Cultura y Educación y editado por el Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, en el año 2007. El motivo de la selección de este documento radica en que los alumnos participantes en esta investigación han cursado sus estudios en la Provincia de Buenos Aires en el año 2018, cuando estaba en vigencia ese diseño curricular bajo la Ley de Educación Provincial N° 13688.

En los Contenidos Básicos Comunes (CBC) se examinó el eje Números y Operaciones, más específicamente el núcleo de los Números Enteros, atendiendo a las recomendaciones para ejercicios intramatemáticos donde se utilizan los números negativos que involucran las operaciones suma, resta, multiplicación y división. A partir del análisis de este documento, se elaboró una configuración epistémica de referencia conformada por un significado global experto.

4.3.2 Los textos escolares analizados

Avanzando en la primera fase de la investigación, se analizaron las actividades que se encuentran en los libros escolares de 2do año de secundaria básica que tienen mayor circulación en las instituciones, poniendo atención en las unidades cuyo objeto de estudio son los números enteros. Las unidades didácticas analizadas se obtuvieron de los siguientes textos:

Denominación	**Detalles técnicos del texto**
LIBRO 1	Boccioni, M., Mercado, L., Vigione, Y. (2016). *Nuevo Activados*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Puerto de Palos.
LIBRO 2	Effenberger, P. (2013). *Matemática II*. Buenos Aires, Argentina: Kapulusz.
LIBRO 3	Broitman, C. e Itzcovich, H. (2011). *Matemática en secundaria 1°CABA/ 2° ES*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.
LIBRO 4	Godfroit, S.; Guayán, C. y Oleaga, M. (2012). *Matemática en Secundario II. Serie Escenarios*. Buenos Aires, Argentina: Estación Mandioca.
LIBRO 5	Crespo, S.; Maradei, M. y Starobinsky, M. (2016). *Carpeta de Matemática II. Práctica Huellas*. Buenos Aires, Argentina: Estrada.
LIBRO 6	Kaczor, P. y Outón, V. (2016). *Entre números II. Actividades de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.

En estos textos, el Capítulo referido a los números enteros involucra diversos subtemas; sin embargo, han sido objeto de análisis los siguientes contenidos de suma, resta, multiplicación y división de enteros. Para cada capítulo se confeccionó una tabla por texto en la cual se detallan las principales características de las situaciones problema intra y extramatemática; los conceptos o definiciones; las propiedades; los procedimientos; las técnicas o algoritmos; los argumentos; y el lenguaje, coloquial, simbólico y gráfico.

CAPÍTULO 5

LOS NÚMEROS ENTEROS EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES Y EN TEXTOS ESCOLARES

5. LOS NÚMEROS ENTEROS EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES Y EN LOS TEXTOS ESCOLARES

5.1 Introducción

Como se detalló en el capítulo dedicado al Marco Teórico, dentro del EOS existen seis objetos primarios que se manifiestan en la práctica matemática y se relacionan unos con otros formando configuraciones. Las mismas, pueden ser epistémicas si son redes de objetos institucionales, o pueden ser cognitivas si representan redes de objetos personales.

A partir de las configuraciones epistémicas obtenidas del análisis de los documentos curriculares, libros escolares o apuntes del docente impartidos en una clase, se evidencia que están en juego objetos institucionales debido a que contienen normativas o sugerencias que son utilizadas a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este Capítulo se realiza la configuración epistémica de referencia en tanto "significado institucional de referencia" o experto sobre el tema de la investigación. Para realizarla, se tiene en cuenta, además de los textos escolares, el siguiente documento:

Dirección General de Cultura y Educación. (2007). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria – 2° Año*. Buenos Aires, Argentina: Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.

La elección de este documento se debe a que en el 2do año de la secundaria se prescribe la enseñanza de números enteros. De los CBC se analiza el eje Números y Operaciones, puntualmente, el núcleo de los Números Enteros con especial atención en las recomendaciones para situaciones problema donde se utilizan los números negativos que involucran las operaciones suma, resta, multiplicación y división.

5.2 Configuración epistémica de referencia del objeto matemático "Números Enteros"

- Situaciones problema: se describen las familias de problemas que contienen una determinada acción.

  Utilizar conocimientos adquiridos en 1er año en relación a la jerarquización de las operaciones, transfiriéndola a los cálculos con números enteros.

  Investigar la continuidad de la validez de las propiedades de los números en la ampliación de los campos numéricos estudiados.

Modelizar situaciones matemáticas y extra matemáticas mediante números y operaciones.

- Lenguaje

  Verbal: enunciados coloquiales, argumentación de procedimientos, explicación, y definiciones de conceptos o propiedades.

  Simbólico: explicitar propiedades utilizando lenguaje simbólico con la ayuda del docente.

  Gráfico: representación de números enteros en la recta numérica.
- Conceptos: concepto de número entero, recta numérica, valor absoluto y números opuestos.
- Propiedades: propiedades de las operaciones del conjunto de los números naturales extendidas al conjunto de los números enteros.
- Procedimientos: ubicación de números enteros en la recta numérica, cálculos numéricos, interpretación de enunciados, utilización de la jerarquía, y las propiedades de las operaciones y las reglas del uso de signos de agrupamiento en cálculos sencillos.
- Argumentos: argumentación acerca de la validez de los procedimientos utilizados y las respuestas obtenidas, y elaboración de enunciados más generales que validarán a través de argumentaciones basadas en conocimientos matemáticos adquiridos previamente.

Lenguaje

Verbal:

Enunciados coloquiales.
Argumentación de procedimientos.
Explicación y definiciones de conceptos o propiedades.

Simbólico:

Explicitar propiedades utilizando lenguaje simbólico con la ayuda del docente.
Resolución de cálculos.

Gráfico:

Representación de números enteros en la recta numérica.
Trabajar las sumas, restas y los números opuestos a partir de la recta numérica.

Situaciones Problema

Utilizar conocimientos adquiridos en 1er año en relación con la jerarquización de las operaciones, transfiriendo esta jerarquía a los cálculos con números enteros.
Investigar la continuidad de la validez de las propiedades de los números en la ampliación de los campos numéricos estudiados.
Modelizar situaciones matemáticas y extramatemáticas mediante números y operaciones.

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
La recta numérica
Valor absoluto de un número entero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

Propiedades de los números naturales que se extienden a los números enteros: distributiva del producto respecto de la suma y resta, propiedad asociativa de la suma y del producto, propiedad disociativa de la suma.
El valor absoluto de un número es:

- el mismo número si el número es positivo;
- el opuesto del número si éste es negativo; o
- 0 si el número es cero.

Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo, pero si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El producto entre un número positivo y otro negativo resulta negativo.
El cociente entre un número positivo y otro negativo resulta negativo.
El producto entre dos enteros negativos resulta positivo.
El cociente entre dos enteros negativos resulta positivo.

Procedimientos

Ubicación de números enteros en la recta numérica
Resolución de cálculos numéricos: suma, resta, multiplicación y división de enteros
Interpretación de enunciados
Utilización de la jerarquía y las propiedades de las operaciones y las reglas del uso de signos de agrupamiento en cálculos sencillos
Validación de propiedades de los naturales para determinar si se extienden a los enteros

Argumento

Argumentación acerca de la validez de los procedimientos utilizados y las respuestas obtenidas. Elaboración de enunciados más generales que validarán a través de argumentaciones basadas en conocimientos matemáticos adquiridos previamente.

Figura 2: Configuración epistémica de referencia

5.3 Los Números Enteros en los textos escolares

Con frecuencia, los docentes utilizan los libros de texto escolares como una de las principales fuentes de consulta para diseñar y preparar sus clases; por ello, es necesario llevar a cabo un estricto estudio, ya que es clara la influencia de ellos en la práctica docente.

Esta sección tiene como propósito realizar un análisis didáctico de situaciones problema; es decir, un problema, un ejercicio o una investigación, y las actividades que proponen los libros de texto sobre el objeto de estudio números enteros. Cabe destacar que se pretende establecer una Configuración Epistémica que sirva para el diseño del instrumento administrado a los alumnos, para luego comparar las Configuraciones Cognitivas de los estudiantes.

Con respecto a las herramientas teóricas, se utilizó el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2007), el cual propone una mirada pragmática, semiótica y antropológica para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje en Matemática. La ontología matemática de la que habla el EOS, permite describir las unidades didácticas o secuencias de actividades de los textos escolares por medio de la estructuración de los objetos matemáticos que forman la configuración epistémica. Para cada libro de texto se confeccionó una configuración epistémica particular. Resultó imprescindible anticiparse al accionar de los alumnos frente a las actividades de cada texto para determinar los conceptos, las propiedades y procedimientos.

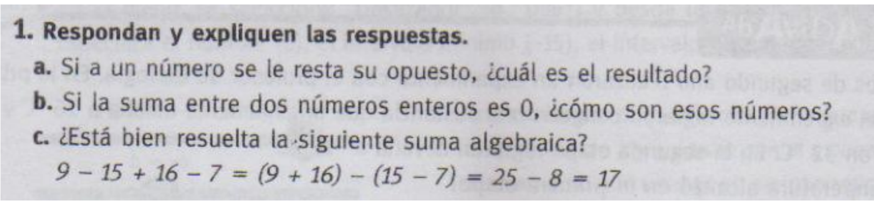
5.4 Configuraciones epistémicas del objeto matemático "Números Enteros" en los textos escolares analizados

5.4.1 Descripción general del Libro 1

El libro *Activados Matemática 2* de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016) es un libro-carpeta con hojas troqueladas y perforadas para encarpetar. Luego de la explicación teórica de cada contenido llamada "InfoActivados", propone un apartado titulado "Comprensión Activada" donde se realizan algunas preguntas que pueden surgir a partir de la lectura de la teoría. A continuación, semuestra la sección "Actividades" donde se encuentran varias situaciones problema del tema que se desarrolla. Finalizando esta sección, se encuentran recuadros titulados "Mente Activada" donde se proponen problemas extramatemáticos. En ocasiones, también se puede hallar la sección "TIC Activada" que propone la realización de situaciones problema a partir de la utilización de algún Software de geometría dinámica.

5.4.1.1 Identificación de los objetos primarios del Libro 1

Situación problema 1 correspondiente a la sección "Comprensión Activada"



1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si a un número se le resta su opuesto, ¿cuál es el resultado?

b. Si la suma entre dos números enteros es 0, ¿cómo son esos números?

c. ¿Está bien resuelta la siguiente suma algebraica?

$9 - 15 + 16 - 7 = (9 + 16) - (15 - 7) = 25 - 8 = 17$

Figura 3. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.19).

El problema está dado en un contexto intramatemático e involucra preguntas relativas a los números opuestos y a determinar si la resolución de una suma algebraica es correcta o no.

Resolución:

Para responder el primer inciso, seguramente resulte útil recordar que los números opuestos son aquellos que son iguales en valor absoluto pero tienen signo contrario **(concepto)**. Entonces,si a un número entero a, se le resta su opuesto, es decir $-a$, el resultado es cero **(propiedad)**. Para determinarlo, se puede experimentar con ejemplos particulares para luego generalizaro aplicar la definición para números opuestos **(procedimiento)**.

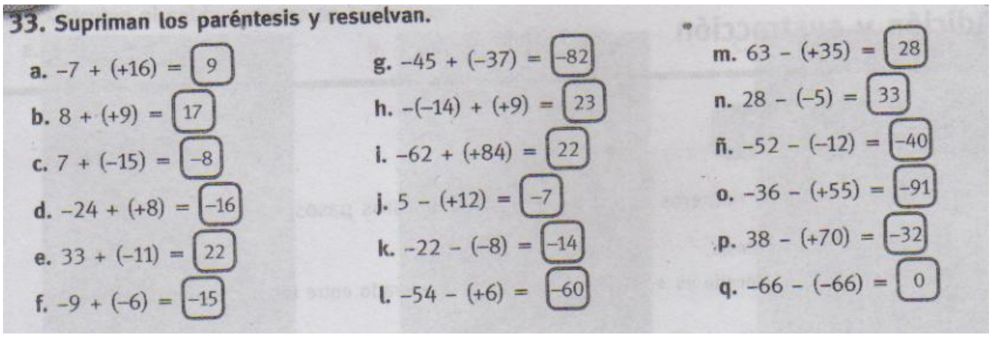
A partir de lo anterior, para resolver el segundo inciso, se puede afirmar que, si la suma entre dos números enteros es cero, esos números son opuestos **(concepto)**. Aquí, nuevamente, entra en juego la propiedad cancelativa **(propiedad)**. También es posible pensar que, dado un número a, para que la suma sea cero, hay que restarle el opuesto de a, es decir –a **(procedimiento).**

En el tercer inciso, se encuentra una sucesión de sumas y restas, es decir una suma algebraica **(concepto)**. Para determinar si está resuelta correctamente, se pueden sumar los términos positivos y restarle la suma de los módulos de los términos negativos. Al hacerlo, resulta: $(9 + 16) - (15 + 7) = 25 - 22 = 3$. Esto demuestra que la suma algebraica de la consigna no estaba bien resuelta, ya que a la suma de los términos positivos, se le restó la diferencia de los términos negativos **(procedimiento)**.

También se pueden resolver las sumas y restas término a término.

Propiedad/proposición para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo;si los números tienen distinto signo,al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 2 correspondiente a la sección “Actividades”



33. Supriman los paréntesis y resuelvan.

a. $-7 + (+16) = \boxed{9}$
b. $8 + (+9) = \boxed{17}$
c. $7 + (-15) = \boxed{-8}$
d. $-24 + (+8) = \boxed{-16}$
e. $33 + (-11) = \boxed{22}$
f. $-9 + (-6) = \boxed{-15}$
g. $-45 + (-37) = \boxed{-82}$
h. $-(-14) + (+9) = \boxed{23}$
i. $-62 + (+84) = \boxed{22}$
j. $5 - (+12) = \boxed{-7}$
k. $-22 - (-8) = \boxed{-14}$
l. $-54 - (+6) = \boxed{-60}$
m. $63 - (+35) = \boxed{28}$
n. $28 - (-5) = \boxed{33}$
ñ. $-52 - (-12) = \boxed{-40}$
o. $-36 - (+55) = \boxed{-91}$
p. $38 - (+70) = \boxed{-32}$
q. $-66 - (-66) = \boxed{0}$

Figura 4. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral, (2016, p.20).

El problema está dado en un contexto intramatemático. Se trata de suprimir paréntesis y resolver operaciones algebraicas.

Resolución:

Para resolver estos ejercicios de sumas algebraicas, es necesario tener presente la supresión de paréntesis. Si el signo que precede al paréntesis es +, los números que se encuentran en el interior no cambian su signo. Por el contrario, si el signo que precede al paréntesis es un signo -, los números que se encuentran en su interior se anotan con el signo opuesto **(procedimiento).** Una vez realizada la supresión de paréntesis, hay que sumar y restar los números enteros que hayan quedado. En general, si los números tienen el mismo signo, el resultado corresponde a ese mismo signo. Pero si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número mayor en módulo **(proposición)**. En el ejercicio q, se puede utilizar la propiedad cancelativa **(como procedimiento)**.

Situación problema 3 correspondiente a la sección “Actividades”

34. Lean atentamente y completen la tabla.
La amplitud térmica es la diferencia entre la temperatura máxima y la mínima.

Ciudad	Temp. mín.	Temp. máx.	Amplitud térmica
Londres	8 °C	15 °C	7 °C
Oslo	–10 °C	10 °C	20 °C
Lisboa	5 °C	12 °C	7 °C
Atenas	–15 °C	22 °C	37 °C

Figura 5. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral, (2016, p.20).

El problema está inmerso en un contexto extramatemático que tiene que ver con el cálculo de amplitud térmica.

Resolución:

Para abordarlo, hay que tener en cuenta que la amplitud térmica es la diferencia entre la temperatura máxima y la mínima **(concepto extramatemático)**.

Para su resolución, es necesario plantear el cálculo. Para Londres, resulta $15°\mathrm{C} - 8°\mathrm{C} = 7°\mathrm{C}$. Para Oslo, hay que suprimir paréntesis **(procedimiento)** y entonces se obtiene $10°\mathrm{C} - (-10°\mathrm{C}) = 10°\mathrm{C} + 10°\mathrm{C} = 20°\ \mathrm{C}$. Para Lisboa, se tiene $12°\ \mathrm{C} - 5°\mathrm{C} = 7°\mathrm{C}$.

Finalmente, para el caso de Atenas, sucede lo mismo que para Oslo, pues resulta necesario la supresión de paréntesis. $22°\mathrm{C} - (-15°\mathrm{C}) = 37°\ \mathrm{C}$.

Procedimiento y proposición: el opuesto de un número negativo, es positivo. Para el caso de Londres, quedaría $15°\ \mathrm{C} - 8°\ \mathrm{C} = (8°\ \mathrm{C} + 7°\ \mathrm{C}) - 8°\ \mathrm{C} = 8°\ \mathrm{C} + 7°\ \mathrm{C} - 8°\ \mathrm{C} = 7°\ \mathrm{C}$.

Situación problema 4 correspondiente a la sección “Actividades”

35. Resuelvan las siguientes sumas algebraicas.

a. $-13 + 19 - 15 = -9$
b. $-25 + 26 - 28 + 22 = -5$
c. $-9 + 5 - 4 - 6 + 1 = -13$
d. $-24 + 40 - 16 + 52 - 5 = 47$
e. $-66 + 78 - 42 - 26 = -56$
f. $57 - 120 + 48 - 16 + 72 = 41$
g. $-20 + 5 - 13 - 4 + 8 = -24$
h. $-55 + 42 - 37 + 50 = 0$
i. $240 + 280 - 320 - 170 = 30$
j. $-355 + 516 - 88 - 77 = -4$

Figura 6. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral, (2016, p.20).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y solicita resolver sumas algebraicas.

Resolución:

La resolución se puede hacer de dos formas. La primera, tiene que ver con sumar los términos positivos y restarle la suma de los términos negativos. Por tomar un caso, el ejercicio c quedaría: $-9+5-4-6+1=(5+1)-(9+4+6)=6-19=-13$. La segunda, tiene que ver con asociar cada par de términos y resolverlos. Para el ejercicio c resulta: $-9+5-4-6+1=-4-10+1=-14+1=-13$ **(procedimiento)**. Para el mismo ítem que se mencionó anteriormente, quedaría: $-9+5-4-6+1=(-5-4)+5-4-(1+5)+1=-5-4+5-4-1-5+1=-4-4-5=-13$.

En general, si los números tienen el mismo signo, el resultado corresponde a ese mismo signo. Pero si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número mayor en módulo **(propiedad/proposición)**.

Situación problema 5 correspondiente a la sección "Actividades"

36. Completen la tabla con los resultados de cada operación.

m	p	q	m + p + q	m − p + q	m − (p − q)	−m − p − q
13	12	−11	14	−10	−10	−14
−40	50	−30	−20	−120	−120	20
−32	66	−28	6	−126	−126	−6
0	35	−53	−18	−88	−88	18

Figura 7. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.20).

Esta situación problema corresponde a un contexto intramatemático. En cada fila, se le asignan valores a m, p y q, quedando distintos cálculos algebraicos.

Resolución:

Para abordarla, hay que plantear el cálculo a partir de los valores que toman en cada renglón m, p y q, quedando planteadas las sumas algebraicas. La resolución involucra la supresión de paréntesis y, en algún caso, requiere supresión de corchetes **(concepto: números opuestos, procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

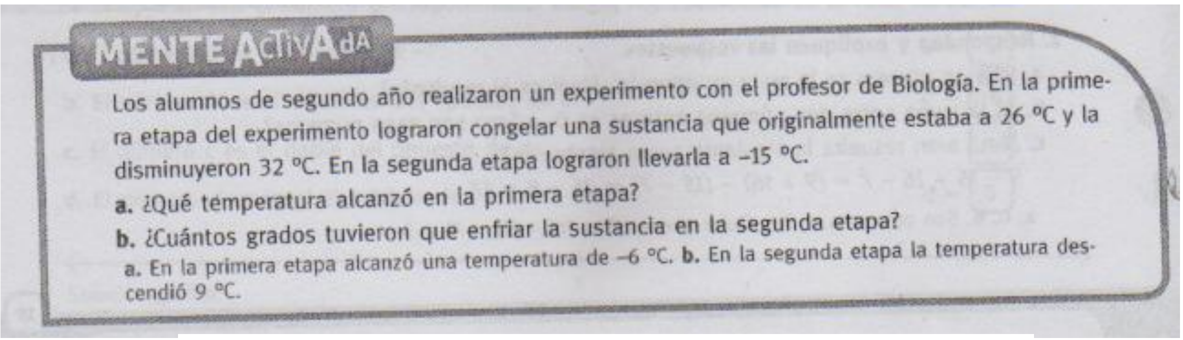
- En una suma y resta: si los números tienen el mismo signo, el resultado corresponde a ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número mayor en módulo.

- El opuesto de un número positivo es negativo, el opuesto de un número negativo es positivo.

A continuación, se resuelve la primera fila:

m	***p***	***q***	***m+p+q***	***m-p+q***	***m-(p-q)***	***-m-p-q***
13	12	-1	$13+12$ $+(-11)=$ $13+12-11=$ $25-11=14$	$13-12$ $+(-11)=$ $13-12-11=$ $1-11=-10$	$13-[12-(-11)]$ $=$ $13-[12+11]=$ $13-23=-10$	$-13-12—(-11)$ $=$ $-13-12+11=$ $-25+11=-14$

Situación problema 6 correspondiente a la sección "Mente Activada"


MENTE ACTIVADA

Los alumnos de segundo año realizaron un experimento con el profesor de Biología. En la primera etapa del experimento lograron congelar una sustancia que originalmente estaba a 26 °C y la disminuyeron 32 °C. En la segunda etapa lograron llevarla a –15 °C.

a. ¿Qué temperatura alcanzó en la primera etapa?

b. ¿Cuántos grados tuvieron que enfriar la sustancia en la segunda etapa?

a. En la primera etapa alcanzó una temperatura de –6 °C. **b.** En la segunda etapa la temperatura descendió 9 °C.

Figura 8. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.20).

Esta situación problema es extramatemática. Tiene que ver con un experimento realizado en la clase de Biología, donde asciende y desciende la temperatura de cierta sustancia.

Resolución:

Trabajarla implica hacer sumas y restas de números enteros. Para responder el primer inciso, si la sustancia estaba a $26°\,\mathrm{C}$ y se disminuyó $32°\,\mathrm{C}$, el cálculo que responde a la pregunta es $26°\,\mathrm{C} - 32°\,\mathrm{C} = -6°\,\mathrm{C}$ **(procedimiento)**. Para resolver el cálculo, si los números tienen el mismo signo, el resultado corresponde a ese mismo signo. Pero si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número mayor en módulo **(propiedad/proposición)**.

Para el segundo inciso, hay que trabajar con el resultado obtenido anteriormente y encontrar cuántos grados hay que sumarle o restarle para que la sustancia finalmente quede a $-15°\,\mathrm{C}$. Eso conduce a pensar que tuvo que descender $-9°\,\mathrm{C}$. El cálculo sería $-6°\,\mathrm{C} -$

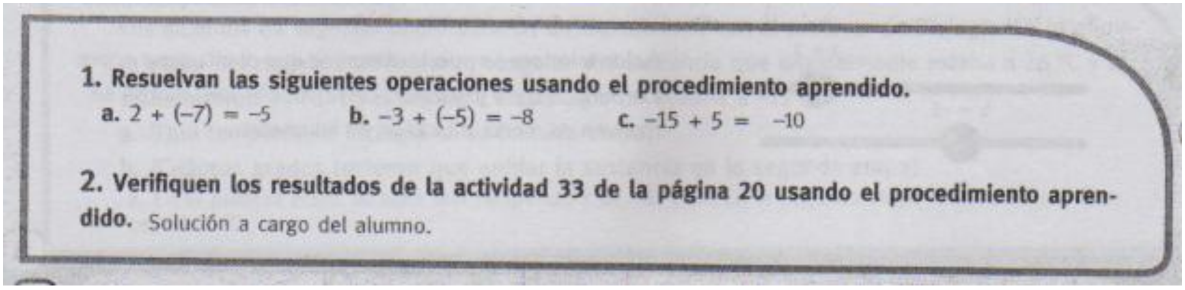
$9° \text{ C} = -15° \text{ C}$. También se puede responder la pregunta a partir del planteo y resolución de ecuaciones, es decir, escribiendo como incógnita la modificación de la temperatura. En ese caso, escribiría lo siguiente:

$-6° \text{ C} + x = -15° \text{ C}$

$x = -15° \text{ C} + 6° \text{ C}$

$x = -9° \text{ C}$

Situación problema 7 correspondiente a la sección “TIC Activada”



1. Resuelvan las siguientes operaciones usando el procedimiento aprendido.
a. 2 + (−7) = −5 **b.** −3 + (−5) = −8 **c.** −15 + 5 = −10

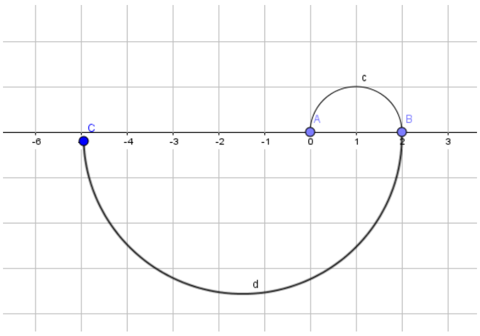
2. Verifiquen los resultados de la actividad 33 de la página 20 usando el procedimiento aprendido. Solución a cargo del alumno.

Figura 9. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.22).

En esta situación problemade carácter intramatemática, se espera la resolución de sumas y restas analíticamente aplicando un método geométrico.

Resolución:

El problema, que tiene que ver con sumas y restas de enteros, debe ser abordado de dos maneras. El inciso a requiere resolución analítica y, para esto, es preciso aplicar supresión de paréntesis **(procedimiento)**. También se sabe que en las sumas o restas entre enteros se cumple que: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; pero si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto **(propiedad/proposición)**.

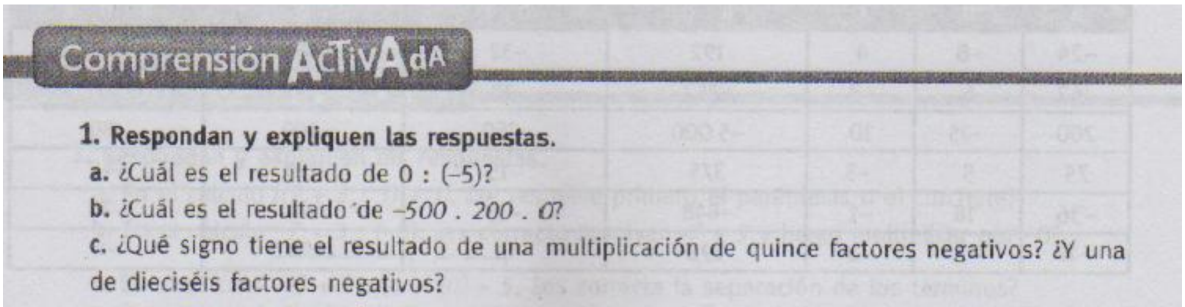


El inciso b solicita la resolución con un método geométrico que las autoras detallan antes de presentar la actividad **(lenguaje gráfico)**.Consiste en desplazar un número a izquierda o derecha a través del trazado de semicircunferencias utilizando un software de geometría dinámica **(procedimiento)**.

Para el caso del ejercicio 1. A y 2. A, se tiene:

$$2 + (-7) = 2 - 7 = -5$$

Situación problema 8 correspondiente a la sección “Comprensión Activada”


Comprensión ActivAdA

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuál es el resultado de $0 : (-5)$?

b. ¿Cuál es el resultado de $-500 \,.\, 200 \,.\, 0$?

c. ¿Qué signo tiene el resultado de una multiplicación de quince factores negativos? ¿Y una de dieciséis factores negativos?

Figura 10. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.23).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en responder preguntas en donde se involucra la utilización del cero en las operaciones multiplicación y división de enteros. También se pide inferir el signo del resultado conociendo la cantidad de factores y el signo de los mismos.

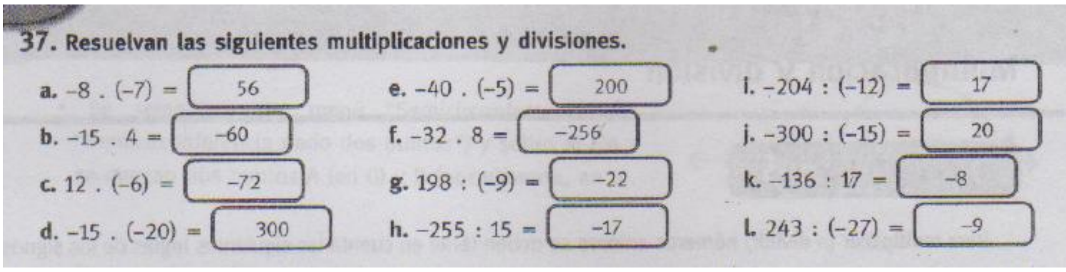
Resolución:

En esta sección, se propone trabajar con la multiplicación y división de números enteros. Para resolver el primer inciso de esta situación problema, se debe recordar que cero, dividido por cualquier número, da como resultado cero **(proposición)**. Por lo tanto, $0 : (-5) = 0$.

Para el segundo inciso, se tiene que tener presente que, si en una multiplicación, alguno de los factores es cero, su producto también es cero **(proposición)**.

Para el tercer inciso, hay que utilizar la regla de los signos **(procedimiento)**. Como la cantidad de factores es un número impar 15, el producto de 15 factores negativos es negativo también. Como 16 es un número par, el producto de 16 factores negativos permite obtener un resultado positivo **(propiedad)**.

Situación problema 9 correspondiente a la sección de “Actividades”



37. Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a. −8 . (−7) = 56	**e.** −40 . (−5) = 200	**i.** −204 : (−12) = 17
b. −15 . 4 = −60	**f.** −32 . 8 = −256	**j.** −300 : (−15) = 20
c. 12 . (−6) = −72	**g.** 198 : (−9) = −22	**k.** −136 : 17 = −8
d. −15 . (−20) = 300	**h.** −255 : 15 = −17	**l.** 243 : (−27) = −9

Figura 11. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.24).

Esta situación problema de índole intramatemática, tiene que ver con la resolución de multiplicaciones y divisiones de números enteros.

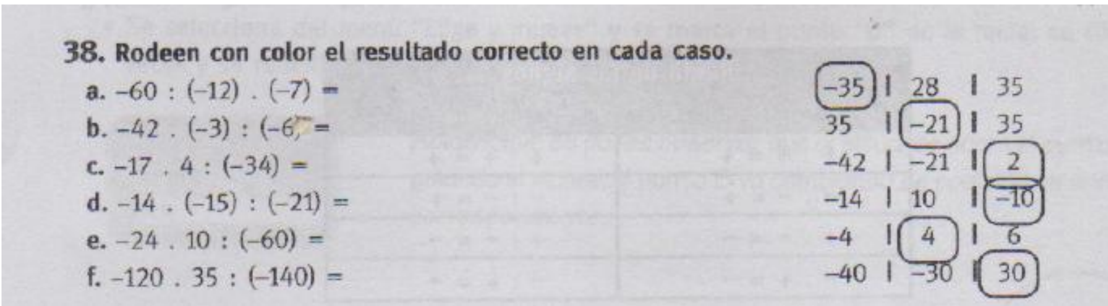
Resolución:

Para trabajarla, se debe multiplicar y dividir números enteros aplicando al mismo tiempo la regla se los signos **(procedimiento)**.

Para el caso del ejercicio a, se tiene $-8.(-7) = 56$. El producto entre 8 y 7 es 56 **(procedimiento)**. Y para decidir el signo del resultado, la regla de los signos enuncia que el producto de dos factores negativos, es positivo **(proposición)**.

Para el caso del ejercicio g, se tiene $198\colon(-9) = -22$. El cociente entre 198 y 9, es 22 **(procedimiento)**. Y para decidir el signo del resultado, la regla de los signos enuncia que el cociente entre un número positivo y un negativo, da negativo **(proposición)**.

Situación problema 10 correspondiente a la sección de “Actividades”



38. Rodeen con color el resultado correcto en cada caso.

a. −60 : (−12) . (−7) =	−35	28	35
b. −42 . (−3) : (−6) =	35	−21	35
c. −17 . 4 : (−34) =	−42	−21	2
d. −14 . (−15) : (−21) =	−14	10	−10
e. −24 . 10 : (−60) =	−4	4	6
f. −120 . 35 : (−140) =	−40	−30	30

Figura 12. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.24).

Esta situación problemade tipo intramatemática, consiste en efectuar multiplicaciones y divisiones con enteros y rodear el resultado correcto de entre tres opciones que se proponen.

Resolución:

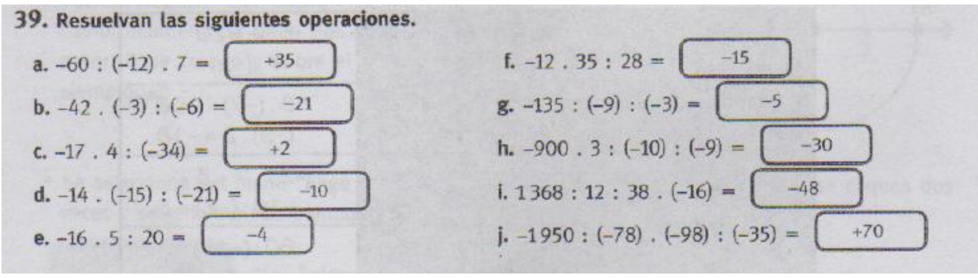
Para resolver este ejercicio referido a productos y cocientes de números enteros, se deben asociar los números que afectan a la primera operación y, luego, utilizar ese resultado para resolver la operación siguiente **(propiedad asociativa utilizada como procedimiento)**. Es decir, en este tipo de ejercicios donde hay un solo término, las operaciones se resuelven de izquierda a derecha. También resulta necesario aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Respecto del ejercicio c, resulta: $-17.4:(-34)$, lo primero que hay que resolver es la operación de la izquierda, es decir -17.4. Eso permite obtener, por la regla de los signos -68 **(procedimiento)**. A este resultado hay que dividirlo por -34 y utilizar la regla de los signos nuevamente, quedando $-68:(-34)=2$.

Algunas **propiedades/proposiciones** que intervienen en la resolución: el producto o cociente entre dos números enteros negativos, es positivo; el producto o cociente entre un número positivo y otro negativo, es negativo.

Finalmente, se debe buscar este resultado de entre la lista de posibles soluciones y se circula.

Situación problema 11 correspondiente a la sección de Actividades



39. **Resuelvan las siguientes operaciones.**

a. –60 : (–12) . 7 = +35
b. –42 . (–3) : (–6) = –21
c. –17 . 4 : (–34) = +2
d. –14 . (–15) : (–21) = –10
e. –16 . 5 : 20 = –4
f. –12 . 35 : 28 = –15
g. –135 : (–9) : (–3) = –5
h. –900 . 3 : (–10) : (–9) = –30
i. 1368 : 12 : 38 . (–16) = –48
j. –1950 : (–78) . (–98) : (–35) = +70

Figura 13. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral, (2016, p.24).

Esta situación problema es de carácter intramatemática y pide resolver multiplicaciones y divisiones de números enteros.

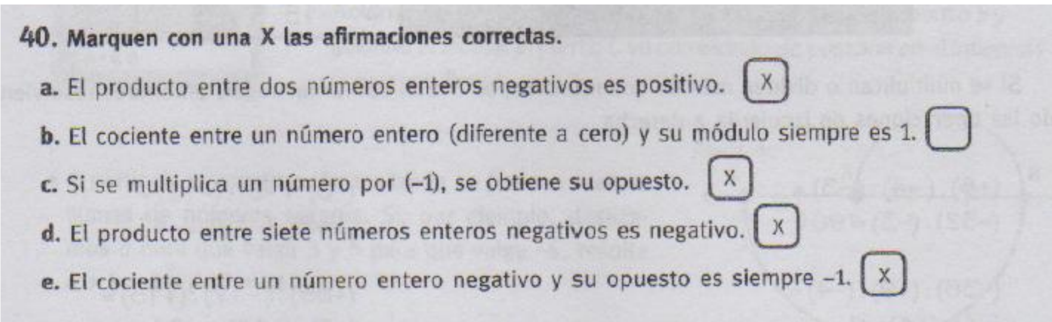
Resolución:

Para resolver esta actividad sobre productos y cocientes entre enteros, hay que asociar los números que afectan a la primera operación y resolverlos **(propiedad)** y, luego, con ese resultado resolver la operación siguiente. A la vez, es preciso utilizar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Para el ejercicio e, se tiene $-16.5: 20 = -4.$ Lo primero a resolver es $(-16).5$. A partir de ahí se obtiene -80. A este resultado hay que dividirlo por 20, es decir: $-80: 20$. De la división y la regla de los signos, se obtiene -4 **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones: el producto o cociente entre dos números negativos, es positivo, y el producto o cociente entre un número positivo y otro negativo, es negativo.

Situación problema 12 correspondiente a la sección "Actividades"



40. Marquen con una X las afirmaciones correctas.

a. El producto entre dos números enteros negativos es positivo. $\boxed{X}$

b. El cociente entre un número entero (diferente a cero) y su módulo siempre es 1. $\boxed{}$

c. Si se multiplica un número por (–1), se obtiene su opuesto. $\boxed{X}$

d. El producto entre siete números enteros negativos es negativo. $\boxed{X}$

e. El cociente entre un número entero negativo y su opuesto es siempre –1. $\boxed{X}$

Figura 14. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.24).

Este ejercicio de tipo intramatemático, propone identificar las afirmaciones correctas y marcarlas con una cruz. Los enunciados tienen que ver con la regla de los signos.

Resolución:

a) El producto de dos números enteros negativos es positivo.

Para decidir sobre la veracidad de la afirmación, basta con pensar en lo que enuncia la regla de los signos **(proposición y procedimiento)**. También, es posible pensar en algún ejemplo particular que le permita generalizar y pensar $-\mathrm{a}.(-\mathrm{b}) = +\mathrm{ab}$. De una forma u otra, se llega a la conclusión de que la afirmación es verdadera y se la marca con una X **(procedimiento)**.

b) El cociente entre un número entero (diferente de cero) y su módulo, siempre es 1.

Se puede pensar en casos particulares, puesto que al encontrar un contraejemplo, se puede concluir que la afirmación es falsa.

Un caso podría ser $5: |5| = 5: 5 = 1$, o también $-5: |5| = -5: 5 = -1$.

Este caso, sumado a la aplicación de la regla de los signos **(procedimiento/ proposición)**, permite generalizar y decir que $\mathrm{a}: |\mathrm{a}| = 1$, y que $-\mathrm{a}: |\mathrm{a}| = -1$ con $\mathrm{a} > 0$.

La afirmación del enunciado es falsa, solo es válida para números enteros positivos.

c) Si se multiplica a un número por (-1) se obtiene su opuesto.

Respecto de este ejercicio, bien se pueden tomar ejemplos particulares y posteriormente generalizar. Por tomar un caso, si se elige el número 8, se obtiene $8.(-1) = -8$. Si se toma al número -7, queda $(-7).(-1) = 7$. Entonces, generalizando el producto y aplicando la regla de los signos **(procedimiento y proposición)**, se obtiene $\mathrm{a}.(-1) = -\mathrm{a}$. La afirmación del enunciado es verdadera.

d) El producto entre siete números negativos, es negativo.

Para este enunciado, basta con utilizar la regla de los signos para la multiplicación de enteros **(procedimiento)**. Si la cantidad de factores negativos es par, el resultado tendrá signo positivo. Si la cantidad de factores negativos es impar, el resultado será negativo. Como siete es número impar, se puede afirmar que el enunciado es verdadero **(proposición).**

e) El cociente entre un número negativo y su opuesto, es siempre -1.

Para esta situación problema, hay que aplicar la regla de los signos **(procedimiento/ proposición)**. Puede que se piensen ejemplos particulares o, también, se lo exprese en forma general, escribiendo $-a : a = -1$.

Situación problema 13 correspondiente a la sección "Actividades"

41. Completen la tabla.

a	b	c	a . b	b . c	a . b : c	a : b . c
−24	−8	4	192	−32	48	12
−42	6	−3	−252	−18	84	21
200	−25	10	−5 000	−250	−500	−80
75	5	−3	375	−15	−125	−45
−36	18	−1	−648	−18	648	2
−28	−7	−2	196	14	−98	−8

Figura 15. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.24).

Esta situación problemade tipo intramatemática, le asigna números enteros a a, b y c, para luego calcular productos y cocientes.

Resolución:

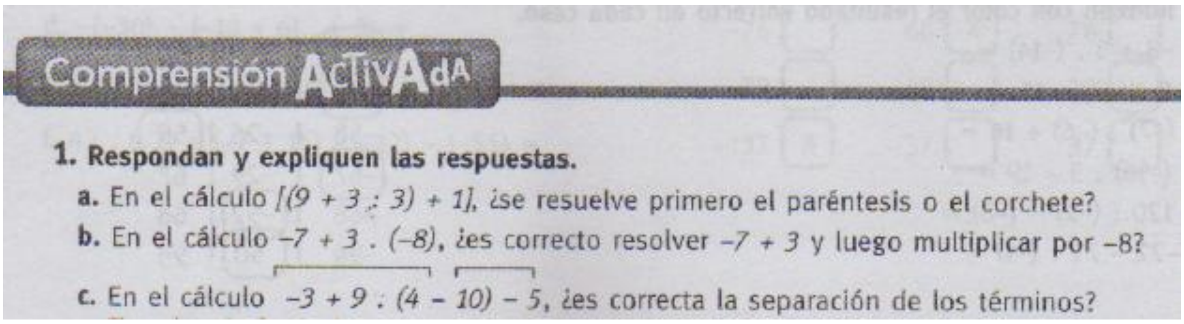
El problema involucra multiplicaciones y divisiones de números enteros y la regla de los signos **(procedimientos)**. Hay que resolver cada fila teniendo en cuenta qué valores enteros toman a, b, c y, de esta forma, quedan planteados distintos cálculos que hay que resolver asociando los primeros dos números que interfieren en la operación y luego, al resultado obtenido, aplicarle la operación siguiente **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones que se utilizan en esta resolución: el producto o cociente entre dos números de distinto signo, es negativo y, el producto o cociente entre dos números de igual signo, es positivo.

Por tomar un caso, para la primera fila, al reemplazar por los valores que se indican, se obtienen los siguientes cálculos:

a	*b*	*c*	*a.b*	*b.c*	*a.b:c*	*a:b.c*
-24	-8	4	-24.(-8)=192	-8.4=-32	-24.(-8):4= 192:4=48	-24:(-8).4= 3.4=12

Situación problema 14 correspondiente a la sección Comprensión Activada


Comprensión ACTIVADA

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En el cálculo [(9 + 3 : 3) + 1], ¿se resuelve primero el paréntesis o el corchete?

b. En el cálculo −7 + 3 . (−8), ¿es correcto resolver −7 + 3 y luego multiplicar por −8?

c. En el cálculo −3 + 9 : (4 − 10) − 5, ¿es correcta la separación de los términos?

Figura 16. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.25).

Esta situación problema es de naturaleza intramatemática. Consiste en contestar preguntas sobre operaciones combinadas con números enteros. También, solicita argumentar las respuestas respecto a la validez de cierto procedimiento.

Resolución:

a) En el cálculo $[(9 + 3: 3)] + 1$, ¿se resuelve primero el paréntesis o el corchete?

La respuesta a la pregunta es que hay que resolver primero el paréntesis y para ello hay que separar en términos dentro del mismo. Una vez obtenido el resultado, se resuelve el corchete **(procedimiento).** Queda $[(9 + 3: 3) + 1] = [(9 + 1) + 1] = [10 + 1] = 11$

b) En el cálculo $-7 + 3.(-8)$, ¿es correcto resolver $-7 + 3$ y luego multiplicar por -8?

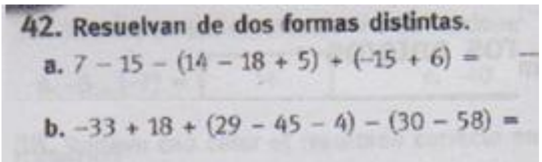
La respuesta es no. Lo correcto es separar en términos resolviendo primero el producto (el producto entre un números de distinto signo, permite obtener un resultado negativo) y luego a -7 sumarle ese valor **(procedimiento y proposición)**. Queda$-7+3.(-8)=-7-24=-31$.

c) En el cálculo $\overbrace{-3+9.(4}-\overbrace{10)-5}$, ¿es correcta la separación en términos?

La respuesta es no. Hay que separar en términos en las sumas y en las restas que estén fuera del paréntesis o de cualquier signo de agrupamiento. Si hace falta, luego se puede hacer una separación en términos en el interior del paréntesis **(procedimiento)**.

La resolución queda$\overbrace{-3}+\overbrace{9.(4-10)}-\overbrace{5}=\overbrace{-3}+\overbrace{9.(-6)}\overbrace{-5}=-3-54-5=-57-5=-62$.

Situación problema 15 correspondiente a la sección Actividades


42. Resuelvan de dos formas distintas.

a. 7 – 15 – (14 – 18 + 5) + (–15 + 6) =

b. –33 + 18 + (29 – 45 – 4) – (30 – 58) =

Figura 17. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.26).

Esta situación problemaes intramatemática e involucra sumas y restas de números enteros y también, extraer paréntesis.

Resolución:

El primer método posible consiste en resolver primero las sumas de los paréntesis. En una suma o resta, si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto **(proposición)**.

Si es necesario, también se suprime el paréntesis para determinar qué signo queda finalmente entre dos términos **(concepto: números opuestos y procedimiento)**.

a) $7-15-(14-18+5)+(-15+6)=$

$7-15-1+(-9)=$

$7-15-1-9=-18$

b) $-33 + 18 + (29 - 45 - 4) - (30 - 58) =$

$-33 + 18 - 20 - - (-28) =$

$-33 + 18 - 20 + 28 = -7$

El segundo método tiene que ver con extraer los paréntesis teniendo presente el signo que lo precede. Si hay un signo $+$, los signos del interior del paréntesis quedan igual. En cambio, si hay un $-$, se cambian **(procedimiento y concepto de número opuesto).** De esa forma queda planteada una suma algebraica que se resuelve sumando todos los términos positivos y restándole la suma del valor absoluto de los negativos.

a) $7 - 15 - (14 - 18 + 5) + (-15 + 6) =$

$7 - 15 - 14 + 18 - 5 - 15 + 6 =$

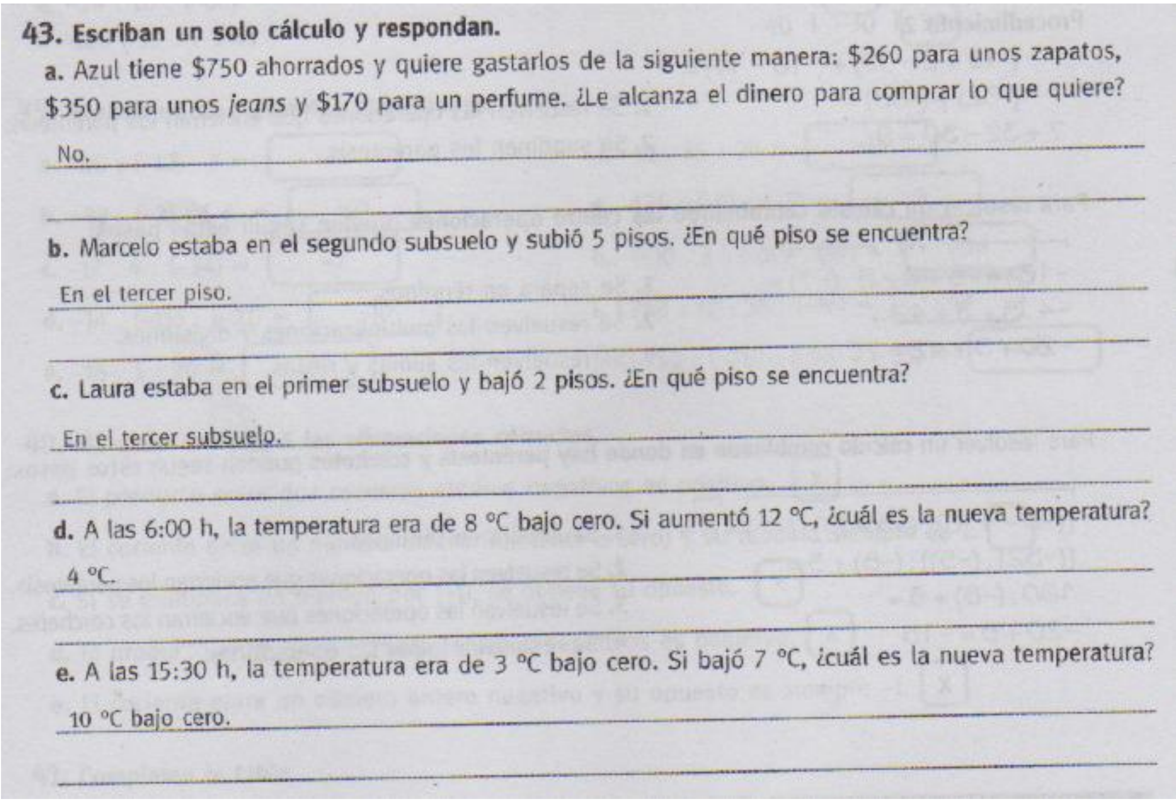
$(7 + 18 + 6) - (15 + 14 + 5 + 15) = -18$

b) $-33 + 18 + (29 - 45 - 4) - (30 - 58) =$

$-33 + 18 + 29 - 45 - 4 - 30 + 58 =$

$(18 + 29 + 58) - (33 + 45 + 4 + 30) = -7$

Situación problema 16 correspondiente a la sección Actividades



43. Escriban un solo cálculo y respondan.

a. Azul tiene \$750 ahorrados y quiere gastarlos de la siguiente manera: \$260 para unos zapatos, \$350 para unos *jeans* y \$170 para un perfume. ¿Le alcanza el dinero para comprar lo que quiere?

No.

b. Marcelo estaba en el segundo subsuelo y subió 5 pisos. ¿En qué piso se encuentra?

En el tercer piso.

c. Laura estaba en el primer subsuelo y bajó 2 pisos. ¿En qué piso se encuentra?

En el tercer subsuelo.

d. A las 6:00 h, la temperatura era de 8 °C bajo cero. Si aumentó 12 °C, ¿cuál es la nueva temperatura?

4 °C.

e. A las 15:30 h, la temperatura era de 3 °C bajo cero. Si bajó 7 °C, ¿cuál es la nueva temperatura?

10 °C bajo cero.

Figura 18. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.26).

Esta situación problemaes extramatemática y plantea situaciones relativas a gastos, subir y bajar pisos de un ascensor y temperaturas.

Resolución:

a) Al total de ahorros hay que restarle los gastos planificados de modo que quede planteada una suma algebraica. Si la resta da como resultado cero o un número positivo, entonces a Azul le alcanzará el dinero. Si se obtiene un número negativo, entonces el dinero no es suficiente para esos gastos.

$750 - 260 - 350 - 170 = 490 - 350 - 170 = 140 - 170 = -30$

Como el resultado es -30, a Azul no le alcanza el dinero, le faltan \$30 para comprarse todo lo que desea **(procedimiento)**.

b) Es necesario escribir segundo subsuelo como -2, ya que está por debajo de la planta baja, y a ese valor sumarle 5 **(procedimiento)**.

Queda$-2 + 5 = 3$, por lo tanto, Marcelo está en el tercer piso.

c) Para este ejercicio, hay que plantear una resta de números enteros**.** En vista de que la expresión "primer subsuelo" corresponde al entero -1, luego hay que restar 2.Queda$-1 - 2 = -3$, por lo tanto, Laura está en el tercer piso de subsuelo **(procedimiento)**.

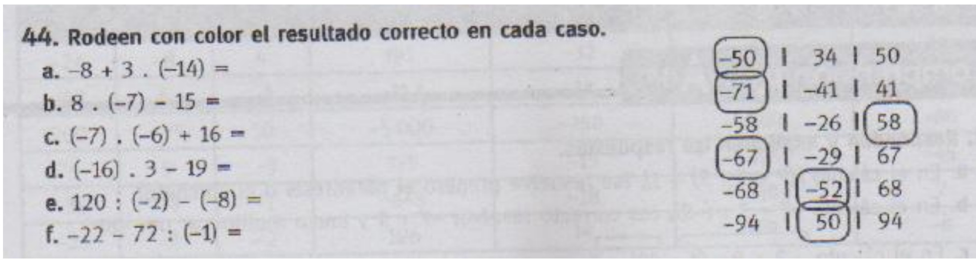
d) En este punto, hay que plantear una suma de enteros. En vista de que 8°C bajo cero corresponde al entero -8, a ese valor hay que sumarle 12.

Queda$-8 + 12 = 4$, por lo tanto, la temperatura es de 4°C **(procedimiento)**.

e) Nuevamente, para este ejercicio hay que plantear una resta de enteros. El número entero correspondiente a $3°\text{C}$ bajo cero es -3. A ese valor hay que restarle 7.Queda: $-3 - 7 = -10$. La temperatura es de 10°C bajo cero **(procedimiento)**.

Para todos los ítems que involucran suma o resta, si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo;si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto **(proposición)**.

Situación problema 17 correspondiente a la sección Actividades



44. Rodeen con color el resultado correcto en cada caso.

a. $-8 + 3 \, . \, (-14) =$	-50	34	50
b. $8 \, . \, (-7) - 15 =$	-71	-41	41
c. $(-7) \, . \, (-6) + 16 =$	-58	-26	58
d. $(-16) \, . \, 3 - 19 =$	-67	-29	67
e. $120 : (-2) - (-8) =$	-68	-52	68
f. $-22 - 72 : (-1) =$	-94	50	94

Figura 19. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.26).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver cálculos combinados en los que intervienen las cuatro operaciones básicas con números enteros y marcar con un círculo el resultado correcto.

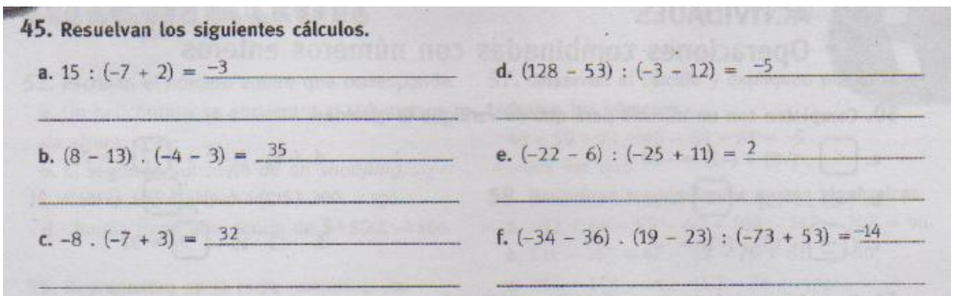
Resolución:

El procedimiento está vinculado a la suma, resta, multiplicación y división de enteros, a la separación en términos, a la utilización de la regla de los signos y a la supresión de paréntesis **(procedimiento)**. Para el ejercicio b, queda $8.(-7) - 15 = -56 - 15 = -71$. Una vez resuelto el ejercicio, hay que buscar ese resultado de entre las opciones que se dan y circularlo.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

Situación problema 18 correspondiente a la sección Actividades



45. Resuelvan los siguientes cálculos.

a. $15 : (-7 + 2) =$ −3

d. $(128 - 53) : (-3 - 12) =$ −5

b. $(8 - 13) \, . \, (-4 - 3) =$ 35

e. $(-22 - 6) : (-25 + 11) =$ 2

c. $-8 \, . \, (-7 + 3) =$ 32

f. $(-34 - 36) \, . \, (19 - 23) : (-73 + 53) =$ −14

Figura 20. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.27).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en resolver cálculos combinados utilizando las cuatro operaciones básicas.

Resolución:

Para resolverla, hay que saber operar en el conjunto de los números enteros y aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**. Trabajar con estos cálculos requiere resolver primero las operaciones de los paréntesis.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

Para el ejercicio f, se tiene $(-34-36).(19-23):(-73+53)=-70.(-4):(-20)=+280:(-20)=-14$.

Situación problema 19 correspondiente a la sección Actividades

46. Completen el siguiente cuadro.

a	b	c	d	a . b + c . d	a . (b + c) − d	(a − b) : (c − d)
−24	6	14	8	−32	−488	−5
2	−48	−2	23	−142	−123	−2
8	40	−10	−2	340	242	4
100	4	16	4	464	1996	8
−65	−9	13	6	663	−266	−8

Figura 21. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.27).

Esta situación problema es intramatemática. Abarca las cuatro operaciones básicas entre números enteros. Se da un valor numérico para a, b, c y d, formando un cálculo combinado para cada fila.

Resolución:

Para resolver este ejercicio, hay que saber sumar, restar, multiplicar, dividir con números enteros. En cada fila se da un valor numérico distinto para a, b, c y d, quedando un cálculo combinado. Los procedimientos que se ponen en juego a lo largo del desarrollo tienen que ver con la separación en términos, la supresión de paréntesis y la regla de los signos **(procedimiento).**

Propiedades/proposiciones:

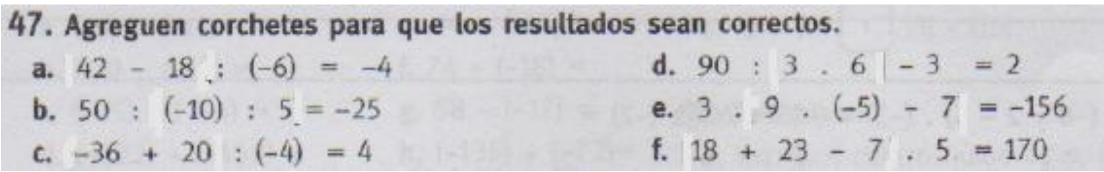
- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto entre dos enteros: si los números son negativos, el resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

Para la primera fila se obtiene:

a	*b*	*c*	*d*	*a.b+c.d*	*a.(b+c)-d*	*(a-b):(c-d)*
-24	6	14	8	$-24.6+14.8=$ $-144+112=$ -32	$-24.(6+14)-8=$ $-24.20-8=$ $-480-8=-488$	$(-24-6):(14-8)$ $=-30:6=$ -5

Situación problema 20 correspondiente a la sección Actividades


47. Agreguen corchetes para que los resultados sean correctos.

a. 42 - 18 : (-6) = -4
b. 50 : (-10) : 5 = -25
c. -36 + 20 : (-4) = 4
d. 90 : 3 . 6 - 3 = 2
e. 3 . 9 . (-5) - 7 = -156
f. 18 + 23 - 7 . 5 = 170

Figura 22. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.27).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en agregar corchetes donde corresponda para que se obtenga el resultado indicado en cada cálculo.

Resolución:

En este ejercicio se trabaja la suma, resta, multiplicación y división de enteros. Para resolverlo, hay que analizar dónde es conveniente colocar el corchete para obtener el resultado que dice la consigna **(procedimientos)**.

Para el ejercicio a, resulta conveniente agrupar $42-18$, ya que se obtiene 24 que, además de ser divisible por -6, da como resultado -4. Entonces, queda $[42-18]:(-6)=24:(-6)=-4$.

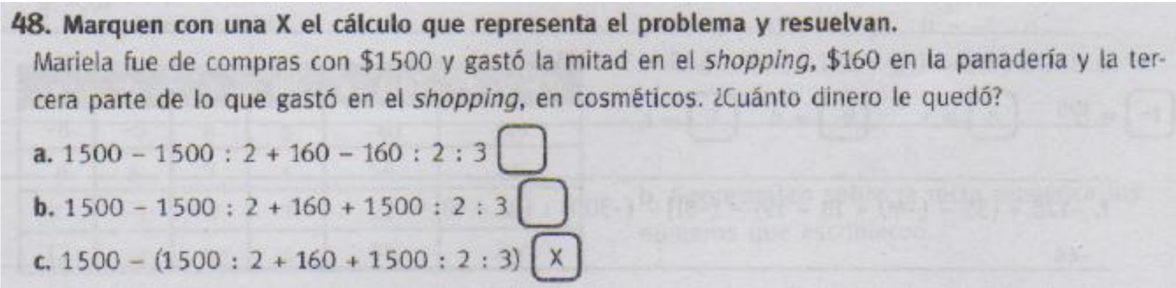
Es necesario utilizar la regla de los signos, en los otros casos se requiere separar en términos y, como indica el enunciado, verificar el resultado **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

Situación problema 21 correspondiente a la sección Actividades



48. Marquen con una X el cálculo que represente el problema y resuelvan.
Mariela fue de compras con $1500 y gastó la mitad en el *shopping*, $160 en la panadería y la tercera parte de lo que gastó en el *shopping*, en cosméticos. ¿Cuánto dinero le quedó?

a. 1500 − 1500 : 2 + 160 − 160 : 2 : 3 ☐

b. 1500 − 1500 : 2 + 160 + 1500 : 2 : 3 ☐

c. 1500 − (1500 : 2 + 160 + 1500 : 2 : 3) X

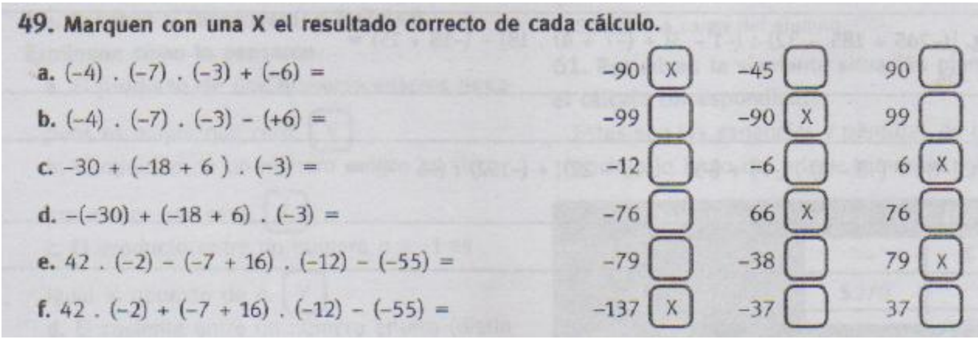
Figura 23. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.27).

Esta situación problema es de tipo extramatemática. Dado un problema en lenguaje coloquial relacionado con los gastos que hace una persona al ir de compras, se pide identificar el cálculo que lo representa.

Resolución:

Esta actividad es presentada en lenguaje verbal. Requiere saber las operaciones básicas entre números naturales y traducir del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico, separación en términos y supresión de paréntesis **(procedimientos).** En vista de que el problema aclara la cantidad de dinero inicial y detalla tres tipos de gastos realizados, el cálculo que lo represente tendría que tener tres restas aplicadas a 1500. El cálculo que satisface esa condición es el último **(procedimiento)**.

Situación problema 22 correspondiente a la sección Actividades



49. Marquen con una X el resultado correcto de cada cálculo.

a. $(-4) . (-7) . (-3) + (-6) =$	-90 X	-45	90
b. $(-4) . (-7) . (-3) - (+6) =$	-99	-90 X	99
c. $-30 + (-18 + 6\ ) . (-3) =$	-12	-6	6 X
d. $-(-30) + (-18 + 6) . (-3) =$	-76	66 X	76
e. $42 . (-2) - (-7 + 16) . (-12) - (-55) =$	-79	-38	79 X
f. $42 . (-2) + (-7 + 16) . (-12) - (-55) =$	-137 X	-37	37

Figura 24. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.27).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver los cálculos y marcar el resultado correcto de entre las opciones que se dan.

Resolución:

El tema central de esta actividad esla suma, la resta y la multiplicación de números enteros, y requiere dela separación en términos, la supresión de paréntesis y la regla de los signos **(procedimientos)**.

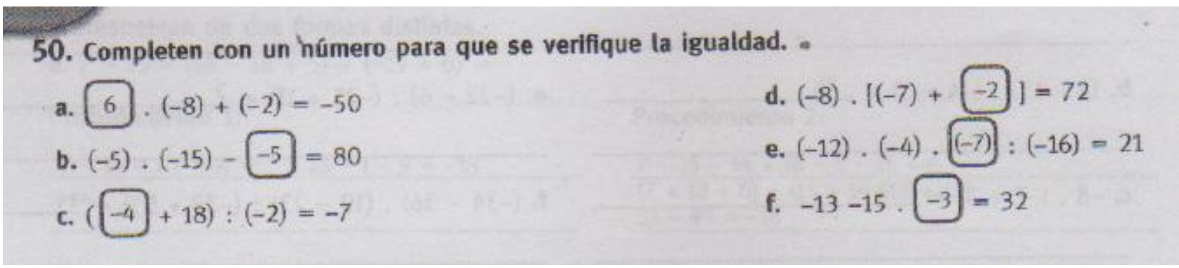
Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto entre dos enteros: si los factores son negativos, es resultado será positivo; si los factores son de distinto signo, el resultado será negativo.

Para el ejercicio d, se obtiene $-(-30) + (-18 + 6).(-3) = 30 + (-12).(-3) = 30 + 36 = 66$. Luego de resolver, hay que marcar con una X el resultado correcto **(procedimiento)**.

Situación problema 23 correspondiente a la sección Actividades



50. Completen con un número para que se verifique la igualdad.

a. $\boxed{6} . (-8) + (-2) = -50$

b. $(-5) . (-15) - \boxed{-5} = 80$

c. $(\boxed{-4} + 18) : (-2) = -7$

d. $(-8) . [(-7) + \boxed{-2}] = 72$

e. $(-12) . (-4) . \boxed{(-7)} : (-16) = 21$

f. $-13 -15 . \boxed{-3} = 32$

Figura 25. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.28).

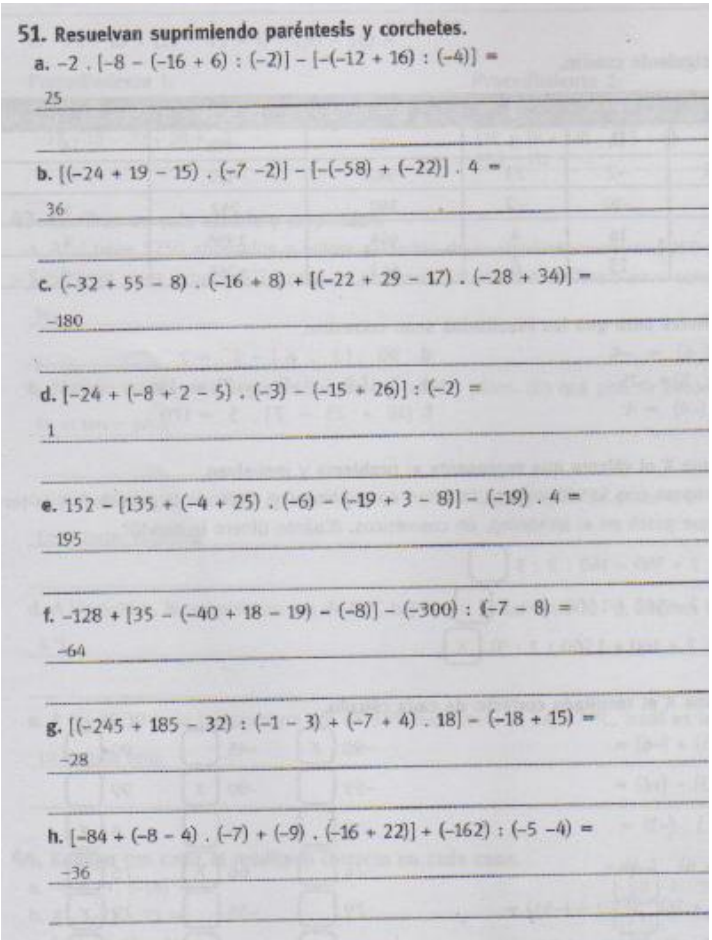
Esta situación problema es de carácter intramatemático y se trata de completar con el número entero que permita verificar la igualdad.

Resolución:

Para resolver esta actividad que involucra sumas, restas, multiplicación y división de números enteros, hay que aplicar la regla de los signos, la extracción de paréntesis y la separación en términos **(procedimientos)**.

Para el ejercicio a, lo primero que hay que hacer es separar en términos; eso permite pensar en qué número multiplicado por menos ocho y disminuido en dos, da como resultado menos cincuenta. $\overbrace{\_\_\_\_ .(-8)} + \overbrace{(-2)} = -50$. Entonces, el número con el que habría que completar es 6, ya que $6.(-8) + (-2) = -50$.

Situación problema 24 correspondiente a la sección Actividades



51. Resuelvan suprimiendo paréntesis y corchetes.

a. −2 . [−8 − (−16 + 6) : (−2)] − [−(−12 + 16) : (−4)] =

25

b. [(−24 + 19 − 15) . (−7 −2)] − [−(−58) + (−22)] . 4 =

36

c. (−32 + 55 − 8) . (−16 + 8) + [(−22 + 29 − 17) . (−28 + 34)] =

−180

d. [−24 + (−8 + 2 − 5) . (−3) − (−15 + 26)] : (−2) =

1

e. 152 − [135 + (−4 + 25) . (−6) − (−19 + 3 − 8)] − (−19) . 4 =

195

f. −128 + [35 − (−40 + 18 − 19) − (−8)] − (−300) : (−7 − 8) =

−64

g. [(−245 + 185 − 32) : (−1 − 3) + (−7 + 4) . 18] − (−18 + 15) =

−28

h. [−84 + (−8 − 4) . (−7) + (−9) . (−16 + 22)] + (−162) : (−5 −4) =

−36

Figura 26. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.28).

Esta situación problema es de naturaleza intramatemática y tiene que ver con cálculos combinados con números enteros.

Resolución:

Esta actividad involucra sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números enteros. Requiere de la separación en términos en los signos de suma y resta, de la extracción de paréntesis (**concepto: número opuesto)**, de resolver primero los paréntesis y luego los corchetes y, también, la aplicación de regla de los signos **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

Para el ejercicio “a”, se tiene:

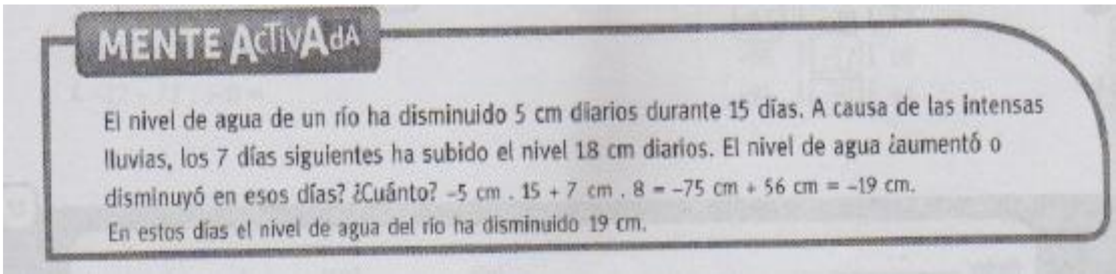
$$-2.[-8-(-16+6):(-2)]—[-(-12+16):(-4)] =$$

$$\overbrace{-2.[-8-(-16+6):(-2)]}—\overbrace{[-(-12+16):(-4)]} =$$

$$-2.[-8-(-10):(-2)]—[-4:(-4)] =$$

$$-2.[-8-5]—[+1] = -2.[-13]-1 = 26-1 = 25$$

Situación problema 25 correspondiente a la sección Mente Activada


MENTE ACTIVADA

El nivel de agua de un río ha disminuido 5 cm diarios durante 15 días. A causa de las intensas lluvias, los 7 días siguientes ha subido el nivel 18 cm diarios. El nivel de agua ¿aumentó o disminuyó en esos días? ¿Cuánto? -5 cm . 15 + 7 cm . 8 = -75 cm + 56 cm = -19 cm.
En estos días el nivel de agua del río ha disminuido 19 cm.

Figura 27. Extraída de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.28).

Esta situación problema es de índole extramatemática y consiste en un enunciado verbal referido al ascenso o descenso del nivel de agua de un río.

Resolución:

El problema se presenta en lenguaje verbal. Las operaciones involucradas en él son sumas, restas y multiplicación de números enteros. Requiere traducir del lenguaje coloquial al simbólico, separación en términos, aplicación de la regla de los signos **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

En vista de que durante los primeros 15 días, el río disminuyó 5 cm diarios, y durante los siguientes 7 días, ascendió 18 cm diarios, se obtiene $-5\,cm.15\ +7\,cm.8\ =-75+56=-19\,cm.$ Que el cálculo dé como resultado -19, quiere decir que el nivel de agua del río descendió en ese plazo 19 cm.

5.4.1.2 Tabla de objetos primarios y emergentes de las situaciones problema propuestas del Libro 1

Situaciones problema y propuestas	Conceptos		Propiedades		Procedimientos		Argumentos			Lenguaje		
	P	**E**	**P**	**E**	**P**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Situación problema 1 intramatemática:involucrar preguntas relativas a los números opuestos y determinar si la resolución de una suma algebraica es correcta o no.	*		*		*				*	*	*	
Situación problema 2 intramatemática: suprimir paréntesis y resolver operaciones algebraicas.	*		*		*						*	
Situación problema 3 extramatemática: calcular la amplitud térmica.	*		*		*						*	*
Situación problema 4 intramatemática: resolver sumas algebraicas.	*		*		*						*	
Situación problema 5 intramatemática: asignar en cada filalos valores a m, p y q, quedando distintos cálculos algebraicos.	*		*		*						*	
Situación problema 6 extramatemática: experimentar dónde asciende y desciende la temperatura de cierta sustancia.	*		*		*					*	*	
Situación problema 7 intramantemática: resolver sumas y restas analíticamente aplicando un método geométrico.	*		*		*						*	*
Situación problema 8 intramatemática: responder preguntas que involucran la utilización del cero en la multiplicación y división; einferir el signo del resultado conociendo la cantidad de factores y el signo de los mismos.	*		*		*					*	*	
Situación problema 9 intramatemática:resolver multiplicaciones y divisiones de números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 10 intramatemática: efectuar multiplicaciones y divisiones con enteros y rodear el resultado correcto.	*		*		*						*	

Situación problema 11 intramatemática: resolver multiplicaciones y divisiones de números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 12 intramatemática: identificar las afirmaciones correctas y marcarlas con una cruz. Los enunciados tienen que ver con productos y cocientes de números negativos.	*		*		*					*	*	
Situación problema 13 intramatemática: asignar números enteros a $a, byc,$ para luego calcular productos y cocientes.	*		*		*						*	*
Situación problema 14 intramatemática: contestar preguntas sobre operaciones combinadas con números enteros; y argumentarlas respuestas respecto a la validez de cierto procedimiento.	*		*		*				*	*	*	
Situación problema 15 intramatemática: realizar sumas algebraicas y supresión de paréntesis.	*		*		*						*	
Situación problema 16 extramatemática: plantear situaciones relativas a gastos; subir y bajar pisos de un ascensor; y temperaturas.	*		*		*					*	*	
Situación problema 17 intramatemática: resolver cálculos combinados y marcar con un círculo el resultado correcto.	*		*		*						*	
Situación problema 18 intramatemática: resolver cálculos combinados utilizando las cuatro operaciones básicas.	*		*		*						*	
Situación problema 19 intramatemática: ejercitarlas cuatro operaciones básicas entre enteros; se da un valor numérico para a, b, cyd formando un cálculo combinado para cada fila.	*		*		*						*	*
Situación problema 20 intramatemática:agregar corchetes donde corresponda para que se obtenga el resultado indicado en cada cálculo.	*		*		*						*	
Situación problema 21 extramatemática: identificar el cálculo que representa los gastos que hace una persona al ir de compras,mediante un problema en lenguaje coloquial.	*		*		*					*	*	
Situación problema 22 intramatemática:resolver cálculos combinados con enteros y marcar el resultado correcto de entre las opciones que se dan.	*		*		*						*	
Situación problema 23 intramatemático: completar con el número entero que permita verificar la igualdad.	*		*		*						*	
Situación problema 24 intramatemática:resolver cálculos combinados con números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 25 extramatemática:resolver un problema verbal referido al ascenso o descenso del nivel de agua de un río.	*		*		*					*	*	

P: Previos — Pp: Propiedades — S: Simbólico

E: Emergente — Pr: Procedimientos — G: Gráfico

C: Concepto — V: Verbal

Tabla 1: Elementos primarios del Libro 1

5.4.1.3 Configuración epistémica del Libro 1

Esta configuración epistémica muestra la red de objetos extraídos de la resolución de las situaciones problema que abordan las cuatro operaciones básicas con números enteros en el Capítulo 1 del libro de texto.

Se puede observar que las situaciones propuestas en contextos intramatemáticos son 20 (80% del total) y las que refieren a contextos extramatemáticos son 5 (20% del total).

Por otra parte, se encuentran 8 situaciones problema (32% del total) donde los enunciados y las resoluciones requieren lenguaje verbal, 4 situaciones problema (16% del total) requieren lenguaje gráfico, mientras que las 25 situaciones problema (100% del total) involucran el lenguaje simbólico.

Se puede mencionar que solo 1 consigna (4% del total) requiere habilidades de argumentación sobre procedimientos, mientras que la argumentación de conceptos y propiedades están ausentes.

Situaciones problema

Situaciones problema intramatemáticas y extramatemáticas donde se requiere la resolución de operaciones básicas con números enteros.

Lenguaje

Verbal:

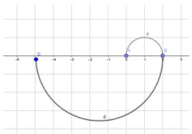
Marcelo estaba en el segundo subsuelo y subió 5 pisos. ¿En qué piso se encuentra?

Simbólico:

$a. : b. c$

$-8 + 3. (-14)$

Gráfico:



REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Definición de números opuestos
Definición de valor absoluto de un número

Propiedades y proposiciones

El producto entre cero y cualquier otro número es cero.
El cociente entre cero y cualquier número (distinto de cero), da cero.
El producto de una cantidad impar de factores negativos, es negativo.
El producto de una cantidad par de factores negativos, es positivo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un factor entero positivo y otro negativo, es negativo.

Procedimientos

Resolución de sumas o restas de números enteros
Resolución de sumas algebraicas
Separación en términos
Supresión de paréntesis
Regla de los signos del producto y cociente de enteros
Orden de resolución de signos de agrupamiento (paréntesis y corchetes)
Aplicación de la propiedad cancelativa
Aplicación de la propiedad asociativa del producto

Argumentos

Argumentos basados en procedimientos: en la sección "Comprensión Activada", se pide argumentar las respuestas.

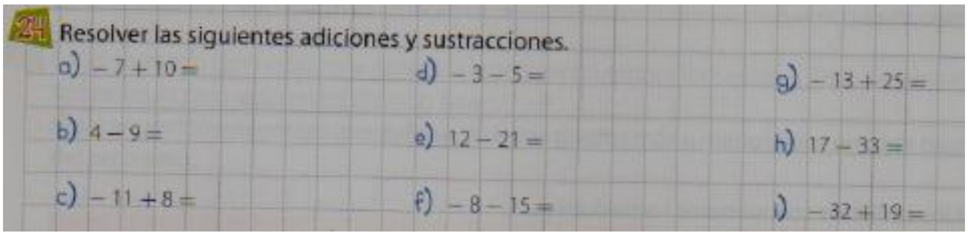
Figura 28: Configuración epistémica del Libro 1

5.4.2 Descripción general del Libro 2

El libro *Matemática 2* de Effenberger (2013) es un libro anillado que contiene explicaciones teóricas y guías de ejercitaciones de los temas que se ofrecen. Las explicaciones se presentan en apartados llamados “Teoría” y luego se ofrecen actividades de práctica. También, se pueden encontrar recuadros bajo el título de “Desafío”, donde proponen una actividad con un nivel de dificultad ligeramente superior a las anteriores.

5.4.2.1 Identificación de los objetos primarios del Libro 2

Situación problema 1


24 Resolver las siguientes adiciones y sustracciones.

a) $-7+10=$ d) $-3-5=$ g) $-13+25=$

b) $4-9=$ e) $12-21=$ h) $17-33=$

c) $-11+8=$ f) $-8-15=$ i) $-32+19=$

Figura 29. Extraída de Effenberger (2013, p.14).

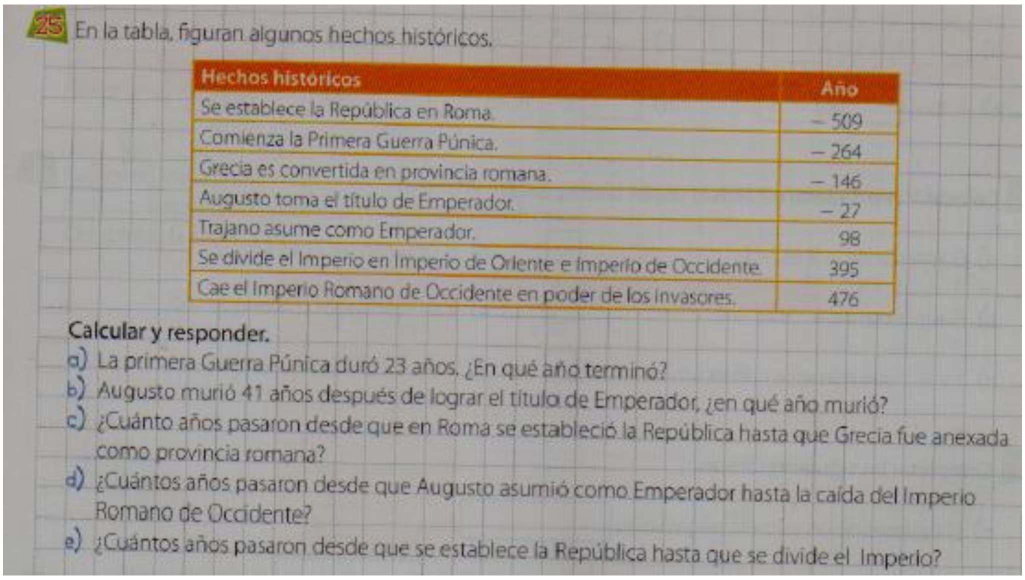
Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en resolver sumas y restas de números enteros.

Resolución:

Para resolver esta actividad hay que sumar y restar de números enteros **(procedimiento)**. Para las sumas o restas, si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto **(proposición).**

a) $-7+10=3$
b) $4-9=-5$
c) $-11+8=-3$
d) $-3-5=-8$
e) $12-21=-9$
f) $-8-15=-23$
g) $-13+25=12$
h) $17-33=-16$
i) $32-10=13$

Situación problema 2


25 En la tabla, figuran algunos hechos históricos.

Hechos históricos	Año
Se establece la República en Roma.	− 509
Comienza la Primera Guerra Púnica.	− 264
Grecia es convertida en provincia romana.	− 146
Augusto toma el título de Emperador.	− 27
Trajano asume como Emperador.	98
Se divide el Imperio en Imperio de Oriente e Imperio de Occidente.	395
Cae el Imperio Romano de Occidente en poder de los invasores.	476

Calcular y responder.

a) La primera Guerra Púnica duró 23 años. ¿En qué año terminó?

b) Augusto murió 41 años después de lograr el título de Emperador, ¿en qué año murió?

c) ¿Cuánto años pasaron desde que en Roma se estableció la República hasta que Grecia fue anexada como provincia romana?

d) ¿Cuántos años pasaron desde que Augusto asumió como Emperador hasta la caída del Imperio Romano de Occidente?

e) ¿Cuántos años pasaron desde que se establece la República hasta que se divide el Imperio?

Figura 30. Extraída de Effenberger (2013, p.14).

Esta situación problema es de índole extramatemática. Se presentan en forma de tabla los años en que acontecieron ciertos hechos históricos. A los eventos sucedidos años antes de Cristo se les asigna un número negativo, y a los sucedidos después de Cristo, positivos. A partir de allí, se plantean preguntas que requieren alguna operación entre los años.

Resolución:

Para abordar esta actividad, se puede traducir lo que se pregunta en lenguaje coloquial al simbólico, expresándolo mediante un cálculo **(procedimiento)**.

a) La primera Guerra Púnica duró 23 años. ¿En qué año terminó?

   Para contestar esta pregunta es necesario tomar el año de este evento, que es -264 y sumarle la cantidad de años que dura la guerra, que son 23. De esa forma, queda planteada la siguiente operación entre números enteros: $-264 + 23 = -241$. Quiere decir que la Guerra finalizó en el año 241 antes de Cristo **(procedimiento).**

b) Augusto murió 41 años después de lograr el título de Emperador, ¿en qué año murió?

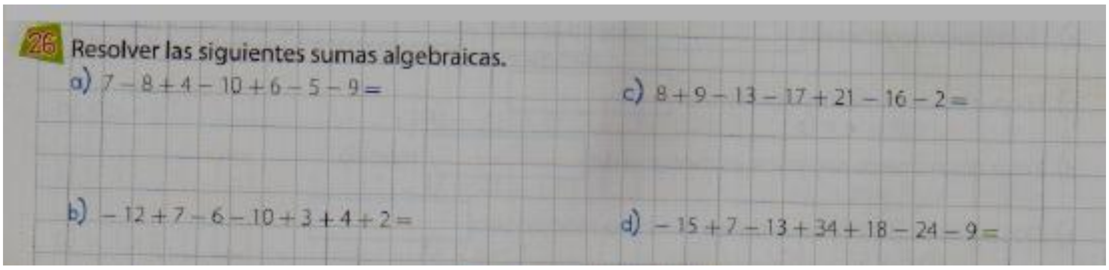
   Para responder este inciso hay que sumarle 41 al año en el cual Augusto toma el título de emperador, que es el -27. De esa forma, queda planteado el cálculo $-27 + 41 = 14$. Es decir que murió en el año 14 después de Cristo, ya que el resultado toma signo positivo **(procedimiento)**.

c) ¿Cuántos años pasaron desde que en Roma se estableció la República hasta que Grecia fue anexada como provincia romana?

Para esta pregunta, puede que serelacione la distancia de los años de los sucesos con la diferencia de los módulos de los años **(concepto)**, quedando planteado el cálculo $|-509| - |-146| = 509 - 146 = 363$. Transcurrieron 363 años entre un evento y otro **(procedimiento)**.

Proposiciones/propiedades para todos los ítems de sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 3



26 Resolver las siguientes sumas algebraicas.

a) $7 - 8 + 4 - 10 + 6 - 5 - 9 =$

b) $-12 + 7 - 6 - 10 + 3 + 4 + 2 =$

c) $8 + 9 - 13 - 17 + 21 - 16 - 2 =$

d) $-15 + 7 - 13 + 34 + 18 - 24 - 9 =$

Figura 31. Extraída de Effenberger (2013, p.14).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y solicita resolver sumas algebraicas.

Resolución:

Esta actividad sobre sumas algebraicas se puede resolver de varias formas. Una opción consiste en resolver las sumas y restas de a dos términos. Otra opción tiene que ver con sumar los números positivos y restarle la suma de los negativos **(procedimiento)**. Aquí entra en juego la propiedad conmutativa y asociativa de la suma **(propiedad aplicada como procedimiento)**.

Proposiciones/ propiedades para resolver las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

La resolución es la que sigue:

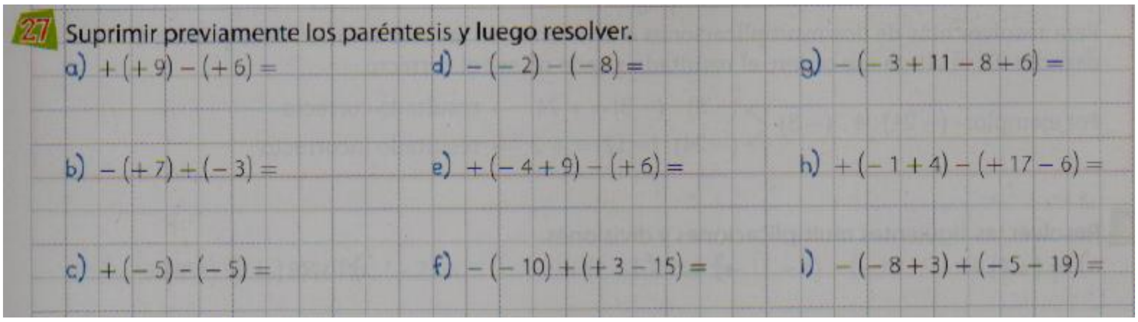
a) $7 - 8 + 4 - 10 + 6 - 5 - 9 = (7 + 4 + 6) - (8 + 10 + 5 + 9) = 17 - 32 = -15$

b) $-12 + 7 - 6 - 10 + 3 + 4 + 2 = (7 + 3 + 4 + 2) - (12 + 6 + 10) = 16 - 28 = -12$

c) $8 + 9 - 13 - 17 + 21 - 16 - 2 = (8 + 9 + 21) - (13 + 17 + 16 + 2) = 38 - 48 = -10$

d) $-15 + 7 - 13 + 34 + 18 - 24 - 9 = (7 + 34 + 18) - (15 + 13 + 24 + 9) = 59 - 61 = -2$

Situación problema 4



27 Suprimir previamente los paréntesis y luego resolver.

a) $+(+9)-(+6)=$

b) $-(+7)+(-3)=$

c) $+(-5)-(-5)=$

d) $-(-2)-(-8)=$

e) $+(-4+9)-(+6)=$

f) $-(-10)+(+3-15)=$

g) $-(-3+11-8+6)=$

h) $+(-1+4)-(+17-6)=$

i) $-(-8+3)+(-5-19)=$

Figura 32. Extraída de Effenberger (2013, p.15).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en suprimir paréntesis para luego resolver las sumas y restas entre números enteros.

Resolución:

Para resolver estas sumas y restas de números enteros**,** primero hay que suprimir los paréntesis y luego resolver la suma algebraica que queda planteada **(concepto: número opuesto y procedimiento)**. Para las sumas o restas se cumple que, si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto **(propiedad/proposición)**. En algunos casos, es posible aplicar la propiedad cancelativa **(procedimiento)**.

a) $+(+9) - (+6) = 9 - 6 = 3$

b) $-(+7) + (-3) = -7 - 3 = -10$

c) $+(-5) - (-5) = -5 + 5 = 0$

d) $-(-2) - (-8) = 2 + 8 = 10$

e) $+(-4 + 9) - (+6) = -4 + 9 - 6 = 5 - 6 = -1$

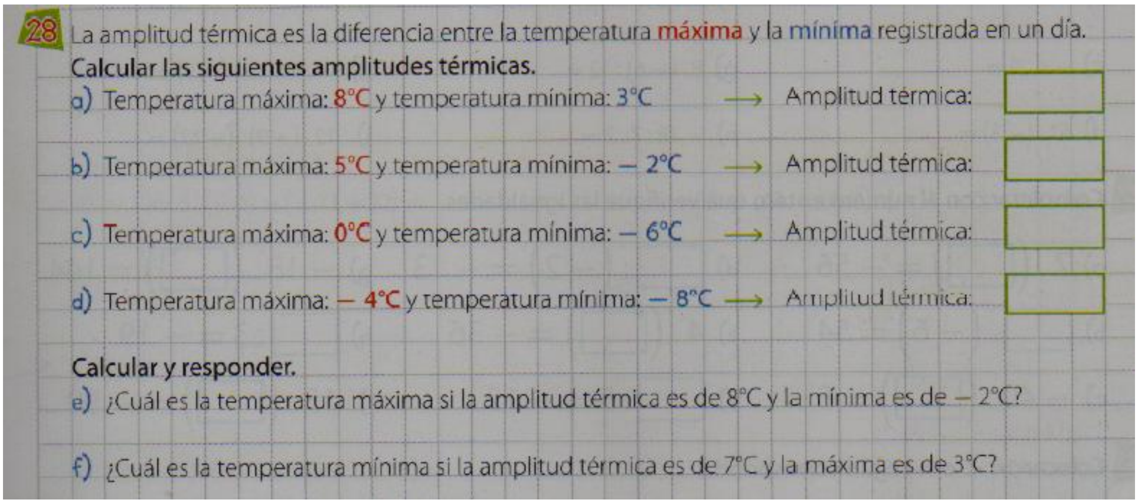
f) $-10 + (+3 - 15) = 10 + 3 - 15 = 13 - 15 = -2$

g) $-(-3 + 11 - 8 + 6) = 3 - 11 + 8 - 6 = -8 + 8 - 6 = -6$

h) $+(-1 + 4) - (+17 - 6) = -1 + 4 - 17 + 6 = 3 - 11 = -8$

i) $-(-8+3)+(-5-19)=8-3-5-19=5-5-19=-19$

Situación problema 5


28 La amplitud térmica es la diferencia entre la temperatura **máxima** y la **mínima** registrada en un día.

Calcular las siguientes amplitudes térmicas.

a) Temperatura máxima: 8°C y temperatura mínima: 3°C → Amplitud térmica:

b) Temperatura máxima: 5°C y temperatura mínima: − 2°C → Amplitud térmica:

c) Temperatura máxima: 0°C y temperatura mínima: − 6°C → Amplitud térmica:

d) Temperatura máxima: − 4°C y temperatura mínima: − 8°C → Amplitud térmica:

Calcular y responder.

e) ¿Cuál es la temperatura máxima si la amplitud térmica es de 8°C y la mínima es de − 2°C?

f) ¿Cuál es la temperatura mínima si la amplitud térmica es de 7°C y la máxima es de 3°C?

Figura 33. Extraída de Effenberger (2013, p.15).

Esta situación problema es de tipo extramatemática y consiste en calcular amplitudes térmicas y temperaturas máximas y mínimas.

Resolución:

Para resolverla, hay que recurrir al concepto de amplitud térmica que viene dado en el enunciado. A partir de comprender qué es la diferencia entre las temperaturas máximas y mínimas, se puede plantear el cálculo que permita responder las distintas preguntas **(procedimiento).**

a) La temperatura máxima es de 8°C y la mínima es de 3°C

El cálculo para la amplitud térmica es $8°\mathrm{C}-3°\mathrm{C}=5°\,\mathrm{C}$

b) La temperatura máxima es de 5°C y la mínima es de -2°C

El cálculo para la amplitud térmica es $5°\mathrm{C}-(-2°\mathrm{C})=5°\mathrm{C}+2°\mathrm{C}=7°\mathrm{C}$

c) La temperatura máxima es de 0°C y la temperatura mínima es de -6°C

El cálculo para la amplitud térmica en este caso es $0°\mathrm{C}-(-6°\mathrm{C})=6°\mathrm{C}$

d) La temperatura máxima es de -4°C y la mínima es de -8°C

El cálculo para la amplitud térmica es $-4°\mathrm{C} — 8°\mathrm{C}=-4°\mathrm{C}+8°\mathrm{C}=4°\mathrm{C}$

e) ¿Cuál es la temperatura máxima si la amplitud térmica es de 8°C y la mínima es de-2°C?

$x-(-2°\mathrm{C})=8°\mathrm{C}$

$x = 8°\mathrm{C} - 2°\mathrm{C}$

$x = 6°\mathrm{C}$

f) ¿Cuál es la temperatura mínima si la amplitud térmica es de 7°C y la máxima es de 3°C?

$3°\mathrm{C} - x = 7°\mathrm{C}$

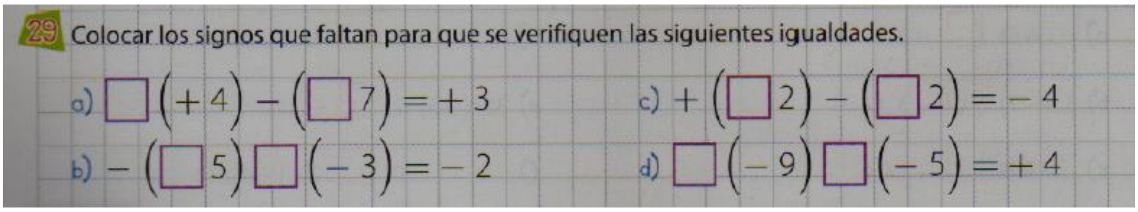
$3°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C} = x$

$-4°\mathrm{C} = x$

Como se puede observar, para calcular la amplitud térmica**,** se requiere plantear el cálculo a partir de los datos obtenidos de modo que quede una suma o resta de números enteros donde hay que aplicar supresión de paréntesis **(procedimiento)**.

Además, para los últimos dos incisos que involucran el cálculo de la temperatura máxima o mínima a partir de conocer la amplitud térmica, se podría plantearse una ecuación asignándole x al dato desconocido **(procedimiento)**.

Situación problema 6


29 Colocar los signos que faltan para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\square(+4) - (\square 7) = +3$

c) $+(\square 2) - (\square 2) = -4$

b) $-(\square 5) \square (-3) = -2$

d) $\square(-9) \square (-5) = +4$

Figura 34. Extraída de Effenberger (2013, p.15).

Esta situación problema es de carácter intramatemático y consiste en completar con los signos + ó – para que se verifique el resultado.

Resolución:

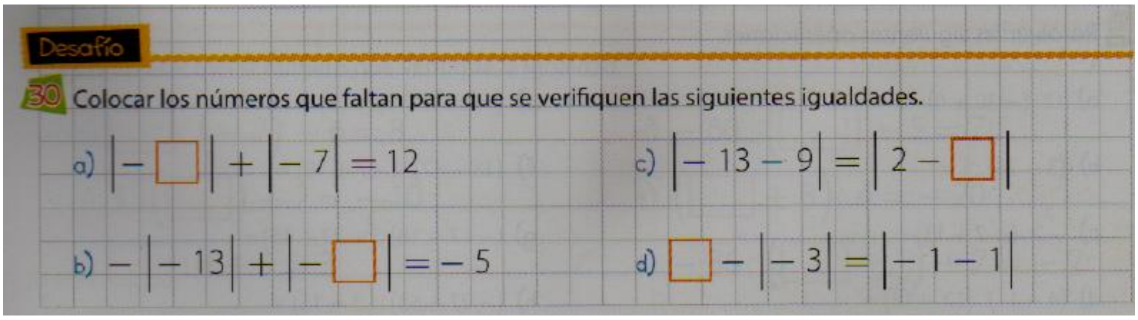
En el primer ítem, el resultado es positivo; eso quiere decir que el número que tiene mayor módulo en la operación debe ser positivo, que en este caso es 7. En vista de que antes del paréntesis que contiene a 7 hay un signo negativo, para que finalmente resulte positivo hay que completar con un signo “menos”. Entonces, se puede observar que para verificar el resultado, el número 4 tiene que ser antecedido por un“menos". Quedando de la siguiente manera: $-(+4) - (-7) = +3$ **(procedimiento)**.

En el segundo ítem, el resultado es negativo, por lo tanto, el número de mayor módulo, que es 5, tiene que resultar negativo luego de suprimir los paréntesis. De ahí que sea necesario completar con signo $+$, mientras que el signo que precede al segundo término debe ser$-$; de manera que quede $-(+5)-(-3)=-2$ **(procedimiento)**.

Para el tercer ítem, donde prevalece el resultado con signo negativo, en vista de que ambos términos tienen módulo 2, tienen que resultar negativos luego de la supresión de paréntesis. Queda de la siguiente manera: $+(-2)-(+2)=-4$ **(procedimiento)**.

En el último ítem , resultado es positivo y nuevamente hay que considerar que el número de mayor módulo tiene que resultar positivo luego de la supresión de paréntesis; por eso, el signo que precede a (-9) debe ser negativo, mientras que el signo que precede a (-5) debe ser positivo. Queda de la siguiente manera: $-(-9)+(-5)=+4$ **(procedimiento)**.

Situación problema 7 correspondiente al apartado Desafío.


Desafío

30 Colocar los números que faltan para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $|-\square|+|-7|=12$

b) $-|-13|+|-\square|=-5$

c) $|-13-9|=|2-\square|$

d) $\square-|-3|=|-1-1|$

Figura 35. Extraída de Effenberger (2013, p.15).

Estasituación problema es intramatemática y solicita completar con los números para verificar los resultados.

Resolución:

Para resolver este ejercicio de suma y resta de números enteros, hay que recordar qué es el módulo de un número **(concepto)** y recurrir a la supresión de paréntesis **(procedimiento)**.

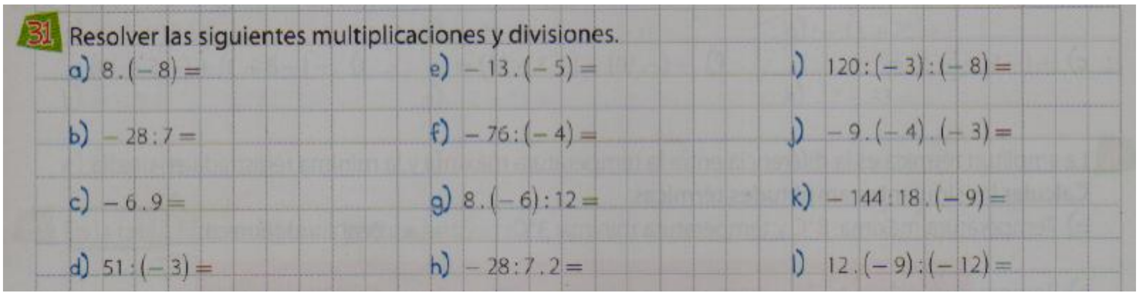
a) Para saber con qué número completar, primero hay que calcular el módulo de -7, que es 7. Para llegar a tener resultado 12, hay que completar el casillero con el número 5, ya que el módulo de -5 es 5. Queda de la siguiente manera: $|-5|+|-7|=12$ **(procedimiento)**.
b) Para saber con qué número completar, es conveniente calcular el módulo de -13, que es 13. En vista de que el módulo está precedido por un signo "menos", queda

finalmente -13. Por lo tanto, para obtener -5 de resultado, hay que completar con 8. Queda de la siguiente manera: $-|-13|+|-8|=-5$ **(procedimiento)**.

c) Este ítem es diferente a los anteriores, ya que en el segundo miembro de la igualdad se encuentra otro cálculo en vez del resultado directamente. En el inicio, hay que resolver el primer miembro de la igualdad $|-13-9|=|-22|=22$. Por lo tanto, el número con el que hay que completar es -20, ya que $|2-(-20)|=|22|=22$ **(procedimiento)**.

d) Para resolver este inciso hay que calcular el módulo del segundo miembro de la igualdad, es decir $|-1-1|=|-2|=2$. Por otra parte, en el segundo término del primer miembro de la igualdad es $-|-3|=-3$; la respuesta se obtiene al pensar qué número al que se le resta 3 da como resultado 2. La respuesta es 5 **(procedimiento)**.

Situación problema 8



31 Resolver las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) 8 . (− 8) =
b) − 28 : 7 =
c) − 6 . 9 =
d) 51 : (− 3) =
e) − 13 . (− 5) =
f) − 76 : (− 4) =
g) 8 . (− 6) : 12 =
h) − 28 : 7 . 2 =
i) 120 : (− 3) : (− 8) =
j) − 9 . (− 4) . (− 3) =
k) − 144 : 18 . (− 9) =
l) 12 . (− 9) : (− 12) =

Figura 36. Extraída de Effenberger (2013, p.16).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver productos y cocientes de números enteros.

Resolución:

Para resolverlos, es preciso aplicar la regla de los signos **(procedimiento)** para determinar si el resultado es un entero mayor o menor a cero. El producto o cociente entre un número entero positivo y un número entero negativo, permite obtener un resultado negativo; mientras que producto o cociente entre dos números enteros negativos, permite obtener un resultado positivo **(propiedad/ proposición)**.

a) $8.(-8)=-64$
b) $-28:7=-4$
c) $-6.9=-54$
d) $51:(-3)=-17$
e) $-13.(-5)=65$
f) $-76:(-4)=19$
g) $8.(-6):12=-48:12=-4$
h) $-28:7.2=-4.2=-8$

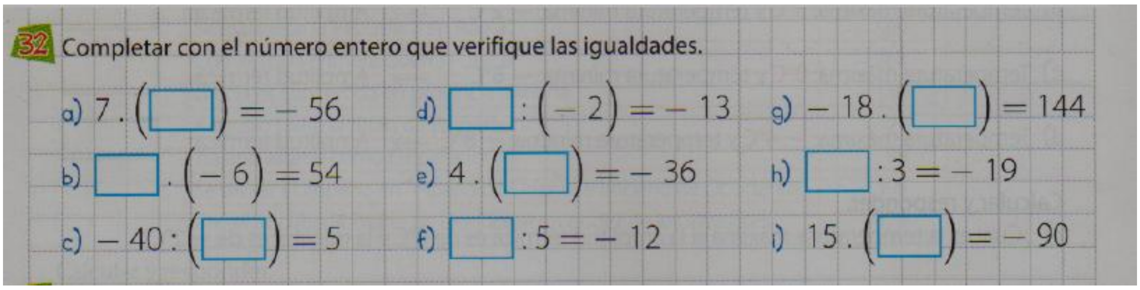
i) $120: (-3): (-8) = -40: (-8) = 5$

j) $-9. (-4). (-3) = 36. (-3) = -108$

k) $-144: 18. (-9) = -8. (-9) = 72$

l) $12. (-9): (-12) = -108: (-12) =$

Situación problema 9


32 Completar con el número entero que verifique las igualdades.

a) $7.(\boxed{}) = -56$

b) $\boxed{}.(-6) = 54$

c) $-40:(\boxed{}) = 5$

d) $\boxed{}:(-2) = -13$

e) $4.(\boxed{}) = -36$

f) $\boxed{}:5 = -12$

g) $-18.(\boxed{}) = 144$

h) $\boxed{}:3 = -19$

i) $15.(\boxed{}) = -90$

Figura 37. Extraída de Effenberger (2013, p.16).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en completar los casilleros con el número que corresponda para obtener los resultados indicados.

Resolución:

Resolver este ejercicio sobre productos y cocientes entre números enteros requiere utilizar la regla de los signos **(procedimiento)** para decidir si el número con el que se va a completar es mayor o menor a cero. Para el producto o cociente entre dos enteros se aplica: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo **(proposición)**.

a) $7. (-8) = -56$

b) $(-9). (-6) = 54$

c) $-40): (-8) = 5$

d) $26: (-2) = -13$

e) $4. (-9) = -36$

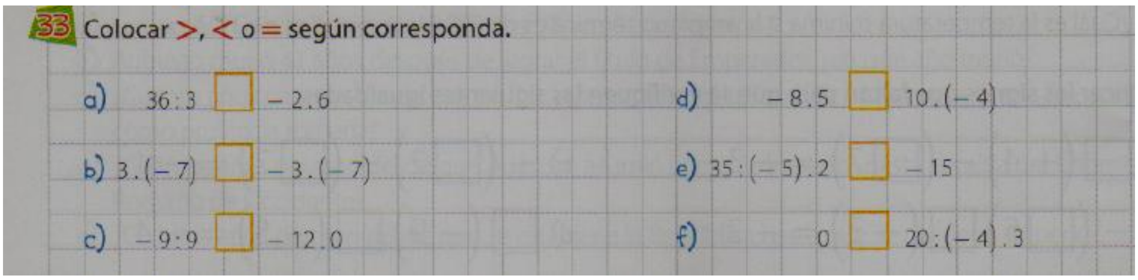
f) $(-60): 5 = -12$

g) $-18. (-8) = 144$

h) $(-57): 3 = -19$

i) $15. (-6) = -9$

Situación problema10


33 Colocar $>$, $<$ o $=$ según corresponda.

a) $36:3 \ \boxed{} \ -2.6$

b) $3.(-7) \ \boxed{} \ -3.(-7)$

c) $-9:9 \ \boxed{} \ -12.0$

d) $-8.5 \ \boxed{} \ 10.(-4)$

e) $35:(-5).2 \ \boxed{} \ -15$

f) $0 \ \boxed{} \ 20:(-4).3$

Figura 38. Extraída de Effenberger (2013, p.16).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en comparar resultados de productos y cocientes entre números enteros.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre productos y cocientes de números enteros es preciso aplicar la regla de los signos y establecer el orden de los resultados, ya que posteriormente hay que comparar los resultados obtenidos completando el recuadro con los símbolos de $>, <$ o $=$ **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números sonde distinto signo, el resultado será negativo.

a) $36: 6 > -2.6$

$6 > -12$

Un número positivo es mayor que un número negativo.

b) $3. (-7) < (-3). (-7)$

$-21 < 21$

Un número negativo es menor que un número positivo.

c) $-9: 9 < -12.0$

$-1 < 0$

Un número negativo es menor que cero.

d) $-8.5 = 10. (-4)$

$-40 = -40$

e) $35: (-5). 2 > -15$

$-7.2 > -15$

$-14 > -15$

Entre dos números negativos, el mayor es el que está más cerca de cero.

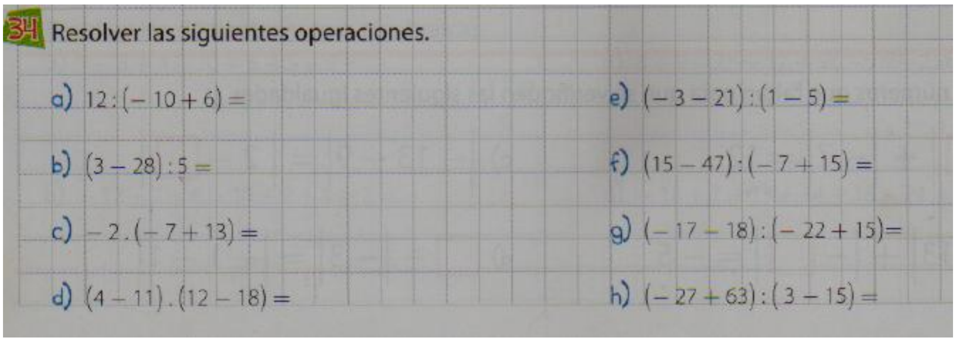
f) $0 > 20: (-4). 3$

$0 > -5.3$

$0 > -15$

El cero es mayor que cualquier número negativo.

Situación problema 11


34 Resolver las siguientes operaciones.

a) $12 : (-10 + 6) =$

b) $(3 - 28) : 5 =$

c) $-2 . (-7 + 13) =$

d) $(4 - 11) . (12 - 18) =$

e) $(-3 - 21) : (1 - 5) =$

f) $(15 - 47) : (-7 + 15) =$

g) $(-17 - 18) : (-22 + 15) =$

h) $(-27 + 63) : (3 - 15) =$

Figura 39. Extraída de Effenberger (2013, p.16).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en resolver cálculos combinados entre números enteros.

Resolución:

Para resolver este ejercicio sobre sumas, restas, productos y cocientes entre números enteros, es preciso resolver las operaciones que se encuentran en el interior del paréntesis y aplicar la regla de los signos **(procedimientos)**.

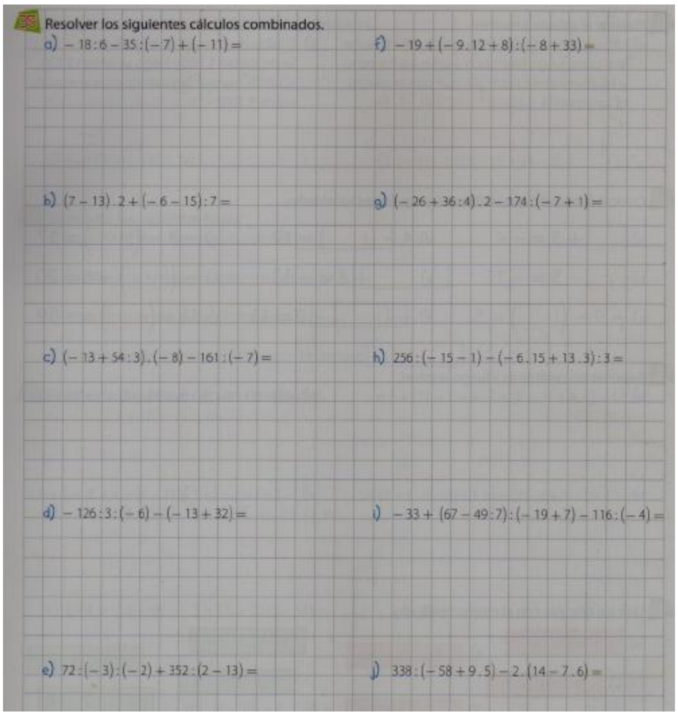
Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

a) $12: (-10 + 6) = 12: (-4) = -3$
b) $(3 - 28): 5 = -25: 5 = -5$
c) $-2. (-7 + 13) = -2.6 = -12$
d) $(4 - 11). (12 - 18) = -7. (-6) = 42$
e) $(-3 - 21): (1 - 5) = -24: (-4) = 6$
f) $(15 - 47): (-7 + 15) = -32: 8 = -4$
g) $(-17 - 18): (-22 + 15) = -35: (-7) = 5$
h) $(-27 + 63): (3 - 15) = 36: (-12) = -3$

Situación problema 12


Resolver los siguientes cálculos combinados.

a) $-18:6-35:(-7)+(-11)=$

b) $(7-13).2+(-6-15):7=$

c) $(-13+54:3).(-8)-161:(-7)=$

d) $-126:3:(-6)-(-13+32)=$

e) $72:(-3):(-2)+352:(2-13)=$

f) $-19+(-9.12+8):(-8+33)=$

g) $(-26+36:4).2-174:(-7+1)=$

h) $256:(-15-1)-(-6.15+13.3):3=$

i) $-33+(67-49:7):(-19+7)-116:(-4)=$

j) $338:(-58+9.5)-2.(14-7.6)=$

Figura 40. Extraída de Effenberger (2013, p.17).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en resolver operaciones combinadas con números enteros.

Resolución:

Para abordar esta situación problema sobre sumas, restas, productos y cocientes entre números enteros**,** es necesario suprimir paréntesis **(concepto: números opuestos y procedimiento)**, separar en términos y aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

a) $-18:6-35:(-7)+(-11)=-3+5-11=2-11=-9$

b) $(7-13).2+(-6-15):7=(-6).2+(-21):7=-12+(-3)=-12-3=-15$

c) $(-13+54:3).(-8)-161:(-7)=(-13+18).(-8)+23=5.(-8)+23=-40+23=-17$

d) $-126:3:(-6)-13+32=-42:(-6)-19=7-19=-12$

e) $72:(-3):(-2)+352:(2-13)=-24:(-2)+352:(-11)=12-32=-20$

f) $-19+(-9.12+8):(-8+33)=-19+(-108+8):25=-19+(-100):25=-19-4=-23$

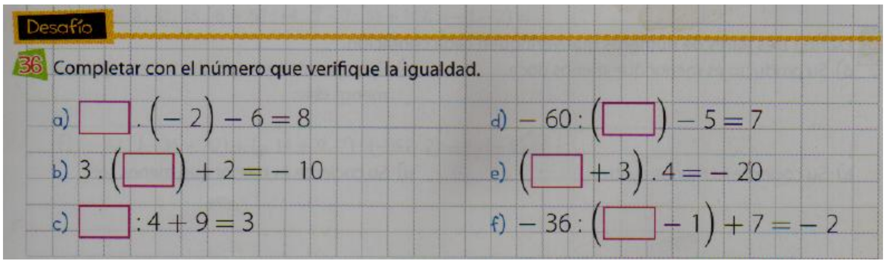
g) $(-26+36:4).2-174:(-7+1)=(-26+9).2-174:(-6)=-17.2+29=-34+29=-5$

h) $256:(-15-1)-6.15+13.3:3=256:(-16)-90+39:3=-16-(-51):3=-16+17=1$

i) $-33+(67-49:7):(-19+7)-116:(-4)=-33+(67-7):(-12)+29=-33+60:(-12)+29=-33-5+29=-38+29=-9$

j) $338:(-58+9.5)-2.(14-7.6)=338:(-58+45)-2(14-42)=338:(-13)-2.(-28)=-26+56=30$

Situación Problema 13 del apartado Desafío


Desafío

36 Completar con el número que verifique la igualdad.

a) $\square.\left(-2\right)-6=8$

b) $3.\left(\square\right)+2=-10$

c) $\square:4+9=3$

d) $-60:\left(\square\right)-5=7$

e) $\left(\square+3\right).4=-20$

f) $-36:\left(\square-1\right)+7=-2$

Figura 41. Extraída de Effenberger (2013, p.17).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en completar los recuadros con el número entero que verifique el resultado dado.

Resolución:

Para resolver este problema que involucra las cuatro operaciones básicas es preciso saber separar en términos y aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones:

-Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, el resultado será positivo; si los números sonde distinto signo, el resultado será negativo.

También es posible asignarle una letra al número que se desconoce utilizando ecuaciones como recurso para resolver **(procedimiento)**.

a) $-7.(-2) - 6 = 14 - 6 = 8$

b) $3.(-4) + 2 = -12 + 2 = -10$

c) $-24: 4 + 9 = -6 + 9 = 3$

d) $-60: (-5) - 5 = 12 - 5 = 7$

e) $(-8 + 3). 4 = -5.4 = -20$

f) $-36: (5 - 1) + 7 = -36: 4 + 7 = -9 + 7 = -2$

5.4.2.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 2

Situación problema ypropuestas	Conceptos		Propiedades		Procedimientos		Argumentos			Lenguaje		
	P	**E**	**P**	**E**	**P**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Situación problema 1 intramatemática: resolver sumas y restas de números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 2 extramatemática:calcular cuántos años pasaron de u suceso a otro.	*		*		*					*	*	*
Situación problema 3 intramatemática:resolver sumas algebraicas.	*		*		*						*	
Situación problema 4intramatemática:suprimir paréntesis resolver las sumas y restas	*		*		*						*	
Situación problema 5 extramatemática:calcular amplitudes térmicas y temperaturas máximas y mínimas	*	*	*		*					*	*	
Situación problema 6 intramatemático: completar con los signos + ó –.	*		*		*						*	
Situación problema 7 intramatemática: completar con los números para verificar los resultados	*		*		*						*	
Situación problema 8 intramatemática: resolver productos y cocientes de números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 9 intramatemática:completar los casilleros con el número que corresponda para obtener los resultados indicados.	*		*		*						*	
Situación problema 10 intramatemática: comparar resultados de productos y cocientes entre números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 11 intramatemática:resolver cálculos combinados entre números enteros.	*		*		*						*	

Situación problema 12 intramatemática:resolver operaciones combinadas con números enteros.	*		*		*							
Situación problema 13 intramatemática: completar con el número entero que verifique el resultado dado.	*		*		*						*	

P: Previos | Pp: Propiedades | S: Simbólico

E: Emergente | Pr: Procedimientos | G: Gráfico

C: Concepto | V: Verbal

Tabla 2: Elementos de primarios del Libro 2

5.4.2.3 Configuración epistémica del Libro 2

La siguiente configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes extraídos de la resolución de las situaciones problema que abordan las cuatro operaciones básicas con números enteros encontrados en el Capítulo 1 del libro de texto.

Se puede observar que 2 actividades (el 15,38% del total) son situaciones problemáticas en contextos extramatemáticos, mientras que las 11 restantes (84,62% del total) corresponden a situaciones en contextos intramatemáticos.

Respecto del lenguaje, 2 situaciones problema (el 15,38% del total) utilizan el lenguaje verbal, 1 situación problema (7,69% del total) utiliza lenguaje gráfico, y las 13 situaciones problema (el 100% del total) necesitan del lenguaje simbólico para resolver.

Resulta llamativo que en este libro de texto no se presentan actividades que requieran fundamentación o que los estudiantes argumenten sobre la validez de una respuesta.

Situaciones problema
Situaciones problemas intramatemáticas y extramatemáticas donde se requiere la resolución de operaciones básicas con números enteros.

Lenguaje

Verbal:

¿Cuál es la temperatura máxima si la amplitud térmica es de 8°C y la mínima es de -2°C?

Simbólico:

$-(-2)-(-8)=$

Gráfico:

Hechos Históricos	**Año**
Se establece la república en Roma	-509

REGLAS

Conceptos
Definición de número entero
Definición de números opuestos
Definición de valor absoluto

Propiedades y proposiciones
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El producto entre cero y cualquier otro número es cero.
El cociente entre cero y cualquier número (distinto de cero), da cero.
El producto de una cantidad impar de factores negativos, es negativo.
El producto de una cantidad par de factores negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y un número entero negativo, permite obtener un resultado negativo.
El producto entre dos factores enteros negativos permite obtener un resultado entero positivo.
Un número positivo es mayor que un número negativo.
Entre dos números negativos, es mayor el que está más cerca de cero o el que tiene menor valor absoluto.
El cero es mayor que cualquier entero negativo.

Procedimientos
Suma y resta de números enteros
Resolución de sumas algebraicas
Multiplicación y división de números enteros
Separación en términos
Supresión de paréntesis
Regla de los signos del producto y cociente de números enteros
Orden y comparación de números enteros
Traducción del lenguaje coloquial al simbólico
Aplicación de la propiedad cancelativa
Aplicación de la propiedad asociativa del producto

Argumentos
No se solicita ningún tipo de argumentación

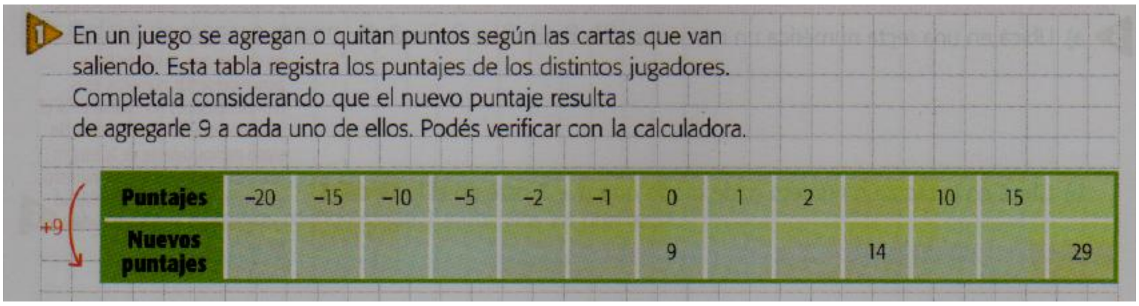
Figura 42: Configuración Epistémica del Libro 2

5.4.3 Descripción general del Libro 3

El libro *Matemática en secundaria 2* de Brotmain e Itzocovich (2011) es una propuesta que sigue los lineamientos de la didáctica de la matemática. Tiene por objetivo proponer actividades que permitan que el alumno las aborde desde diversas estrategias de resolución, fomentando la reflexión. Contiene apartados titulados “Una vuelta de tuerca entre todos” con disparadoras de debate. En algunos Capítulos se incluyen actividades que invitan a utilizar el programa de geometría dinámica Geogebra.

5.4.3.1 Identificación de objetos primarios del Libro 3

Situación problema 1


1 En un juego se agregan o quitan puntos según las cartas que van saliendo. Esta tabla registra los puntajes de los distintos jugadores. Completala considerando que el nuevo puntaje resulta de agregarle 9 a cada uno de ellos. Podés verificar con la calculadora.

+9

Puntajes	-20	-15	-10	-5	-2	-1	0	1	2		10	15	
Nuevos puntajes							9			14			29

Figura 43. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.26).

Es una situación problema extramatemática y consiste en completar una tabla con la puntuación de los integrantes que participan en un juego.

Resolución:

Para resolverla hay que sumar 9 a cada valor registrado en la tabla **(procedimiento)**.

Para el primer participante: $-20 + 9 = -11$

Para el segundo participante: $-15 + 9 = -6$

Para el tercer participante: $-10 + 9 = -1$

Para el cuarto participante: $-5 + 9 = 4$

Para el quinto participante: $-2 + 9 = 7$

Para el sexto participante: $-1 + 9 = 8$

Para el séptimo participante: $0 + 9 = 9$

Para el octavo participante: $1 + 9 = 10$

Para el noveno participante: $2 + 9 = 11$

Para el décimo participante: se conoce que su puntuación final es 14 y hay que completar con el puntaje inicial. Se tiene que pensar qué número aumentado en 9 da como resultado 14, o restarle 9 a 14; de esa forma se obtiene 5 **(procedimiento)**.

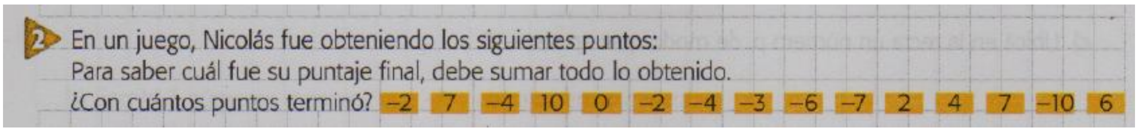
Para el décimo primer participante: $10 + 9 = 19$

Para el décimo segundo participante: $15 + 9 = 24$

Para el décimo tercer participante: se conoce que su puntuación final es 29 y hay que completar con el puntaje inicial. Se tiene que pensar qué número aumentado en 9 da como resultado 29, o restarle 9 a 29; de esa forma se obtiene 20 **(procedimiento)**.

En algunos ítems se aplica la siguiente **propiedad/proposición** referida a la suma o resta: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 2



2 En un juego, Nicolás fue obteniendo los siguientes puntos:
Para saber cuál fue su puntaje final, debe sumar todo lo obtenido.
¿Con cuántos puntos terminó? −2 7 −4 10 0 −2 −4 −3 −6 −7 2 4 7 −10 6

Figura 44.Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.26).

Esta situación problemaes extramatemática y consiste en calcular el puntaje que recibe una persona al participar en un juego.

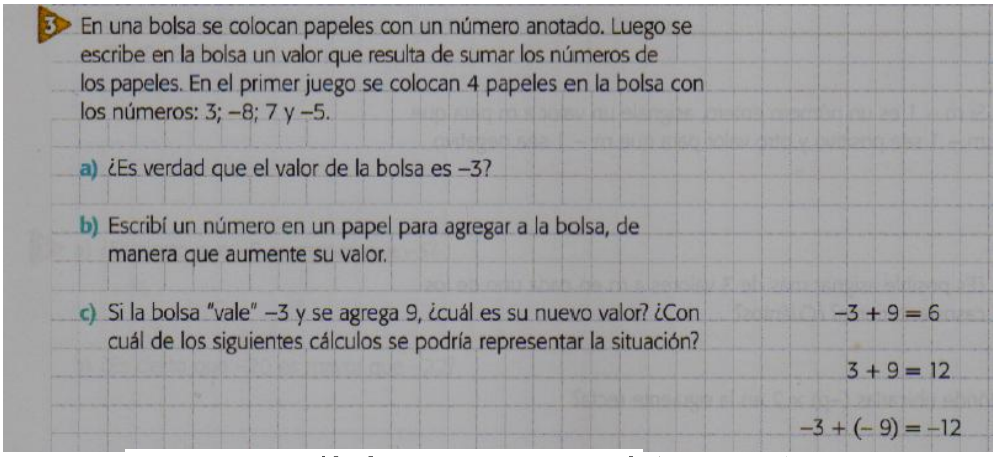
Resolución:

Para resolver hay que plantear la suma de todos los términos obteniendo una suma algebraica. Se puede sumar uno a uno los puntajes, o también sumar los puntos a favor y luego restar los puntos que están en contra. También, se pueden cancelar los puntajes opuestos **(procedimiento).**

$$-2 + 7 - 4 + 10 + 0 - 2 - 4 - 3 - 6 - 7 + 2 + 4 + 7 - 10 + 6 = -2$$

Propiedades/proposiciones relacionadas a la suma o resta para este ejercicio: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 3



3 En una bolsa se colocan papeles con un número anotado. Luego se escribe en la bolsa un valor que resulta de sumar los números de los papeles. En el primer juego se colocan 4 papeles en la bolsa con los números: 3; –8; 7 y –5.

a) ¿Es verdad que el valor de la bolsa es –3?

b) Escribí un número en un papel para agregar a la bolsa, de manera que aumente su valor.

c) Si la bolsa "vale" –3 y se agrega 9, ¿cuál es su nuevo valor? ¿Con cuál de los siguientes cálculos se podría representar la situación?

$-3 + 9 = 6$

$3 + 9 = 12$

$-3 + (-9) = -12$

Figura 45. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.26).

Esta situación problema es extramatemática y consiste en responder preguntas a partir de la consigna de un juego.

Resolución:

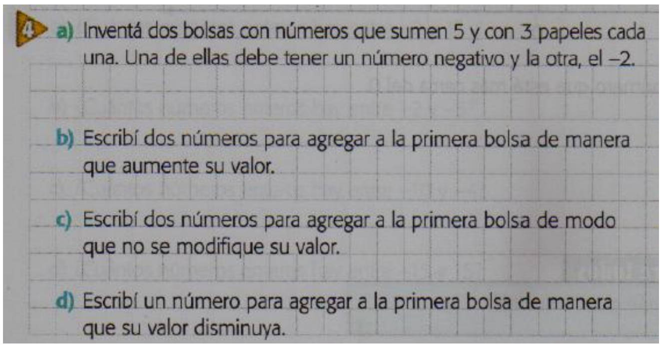
a) Para responder la pregunta es preciso sumar todos los números enteros, quedando $3 - 8 + 7 - 5 = -3$, por lo tanto, la respuesta es afirmativa **(procedimiento)**.

b) En esta situación problema, los alumnos pueden proponer distintas respuestas teniendo en cuenta que es acertado proponer cualquier número igual o mayor a 1 **(procedimiento)**.

c) Se plantea $-3 + 9 = 6$, siendo correcto el primer planteo **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones relacionadas a la suma o resta para este ejercicio: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 4



a) Inventá dos bolsas con números que sumen 5 y con 3 papeles cada una. Una de ellas debe tener un número negativo y la otra, el −2.

b) Escribí dos números para agregar a la primera bolsa de manera que aumente su valor.

c) Escribí dos números para agregar a la primera bolsa de modo que no se modifique su valor.

d) Escribí un número para agregar a la primera bolsa de manera que su valor disminuya.

Figura 46. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.26).

Esta situación problema es extramatemática porque corresponde al contexto de un juego y consiste en responder preguntas sobre el valor positivo y negativo de bolsas.

Resolución

Estos enunciados tienen que ver con la suma y resta de números enteros.

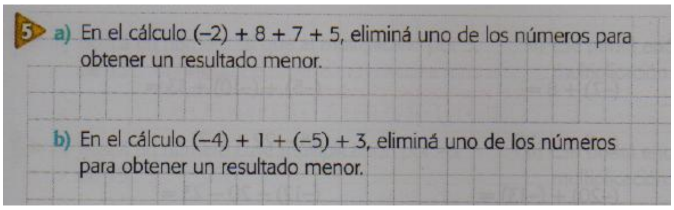
a) Hay que proponer dos cálculos que sumen 5 y que tengan tres términos cada uno. Para uno de ellos, se indica que un término debe ser negativo. Hay infinitas respuestas correctas. Una propuesta podría ser $2 + 4 - 1 = 5$. Para el segundo cálculo, se indica que uno de los términos debe ser -2. Una propuesta para este caso podría ser $2 + 5 - 2 = 5$. Aquí también se aceptan varias respuestas posibles **(procedimiento)**.

b) Para la primera de las respuestas anteriores $2 + 4 - 1 = 5$, se pide agregar dos números que aumenten la respuesta. Se puede concluir que, agregando dos números positivos cualesquiera, se aumenta el valor del resultado.

c) Para la respuesta de la primera bolsa, se pide agregar dos números de tal forma que no se modifique su valor. Aquí resulta necesario recurrir a dos números opuestos cualesquiera (**concepto)**.

d) Para la respuesta de la primera bolsa, se pide agregar un número que disminuya su valor. Aquí se pretende establecer la posibilidad de agregar cualquier número negativo.

Situación problema 5


5 a) En el cálculo (–2) + 8 + 7 + 5, eliminá uno de los números para obtener un resultado menor.

b) En el cálculo (–4) + 1 + (–5) + 3, eliminá uno de los números para obtener un resultado menor.

Figura 47. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.27).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en retirar uno de los términos para que el cálculo satisfaga cierta condición.

Resolución

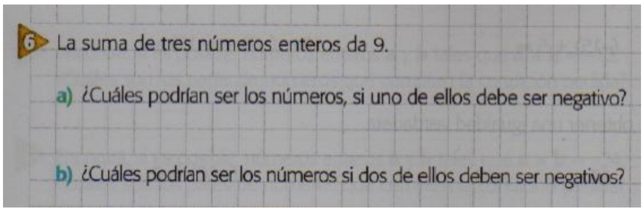
Ambos incisos involucran sumas y restas de números enteros y, para resolverlo, hay que aplicar supresión de paréntesis y conocer el orden de los enteros, ya que requiere comparar resultados para identificar cuál es mayor o menor **(procedimiento)**.

Para el primer inciso, que contiene el cálculo $(-2) + 8 + 7 + 5 = 18$, se puede retirar cualquiera de los términos positivos a fin de obtener un resultado menor. Si se retira el último término, queda $(-2) + 8 + 7 = 13$; si se retira el tercer término, queda: $(-2) + 8 + 5 = 11$; y si se retira el segundo término, se obtiene: $(-2) + 7 + 8 = 10$ **(procedimiento)**.

Para el segundo inciso, se da el cálculo $(-4) + 1 + (-5) + 3 = -5$ y se pide quitar uno de los términos para tener un resultado menor. Se pueden eliminar cualquiera de los dos términos positivos. Si se quita el segundo término, queda $(-4) + (-5) + 3 = -6$; y si se elige el último término, se obtiene $(-4) + 1 + (-5) = -3 - 5 = -8$ **(procedimiento)**.

Las **propiedades/proposiciones** relacionadas a la suma o resta para este ejercicio: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 6


6 La suma de tres números enteros da 9.

a) ¿Cuáles podrían ser los números, si uno de ellos debe ser negativo?

b) ¿Cuáles podrían ser los números si dos de ellos deben ser negativos?

Figura 48. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.27).

Esta situación problemase presenta en contexto intramatemático y requiere proponer un cálculo que satisfaga ciertas condiciones.

Resolución:

Esta actividad sobre sumas y restas de enteros tiene infinitas soluciones.

Para resolver el primer inciso se tiene que suprimir paréntesis **(procedimiento)** y también se puede aplicar la propiedad cancelativa **(propiedad utilizada como procedimiento)** proponiendo un cálculo del tipo $9 + (-9) + 9 = 9$. Para el segundo inciso, se puede proponer $-1 + (-1) + 11 = 9$.

Propiedades/proposiciones relacionadas a la suma o resta para este ejercicio: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 7

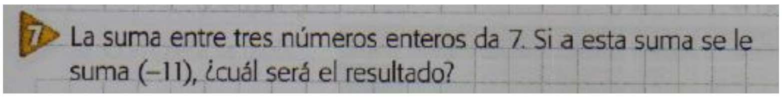

7 La suma entre tres números enteros da 7. Si a esta suma se le suma (–11), ¿cuál será el resultado?

Figura 49. Extraída de Broitmanze Itzcovich (2011, p.27).

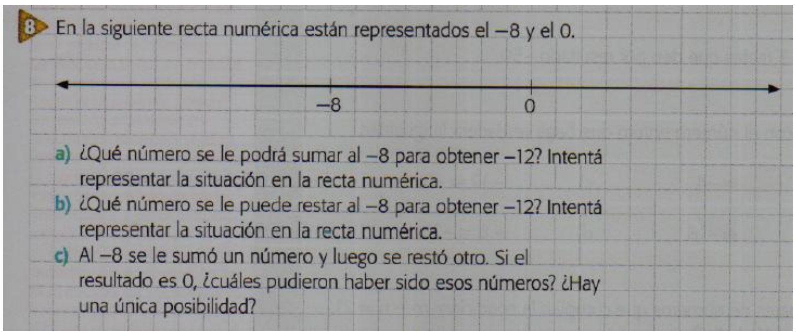
Es una situación problema es intramatemáticay propone sumar números enteros.

Resolución:

Para resolver esta actividad de suma y resta de enteros, se debe hacer el cálculo de $7 + (-11) = 7 - 11 = 4$, ya que la respuesta es independiente de cuáles sean los tres números cuya suma es 7. Es preciso suprimir paréntesis **(procedimiento)**.

Propiedad/proposición relacionada con la suma o resta para este ejercicio: si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación Problema 8



8 En la siguiente recta numérica están representados el −8 y el 0.

a) ¿Qué número se le podrá sumar al −8 para obtener −12? Intentá representar la situación en la recta numérica.

b) ¿Qué número se le puede restar al −8 para obtener −12? Intentá representar la situación en la recta numérica.

c) Al −8 se le sumó un número y luego se restó otro. Si el resultado es 0, ¿cuáles pudieron haber sido esos números? ¿Hay una única posibilidad?

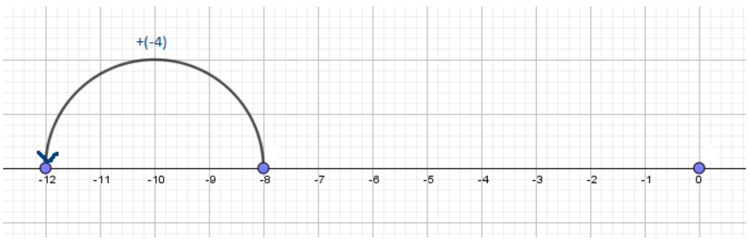
Figura 50. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.27).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en responder qué número hay que sumar o restar para obtener otro número dado e interpretar esa suma o resta en la recta numérica.

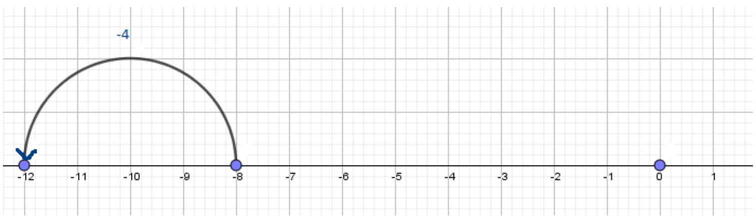
Resolución:

Este ejercicio trata sobre sumas y restas de enteros. Respecto del primer inciso, es preciso sumar un número negativo, es decir, sumarle (-4) a -8 para obtener -12 para que quede $-8+(-4)=-12$. También, es necesaria la supresión de paréntesis **(procedimiento)**.

La representación en la recta numérica es la siguiente:



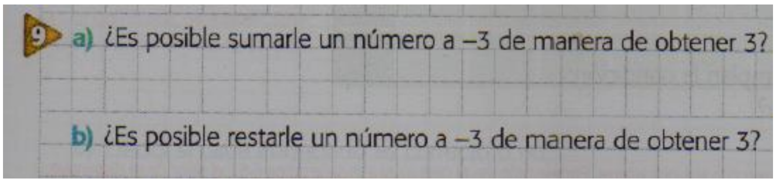
Respecto del segundo inciso, es necesario restar -4 a -8 para obtener -12. En tal caso, queda $-8-4=-12$. Se observa que la representación gráfica es la misma que en consigna anterior, ya que sumar un número negativo es lo mismo que restar ese número.



Respecto del tercer inciso, hay infinitas respuestas. Una de ellas podría ser sumarle -4 y luego restarle -12. Es decir,$-8+(-4)-(-12)-8-4+12=0$.

Propiedades/proposiciones relacionadas a la suma o resta para este ejercicio: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto. También, sumar un número es igual que restar su opuesto.

Situación problema 9



9 a) ¿Es posible sumarle un número a –3 de manera de obtener 3?

b) ¿Es posible restarle un número a –3 de manera de obtener 3?

Figura 51. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.27).

Estasituación problema esintramatemática y postula preguntas acerca de si es posible sumar o restar a cierto número para obtener un resultado dado.

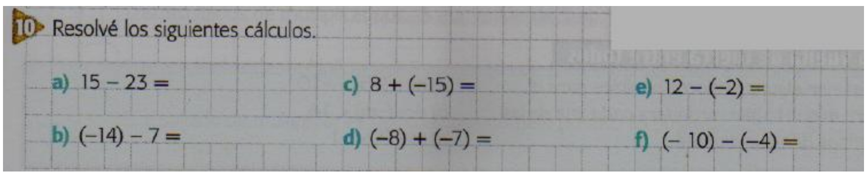
Resolución:

Esta consigna trata sobre sumas y restas de enteros. Respecto del primer inciso, es posible sumarle 6 a -3 para obtener3, ya que $-3+6=3$. Respecto del segundo inciso, es posible restarle -6 a -3 para obtener 3, ya que $-3-(-6)=3$.

En estos puntos se puede recuperar el concepto de número opuesto **(concepto),** y la supresión de paréntesis **(procedimiento)**, ya que $-(-6)=6$.

Propiedad/proposición para las sumas o restas: si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema 10



10 Resolvé los siguientes cálculos.

a) 15 – 23 =
c) 8 + (–15) =
e) 12 – (–2) =
b) (–14) – 7 =
d) (–8) + (–7) =
f) (– 10) – (–4) =

Figura 52. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.27).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver sumas y restas de números enteros.

Resolución:

Para resolver estas sumas y restas entre números enteros se requiere aplicar extracción de paréntesis **(procedimiento)** y respecto de los **conceptos**, el de números opuestos.

Propiedades/ proposiciones en las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $15 - 23 = -8$

b) $(-14) - 7 = -14 - 7 = -21$

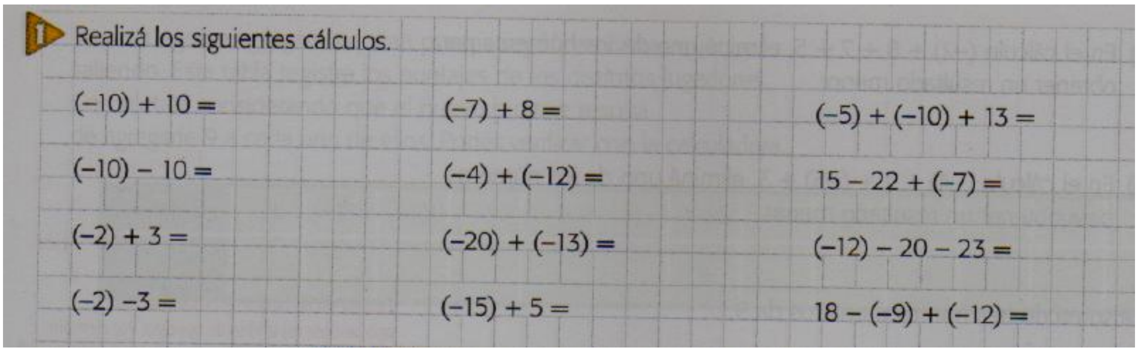
c) $8 + (-15) = 8 - 15 = -7$

d) $(-8) + (-7) = -8 - 7 = -15$

e) $12—2 = 12 + 2 = 14$

f) $(-10) - (-4) = -10 + 4 =$

Situación Problema 11



1 Realizá los siguientes cálculos.

(–10) + 10 =

(–10) – 10 =

(–2) + 3 =

(–2) –3 =

(–7) + 8 =

(–4) + (–12) =

(–20) + (–13) =

(–15) + 5 =

(–5) + (–10) + 13 =

15 – 22 + (–7) =

(–12) – 20 – 23 =

18 – (–9) + (–12) =

Figura 53. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.28).

Esta situación problema es de carácter intramatemático y consiste en resolver sumas y restas entre enteros.

Resolución:

Para realizar estas sumas y restas entre enteros, se deben suprimir paréntesis y, en algunos casos, es posible aplicar la propiedad cancelativa **(procedimiento)**.

Propiedades/proposicionesen las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

$(-10) + 10 = -10 + 10 = 0$

$(-10) - 10 = -10 - 10 = -20$

$(-2)+3=-2+3=1$

$(-2)-3=-2-3=-5$

$(-7)+8=-7+8=1$

$(-4)+(-12)=-4-12=-16$

$(-20)+(-13)=-20-13=-33$

$(-15)+5=-10$

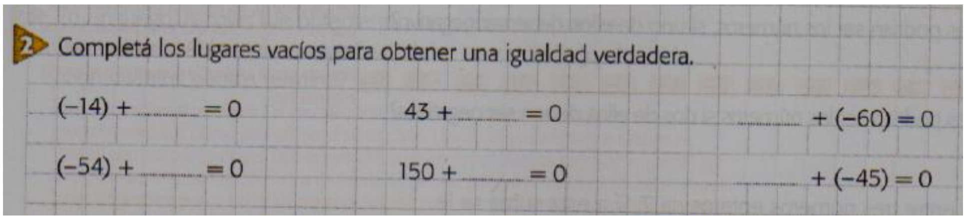
$(-5)+(-10)+13=-5-10+13=-2$

$15-22+(-7)=15-22-7=-14$

$(-12)-20-23=-12-20-23=-55$

$18—9+(-12)=18+9-12=15$

Situación problema 12


2 Completá los lugares vacíos para obtener una igualdad verdadera.

(–14) + ... = 0 43 + ... = 0 .... + (–60) = 0

(–54) + ... = 0 150 + ... = 0 .... + (–45) = 0

Figura 54. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.28).

Esta situación problema es de carácter intramatemático y consiste en completar con el número entero que corresponda para que el resultado se anule.

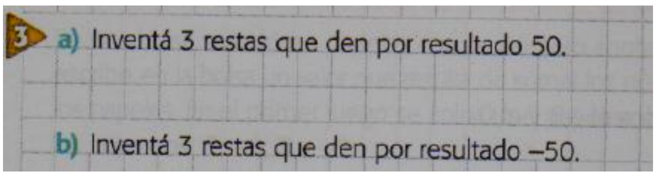
Resolución:

Para resolver este ejercicio sobre números opuestos**,** hay que suprimir paréntesis **(procedimiento)** y completar con el número que permita aplicar la propiedad cancelativa **(propiedad utilizada como procedimiento)**, es decir, anular el resultado. La suma entre un número y su opuesto es cero **(propiedad/proposición).**

$(-14)+\mathbf{14}=0$ $43+(\mathbf{-43})=0$ $\mathbf{60}+(-60)=0$

$(-54)+\mathbf{54}=0$ $150+(\mathbf{-150})=0$ $\mathbf{45}+(-45)=0$

Situación problema 13


3 a) Inventá 3 restas que den por resultado 50.

b) Inventá 3 restas que den por resultado –50.

Figura 55. Extraída de Broitman e Itzcovich(2011, p.28).

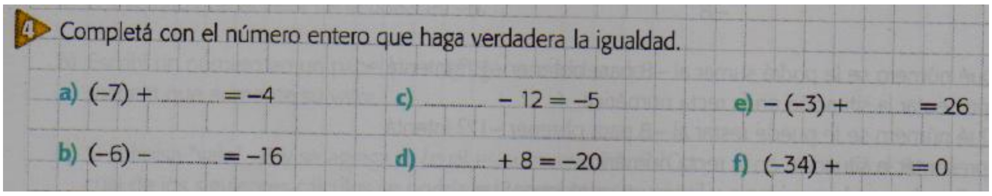
Esta situación problema es de índole intramatemático y trata de proponer restas que satisfagan cierto resultado.

Resolución:

Esta actividad sobre sumas y restas de enteros tiene infinitas propuestas posibles. Para el primer inciso, una de ellas podría ser $-(-100)-20-30=50$. Para el segundo inciso se puede proponer $-10-20-20=-50$. En este tipo de ejercicios, se puede aplicar lo que se sabe respecto de suprimir paréntesis **(procedimiento)**. Respecto de los **conceptos**, se utiliza el de números opuestos.

Propiedades/proposiciones en las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo.

Situación problema 14


4 Completá con el número entero que haga verdadera la igualdad.

a) $(-7)+$ .... $=-4$
b) $(-6)-$ .... $=-16$
c) .... $-12=-5$
d) .... $+8=-20$
e) $-(-3)+$ .... $=26$
f) $(-34)+$ .... $=0$

Figura 56. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.28).

Esta situación problema es de carácter intramatemático y consiste en completar con el número entero que corresponda para obtener el resultado indicado.

Resolución:

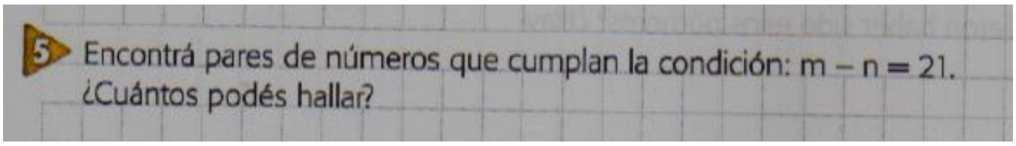
Esta actividad sobre sumas y restas de enteros requiere aplicar supresión de paréntesis **(procedimiento)** para luego evaluar qué número hay que anotar para que la operación verifique el resultado. En el último ejercicio, hay que anotar el número opuesto al primer término para que el resultado se anule **(concepto y propiedad cancelativa utilizada como procedimiento)**. En ese mismo ítem se cumple que la suma entre un número y su opuesto es cero **(propiedad/proposición)**.

Propiedad/proposición para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $(-7)+\mathbf{3}=-4$ b) $(-6)-\mathbf{10}=-16$ c) $\mathbf{7}-12=-5$

d) $\mathbf{-28} + 8 = -20$ e) $-(-3) + \mathbf{20} = 26$ f) $(-34) + \mathbf{34} =$

Situación problema 15



5 Encontrá pares de números que cumplan la condición: m − n = 21. ¿Cuántos podés hallar?

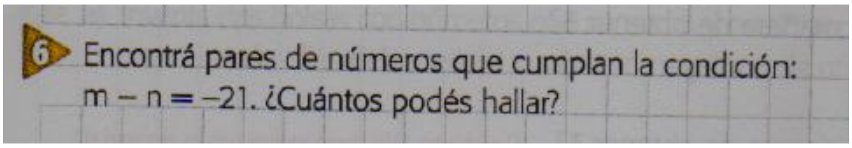
Figura 57. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.28).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en proponer dos números enteros cuya diferencia sea 21.

Resolución:

Esta actividad sobre sumas y restas de enteros tiene infinitas soluciones. Una propuesta podría ser $m = 22$ y $n = 1$ porque $22 - 1 = 21$. Otra posibilidad es $m = 0$ y $n = -21$ porque $0 - (-21) = 21$. Se pueden proponer todos los pares de números que difieran en 21 unidades uno del otro **(procedimiento)**.

Situación problema 16



6 Encontrá pares de números que cumplan la condición: m − n = −21. ¿Cuántos podés hallar?

Figura 58. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.28).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en proponer dos números enteros cuya diferencia sea -21.

Resolución:

Esta actividad sobre sumas y restas de enteros tiene infinitas soluciones. Una propuesta podría ser $m = -22$ y $n = -1$ porque $-22 - (-1) = -21$. Otra posibilidad es $m = 0$ y $n = 21$ porque $0 - 21 = -21$. Se pueden proponer todos los pares de números que difieran en 21 unidades uno del otro **(procedimiento)**.

Situación problema 17

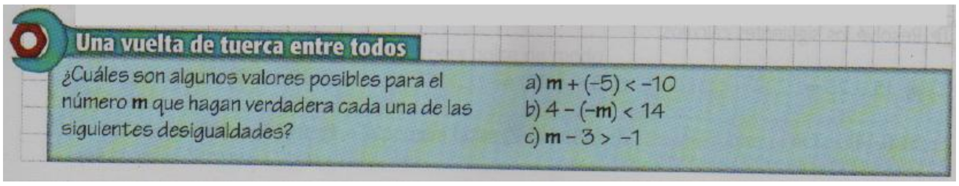


Figura59.Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.28).

Es una situación problemaes intramatemática y consiste en proponer algunos valores para que m satisfaga la desigualdad.

Resolución:

Para resolver esta actividad de suma y resta de enteros**,** se puede probar con algunos valores y analizar la relación de orden que se establece entre los datos disponibles; o también se puede resolver la inecuación **(procedimiento y concepto: desigualdades)**.

Situación problema 18

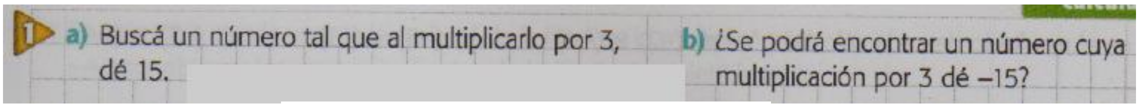


Figura 60.Extraída de Broitmane Itcovich (2011, p.29).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en proponer un número que al multiplicarlo por 3 permita obtener un resultado dado.

Resolución:

Esta actividad tiene que ver con resolver productos entre enteros**.** En el primer inciso hay que responder;5, ya que $5.3 = 15$. Para el segundo inciso, la respuesta es -5 ya que $(-5).3 = -15$. Se puede llegar a estas respuestas a partir de la aplicación de la regla de los signos o las tablas de multiplicación. También, puede abordar la idea de multiplicación a partir de la suma reiterada.

Procedimiento/proposición:el producto entre factores de distinto signo, es negativo**.**

Situación Problema 19

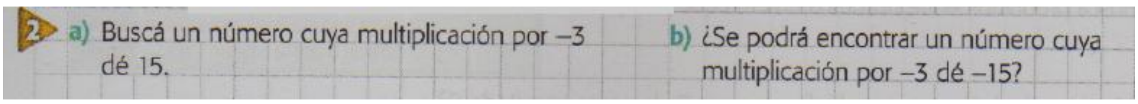


Figura 61. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.29).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en proponer un número que, al multiplicarlo por -3, permita obtener cierto resultado.

Resolución:

Esta actividadrequiere resolver productos entre enteros**.** Para el primer inciso, hay que responder:5, ya que $5.(-3) = -15$. Para el segundo inciso, la respuesta es 5, ya que $(-3).5 = -15$. Se puede llegar a estas respuestas a partir de la regla de los signos o las tablas de multiplicación. También puede abordar la idea de multiplicación a partir de la suma reiterada. **Procedimiento/ proposición:** el producto entre factores de distinto signo, es negativo**.**

Situación problema 20

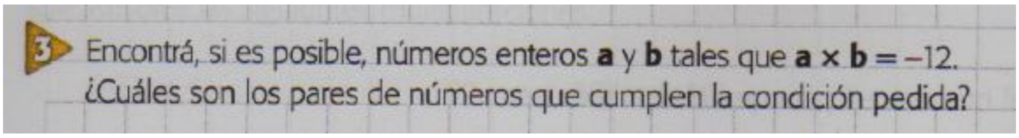

3 Encontrá, si es posible, números enteros **a** y **b** tales que **a × b** = −12. ¿Cuáles son los pares de números que cumplen la condición pedida?

Figura 62. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.29).

Es una situación problema es intramatemática y que requiere proponer dos factores cuyo producto sea -12.

Resolución:

La respuesta a esta consigna sobre producto de números enteros es bastante amplia. Se debe proponer que uno de los factores sea positivo y el otro negativo para que, por la regla de los signos, el resultado sea negativo **(procedimiento/ proposición)**. En ciertos casos, se pueden encontrar posibles respuestas a partir de la escritura de los divisores de -12; en otros, se pueden pensar en la propiedad conmutativa del producto **(propiedad)**.

Si $a = -2$ y $b = 6$, entonces $(-2).6 = -12$

Si $a = 2$ y $b = -6$, entonces $2.(-6) = -12$

Si $a = -6$ y $b = 2$, entonces $(-6).2 = -12$

Si $a = 6$ y $b = -2$, entonces $6.(-2) = -12$

Si $a = -4$ y $b = 3$, entonces $(-4).3 = -12$

Si $a = 4$ y $b = -3$, entonces $4.(-3) = -12$

Si $a = -3$ y $b = 4$, entonces $(-3).4 = -12$

Si $a = 3$ y $b = -4$, entonces $3.(-4) = -12$

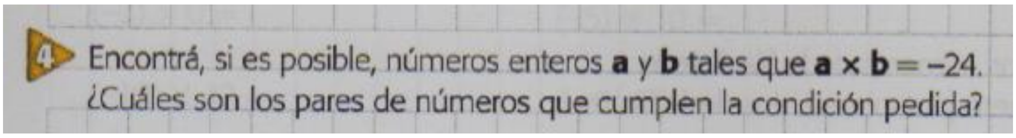
Si $a = -12$ y $b = 1$, entonces $(-12).1 = -12$

Si $a = 12$ y $b = -1$, entonces $12.(-1) = -12$

Si $a = -1$ y $b = 12$, entonces $(-1).12 = -12$

Si $a = 1$ y $b = -12$, entonces $1.(-12) = -12$

Situación problema 21



4 Encontrá, si es posible, números enteros **a** y **b** tales que **a** × **b** = −24. ¿Cuáles son los pares de números que cumplen la condición pedida?

Figura 63. Extraída de Broitman e Itzcovich(2011, p.29).

Esta situación problemaes intramatemática y requiere proponer dos factores cuyo producto sea -24.

Resolución:

La respuesta a esta consigna sobre producto de números enteros, es bastante amplia. Se puede proponer que uno se los factores sea positivo y el otro negativo para que, por la regla de los signos, el resultado sea negativo **(procedimiento/ proposición)**. Otra fuente de posibles respuestas tiene que ver con escribir los divisores de -24 y pensar en la propiedad conmutativa del producto **(propiedad utilizada como procedimiento)**.

Si $a=-1$ y $b=24$, entonces $(-1).24=-24$

Si $a=1$ y $b=-24$, entonces $1.(-24)=-24$

Si $a=-24$ y $b=1$, entonces $(-24).1=-24$

Si $a=24$ y $b=-1$, entonces $24.(-1)=-24$

Si $a=-2$ y $b=12$, entonces $(-2).12=-24$

Si $a=2$ y $b=-12$, entonces $2.(-12)=-24$

Si $a=-12$ y $b=2$, entonces $(-12).2=-24$

Si $a=12$ y $b=-2$, entonces $12.(-2)=-24$

Si $a=-6$ y $b=4$, entonces $(-6).4=-24$

Si $a=6$ y $b=-4$, entonces $6.(-4)=-24$

Si $a=-4$ y $b=6$, entonces $(-4).6=-24$

Si $a=4$ y $b=-6$, entonces $4.(-6)=-24$

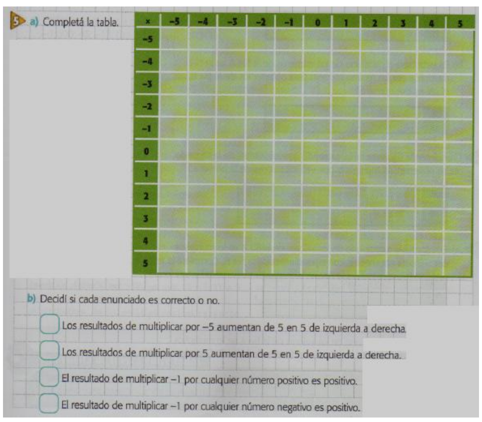
Si $a=-3$ y $b=8$, entonces $(-3).8=-24$

Si $a=3$ y $b=-8$, entonces $3.(-8)=-24$

Si $a=-8$ y $b=3$, entonces $(-8).3=-24$

Si $a=8$ y $b=-3$, entonces $8.(-3)=-24$

Situación problema 22



5 a) Completá la tabla.

×	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
−5											
−4											
−3											
−2											
−1											
0											
1											
2											
3											
4											
5											

b) Decidí si cada enunciado es correcto o no.

- Los resultados de multiplicar por −5 aumentan de 5 en 5 de izquierda a derecha.
- Los resultados de multiplicar por 5 aumentan de 5 en 5 de izquierda a derecha.
- El resultado de multiplicar −1 por cualquier número positivo es positivo.
- El resultado de multiplicar −1 por cualquier número negativo es positivo.

Figura 64.Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.29).

Esta situación problema es intramatemática y propone completar la tabla con los resultados de la multiplicación de factores que van desde -5 a 5. A partir de ello, se tiene que decidir si las afirmaciones son ciertas o no.

Resolución:

Para resolver primera consigna que trata de productos y cocientes, hay que anotar los resultados de las multiplicaciones y decidir si es resultado es un entero positivo o negativo utilizando la regla de los signos **(procedimiento)**.

Para la sección en donde hay que decidir si las afirmaciones son ciertas o no, se obtiene:

- Los resultados de multiplicar por -5 aumentan de 5 en 5 de izquierda a derecha.

  Esta afirmación no es correcta. Los resultados disminuyen, ya que los números negativos y el cero son menores que los positivos **(procedimiento/ proposición)**.

  Es necesario tener presente el orden de los números enteros y la comparación entre los mismos **(procedimiento)**.

- Los resultados de multiplicar por 5 aumentan de 5 en 5 de izquierda a derecha.

  La afirmación es correcta. Los resultados aumentan, ya que un número positivo es mayor que un número negativo **(procedimiento/ proposición)**.

- El resultado de multiplicar -1 por cualquier número positivo, es positivo.

  La afirmación no es correcta. La regla de signos indica que el producto entre un número negativo y uno positivo, da como resultado un número entero negativo **(procedimiento/ proposición)**.

- El resultado de multiplicar -1 por cualquier número negativo, es positivo.

  La afirmación es correcta. La regla de signos indica que el producto entre dos números negativos, da como resultado un número entero positivo **(procedimiento/ proposición)**.

Situación problema 23

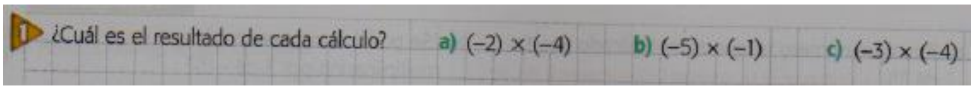

1 ¿Cuál es el resultado de cada cálculo? a) (–2) × (–4) b) (–5) × (–1) c) (–3) × (–4)

Figura 65. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.30).

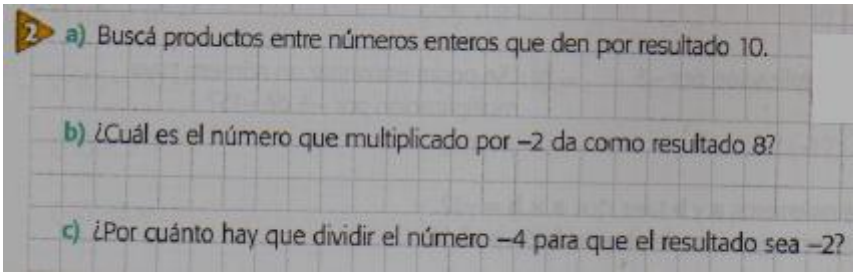
Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver productos entre enteros.

Resolución:

Para resolver la actividad sobre producto de números enteros, hay que multiplicar los números y decidir el signo del resultado según la regla de los signos del producto; o bien observar la tabla de las multiplicaciones de la situación problema anterior. El producto entre dos números enteros negativos, permite obtener como resultado un entero positivo **(procedimiento/ proposición)**.

a) $(-2)x(-4) = +8$ b) $(-5)x(-1) = +5$ c) $(-3)x(-4) = 12$

Situación problema 24


2 a) Buscá productos entre números enteros que den por resultado 10.

b) ¿Cuál es el número que multiplicado por –2 da como resultado 8?

c) ¿Por cuánto hay que dividir el número –4 para que el resultado sea –2?

Figura 66. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.30).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en contestar preguntas sobre productos y cocientes de enteros.

Resolución:

En el primer inciso, hay que proponer dos factores cuyo producto sea 10. Como el producto es positivo, los factores tienen que ser ambos positivos o ambos negativos debido a la regla de los signos **(procedimiento y proposición)**. Algunos de estas propuestas pueden obtenerse al mirar la tabla completada en la situación problema 22.

$(-10).(-1) = 10$ $(-1).(-10) = 10$ $(-2).(-5) = 10$

$(-5).(-2) = 10$ $\qquad$ $10.1 = 10$ $\qquad$ $5.2 = 10$

$1.10 = 10$ $\qquad$ $2.5 = 10$

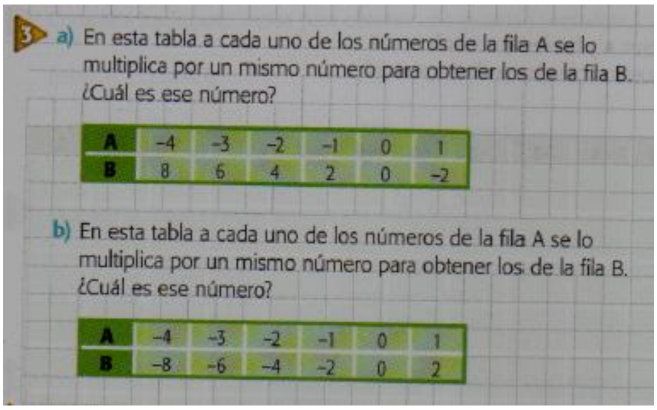
En el segundo inciso, hay que pensar qué número multiplicado por -2 da como resultado 8. En vista de que 2 multiplicado por 4 da 8, en esta oportunidad se necesita que el factor sea-4 para que el resultado sea positivo **(procedimiento)**.

Propiedad/ proposición: el producto entre un número negativo y otro positivo, es negativo.

El tercer inciso se pregunta por cuánto hay que dividir a -4 para obtener -2. En vista de que -2 es la mitad de -4, se puede afirmar que hay que dividir por 2.

Propiedad/proposición: el cociente entre un número negativo y otro positivo, es negativo.

Situación problema 25



3 a) En esta tabla a cada uno de los números de la fila A se lo multiplica por un mismo número para obtener los de la fila B. ¿Cuál es ese número?

A	−4	−3	−2	−1	0	1
B	8	6	4	2	0	−2

b) En esta tabla a cada uno de los números de la fila A se lo multiplica por un mismo número para obtener los de la fila B. ¿Cuál es ese número?

A	−4	−3	−2	−1	0	1
B	−8	−6	−4	−2	0	2

Figura 67. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.30).

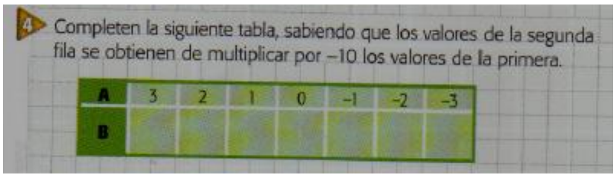
Esta situación problema es intramatemática y consiste en encontrar el factor por el cual se multiplicaron los números, de manera tal que verifiquen los resultados.

Resolución:

Esta consigna trabaja el producto de números enteros**.** Respecto del primer inciso, para encontrar cuál es el número por el que se multiplica, se debe observar que los números de la fila B son el doble que los de A, pero difieren en signo; por lo tanto, se han multiplicado por -2. Respecto del segundo inciso, los números de la fila B son el doble que la fila A; por lo tanto, se han multiplicado por 2 **(procedimiento)**.

Proposición: si los factores son de distinto signo, el resultado será negativo.

Situación problema 26



4 Completen la siguiente tabla, sabiendo que los valores de la segunda fila se obtienen de multiplicar por –10 los valores de la primera.

A	3	2	1	0	–1	–2	–3
B							

Figura 68.Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.30).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en completar los números de la fila por -10.

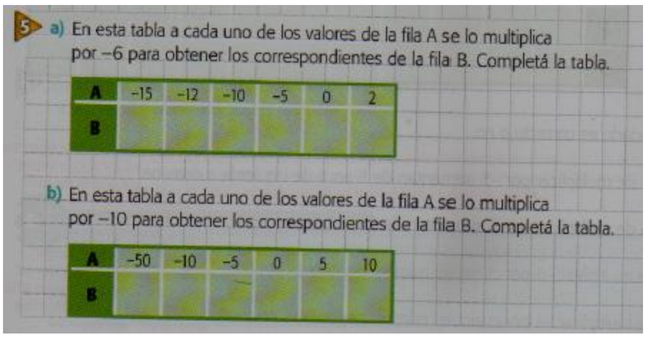
Resolución:

Para completar esta tabla hay que multiplicar números enteros. Es necesario multiplicar por -10 a todos los números de la fila A, aplicando la regla de los signos **(procedimiento)**.

Proposición: si los factores sonde distinto signo, el resultado será negativo.

A	3	2	1	0	-1	-2	-3
B	-30	-20	-10	0	10	20	30

Situación problema 27



5 a) En esta tabla a cada uno de los valores de la fila A se lo multiplica por –6 para obtener los correspondientes de la fila B. Completá la tabla.

A	–15	–12	–10	–5	0	2
B						

b) En esta tabla a cada uno de los valores de la fila A se lo multiplica por –10 para obtener los correspondientes de la fila B. Completá la tabla.

A	–50	–10	–5	0	5	10
B						

Figura 69. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.30).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en completar la tabla con los resultados de multiplicar por un número dado.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre producto entre números enteros, es necesario multiplicar cada número de la fila A por -6 (para el primer inciso) y por -10 (para el segundo inciso) y evaluar qué signo llevará el resultado según la regla de signos de producto **(procedimiento)**.

Proposición: si los factores sonde distinto signo, el resultado será negativo.

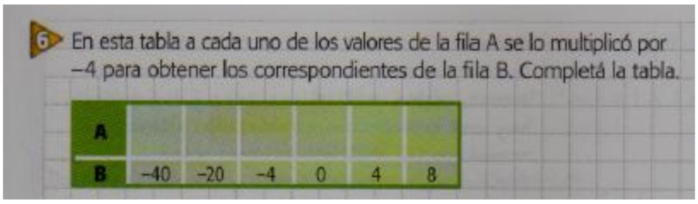
a)

A	-15	-12	-10	-5	0	2
B	90	72	60	30	0	-12

b)

A	-50	-10	-5	0	5	10
B	500	100	50	0	-50	-100

Situación problema 28


6 En esta tabla a cada uno de los valores de la fila A se lo multiplicó por −4 para obtener los correspondientes de la fila B. Completá la tabla.

A						
B	−40	−20	−4	0	4	8

Figura 70.Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.31).

Esta situación problemaes de índole intramatemática y consiste en completar la tabla con el número que fue multiplicado por -4.

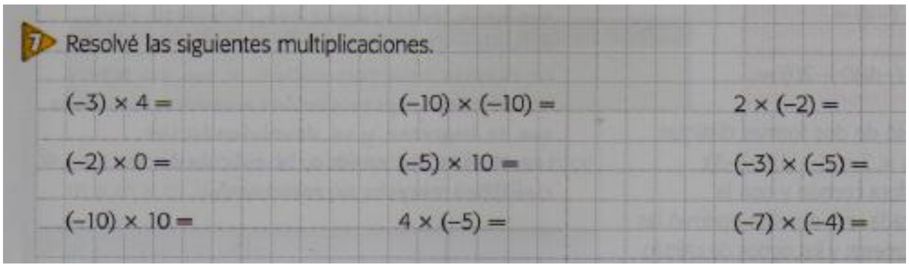
Resolución:

Para resolver esta consigna sobre multiplicación de números enteros, hay que pensar qué número multiplicado por -4 da como resultado cada valor de la fila B. Se puede utilizar como estrategia la división, es decir, dividir cada número de la fila B por -4 para obtener los correspondientes a la fila A **(procedimiento)**.

Proposición:si los factores son de distinto signo, el resultado será negativo.

A	10	5	1	0	-1	-2
B	-40	-20	-4	0	4	8

Situación problema 29


7 Resolvé las siguientes multiplicaciones.

(−3) × 4 = (−10) × (−10) = 2 × (−2) =

(−2) × 0 = (−5) × 10 = (−3) × (−5) =

(−10) × 10 = 4 × (−5) = (−7) × (−4) =

Figura 71. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.31).

Esta situación problema es de índole intramatemática y consiste en resolver productos.

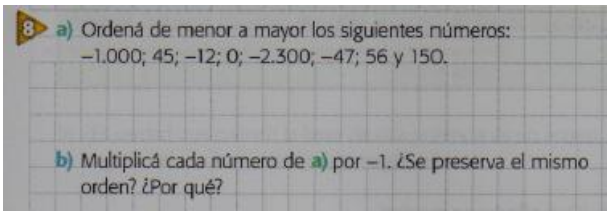
Resolución:

Para resolver estos productos de números enteros hay que calcular las multiplicaciones de los números y establecer el signo del resultado a partir de la regla de los signos **(procedimiento)**.

Proposiciones: si los factores son negativos, es resultado será positivo; si los factores son de distinto signo, el resultado será negativo.

(-3) x4=-12	(-10) x (-10)=100	2x (-2)=-4
(-2) x0=0	(-5) x10=-50	(-3) x (-5)=15
(-10) x10=-100	4x (-5)=-20	(-7) x (-4)=28

Situación problema 30


8 a) Ordená de menor a mayor los siguientes números:
−1.000; 45; −12; 0; −2.300; −47; 56 y 150.

b) Multiplicá cada número de a) por −1. ¿Se preserva el mismo orden? ¿Por qué?

Figura 72. Extraída de Broitmane Itzcovich (2011, p.31).

Esta situación problema es de índole intramatemática y consiste en ordenar números enteros.

Resolución:

En el primer inciso se solicita ordenar los números enteros de menor a mayor **(procedimiento)**. Al ordenarlos, queda $-2300; 1000; -47; -12; 0; 45; 56; 150$.

En el segundo inciso se pide multiplicar por -1 cada número del punto anterior. Los números que quedan son $1000; -45; 12; 0; 2300; 47; -56$ y -150.

Como se puede observar, los números resultantes son opuestos a los propuestos en la primera consigna **(concepto y procedimiento)**. Al ordenarlos queda $-150; -56; -45; 0; 12; 47; 1000; 2300$.

P**roposiciones:** un número positivo es mayor que un número negativo; entre dos números negativos, el mayor es el que tiene menos valor absoluto.

Situación problema 31

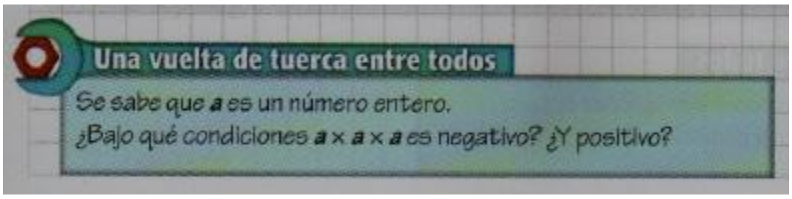


Figura 73. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.31).

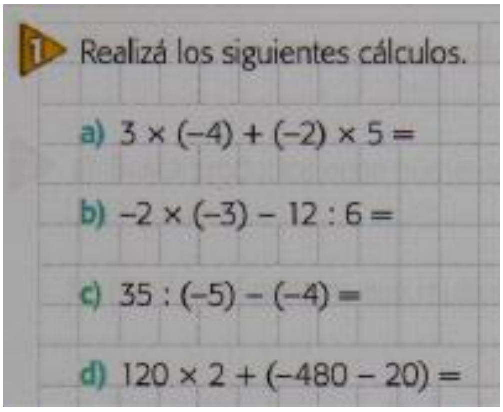
Es una situación problema intramatemática y consiste en determinar el signo de un triple producto.

Resolución:

Para resolverla, hay que utilizar la definición de número entero **(concepto)** y luego asociar los primeros dos factores del triple producto; después, al resultado obtenido, multiplicarlo por el tercero **(propiedad)**.

Si $a < 0$ entonces $a.a.a < 0$ porque en $(a.a).a$ el primer factor tiene signo positivo y el segundo, negativo; por lo tanto, la multiplicación de dos factores de distinto signo es negativa. Si $a > 0$ entonces $a.a.a > 0$ porque en $(a.a).a$ el primer factor tiene signo positivo y el segundo, también; por lo tanto, la multiplicación de dos factores de igual signo es positiva **(procedimiento)**.

Situación problema 32


1 Realizá los siguientes cálculos.

a) $3 \times (-4) + (-2) \times 5 =$

b) $-2 \times (-3) - 12 : 6 =$

c) $35 : (-5) - (-4) =$

d) $120 \times 2 + (-480 - 20) =$

Figura 74. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.32).

Esta situación problema es intramatemática y solicita resolver cálculos combinados con números enteros.

Resolución:

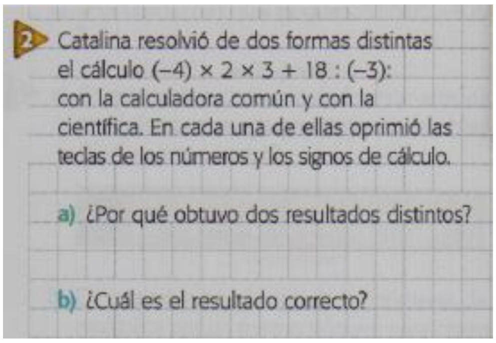
Para resolver estos cálculos combinados con números enteros hay que separar en términos para establecer qué cálculos hay que resolver primero; también, se deben suprimir paréntesis **(concepto: número opuesto y procedimiento)**, aplicar la regla de los signos en los productos y cocientes y, en algunos casos, la propiedad cancelativa **(procedimiento).**

Proposiciones/propiedades:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

a) $3.(-4) + (-2).5 = -12 + (-10) = -12 - 10 = -22$
b) $-2.(-3) - 12{:}6 = 6 - 6 = 0$
c) $35{:}(-5) - (-4) = -7 + 4 = -3$
d) $120.2 + (-480 - 20) = 240 + (-500) = -260$

Situación problema 33



2 Catalina resolvió de dos formas distintas el cálculo $(-4) \times 2 \times 3 + 18 : (-3)$: con la calculadora común y con la científica. En cada una de ellas oprimió las teclas de los números y los signos de cálculo.

a) ¿Por qué obtuvo dos resultados distintos?

b) ¿Cuál es el resultado correcto?

Figura 75. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.32).

Esta situación problema corresponde a un contexto intramatemático y solicita encontrar el error en el procedimiento de resolución de un cálculo.

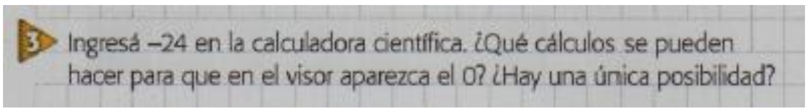
Resolución:

a) Para resolver el cálculo combinado entre números enteros hay que tener presente que la calculadora común no separa en términos porque resuelve las operaciones a medida que se ingresan en el visor; en cambio, la calculadora científica sí lo hace.

b) El resultado correcto es $(-4).2.3 + 18:(-3) = (-8).3 + (-6) = -24 - 6 = -30.$

En el desarrollo, se separó en términos, se suprimió paréntesis y se aplicó la regla de los signos **(procedimientos)**.

Situación problema 34



3 Ingresá −24 en la calculadora científica. ¿Qué cálculos se pueden hacer para que en el visor aparezca el 0? ¿Hay una única posibilidad?

Figura 76. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.32).

Esta situación problema es intramatemática y propone explorar con la calculadora diversos cálculos posibles.

Resolución:

Para resolverla hay que recurrir a la suma. Se pueden formular muchos cálculos **(experimentación)**. Una posibilidad es sumar 24; otra, es sumar varios términos que den 24; otra, es sumar un producto que de 24; o bien, restar el opuesto de 24 **(procedimiento y proposición)**.

$-24 + 24 = 0$ $\qquad$ $-24 + 6.4 = 0$

$-24 + 20 + 4 = 0$ $\qquad$ $-24 - (-24) = 0$

Situación problema 35

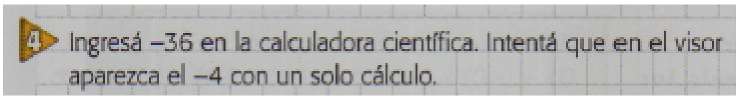

4 Ingresá −36 en la calculadora científica. Intentá que en el visor aparezca el −4 con un solo cálculo.

Figura 77. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.32).

Esta situación problema es intramatemática y requiere explorar con la calculadora.

Resolución:

Para resolverla se puede explorar con la calculadora. Seguramente, surjan muchas opciones posibles. Algunas de ellas se relacionan con la suma o con la resta del opuesto de un número o con un cociente **(procedimientos)**.

$-36 + 32 = -4$ $\qquad$ $-36 - (-32) = -4$ $\qquad$ $-36 : 9 = -4$

Situación problema 36


5 Resolvé con la calculadora científica.

a) 5 − (−3) × 2 − 4 × (−2) =

b) 3 × (−4 + 2) + (−5 − 6) =

Figura 78. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.32).

Esta situación problemaes intramatemática y requiere utilizar la calculadora.

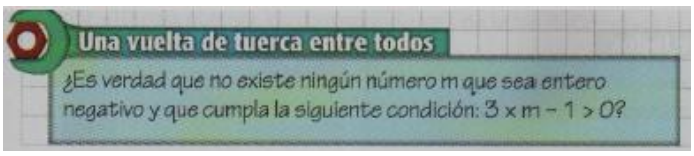
Resolución:

Para resolver estos cálculos combinados con números enteros se debe utilizar la calculadora científica **(procedimiento)**.

a) $5 - (-3).2 - 4.(-2) = 5 - (-6) + 8 = 5 + 6 + 8 = 19$

b) $3.(-4 + 2) + (-5 - 6) = 3.(-2) + (-11) = -6 - 11 = -17$

Situación problema 38


Una vuelta de tuerca entre todos

¿Es verdad que no existe ningún número m que sea entero negativo y que cumpla la siguiente condición: 3 × m − 1 > 0?

Figura 79. Extraída de Broitman e Itzcovich (2011, p.32).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en responder preguntas sobre el tipo de número que es m.

Resolución:

Para contestar esta pregunta que involucra operaciones combinadas entre números enteros, se puede reemplazar m por distintos números negativos y analizar si la expresión obtenida es cierta o no. También se puede pensar en separar en términos el primer miembro de la desigualdad. Si m es negtivo, el primer término será negativo y, al operar con el último término, se obtiene laresta de dos números enteros negativos y permite obtener un resultado negativo también, por lo que nunca va a resultar mayor que cero **(procedimiento)**.

5.4.3.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 3

Situación problema ypropuesta	Conceptos		Propiedades		Procedimientos		Argumentos			Lenguaje		
	P	**E**	**P**	**E**	**P**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Situación problema 1 extramatemática: completar una tabla con la puntuación de los integrantes que participan en un juego.	*		*		*					*	*	*
Situación problema 2 extramatemática: calcular el puntaje que recibe una persona al participar en un juego.	*		*		*					*	*	
Situación problema 3 extramatemática: responder preguntas a partir de la consigna de un juego.	*		*		*					*	*	
Situación problema 4 extramatemática: responder preguntas sobre el valor positivo y negativo de bolsas.	*		*		*					*	*	
Situación problema 5 intramatemática: retirar uno de los términos para que el cálculo satisfaga cierta condición.	*		*		*					*	*	
Situación problema 6 intramatemática:expresar un cálculo satisfaciendo ciertas condiciones.	*		*		*					*	*	
Situación problema 7 intramatemática: sumar números enteros.	*		*		*					*	*	
Situación problema 8 intramatemática: responder qué número hay que sumar o restar para obtener otro e interpretar esa suma o resta en la recta numérica.	*		*		*					*	*	*
Situación problema 9 intramatemática: responder si es posible sumar o restar a cierto número para obtener un resultado dado.	*		*		*					*	*	
Situación problema 10 intramatemática: resolver sumas y restas de números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 11 intramatemática: resolver sumas y restas entre enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 12 intramatemática: completar con el número entero para que el resultado se anule.	*		*		*						*	
Situación problema 13 intramatemática: expresar restas que satisfagan cierto resultado.	*		*		*						*	
Situación problema 14 intramatemática: completar con el número entero que corresponda para obtener el resultado dado.	*		*		*						*	
Situación problema 15 intramatemática: escribir dos números enteros cuya diferencia sea 21.	*		*		*					*	*	
Situación problema 16 intramatemática:formular dos números enteros cuya diferencia sea -21.	*		*		*					*	*	
Situación problema 17 intramatemática:plantear algunos valores para que m satisfaga la desigualdad.	*		*		*					*	*	

Situación problema 18 intramatemática:escribir un número que al multiplicarlo por 3 permita obtener un resultado dado.	*		*		*					*	*	
Situación problema 19 intramatemática: un número que al multiplicarlo por -3 permita obtener cierto resultado.	*		*		*					*	*	
Situación problema 20 intramatemática:expresar dos factores cuyo producto sea -12.	*		*		*					*	*	
Situación problema 21 intramatemática: expresar dos factores cuyo producto sea -24.	*		*		*					*	*	
Situación problema 22 intramatemática: completar la tabla con los resultados producto de multiplicar factores, y concluir si las afirmaciones son ciertas o no.	*		*		*					*	*	*
Situación problema 23 intramatemática: resolver productos entre enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 24intramatemática: contestar preguntas sobre productos y cocientes de enteros.	*		*		*					*		
Situación problema 25intramatemática: encontrar el factor por el cual se multiplicaron los números de las tablas.	*		*		*						*	*
Situacionesproblema 26 y 27 intramatemáticas: multiplicar los números de la fila por otro dado.	*				*						*	*
Situación problema 28 intramatemática: encontrar qué número fue multiplicado por -4	*				*						*	*
Situación problema 29 intramatemática: resolver productos entre enteros.	*				*						*	
Situación problema 30 intramatemática:ordenar números enteros.	*				*				*		*	
Situación problema 31 intramatemática: determinar el signo de un triple producto.	*		*		*						*	
Situación problema 32 intramatemática: resolver cálculos combinados con números enteros.	*				*						*	
Situación problema 33 intramatemática: encontrar el error en el procedimiento de resolución de un cálculo.	*				*					*	*	
Situacionesproblema 34 y 35 intramatemáticas: explorar con la calculadora.	*		*		*					*	*	
Situación problema 36 intramatemática: utilizar la calculadora.	*		*		*						*	
Situación problema 37 intramatemática: identificar qué tipo de número es el factor m.	*		*		*					*	*	
Situación problema 38 intramatemática: responder preguntas sobre el tipo de número que es m.	*		*		*					*	*	

P: Previo — Pp: Propiedades — S: Simbólico

E: Emergente — Pr: Procedimientos — G:Gráfico

C: Conceptos — V: Verbal

Tabla 3: Identificación de elementos primarios del Libro3

5.4.3.3 Configuración epistémica del Libro 3

La siguiente configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes y extraídos de la resolución de las situaciones problema que abordan las cuatro operaciones básicas con números enteros, encontrados en el Capítulo 2 del libro de texto.

Se puede observar que 4 actividades (el 10,53% del total) son situaciones problemáticas en contextos extramatemáticos, mientras que las 34 restantes (89,47% del total) corresponden a situaciones en contextos intramatemáticos.

Respecto del lenguaje, varias consignas abarcan más de un tipo. Se encontraron 22 situaciones problema (el 57,89% del total) que utilizan el lenguaje verbal, 7 situaciones problema (18,42% del total) que utilizan lenguaje gráfico, y las 37 situaciones problema (el 97,37% del total) necesitan del lenguaje simbólico para resolver.

En cuanto a la fundamentación, 2 actividades (el 5,26%) requieren argumentar sobre procedimientos, mientras que la argumentación relacionada con conceptos y propiedades no está presente.

Situaciones problema

Situaciones problema intramatemáticas y extramatemáticas donde se requiere la resolución de operaciones básicas con números enteros.

Lenguaje

Verbal:

La suma de tres números da 9. ¿Cuáles podrían ser los números, si uno de ellos debe ser negativo?

Simbólico:

$m - n = -21.$

Gráfico:

A		
B	-40	-20

REGLAS

Conceptos

Sumas Algebraicas
Números Opuestos
Desigualdades

Propiedades y proposiciones

La suma entre un número y su opuesto es cero.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; pero si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El producto entre cero y cualquier otro número es cero.
El cociente entre cero y cualquier número (distinto de cero), da cero.
El producto de una cantidad impar de factores negativos, es negativo.
El producto de una cantidad par de factores negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y un número entero negativo, permite obtener un resultado negativo.
El producto entre dos factores enteros negativos permite obtener un resultado entero positivo.
Un número positivo es mayor que un número negativo.
Entre dos números negativos, es mayor el que está más cerca de cero (o el que tiene menor valor absoluto).
El cero es mayor que cualquier entero negativo.

Procedimientos

Resolución se sumas y restas de números enteros
Resolución de sumas algebraicas
Extracción de paréntesis
Resolución de productos y cocientes de números enteros
Orden y representación de enteros en la recta numérica
Separación en términos
Comparación de números enteros
Asignación de valores a una variable
Regla de los signos
Comparación de resultados
Aplicación de la propiedad cancelativa
Aplicación de la propiedad asociativa del producto
Experimentación con la calculadora

Argumentos

Multiplicá cada número entero de a) por -1. ¿Se preserva el mismo orden? ¿Por qué?

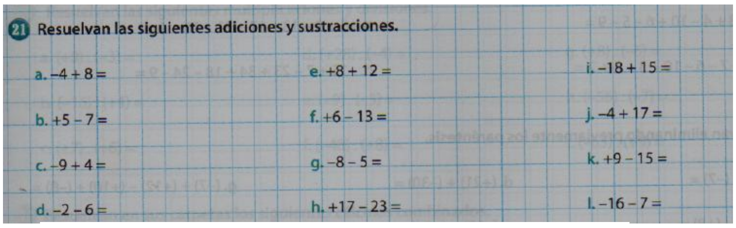
Figura 80: Configuración Epistémica del Libro 3

5.4.4 Descripción general del Libro 4

El libro *Matemática en secundaria 2* de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012) comienza los Capítulos con una situación problemática que permite introducir el tema y continúa con páginas de desarrollo que ofrecen teoría y ejercitación. También,cuenta con explicaciones que muestran procedimientos, recuerdan propiedades y dan estrategias de resolución. Antes de finalizar cada Capítulo, presenta un repaso para la evaluación.

5.4.4.1 Identificación de objetos primarios del Libro 4

Situación Problema 1


21 Resuelvan las siguientes adiciones y sustracciones.

a. $-4+8=$
b. $+5-7=$
c. $-9+4=$
d. $-2-6=$
e. $+8+12=$
f. $+6-13=$
g. $-8-5=$
h. $+17-23=$
i. $-18+15=$
j. $-4+17=$
k. $+9-15=$
l. $-16-7=$

Figura 81. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.15).

Esta situación problemaes intramatemática y solicita resolver adiciones y sustracciones con números enteros.

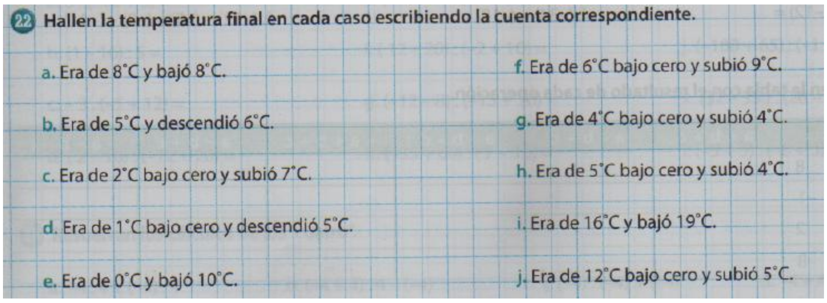
Resolución:

Para resolver estas sumas y restas entre números enteros, hay que hacer la operación entre los números **(procedimiento)**.

Proposiciones/propiedades: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $-4+8=4$
b) $+5-7=-2$
c) $-9+4=-5$
d) $-2-6=-8$
e) $+8+12=20$
f) $+6-13=-7$
g) $-8-5=-13$
h) $+17-23=-6$
i) $-18+15=-3$
j) $-4+17=13$
k) $+9-15=-5$
l) $-16-7=-23$

Situación problema 2



22 Hallen la temperatura final en cada caso escribiendo la cuenta correspondiente.

a. Era de 8°C y bajó 8°C.

b. Era de 5°C y descendió 6°C.

c. Era de 2°C bajo cero y subió 7°C.

d. Era de 1°C bajo cero y descendió 5°C.

e. Era de 0°C y bajó 10°C.

f. Era de 6°C bajo cero y subió 9°C.

g. Era de 4°C bajo cero y subió 4°C.

h. Era de 5°C bajo cero y subió 4°C.

i. Era de 16°C y bajó 19°C.

j. Era de 12°C bajo cero y subió 5°C.

Figura 82. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.15).

Esta situación problema pertenece a un contexto extramatemático y pide calcular temperaturas a partir de conocer su ascenso o descenso.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre suma y resta de enteros, hay que traducir el enunciado en lenguaje coloquial a simbólico para poder dejar planteado un cálculo. Se puede relacionar el ascenso de temperatura con una suma y el descenso con una resta. Luego, hay que hacer la operación entre los números y decidir si resultado será un entero positivo o un entero negativo, según el signo que posea el término de mayor módulo **(procedimiento)**.

a) $8°\,\mathrm{C} - 8°\,\mathrm{C} = 0°\,\mathrm{C}$

b) $5°\,\mathrm{C} - 6°\,\mathrm{C} = -1°\,\mathrm{C}$

c) $-2°\,\mathrm{C} + 7°\,\mathrm{C} = 5°\,\mathrm{C}$

d) $-1°\,\mathrm{C} - 5°\,\mathrm{C} = -6°\,\mathrm{C}$

e) $0°\,\mathrm{C} - 10°\,\mathrm{C} = -10°\,\mathrm{C}$

f) $-6°\,\mathrm{C} + 9°\,\mathrm{C} = 3°\,\mathrm{C}$

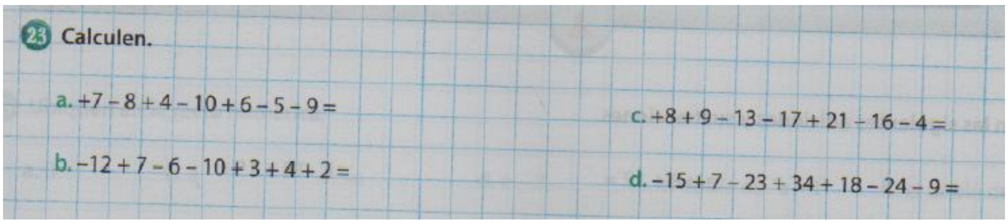
g) $-4°\mathrm{C} + 4°\,\mathrm{C} = 0°\,\mathrm{C}$

h) $-5°\,\mathrm{C} + 4°\,\mathrm{C} = -1°\,\mathrm{C}$

i) $16°\,\mathrm{C} - 19°\,C = -3°\,\mathrm{C}$

j) $-12°\,\mathrm{C} + 5°\,\mathrm{C} = 7°\,\mathrm{C}$

Situación problema 3



23 Calculen.

a. +7 − 8 + 4 − 10 + 6 − 5 − 9 =

b. −12 + 7 − 6 − 10 + 3 + 4 + 2 =

c. +8 + 9 − 13 − 17 + 21 − 16 − 4 =

d. −15 + 7 − 23 + 34 + 18 − 24 − 9 =

Figura 83. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.16).

Esta situación problema pertenece a un contexto intramatemático y consiste en resolver sumas algebraicas.

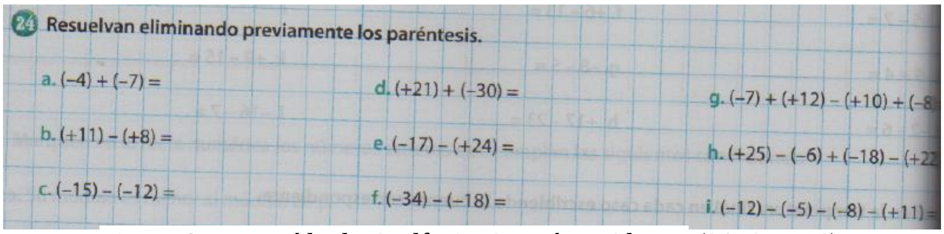
Resolución:

Para resolver esta actividad sobre sumas y restas de enteros, se puede optar por resolver término a término o calcular la diferencia de la suma de los números positivos con los negativos **(procedimiento)**.

Proposiciones/propiedades: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $+7-8+4-10+6-5-9=(7+4+6)-(8+10+5+9)=17-32=-15$
b) $-12+7-6-10+3+4+2=(7+3+4+2)-(12+6+10)=16-28=-12$
c) $+8+9-13-17+21-16-4=(8+9+21)-(13+17+16+4)=38-50=-12$
d) $-15+7-23+34+18-24-9=(7+34+18)-(15+23+24+9)=59-71=-12$

Situación problema 4


24 Resuelvan eliminando previamente los paréntesis.

a. $(-4)+(-7)=$
b. $(+11)-(+8)=$
c. $(-15)-(-12)=$
d. $(+21)+(-30)=$
e. $(-17)-(+24)=$
f. $(-34)-(-18)=$
g. $(-7)+(+12)-(+10)+(-8$
h. $(+25)-(-6)+(-18)-(+22$
i. $(-12)-(-5)-(-8)-(+11)=$

Figura 85. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.16).

Esta situación problema es intramatemática y solicita resolver sumas y restas suprimiendo paréntesis.

Resolución:

Para resolver estas sumas y restas entre enteros, es necesario extraer los paréntesis poniendo atención al signo que lo precede. Si es un signo positivo no modifica el signo del interior del paréntesis mientras que si es un signo "menos", sí.

En los tres últimos ejercicios que son más extensos, nuevamente quedan expresadas sumas algebraicas donde se puede optar por resolver término a término, o bien calcular la diferencia de la suma de números positivos y negativos **(procedimiento)**.

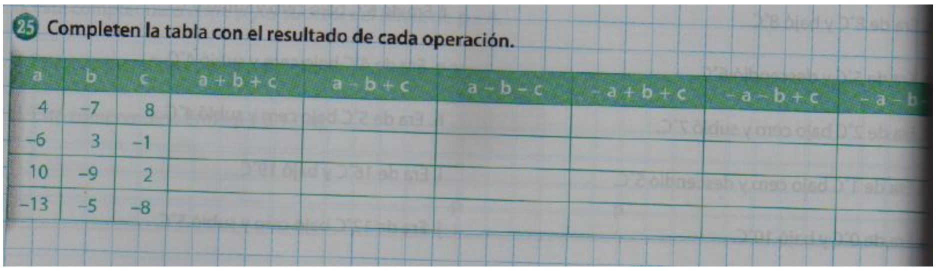
Proposiciones/propiedades:

- De sumas y restas que intervienen en este problema: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Las que involucran a los números opuestos: el opuesto de un número negativo, es positivo y el opuesto de un número positivo es negativo.

a) $(-4) + (-7) = -4 - 7 = -11$
b) $(+11) - (+8) = 11 - 8 = 3$
c) $(-15)—12 = -15 + 12 = -3$
d) $(+21) + (-30) = 21 - 30 = -9$
e) $(-17) - (+24) = -17 - 24 = -41$
f) $(-34) - (-18) = -34 + 18 = -16$
g) $(-7) + (+12) - (+10) + (-8) = -7 + 12 - 10 - 8 = 5 - 18 = -13$
h) $(+25) - (-6) + (-18) - (+22) = 25 + 6 - 18 - 22 = 31 - 40 = -9$
i) $(-12)—5—8 - (+11) = -12 + 5 + 8 - 11 = -7 - 3 = -10$

Situación problema 5



25 Completen la tabla con el resultado de cada operación.

a	b	c	a + b + c	a − b + c	a − b − c	− a + b + c	− a − b + c	− a − b
4	−7	8						
−6	3	−1						
10	−9	2						
−13	−5	−8						

Figura 86. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.16).

En esta situación problema intramatemática, dados tres números a, b y c, se pide resolver sumas y restas.

Resolución:

Para resolverla es necesario considerar los valores que toman a, b y c en cada fila y plantear las distintas operaciones que se proponen. Durante la resolución es necesario suprimir paréntesis **(procedimiento)**.

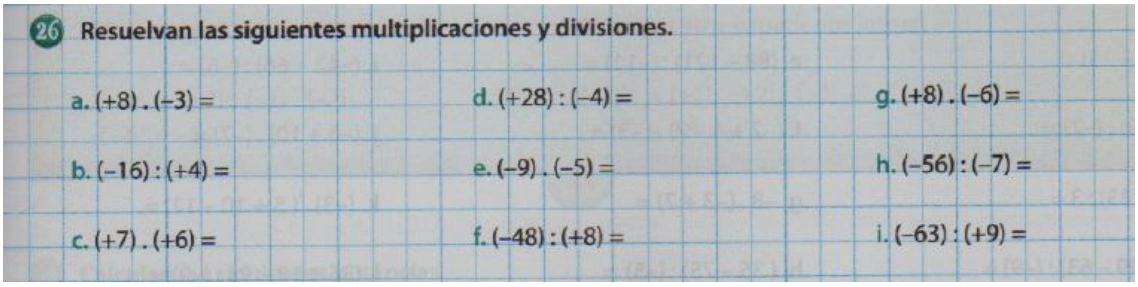
Proposiciones/propiedades:

- De las sumas y restas que intervienen en este problema: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Las que involucran a los números opuestos: el opuesto de un número negativo, es positivo y el opuesto de un número positivo, es negativo.

a	b	c	$a+b+c$	$a-b+c$	$a-b-c$	$-a+b+c$	$-a-b+c$	$-a-b-c$
4	-7	8	4+(-7)+8= 4-7+8=5	4-(-7)+8= 4+7+8=19	4-(-7)-8= 4+7-8=3	-4+(-7)+8= -4-7+8=-3	-4-(-7)+8= -4+7+8=11	-4-(-7)-8= -4+7-8=-5
-6	3	-1	-6+3+(-1)= -6+3-1=-4	-6-3+(-1)= -6-3-1=-10	-6-3-(-1)= -6-3+1=-8	-(-6)+3+(-1)= 6+3-1=8	-(-6)-3+(-1)= 6-3-1=2	-(-6)-3-(-1)= 6-3+1=4
10	-9	2	10+(-9)+2= 10-9+2=3	10-(-9)+2= 10+9+2=21	10-(-9)-2= 10+9-2=17	-10+(-9)+2= -10-9+2=-17	-10-(-9)+2= -10+9+2=1	-10-(-9)-2= -10+9-2=-3
-13	-5	-8	-13+(-5)+(-8)= -13-5-18=-26	-13-(-5)+(-8)= -13+5-8=-16	-13-(-5)-(-8)= -13+5+8=0	-(-13)+(-5)+(-8)= 13-5-8=0	-(-13)-(-5)+(-8)= 13+5-8=10	-(-13)-(-5)-(-8)= 13+5+8=26

Situación problema 6


26 Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a. (+8) . (–3) =
b. (–16) : (+4) =
c. (+7) . (+6) =
d. (+28) : (–4) =
e. (–9) . (–5) =
f. (–48) : (+8) =
g. (+8) . (–6) =
h. (–56) : (–7) =
i. (–63) : (+9) =

Figura 87. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.17).

Esta situación problema es intramatemática y conlleva a resolver multiplicaciones y divisiones con números enteros.

Resolución:

Esta actividad trata sobre productos y cocientes entre números enteros **(procedimiento).** El producto o cociente entre dos números de distinto signo, es negativo y el producto o cociente entre dos números del mismo signo, es positivo (**proposición)**.

a) $(+8).(-3) = -24$ b) $(-16):(+4) = -4$

c) $(+7).(+6) = 42$

d) $(+28):(-4) = -7$

e) $(-9).(-5) = 45$

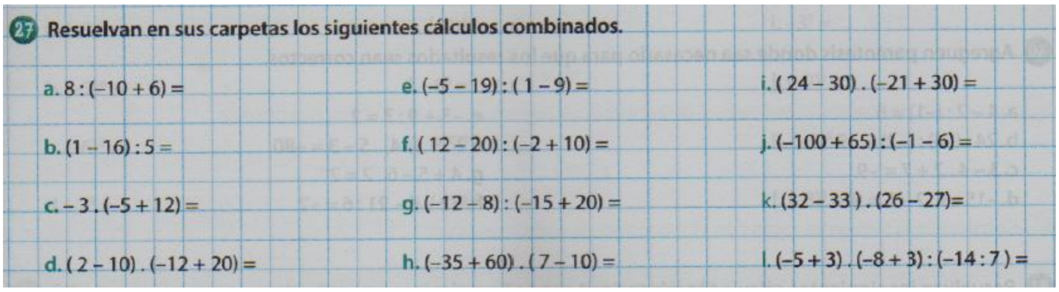
f) $(-48):(+8) = -6$

g) $(+8).(-6) = -48$

h) $(-56):(-7) = 8$

i) $(-63):(+9) = -7$

Situación problema 7



27 Resuelvan en sus carpetas los siguientes cálculos combinados.

a. $8:(-10+6)=$

b. $(1-16):5=$

c. $-3.(-5+12)=$

d. $(2-10).(-12+20)=$

e. $(-5-19):(1-9)=$

f. $(12-20):(-2+10)=$

g. $(-12-8):(-15+20)=$

h. $(-35+60).(7-10)=$

i. $(24-30).(-21+30)=$

j. $(-100+65):(-1-6)=$

k. $(32-33).(26-27)=$

l. $(-5+3).(-8+3):(-14:7)=$

Figura 88. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.17).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en resolver cálculos que involucran las cuatro operaciones básicas con números enteros.

Resolución:

Para resolver estos cálculos que incluyen sumas, restas, multiplicación y división de enteros, primero hay que resolver las operaciones que se encuentran en el interior del paréntesis, que son sumas y restas **(procedimientos)**.

Proposiciones/propiedades de las sumas y restas que intervienen en este problema: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Luego, hay que resolver los productos y cocientes **(procedimiento)**.

Proposiciones/propiedades para el producto y cociente entre dos números enteros que intervienen en este ejercicio: si los números son de distinto signo, el resultado es negativo mientras que si son de signos iguales, el resultado es positivo.

a) $8:(-10+6) = 8:(-4) = -2$

b) $(1-16):5 = (-15):5 = -3$

c) $-3.(-5+12) = (-3).7 = -21$

d) $(2-10).(-12+20) = (-8).8 = -64$

e) $(-5-19):(1-9) = (-24):(-8) = 3$

f) $(12 - 20):(-2 + 10) = (-8):8 = -1$

g) $(-12 - 8):(-15 + 20) = (-20):5 = -4$

h) $(-35 + 60).(7 - 10) = 25.(-3) = -75$

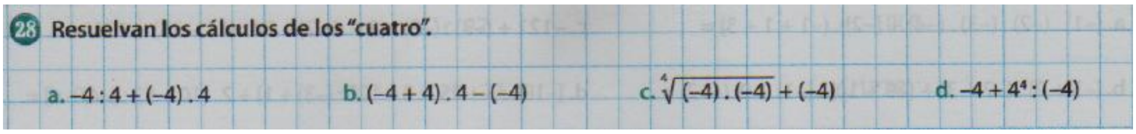
i) $(24 - 30).(-21 + 30) = (-6).9 = -54$

j) $(-100 + 65):(-1 - 6) = (-35):(-7) = 5$

k) $(32 - 33).(26 - 27) = (-1).(-1) = 1$

l) $(-5 + 3).(-8 + 3):(-14:7) = (-2).(-5):(-2) = 10:(-2) = -5$

Situación problema 8



28 Resuelvan los cálculos de los "cuatro".

a. $-4:4+(-4).4$ b. $(-4+4).4-(-4)$ c. $\sqrt[4]{(-4).(-4)}+(-4)$ d. $-4+4^4:(-4)$

Figura 89. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.17).

Esta situación problema corresponde a un contexto intramatemático y propone la resolución de cálculos combinados que contienen 4 y -4.

Resolución:

Para resolver estas sumas, restas, multiplicaciones, divisiones con números enteros y raíces y potencias con números naturales, es necesario separar en términos, suprimir paréntesis y aplicar la regla de los signos en los productos y cocientes **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

-Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, el resultado es positivo; si los números son de distinto signo, el resultado es negativo.

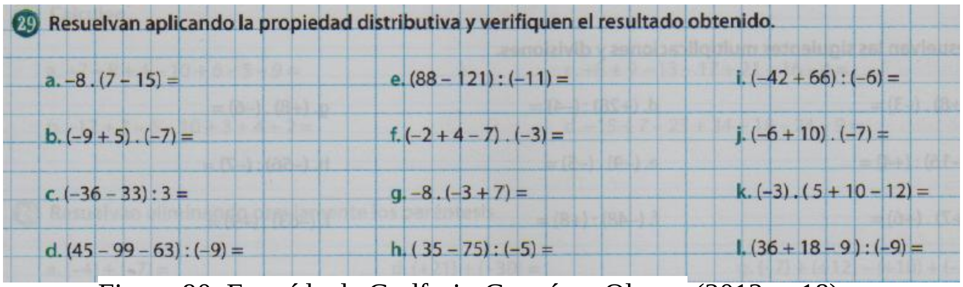
a) $-4:4 + (-4).4 = -16 - 16 = 0$

b) $(-4 + 4).4 — 4 = 0.4 + 4 = 0 + 4 = 4$

c) $\sqrt[4]{(-4).(-4)} + (-4) = \sqrt[4]{16} - 4 = 2 - 4 = -2$

d) $-4 + 4^4:(-4) = -4 + 256:(-4) = -4 - 64 = -68$

Situación problema 9


29 **Resuelvan aplicando la propiedad distributiva y verifiquen el resultado obtenido.**

a. −8 . (7 − 15) =
b. (−9 + 5) . (−7) =
c. (−36 − 33) : 3 =
d. (45 − 99 − 63) : (−9) =
e. (88 − 121) : (−11) =
f. (−2 + 4 − 7) . (−3) =
g. −8 . (−3 + 7) =
h. (35 − 75) : (−5) =
i. (−42 + 66) : (−6) =
j. (−6 + 10) . (−7) =
k. (−3) . (5 + 10 − 12) =
l. (36 + 18 − 9) : (−9) =

Figura 90. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.18).

Esta situación problema es intramatemática y pide aplicar la propiedad distributiva y verificar el resultado obtenido.

Resolución:

Para resolver la propuesta sobre sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de enteros, hay que aplicar la propiedad distributiva de la suma y la resta respecto de la multiplicación y división **(propiedad)** y la regla de los signos para productos y cocientes**.** Luego, es necesario verificar los resultados, por ejemplo, resolviendo primero los cálculos que están en el interior del paréntesis y después continuar con las multiplicaciones y divisiones **(argumentación relacionada a procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto o cociente entre dos enteros: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

a) $-8.(7-15)=-56+120=64$

Verificación: $-8.(-8)=64$

b) $(-9+5).(-7)=63-35=28$

Verificación: $(-4).(-7)=28$

c) $(-36-33):3=-12-11=-23$

Verificación: $-69:3=-23$

d) $(45-99-63):(-9)=-5+11+7=13$

Verificación: $-117:(-9)=13$

e) $(88-121):(-11)=-8+11=3$

Verificación: $(-33):(-11)=3$

f) $(-2+4-7).(-3)=6-12+21=15$

Verificación: $(-5).(-3)=15$

g) $-8.(-3+7)=24-56=-32$

Verificación: $-8.4=-32$

h) $(35-75):(-5)=-7+15=8$

Verificación: $(-40):(-5)=8$

i) $(-42+66):(-6)=7-11=-4$

Verificación: $24:(-6)=-4$

j) $(-6+10).(-7)=42-70=-28$

Verificación: $4.(-7)=-28$

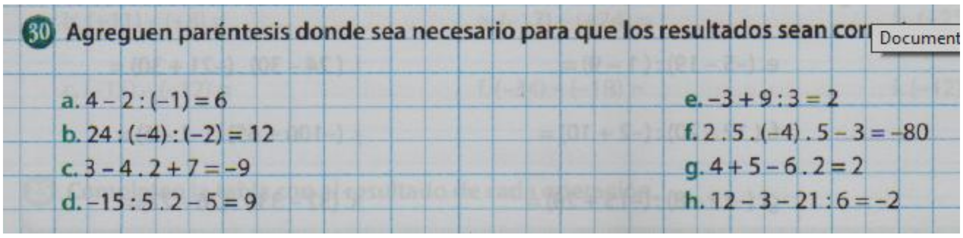
k) $(-3).(5+10-12)=-15-30+36=-45+36=-9$

Verificación: $(-3).3=-9$

l) $(36+18-9):(-9)=-4-2+1=-5$

Verificación: $45:(-9)=-5$

Situación problema 10



30 Agreguen paréntesis donde sea necesario para que los resultados sean cor

a. 4 – 2 : (–1) = 6
b. 24 : (–4) : (–2) = 12
c. 3 – 4 . 2 + 7 = –9
d. –15 : 5 . 2 – 5 = 9
e. –3 + 9 : 3 = 2
f. 2 . 5 . (–4) . 5 – 3 = –80
g. 4 + 5 – 6 . 2 = 2
h. 12 – 3 – 21 : 6 = –2

Figura 91. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.18).

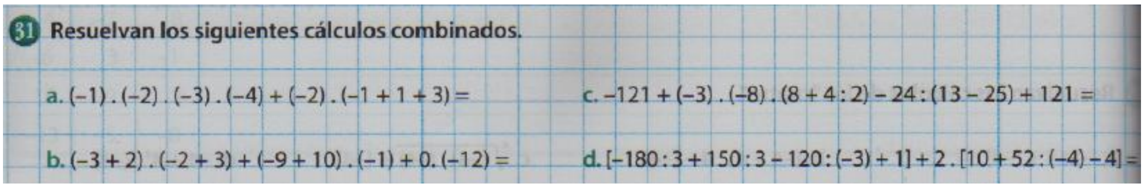
Esta situación problema es intramatemática y consiste en agregar paréntesis a los cálculos para verificar el resultado.

Resolución:

Para resolver esta actividad relacionada a suma, resta, multiplicación y división de números enteros, hay que completar el cálculo con paréntesis para que se satisfagan los resultados. Es posible probar con distintas opciones hasta encontrar la que cumpla con la solución. En ese camino, se aplica la regla de los signos y, en algunos casos, también separar en términos **(procedimiento)**.

a) $4-[2:(-1)]=6$ No es necesario agregar signo de agrupamiento, alcanza con la separación en términos.
b) $24:[(-4):(-2)]=12$
c) $(3-4).2+7=-9$
d) $(-15:5).(2-5)=9$
e) $(-3+9):3=2$
f) $2.5.(-4).(5-3)=-80$
g) $4+(5-6).2=2$
h) $(12-2-21):6=-2$

Situación problema 11


31 **Resuelvan los siguientes cálculos combinados.**

a. $(-1) . (-2) . (-3) . (-4) + (-2) . (-1 + 1 + 3) =$

b. $(-3 + 2) . (-2 + 3) + (-9 + 10) . (-1) + 0 . (-12) =$

c. $-121 + (-3) . (-8) . (8 + 4 : 2) - 24 : (13 - 25) + 121 =$

d. $[-180 : 3 + 150 : 3 - 120 : (-3) + 1] + 2 . [10 + 52 : (-4) - 4] =$

Figura 92. Extraída de Godfroit, Guayán y Oleaga (2012. p.18).

Esta situación problema corresponde a un contexto intramatemático y consiste en resolver cálculos combinados con números enteros.

Resolución:

Para resolver esta situación problema sobre sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre números enteros, se debe separar en términos, aplicar la regla de los signos, resolver primero los cálculos que están en el interior del paréntesis y, luego, los que se encuentran entre corchetes **(procedimiento)**. En algunos casos, es posible aplicar la propiedad cancelativa al sumar números opuestos **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

- Para las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

- Para el producto y cociente entre dos enteros: si los números son negativos, el resultado es positivo; si los números sonde distinto signo, el resultado es negativo.

- Para las que involucran opuestos: el opuesto de un número positivo es negativo; el opuesto de un número negativo es positivo.

a) $(-1).(-2).(-3).(-4) + (-2).(-1 + 1 + 3) =$
$24 + (-2).3 = 24 - 6 = 18$

b) $(-3 + 2).(-2 + 3) + (-9 + 10).(-1) + 0.(-12) =$
$(-1).1 + 1.(-1) + 0 = -1 - 1 = -2$

c) $-121 + (-3).(-8).(8 + 4{:}2) - 24{:}(13 - 25) + 121 =$
$-121 + 24.10 - 24{:}(-12) + 121 = 240 + 2 = 242$

d) $[-180{:}3 + 150{:}3 - 120{:}(-3) + 1] + 2.[10 + 52{:}(-4) - 4] =$
$[-60 + 50 + 40 + 1] + 2.[10 - 13 - 4] =$
$31 + 2.(-7) = 31 - 14 = 17$

5.4.4.2 Tabla de objetos primarios del Libro 4

Situación Problema y propuestas	Conceptos		Propiedades		Procedimientos		Argumentos			Lenguaje		
	P	**E**	**P**	**E**	**P**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Situación problema 1 en intramatemático: resolver adiciones y sustracciones con números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 2 extramatemática: calcular temperaturas a partir de conocer su ascenso o descenso.	*		*		*					*	*	
Situación problema 3 intramatemática: resolver sumas algebraicas.	*		*		*						*	
Situación problema 4 intramatemática: resolver sumas y restas suprimiendo paréntesis.	*		*		*						*	
Situación problema 5intramatemática: resolver sumas y restas a partir de tres números *a*, *b* y *c*, dados.	*		*		*						*	*
Situación problema 6 intramatemática: resolver multiplicaciones y divisiones con números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 7 intramatemática: resolver cálculos que involucran lascuatro operaciones básicas con números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 8 intramatemática:resolver cálculos combinados que contienen 4 y -4.	*		*		*						*	
Situación problema 9 intramatemática: aplicar la propiedad distributiva y verificar el resultado obtenido.	*		*		*				*		*	
Situación problema 10 intramatemática: agregar paréntesis a los cálculos para verificar el resultado.	*		*		*						*	
Situación problema 11 intramatemática: resolver cálculos combinados con números enteros.	*		*		*						*	

P: Previo
E: Emergente
C: Conceptos
Pp: Propiedades
Pr: Procedimientos
V: Verbal
S: Simbólico
G: Gráfico

Tabla 4: Identificación de elementos primarios del Libro 4

5.4.4.3 Configuración epistémica del Libro 4

A continuación, se muestra la configuración epistémica con la red de objetos intervinientes, extraída de la resolución de las situaciones problema que abordan las cuatro operaciones básicas con números enteros que se encontraron en el Capítulo 1 del libro de texto.

Se observa el predominio de las situaciones problema en contexto intramatemático, puesto prevalecen 10 (90,9% del total) sobre 1 que se presenta en un contexto extramatemático (9,09% del total).

En lo concerniente al lenguaje simbólico, la totalidad de las actividades lo involucran al momento de resolver. Solo 1 situación problema apela al lenguaje verbal y al gráfico (el 9,09% del total, respectivamente).

Respecto a la argumentación, se registra 1 caso que requiere argumentación referida a procedimientos (9,09% del total).

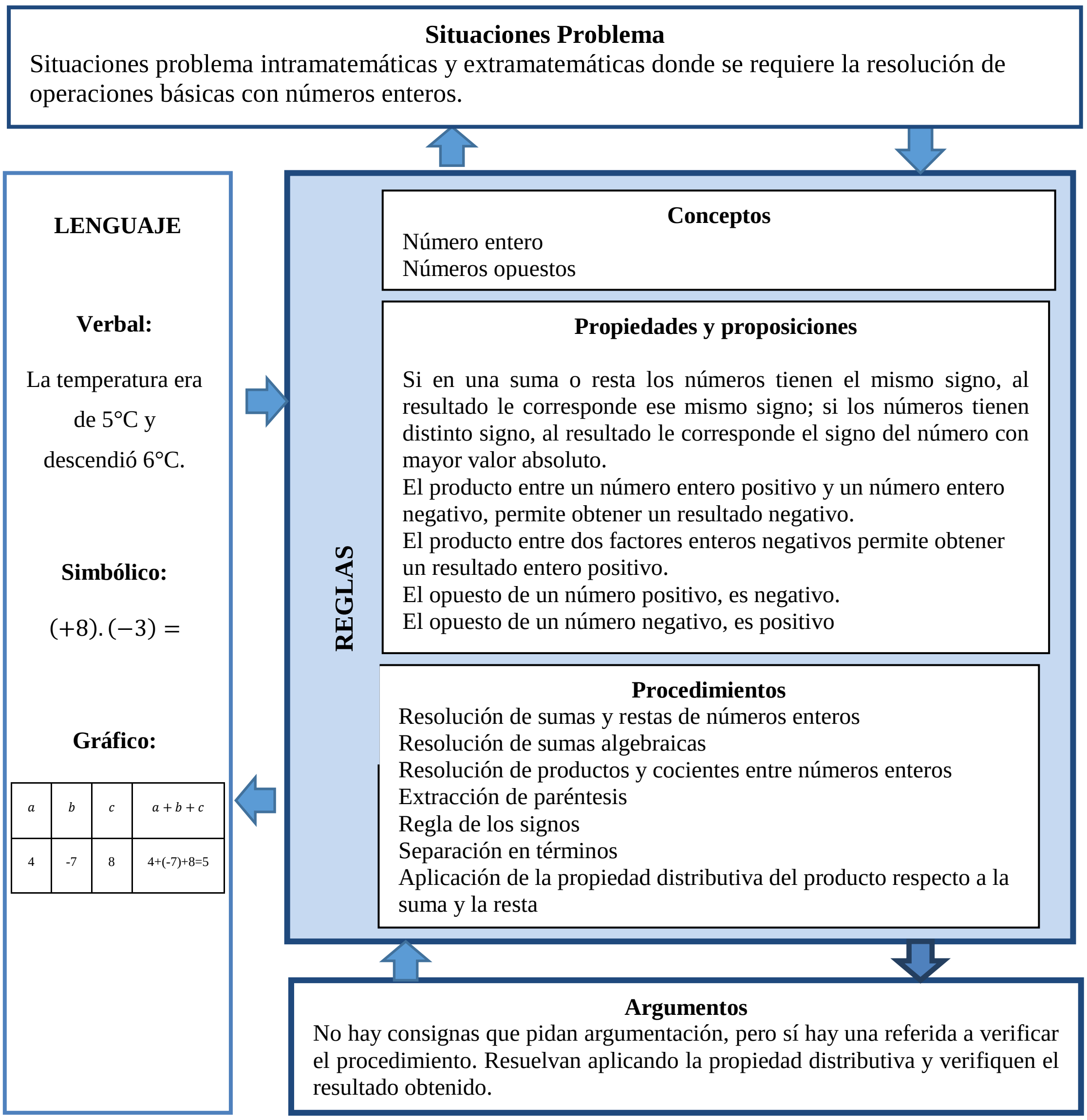


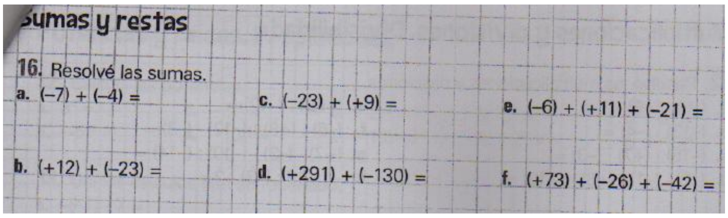
Figura 93. Configuración epistémica del Libro 4

5.4.5 Descripción general del Libro 5

El texto llamado *Carpeta de Matemática 2* de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016) se caracteriza por tener hojas troqueladas que se pueden guardar en una carpeta de estudio. No posee explicaciones teóricas sino que solo contiene ejercitación.

5.4.5.1 Identificación de objetos primarios del Libro 5

Situación problema 1


Sumas y restas

16. Resolvé las sumas.

a. (–7) + (–4) =

b. (+12) + (–23) =

c. (–23) + (+9) =

d. (+291) + (–130) =

e. (–6) + (+11) + (–21) =

f. (+73) + (–26) + (–42) =

Figura 94. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 8).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver sumas entre números enteros.

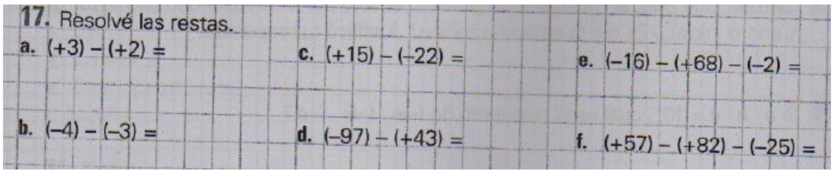
Resolución:

Para resolver estas sumas entre números enteros es necesario suprimir paréntesis para luego, hacer el cálculo final **(procedimientos)**. En los casos donde hay más de dos términos, se puede resolver la primera operación y, después, el resultado obtenido con la siguiente **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones referidas a las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $(-7) + (-4) = -7 - 4 = -11$
b) $(+12) + (-23) = 12 - 23 = -11$
c) $(-23) + (+9) = -23 + 9 = -14$
d) $(+291) + (-130) = 291 - 130 = 161$
e) $(-6) + (+11) + (-21) = -6 + 11 - 21 = 5 - 21 = -16$
f) $(+73) + (-26) + (-42) = 73 - 26 - 42 = 47 - 42 = 5$

Situación problema 2


17. Resolvé las restas.

a. (+3) – (+2) =
b. (–4) – (–3) =
c. (+15) – (–22) =
d. (–97) – (+43) =
e. (–16) – (+68) – (–2) =
f. (+57) – (+82) – (–25) =

Figura 95. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 8).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver restas entre números enteros.

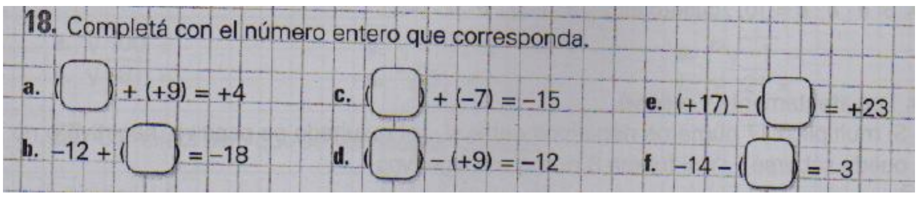
Resolución:

Para resolver estas restas entre números enteros es necesario suprimir paréntesis para luego hacer el cálculo final **(procedimientos)**. En los casos donde hay más de dos términos, se puede resolver la primera operación y, después, el resultado obtenido, con la siguiente **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones referidas a las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $(+3) - (+2) = 3 - 2 = 1$
b) $(-4)—3 = -4 + 3 = -1$
c) $(+15)—22 = 15 + 22 = 37$
d) $(-97) - (+43) = -97 - 43 = -140$
e) $(-16) - (+68) - (-2) = -16 - 68 + 2 = -84 + 2 = -82$
f) $(+57) - (+82) - (-25) = 57 - 82 + 25 = -25 + 25 = 0$

Situación problema 3


18. Completá con el número entero que corresponda.

a. ( ) + (+9) = +4
b. –12 + ( ) = –18
c. ( ) + (–7) = –15
d. ( ) – (+9) = –12
e. (+17) – ( ) = +23
f. –14 – ( ) = –3

Figura 96. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 8).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en completar con el número entero para que se verifiquen los resultados de las sumas y restas.

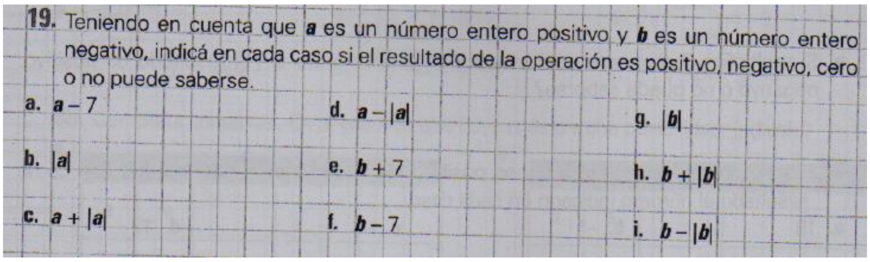
Resolución:

Para resolver actividad con sumas y restas de enteros, hay que considerar qué número anotar para que, luego de extraer paréntesis, se obtengan los resultados indicados **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones referidas a las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $(-5) + (+9) = -5 + 9 = +4$
b) $-12 + (-6) = -12 - 6 = -18$
c) $(-8) + (-7) = -8 - 7 = -15$
d) $(-3) - (+9) = -3 - 9 = -12$
e) $(+17)— 6 = 17 + 6 = +23$
f) $-14 - (-11) = -14 + 11 = -3$

Situación problema 4


19. Teniendo en cuenta que ***a*** es un número entero positivo y ***b*** es un número entero negativo, indicá en cada caso si el resultado de la operación es positivo, negativo, cero o no puede saberse.

a. $a - 7$	**d.** $a - \lvert a \rvert$	**g.** $\lvert b \rvert$
b. $\lvert a \rvert$	**e.** $b + 7$	**h.** $b + \lvert b \rvert$
c. $a + \lvert a \rvert$	**f.** $b - 7$	**i.** $b - \lvert b \rvert$

Figura 97. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 8).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en evaluar si el resultado tiene signo positivo, negativo, cero, o no puede saberse.

Resolución:

Esta actividad involucra sumas, restas y el módulo de un número. Para resolverla, es necesario considerar que a es entero positivo y $b,$ entero negativo **(concepto)**.

a) $a - 7$

a es un número entero positivo pero no se sabe si es mayor que 7 obteniendo una diferencia positiva, si es menor que 7 obteniendo una resta negativa, o si es igual a 7 obteniendo una diferencia nula. Por lo tanto, no puede saberse el signo del resultado **(procedimiento)**.

b) $|a|$

El módulo de un número siempre es igual o mayor que cero; por lo tanto, $|a|$ es positivo **(concepto y proposición)**.

c) $a + |a|$

Debido a que a es positivo como indica el enunciado y $|a|$ también, la suma de dos números positivos es positiva **(concepto, proposición y procedimiento)**.

d) $a - |a|$

Debido a que a es positivo como indica el enunciado y $|a|$ también, la diferencia de dos números iguales es cero **(concepto, proposición y procedimiento)**.

e) $b + 7$

b es un número negativo, pero no se sabe si es -7 obteniendo un resultado nulo, si es mayor que -7 obteniendo un resultado positivo, o si es menor que -7 obteniendo un resultado negativo. Por lo tanto, no puede saberse el signo del resultado **(procedimiento)**.

f) $b - 7$

b es un número entero negativo, por lo tanto, al restarle 7 se obtiene un resultado menor que cero; entonces, la diferencia es negativa **(procedimiento)**.

g) $|b|$

El módulo de un número siempre es igual o mayor que cero; por lo tanto, $|b|$ es positivo **(concepto y proposición)**.

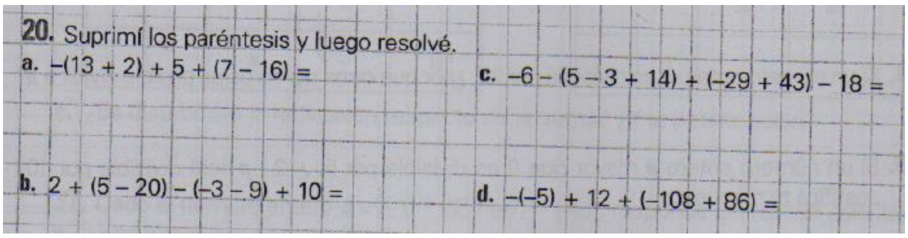
h) $b + |b|$

El primer término es negativo porque b es menor que cero y $|b|$ es mayor que cero y opuesto al término anterior; por lo tanto, el resultado es cero **(concepto y proposición y procedimiento)**.

i) $b - |b|$

El primer término es negativo porque b es menor que cero y $|b|$ es mayor que cero; por lo tanto, el resultado es negativo **(concepto, proposición y procedimientos)**.

Situación problema 5



20. Suprimí los paréntesis y luego resolvé.

a. $-(13 + 2) + 5 + (7 - 16) =$

c. $-6 - (5 - 3 + 14) + (-29 + 43) - 18 =$

b. $2 + (5 - 20) - (-3 - 9) + 10 =$

d. $-(-5) + 12 + (-108 + 86) =$

Figura 98. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 8).

Esta situación problema es de índole intramatemático y consiste en resolver sumas algebraicas.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre sumas y restas con números enteros, se debe suprimir paréntesis obteniendo sumas y restas de varios números enteros **(procedimientos)**. Puede hacerse calculando la diferencia de la suma de los positivos y los negativos, o resolviendo término a término **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones referidas a las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

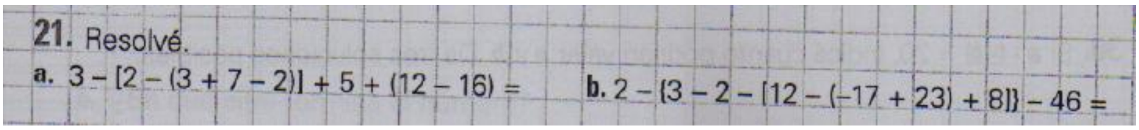
a) $-(13+2)+5+(7-16)=-13-2+5+7-16=12-31=-9$

b) $2+(5-20)—3-9+10=2+5-20+3+9+10=29-20=9$

c) $-6-(5-3+14)+(-29+43)-18=-6-5+3-14-29+43=46-54=-8$

d) $-(-5)+12+(-108+86)=5+12-108+86=103-108=-5$

Situación problema 6



21. Resolvé.

a. 3 – [2 – (3 + 7 – 2)] + 5 + (12 – 16) = **b.** 2 – {3 – 2 – [12 – (–17 + 23) + 8]} – 46 =

Figura 99. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 8).

Esta situación problema es de índole intramatemático y consiste en resolver sumas algebraicas.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre sumas y restas con números enteros, es necesario suprimir paréntesis, corchetes y llaves obteniendo sumas y restas de varios números enteros **(procedimientos)**. La suma algebraica puede resolverse calculando la diferencia de la suma de los positivos y los negativos, o sumar y restar término a término **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones referidas a las sumas o restas: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $3-[2-(3+7-2)]+5+(12-16)=3-[2-3-7+2]+5+12-16=$

$3-2+3+7-2+5+12=(3+3+7+5+12)-(2+2)=30-4=26$

b) $2-\{3-2-[12-(-17+23)+8]\}-46=2-\{3-2-[12+17-23+8]\}-46=$
$2-\{3-2-12-17+23-8\}-46=2-3+2+12+17-23+8-46=42-92=$
-50

Situación problema 7

22. Resolvé las multiplicaciones y divisiones.

a. (–5) · (+6) =
b. (–13) · (–4) =
c. (–15) · (+7) · (–3) =
d. (–2) · (–1) · (+6) · (+10) =
e. (+60) : (–12) =
f. (–6) · (+8) : (–12) · (–3) =
g. (+7) · (–3) · (–10) : (–14) =
h. –1 · 18 : (–3) : 2 =

Figura 100. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es de índole intramatemática y solicita resolver multiplicaciones y divisiones con números enteros.

Resolución:

Para resolver esta actividad de productos y cocientes entre números enteros, hay que multiplicar y dividir y, luego, aplicar la regla de los signos **(procedimientos)**. En caso de que intervenga más de un factor, se puede asociar los primeros dos y operar el resultado obtenido con el tercero **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones para el producto y cociente entre dos enteros que intervienen en esta resolución: si los números son negativos, es resultado será positivo; si los números son de distinto signo, el resultado será negativo.

a)$(-5).(+6)=-30$

b) $(-13).(-4)=+52$

c) $(-15).(+7).(-3)=(-105).(-3)=+315$

d) $(-2).(-1).(+6).(+10)=(+2).(+6).(+10)=(+12).(+10)=+120$

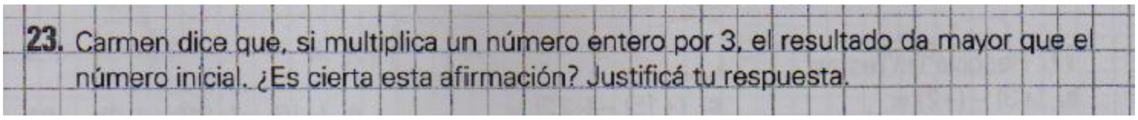
e) $(+60):(-12)=-5$

f) $(-6).(+8):(-12).(-3)=(-48):(-12).(-3)=(+4).(-3)=-12$

g) $(+7).(-3).(-10):(-14)=(-21).(-10):(-14)=(+210):(-14)=-15$

h) $(-1).18:(-3):2=(-18):(-3).2=6.2=12$

Situación problema 8



23. Carmen dice que, si multiplica un número entero por 3, el resultado da mayor que el número inicial. ¿Es cierta esta afirmación? Justificá tu respuesta.

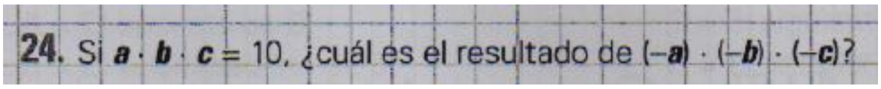
Figura 101. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es de tipo intramatemática y consiste en responder una pregunta sobre el producto de dos números enteros.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre productos de números enteros, hay que considerar que el primer factor es un número entero, sin embargo, los números enteros pueden ser mayores que cero o menores que cero. El segundo factor es 3, que es positivo. Por lo tanto, el signo del resultado depende del signo que lleve el primer factor. La justificación tiene que ver con la regla de los signos; si ese número entero es negativo, el producto es negativo también, por lo que el resultado será menor al número inicial. En cambio, si es positivo, el producto también lo es y el resultado será mayor al número inicial. En conclusión, la afirmación de Carmen no es cierta en todos los casos **(procedimientos y proposición)**.

Situación problema 9



24. Si $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 10$, ¿cuál es el resultado de $(-\boldsymbol{a}) \cdot (-\boldsymbol{b}) \cdot (-\boldsymbol{c})$?

Figura 102. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

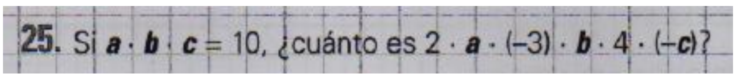
Esta situación problema es intramatemática y precisa responder preguntas sobre el resultado de un producto.

Resolución:

Para resolver esta actividad que involucra el producto entre números enteros, hay que aplicar la regla de los signos, ya que el producto entre tres factores con signo negativo, es negativo también **(procedimiento y proposición)**.

Por lo tanto,$(-a).(-b).(-c) = -10$.

Situación problema 10



25. Si $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 10$, ¿cuánto es $2 \cdot \boldsymbol{a} \cdot (-3) \cdot \boldsymbol{b} \cdot 4 \cdot (-\boldsymbol{c})$?

Figura 103. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es intramatemática y propone responder preguntas sobre el resultado de un producto.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre producto de números enteros, se puede aplicar la propiedad conmutativa de la multiplicación para utilizar la información que trae el enunciado. Se sabe que $a.b.c = 10$ y se pide calcular $2.a.(-3).b.4.(-c)$. Al aplicar la propiedad conmutativa se obtiene $a.b.(-c).2.(-3).4$. Se puede decir que, el primer triple producto es igual a -10, ya que c posee signo negativo. Entonces, para responder la pregunta final, hay que calcula$(-10).2.(-3).4 = 240$ **(propiedad y procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones para el producto entre dos enteros: si los factores son negativos, es resultado será positivo; si los factores sonde distinto signo, el resultado será negativo.

Situación problema 11

26. Leé atentamente y resolvé.

a. Si multiplico 17 números negativos entre sí, ¿el resultado es positivo, negativo o no puede saberse? ¿Y si fueran 8 números negativos?

b. Si multiplico 7 números positivos y 6 negativos entre sí ¿el resultado es positivo, negativo o no puede saberse?

Figura 104. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en responder qué signo tiene un producto según la cantidad y el signo de los factores.

Resolución:

Para resolver esta actividad que involucra el producto entre números enteros, hay que aplicar la regla de los signos. Para el primer inciso se plantea que hay 17 factores negativos; si la cantidad de factores menores que cero es impar, el resultado es negativo. Para el caso de 8 factores negativos, el resultado es positivo, ya que es una cantidad par de factores. Para el segundo inciso, se plantea un producto con factores de distinto signo. La multiplicación de 7 factores positivos es positiva, mientras que el producto de 6 factores negativos también lo es. Por lo tanto, este producto tendrá signo positivo **(procedimiento y proposición)**.

Situación problema 12

27. Escribí todas las multiplicaciones posibles de dos números enteros que den como resultado el número indicado en cada caso.

a. 15 **b.** –1 **c.** –6 **d.** 12

Figura 105. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en escribir multiplicaciones que satisfagan ciertos resultados.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre productos entre enteros, hay que pensar todas las multiplicaciones que dan como resultado 15, -1, -6 y 12. Para ello, se debe pensar por cuáles números son divisibles **(concepto)** y tener presente la regla de los signos **(procedimiento)** y la propiedad conmutativa de la división **(propiedad)**.

Propiedades/proposiciones para el producto entre dos enteros: si los factores son negativos, es resultado será positivo; si los factores sonde distinto signo, el resultado será negativo.

a) Productos que dan 15

3.5	15.1
5.3	1.15
$(-3).(-5)$	$(-15).(-1)$
$(-5).(-3)$	$(-1).(-15)$

b) Productos que dan -1

$(-1).1$	$1.(-1)$

c) Productos que dan -6

$2.(-3)$	$6.(-1)$
$(-3).2$	$(-1).6$
$(-2).3$	$(-6).1$
$3.(-2)$	$1.(-6)$

d) Productos que dan 12

1.12	6.2
12.1	2.6
$(-1).(-12)$	$(-6).(-2)$
$(-12).(-1)$	$(-2).(-6)$

4.3	$(-3).(-4)$
3.4	$(-4).(-3)$

Situación problema 13

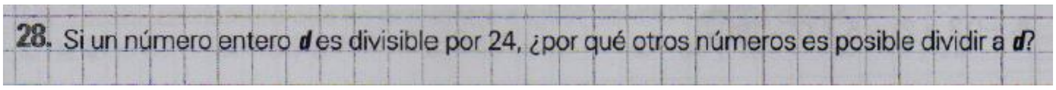

28. Si un número entero ***d*** es divisible por 24, ¿por qué otros números es posible dividir a ***d***?

Figura 106. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en escribir los números por los que es divisible otro.

Resolución:

Esta actividad involucra productos y cocientes entre números enteros y divisibilidad **(conceptos)**. Para resolverla, es preciso tener en cuenta que si bien no se indica qué número es d, al aclarar que es divisible por 24, es posible escribir otros números por los que también es divisible, como por ejemplo, $-24; 12;\ -12; 8; -8;\ 6;\ -6;\ 4;\ -4; 3;\ -3; 2;\ -2; 1\ y -1$ **(procedimientos)**.

Situación problema 14

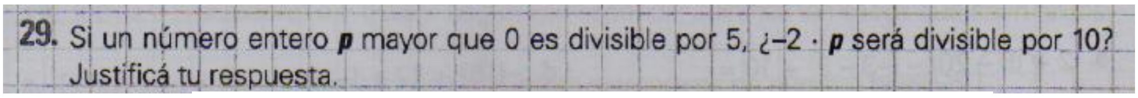

29. Si un número entero ***p*** mayor que 0 es divisible por 5, ¿$-2 \cdot$ ***p*** será divisible por 10? Justificá tu respuesta.

Figura 107. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en responder preguntas sobre divisibilidad.

Resolución:

Para realizaresta actividad sobre divisibilidad **(concepto)** se puede pensar a p como el producto entre 5 y otro número, es decir $p = 5.m$. Si a p se lo multiplica por -2, queda $-2.p,$y por lo tanto, también $(-2).5.m$. Es decir que $-2.p = (-2).5.m$. Resolviendo el primer producto del segundo miembro de la igualdad, queda $-2.p = -10.m$, o lo que es lo mismo $-2.p = 10.(-m)$. Por lo tanto, p es divisible por 10 **(procedimiento)**.

Situación problema 15

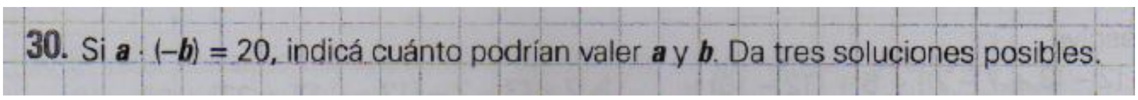

30. Si ***a*** $\cdot$ (−***b***) = 20, indicá cuánto podrían valer ***a*** y ***b***. Da tres soluciones posibles.

Figura 108. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en proponer productos que den como resultado 20.

Resolución:

Para resolver esta actividad que involucra productos entre enteros y divisibilidad **(concepto)**, hay que proponer valores para a y b tales que $a.(-b) = 20$. Es necesario también aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Si $a = -4$ y $b = 5$, entonces $(-4).(-5) = 20$

Si $a = -2$ y $b = 10$, entonces $(-2).(-10) = 20$

Si $a = -1$ y $b = 20$, entonces $(-1).(-20) = 20$

Propiedad/proposición para el producto entre dos enteros: si los factores son negativos, es resultado será positivo.

Situación problema 16


31. Si $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 14$ y $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{c}|$, indicá todos los valores posibles de ***a***, ***b*** y ***c***.

Figura 109. Extraída de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 9).

Esta situación problemaes de tipo intramatemática y consiste en proponer tres números enteros que satisfagan cierta condición.

Resolución:

Para responder a esta actividad que involucra el producto y el valor absoluto de números enteros **(concepto)**, se puede pensar qué triple producto permite tener como resultado 14 y aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Si $a = 1; b = 2$ y$c = 7$, se obtiene 1.2.7 $= 14$ y $|1| < |2| < |7|$.

Si $a = -1; b = -2$ y$c = 7$, se obtiene $(-1).(-2)$.7 $= 14$ y $|-1| < |-2| < |7|$.

Si $a = 1; b = -2$ y$c = -7$, se obtiene $1.(-2).(-7) = 14$ y $|1| < |-2| < |-7|$.

Si $a = -1; b = 2$ y$c = -7$, se obtiene (-1).2.$(-7) = 14$ y $|-1| < |2| < |-7|$.

5.4.5.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 5

Situación problema y propuesta	Conceptos		Propiedades		Procedimientos		Argumentos			Lenguaje		
	P	**E**	**P**	**E**	**P**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Situación problema 1 intramatemática: resolver sumas entre números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 2intramatemática: resolver restas entre números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 3intramatemática: completar con el número entero para que se verifiquen losresultados de las sumas y restas.	*		*		*						*	
Situación problema 4intramatemática: evaluar si el resultado tiene signo positivo, negativo, cero, o no puede saberse.	*		*		*					*	*	
Situación problema 5 intramatemática: resolver sumas algebraicas.	*		*		*						*	
Situación Problema 6intramatemática y consiste en resolver sumas algebraicas.	*		*		*						*	
Situación problema 7intramatemática: resolver multiplicaciones y divisiones con números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 8intramatemática: responder una pregunta sobre el producto de dos números enteros.	*		*		*				*	*	*	
Situación problema 9 intramatemática: responder preguntas sobre el resultado de un producto.	*		*		*					*	*	
Situación problema 10intramatemática: responder preguntas sobre el resultado de un producto.	*		*		*					*	*	
Situación problema 11 intramatemática: responder qué signo tiene un producto según la cantidad y el signo de los factores.	*		*		*					*	*	
Situación problema 12 intramatemática: escribir multiplicaciones que satisfagan ciertos resultados.	*		*		*					*	*	
Situación problema 13intramatemática: escribir los números por los que es divisible otro.	*		*		*					*	*	
Situación problema 14intramatemática: responder preguntas sobre divisibilidad.	*		*		*					*	*	
Situación problema 15intramatemática:plantear productos que den como resultado 20.	*		*		*					*	*	
Situación Problema 16intramatemática: plantear tres números enteros que satisfagan cierta condición.	*		*		*					*	*	

P: Previo
Pp: Propiedades
S: Simbólico

E: Emergente
Pr: Procedimientos
G: Gráfico

C: Conceptos
V: Verbal

Tabla 5: Identificación de elementos primarios del Libro 5

5.4.5.3 Configuración epistémica del Libro 5

A continuación, se muestra la configuración epistémica con la red de objetos intervinientes extraídas de la resolución de las 16 situaciones problema que involucran las 4 operaciones fundamentales entre números enteros, hallados en el Capítulo 1 del libro de texto.

La totalidad de las situaciones problema (100% del total) pertenecen a un contexto intramatemático; entre ellas, se encuentran 3 consignas (18,75% del total) que involucran alguna propiedad.

En lo que respecta al lenguaje, 10 situaciones problema (62,5 % del total) requieren del lenguaje verbal, las 16 consignas (100% del total) refieren de alguna manera al lenguaje simbólico. Resulta llamativo que no se encuentren consignas donde se apele al lenguaje gráfico.

Cabe destacar que en solo 2 consignas (el 12,5% del total) se solicita que el alumno argumente sus procedimientos.

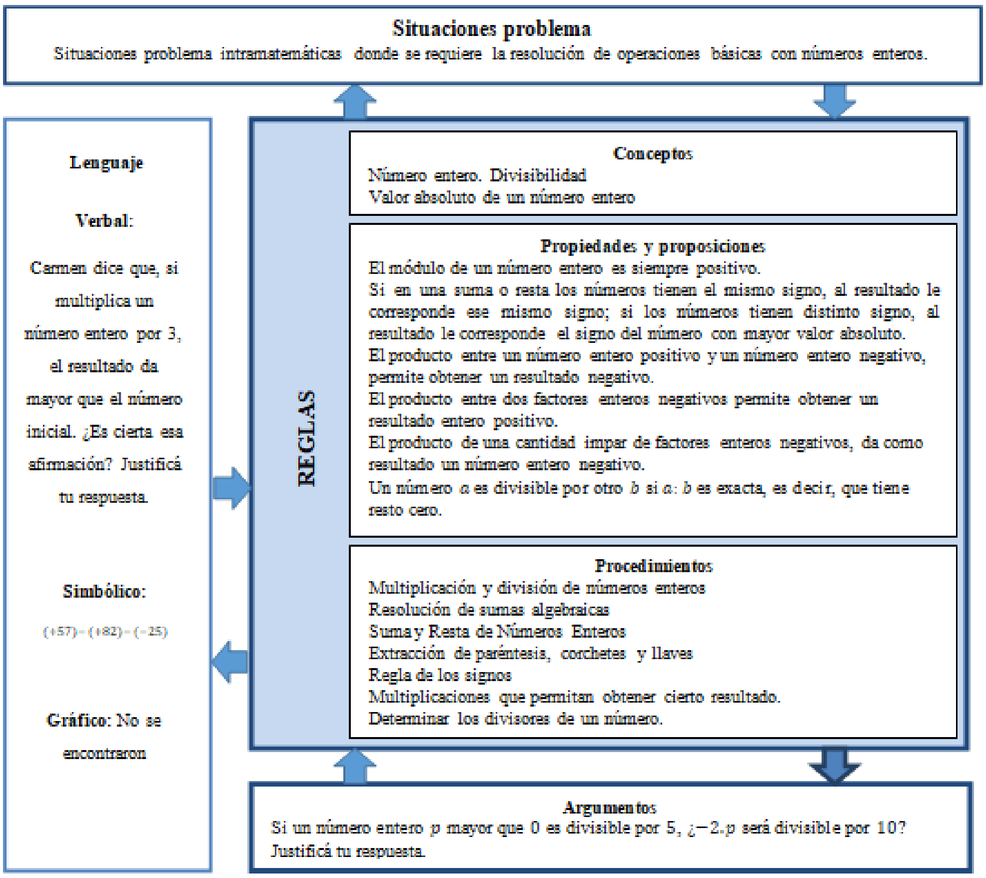


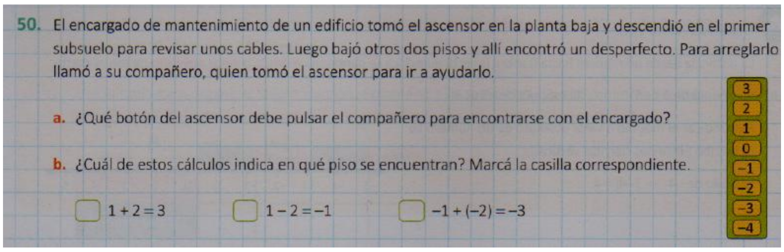
Figura 110: Configuración epistémica del Libro 5

5.4.6 Descripción general del Libro 6

El texto llamado *Entre Números II* de Kacsor y Outón (2016) se caracteriza por tener hojas troqueladas que el alumno puede guardar en su propia carpeta de estudio. Cada Capítulo inicia con una sección llamada “Esto ya lo sabía” y “Matemundo”, donde se muestra alguna aplicación a la cotidianidad de uno de los temas de la unidad y un problema. Además, contiene recuadros en color donde se encuentran explicaciones teóricas y ejemplos. En algunas hojas, tiene un pequeño recuadro titulado “Fijate bien”, para realizar un recordatorio. Algunas actividades se encabezan bajo el nombre “Hacé de profe” y presentan un ejercicio resuelto para que sea corregido por el estudiante.

5.4.6.1 Identificación de objetos primarios del Libro 6

Situación problema 1



50. El encargado de mantenimiento de un edificio tomó el ascensor en la planta baja y descendió en el primer subsuelo para revisar unos cables. Luego bajó otros dos pisos y allí encontró un desperfecto. Para arreglarlo llamó a su compañero, quien tomó el ascensor para ir a ayudarlo.

a. ¿Qué botón del ascensor debe pulsar el compañero para encontrarse con el encargado?

b. ¿Cuál de estos cálculos indica en qué piso se encuentran? Marcá la casilla correspondiente.

☐ $1+2=3$ ☐ $1-2=-1$ ☐ $-1+(-2)=-3$

Figura 111. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.16).

Esta situación problema es de tipo extramatemática e intenta que se contesten preguntas respecto al movimiento de un ascensor y los pisos de un edificio.

Resolución:

Para resolver el primer inciso de esta actividad que involucra la suma y resta de enteros en contexto **(procedimiento)**, se tiene que tomar la planta baja como piso cero y, cuando el encargado baja un piso, se considera -1. Si luego baja dos pisos más, se considera -3 y, entonces, tiene que presionar el botón -3. Para el segundo inciso, se debe marcar la tercera opción.

Propiedades/ proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación problema2

51. Respondé lo que se pregunta y luego escribí un cálculo que represente la situación, con su resultado.

a. Cuando Juan se fue a dormir, la temperatura era de 2 grados bajo cero. Al despertar, había aumentado 9 °C. ¿De cuántos grados era?

b. Unos excursionistas que se encontraban en una hondonada a 46 m bajo el nivel del mar, al pie de una montaña, escalaron 320 m hasta un campamento. ¿A qué altura se encuentran?

Figura 112. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.16).

Esta situación problema es de tipo extramatemática y tiene el objetivo de que se contesten preguntas respecto al ascenso y descenso de temperaturas, y los metros debajo del nivel del mar.

Resolución:

Esta actividad tiene que ver con sumas y restas de números enteros. Para resolver el primer inciso, hay que relacionar $2°\mathrm{C}$ bajo cero con el entero -2. Si luego la temperatura aumenta $9°\mathrm{C}$, se debe resolver $-2°\mathrm{C} + 9°\mathrm{C} = 7°\mathrm{C}$. Para el segundo inciso,se debe relacionar 46 m bajo el nivel del mar con el entero -46. Si luego suben 320 m, el cálculo que se desprende es $-46\mathrm{m} + 320\mathrm{m} = 274$ m **(procedimiento)**.

Situación problema 3

52. Calculá.

a. $(-30) + (-20) =$

b. $-7 + (-13) =$

c. $2 + (-12) =$

d. $-50 + 80 =$

e. $6 + (-6) =$

f. $200 + (-150) =$

g. $-40 + 5 =$

h. $-60 + 100 =$

i. $-199 + (-1) =$

Figura 113. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.16).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver sumas entre números enteros.

Resolución:

Para resolverlas, es necesario extraer paréntesis y luego realizar las sumas y restas **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $(-30) + (-20) = -30 - 20 = -50$
b) $-7 + (-13) = -7 - 13 = -20$
c) $2 + (-12) = 2 - 12 = -10$
d) $-50 + 80 = 30$
e) $6 + (-6) = 0$
f) $200 + (-150) = 200 - 150 = 50$
g) $-40 + 5 = -35$
h) $-60 + 100 = 40$
i) $-199 + (-1) = -200$

Situación problema 4

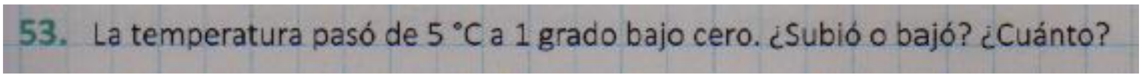

53. La temperatura pasó de 5 °C a 1 grado bajo cero. ¿Subió o bajó? ¿Cuánto?

Figura 114. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.17).

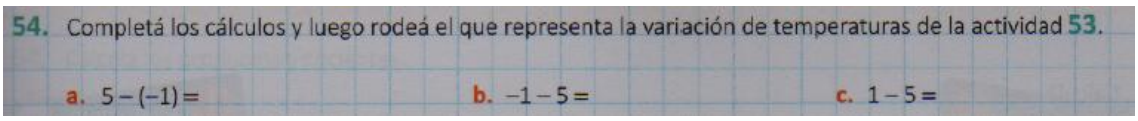
Esta situación problema es extramatemática y propone calcular la amplitud térmica.

Resolución:

Para resolver esta actividad que implica suma y resta de enteros, hay que calcular la diferencia entre la temperatura final y la inicial. Para los datos del enunciado, resulta $-1°\text{C} - 5°\text{C} = -6°\text{C}$ **(procedimiento)**. Por lo tanto la temperatura bajó $6°\ \text{C}$.

Propiedad/proposición para la suma y resta: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo.

Situación problema 5


54. Completá los cálculos y luego rodeá el que representa la variación de temperaturas de la actividad 53.

a. 5 − (−1) =   b. −1 − 5 =   c. 1 − 5 =

Figura 115. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.17).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en la resolución de sumas y restas de enteros, además de la selección de un cálculo que represente la actividad anterior.

Resolución:

Para resolverla, es necesario que extraer paréntesis **(concepto: opuesto de un número)**. El cálculo que representa la situación problema anterior es el que se encuentra en el inciso b **(procedimiento)**.

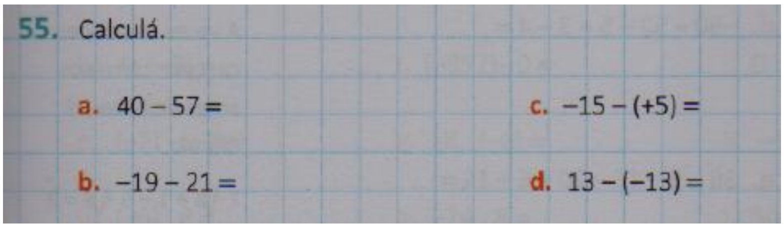
Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto. Respecto a los números opuestos se puede afirmar que el opuesto de un número negativo, es positivo.

a) $5-(-1)=5+1=6$

b) $-1-5=-6$

c) $1-5=-4$

Situación problema 6



55. Calculá.

a. $40-57=$

b. $-19-21=$

c. $-15-(+5)=$

d. $13-(-13)=$

Figura 116. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.17).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver restas entre números enteros.

Resolución:

Para calcular estas restas de números enteros, se requiere suprimir paréntesis y luego resolver **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto. Respecto a los números opuestos se puede afirmar que el opuesto de un número negativo, es positivo y el opuesto de un número positivo, es negativo.

a) $40-57=-17$

b) $-19-21=-40$

c) $-15-(+5)=-15-5=-20$

d) $13-(-13)=13+13=26$

Situación problema 7

56. Augusto, el primer emperador romano, nació en el año 63 a.C. y murió en el 14 d.C. ¿Cuántos años vivió? Mostrá el cálculo que hacés para averiguarlo.

Figura 117. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.17).

Esta situación problemaposee un contexto extramatemático y consiste en calcular cuántos años vivió el emperador Augusto.

Resolución:

En la resolución de esta actividad está implicada la resta de enteros **(procedimiento)**.

Propiedad/proposición para la suma y resta: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo. Para responder cuántos años vivió hay que calcular la diferencia entre el año en que murió y el año en que nació; es decir,14 menos (-63) porque sucedió antes de Cristo. El cálculo queda en $14-(-63)=14+63=77$ **(procedimiento)**, vivió 77 años.

Situación problema 8

57. Escribí cada cálculo de modo que no tenga paréntesis y sea equivalente. Luego, anotá el resultado.

a. (+4) + (+6) = b. 4 + (−6) = c. 4 − (+6) = d. 4 − (−6) =

Figura 118. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.17).

Esta situación problema es intramatemática y solicita extraer paréntesis y resolver.

Resolución:

Para abordar esta actividad sobre sumas y restas de enteros, es necesario suprimir paréntesis y resolver **(concepto: números opuestos y procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto. Respecto a los números opuestos, se puede afirmar que el opuesto de un número negativo, es positivo, y el opuesto de un número positivo, es negativo.

a) $(+4)+(+6)=4+6=10$
b) $4+(-6)=4-6=-2$
c) $4-(+6)=4-6=-2$
d) $4-(-6)=4+6=10$

Situación problema 9

58. Estrategia: hacer un esquema La semana pasada, un minero trabajó a 4 metros bajo el nivel del mar y esta semana, a 12 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la distancia entre ambas ubicaciones? ¿Con qué cálculo podés representar la situación? ¿El minero ascendió o descendió? Ayudate con un esquema.

Figura 119. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.17).

Esa situación problema corresponde a un contexto extramatemático y consiste en responder preguntas sobre la ubicación de un minero.

Resolución:

Para trabajar con esta actividad que involucra la suma y resta de enteros, hay que relacionar la ubicación del minero durante primera semana con el número entero -4, debido a que está por debajo del nivel mar **(procedimiento)**. A la siguiente semana, se encuentra 12 metros bajo el nivel del mar, es decir -12. Se observa que hay 8 unidades de distancia entre una ubicación y la otra; el cálculo que permite representar la situación es $-12— 4 = -12 + 4 = -8$.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto. Respecto a los números opuestos se puede afirmar que el opuesto de un número negativo, es positivo. En conclusión, el minero descendió durante la segunda semana.

Situación problema 10

59. Valentín movió su ficha sobre un juego de tablero de la siguiente manera: avanzó 5 casillas desde la partida, retrocedió 3, avanzó 4, retrocedió 1, retrocedió 2, avanzó 8, retrocedió 6 y avanzó 4. ¿En qué casilla está? Para averiguarlo, podés ir operando con los números a medida que vas leyéndolos, o bien, sumar todos los avances y restar la suma de todos los retrocesos.
Procedé de las dos maneras y comprobá si obtenés el mismo resultado.

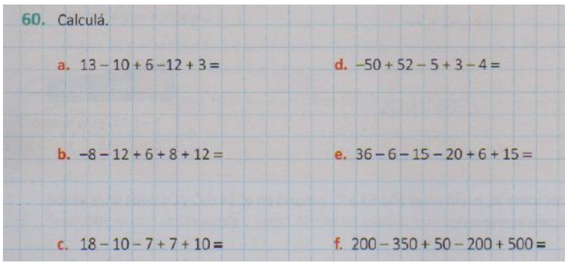
Figura 120. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.18).

Esta situación problema es extramatemática y consiste en calcular en qué casilla del tablero queda posicionada la ficha del jugador.

Resolución:

Esta actividad involucra sumas algebraicas. La consigna solicita resolver por dos métodos distintos, lo que conducirá al mismo resultado. El primer método consiste en sumar y restar a medida que la ficha se va desplazando **(procedimiento)**, esto puede ser expresado de la siguiente manera en$+5 - 3 + 4 - 1 - 2 + 8 - 6 + 4 = 9$. El segundo método consiste en sumar los avances y restarle los retrocesos **(procedimiento)**. La suma de los avances es $5+4+8+4=21$, y la suma de los retrocesos es $3+1+2+6=12$. Por lo tanto, la diferencia entre los avances y los retrocesos es $21-12=9$.

Situación Problema 11



60. Calculá.

a. $13-10+6-12+3=$

b. $-8-12+6+8+12=$

c. $18-10-7+7+10=$

d. $-50+52-5+3-4=$

e. $36-6-15-20+6+15=$

f. $200-350+50-200+500=$

Figura 121. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.18)

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver sumas algebraicas. **Resolución:**

Para resolver esta actividad que trata sobre sumas y restas de números enteros, se puede optar por resolver término a término las operaciones, o bien calcular la diferencia entre los números positivos y los negativos **(procedimiento)**. En algunos casos, es posible cancelar los términos opuestos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

a) $13-10+6-12+3=3+6-12+3=9-12+3=-3+3=0$
b) $-8-12+6+8+12=6$
c) $18-10-7+7+10=18$
d) $-50+52-5+3-4=2-5+3-4=-3+3-4=-4$
e) $36-6-15-20+6+15=30-20+6=10+6=16$
f) $200-350+50-200+500=-350+50+500=-300+500=200$

Situación problema 12

61. Calculá.

a. $9-(-9)+10-(-2)=$

b. $-3+(-4)+(-7)-(-6)=$

Figura 122. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.18).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver las sumas y restas entre enteros.

Resolución:

Esta actividad sobre suma y resta de números enteros requiere de la extracción de paréntesis **(procedimiento).** Luego, se pueden resolver las operaciones término a término, o calcular la diferencia entre la suma de los positivos y la suma de los negativos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto. Respecto a los números opuestos se puede afirmar que: el opuesto de un número negativo, es positivo.

a) $9 — 9 + 10 — 2 = 9 + 9 + 10 + 2 = 30$
b) $-3 + (-4) + (-7) - (-6) = -3 - 4 - 7 + 6 = -7 - 7 + 6 = -14 + 6 = -8$

Situación problema 13

62. En una localidad se experimentaron los siguientes cambios de temperatura: amaneció a 3 grados bajo cero, al mediodía la temperatura había aumentado en 8 grados y a las 4 de la tarde había subido otros 2 grados. Desde esa hora hasta la medianoche bajó 4 grados, y desde la medianoche hasta las 6 de la mañana siguiente bajó 5 grados más. ¿Qué temperatura hubo a esa hora?

Figura 123. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.18).

Esta situación problema corresponde a un contexto extramatemático y pretende que se calcule la temperatura que hubo en cierto lugar, a partir de las variaciones que hubo en el día.

Resolución:

La actividad aborda la suma y resta de números enteros. Se puede plantear el cálculo a partir de las modificaciones de temperatura que enuncia el problema y resolver las operaciones término a término, o calculando la diferencia entre los ascensos de la temperatura y sus descensos **(procedimiento)**. De este modo, queda expresado en $-3 + 8 + 2 - 4 - 5 = 5 + 2 - 4 - 5 = 2 - 4 = -2.$ La temperatura a las 6 de la mañana era de $2°\mathrm{C}$ bajo cero.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Situación Problema 14

Tengo tarea

63. Un ascensor que estaba en la planta baja fue al tercer subsuelo, subió 5 pisos, bajó 3 pisos, subió 6, subió 2 y bajó 7. ¿Dónde se encuentra?

Figura 124. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.18).

Esta situación problema corresponde a un contexto extramatemático y solicita calcular en qué piso se encuentra un ascensor.

Resolución:

Para resolver esta actividad que involucra la suma y resta de números enteros, se puede plantear la suma algebraica que represente la situación, considerando las oportunidades en las que sube el ascensor como sumas, y las que desciende como restas. Luego, es posible operar término a término, o calcular la diferencia de los ascensos y descensos **(procedimiento)**. El proceso es $-3+5-3+6+2-7=2-3+6+2-7=-1+6+2-7=5+2-7=7-7=0$. Como el resultado es cero, quiere decir que el ascensor regresó a la planta baja.

Propiedades/proposiciones: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto. La suma de dos números opuestos es cero.

Situación problema 15

64. Calculá los productos y cocientes.

a. $(+5)\cdot(-3)=$	e. $(-5)\cdot(-4)=$	i. $(-4):(-2)=$
b. $4\cdot(-9)=$	f. $(-957)\cdot 0=$	j. $0:(-47)=$
c. $(-2)\cdot(+7)=$	g. $18:(-6)=$	k. $-15:(-15)=$
d. $(-6)\cdot 8=$	h. $-24:8=$	l. $50:(-50)=$

Figura 125. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.19).

Esta situación problema es intramatemática y solicita resolver productos y cocientes entre números enteros.

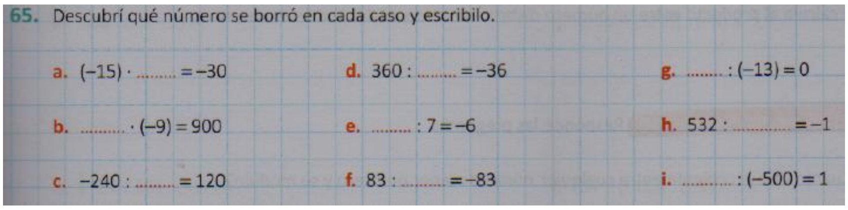
Resolución:

Para realizar esta actividad que trata de productos y cocientes entre enteros, es preciso resolver las multiplicaciones y divisiones y aplicar la regla de los signos **(procedimientos)**.

Propiedades/ proposiciones: el producto o el cociente entre dos números de igual signo, es positivo; mientras que el producto o el cociente entre dos números de distinto signo, es negativo.

a) $(+5).(-3) = -15$
b) $4.(-9) = -36$
c) $(-2).7 = -14$
d) $(-6).8 = -48$
e) $(-5).(-4) = 20$
f) $(-957).0 = 0$
g) $18:(-6) = -3$
h) $-24:8 = -3$
i) $(-4):(-2) = 2$
j) $0:(-47) = 0$
k) $-15:(-15) = 1$
l) $50:(-50) = -1$

Situación problema 16



65. Descubrí qué número se borró en cada caso y escribilo.

a. $(-15) \cdot$ .... $= -30$
b. .... $\cdot (-9) = 900$
c. $-240 :$ .... $= 120$
d. $360 :$ .... $= -36$
e. .... $: 7 = -6$
f. $83 :$ .... $= -83$
g. .... $: (-13) = 0$
h. $532 :$ .... $= -1$
i. .... $: (-500) = 1$

Figura 126. Extraída de (Kaczor, P; Outón, V.; 2016, p.19).

Esta situación problema es intramatemática y solicita completar con el número que falta para que se verifique el resultado.

Resolución:

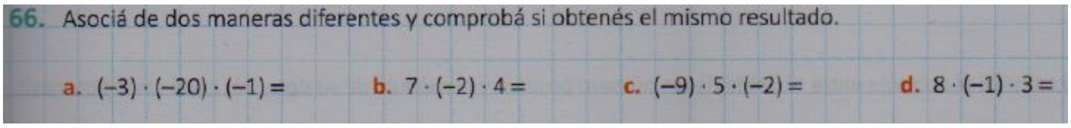
Para resolver esta actividad que involucra productos y cocientes de enteros y divisibilidad, hay que completar con el número que se necesita para obtener los resultados indicados **(procedimiento)**. De este modo, entra en juego la regla de los signos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones: el producto o el cociente entre dos números de igual signo, es positivo; mientras que el producto o el cociente entre dos números de distinto signo, es negativo.

a) $(-15).2 = -30$
b) $(-100).(-9) = 900$
c) $(-240):(-2) = 120$
d) $360:(-10) = -36$
e) $(-42):7 = -6$
f) $83:(-1) = -83$

g) $0:(-13)=0$ h) $532:(-532)=-1$ i) $(-500):(-500)=1$

Situación problema 17



66. Asociá de dos maneras diferentes y comprobá si obtenés el mismo resultado.

a. $(-3)\cdot(-20)\cdot(-1)=$ b. $7\cdot(-2)\cdot 4=$ c. $(-9)\cdot 5\cdot(-2)=$ d. $8\cdot(-1)\cdot 3=$

Figura 127. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.19).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en aplicar la propiedad asociativa del producto.

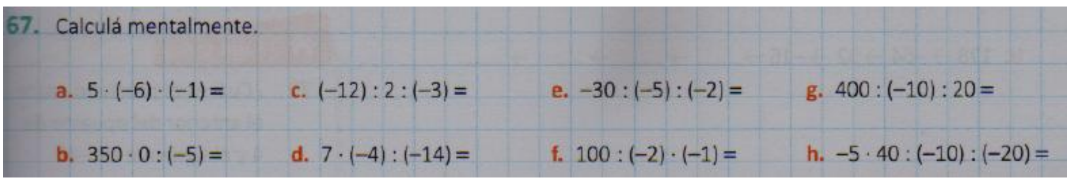
Resolución:

Esta actividad sobre productos y cocientes de enteros se resuelve aplicando la propiedad asociativa del producto **(propiedad utilizada como procedimiento)**, tanto en los primeros dos factores como en los dos últimos para verificar el resultado. También, es preciso aplicar la regla de los signos.

Procedimiento/ proposición: si los factores son negativos, el resultado es positivo; si los factores sonde distinto signo, el resultado es negativo.

a) Asociando los primeros dos factores: $[(-3).(-20)].(-1)=60.(-1)=-60$
   Asociando los últimos dos factores: $(-3).[(-20).(-1)]=(-3).20=-60$
b) Asociando los primeros dos factores: $[7.(-2)].4=-14.4=-56$
   Asociando los últimos dos factores: $7.[(-2).4]=7.(-8)=-56$
c) Asociando los primeros dos factores: $[(-9).5].(-2)=-45.(-2)=90$
   Asociando los últimos dos factores: $(-9).[5.(-2)]=(-9).(-10)=90$
d) Asociando los primeros dos factores: $[8.(-1)].3=(-8).3=-24$
   Asociando los últimos dos factores: $8.[(-1).3]=8.(-3)=-24$

Situación problema 18



67. Calculá mentalmente.

a. $5\cdot(-6)\cdot(-1)=$ c. $(-12):2:(-3)=$ e. $-30:(-5):(-2)=$ g. $400:(-10):20=$

b. $350\cdot 0:(-5)=$ d. $7\cdot(-4):(-14)=$ f. $100:(-2)\cdot(-1)=$ h. $-5\cdot 40:(-10):(-20)=$

Figura 128. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.19).

Esta situación problema pertenece a un contexto intramatemático y solicita resolver mentalmente productos y cocientes.

Resolución:

Esta actividad aborda la multiplicación y división de enteros y precisa aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones:

- el producto entre cero y cualquier otro número es cero;
- el producto o el cociente entre dos números de igual signo, es positivo;
- el producto o el cociente entre dos números de distinto signo, es negativo.

a) $5.(-6).(-1) = 30$

b) $350.0:(-5) = 0$

c) $(-12):2:(-3) = 2$

d) $7.(-4):(-14) = 2$

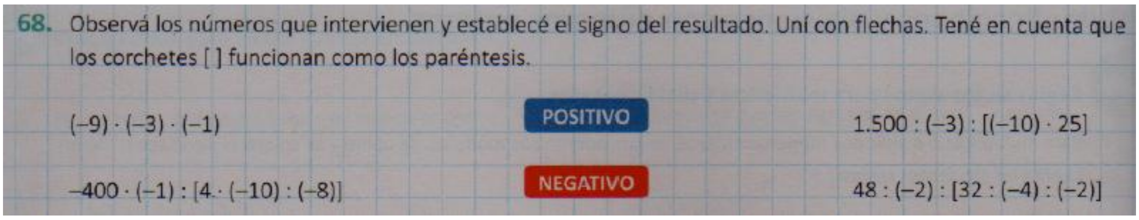
e) $(-30):(-5):(-2) = -3$

f) $100:(-2).(-1) = 50$

g) $400:(-10):20 = -2$

h) $-5.40:(-10):(-20) = -1$

Situación problema 19



68. Observá los números que intervienen y establecé el signo del resultado. Uní con flechas. Tené en cuenta que los corchetes [ ] funcionan como los paréntesis.

$(-9) \cdot (-3) \cdot (-1)$ POSITIVO $1.500 : (-3) : [(-10) \cdot 25]$

$-400 \cdot (-1) : [4 \cdot (-10) : (-8)]$ NEGATIVO $48 : (-2) : [32 : (-4) : (-2)]$

Figura 129. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.20).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en identificar qué signo tiene el resultado de los cálculos.

Resolución:

Para resolver esta actividad sobre productos y cocientes de números enteros, es necesario valorar cuántos números negativos, a modo de factores, dividendo o divisor, operan en el cálculo. A partir de allí aplicar la regla de los signos. Si suman una cantidad par de números negativos, el resultado será mayor que cero; pero si suman una cantidad impar de números negativos, el resultado será menor que cero **(procedimiento y proposición)**. A continuación, se muestran los resultados:

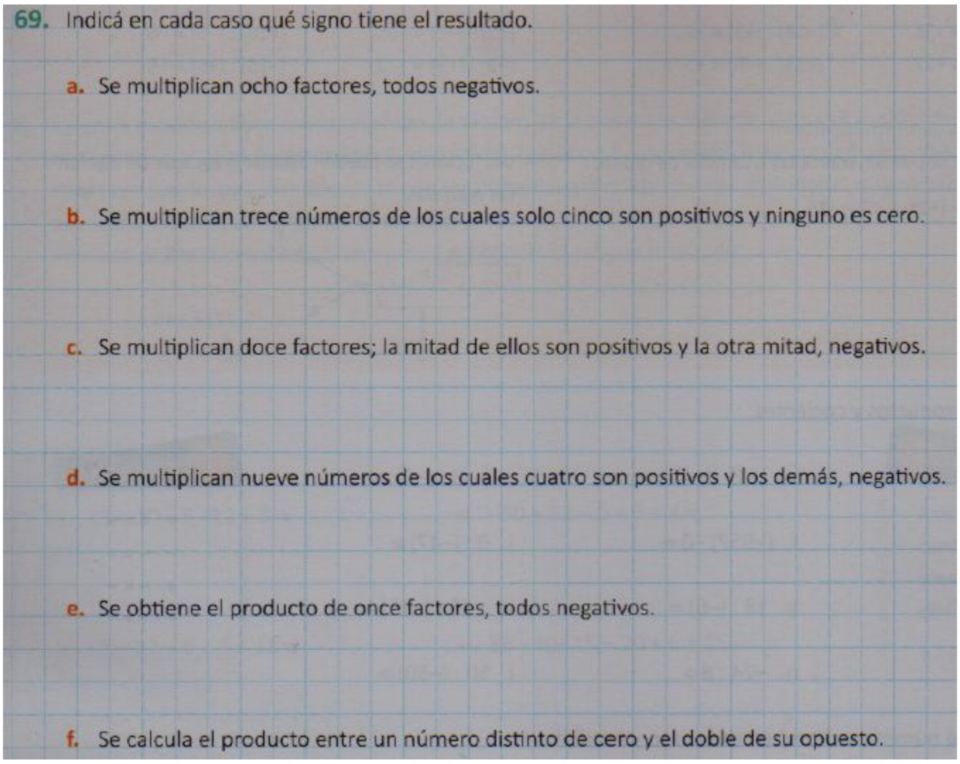
En $(-9).(-3).(-1)$, hay tres factores negativos, por lo tanto, el resultado es negativo.

En $-400.(-1):[4.(-10):(-8)]$, intervienen 4 números negativos, por lo tanto, el resultado es positivo.

En $1500:(-3):[(-10).25]$, intervienen 2 números negativos, por lo tanto, el resultado es positivo.

En $48:(-2):[32:(-4):(-2)]$, intervienen 3 números negativos, por lo tanto, el resultado es negativo.

Situación problema 20



69. Indicá en cada caso qué signo tiene el resultado.

a. Se multiplican ocho factores, todos negativos.

b. Se multiplican trece números de los cuales solo cinco son positivos y ninguno es cero.

c. Se multiplican doce factores; la mitad de ellos son positivos y la otra mitad, negativos.

d. Se multiplican nueve números de los cuales cuatro son positivos y los demás, negativos.

e. Se obtiene el producto de once factores, todos negativos.

f. Se calcula el producto entre un número distinto de cero y el doble de su opuesto.

Figura 130. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.20).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en identificar qué signo tiene el resultado de los cálculos.

Resolución:

En esta actividad sobre la multiplicación de números enteros, es preciso valorar cuántos factores negativos hay en el cálculo. Si suman una cantidad par de factores negativos, el resultado será mayor que cero; pero si suman una cantidad impar de factores negativos, el resultado será menor que cero **(procedimiento y proposición)**.

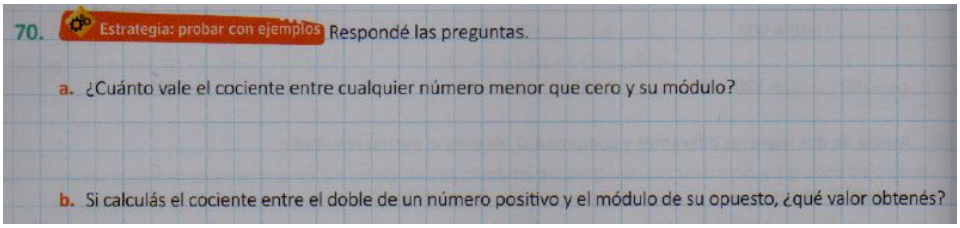
a) El producto de 8 factores negativos es positivo.
b) El producto entre 8 factores negativos y 5 positivos es positivo.
c) El producto entre 6 factores negativos y 6 positivos es positivo.

d) El producto entre 4 factores positivos y 5 negativos es negativo.

e) El producto entre 11 factores negativos es negativo.

f) El producto entre 1 número y el doble de su opuesto quiere decir que hay un factor de cada signo, por lo que es negativo.

Situación problema 21



70. Estrategia: probar con ejemplos Respondé las preguntas.

a. ¿Cuánto vale el cociente entre cualquier número menor que cero y su módulo?

b. Si calculás el cociente entre el doble de un número positivo y el módulo de su opuesto, ¿qué valor obtenés?

Figura 131. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.20).

Esta situación problema es intramatemática y plantea encontrar el resultado de cocientes particulares.

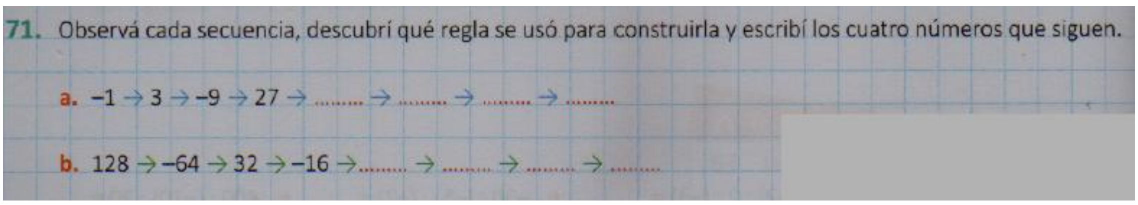
Resolución:

En esta actividad sobre cocientes y el módulo de un número **(concepto)** se pueden tomar varios casos particulares a modo de experimentación e identificar alguna regularidad, para luego, generalizar el resultado. También, es preciso aplicar la regla de los signos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones: el cociente entre un número negativo y otro positivo, es negativo, y el cociente entre dos números del mismo signo, es positivo.

En el primer inciso, se observa que el dividendo es negativo y el divisor es positivo; por lo tanto, el cociente será -1. En el segundo inciso, tanto el dividendo como el divisor, resultan positivos. Como el dividendo es el doble que el divisor, el resultado es 2 **(procedimiento)**.

Situación problema 22



71. Observá cada secuencia, descubrí qué regla se usó para construirla y escribí los cuatro números que siguen.

a. $-1 \rightarrow 3 \rightarrow -9 \rightarrow 27 \rightarrow$ ……… $\rightarrow$ ……… $\rightarrow$ ……… $\rightarrow$ ………

b. $128 \rightarrow -64 \rightarrow 32 \rightarrow -16 \rightarrow$ ……… $\rightarrow$ ……… $\rightarrow$ ……… $\rightarrow$ ………

Figura 132. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.20).

Esta situación problema pertenece a un contexto intramatemático y consiste en identificar la regularidad entre los términos y completar la secuencia.

Resolución:

En la primera secuencia de números, se observa que los valores se triplican pero, al mismo tiempo, alternan signo. Eso quiere decir que para encontrar el término siguiente, hay que multiplicar por -3 al número anterior **(procedimiento)**. La secuencia completa es $-1; 3;\ -9; 27;\ -81; 243;\ -729;\ 2187$.

Propiedades/proposiciones que intervienen en este ítem: el producto entre dos factores de distinto signo, es negativo; y el producto entre dos factores de mismo signo, es positivo.

En la segunda secuencia observa que los números se reducen a la mitad y alternan el signo. Eso quiere decir que para encontrar el término siguiente, hay que dividir por -2 al anterior. La secuencia completa es $128;\ -64; 32;\ -16; 8;\ -4; 2;\ -1$.

Para esta situación problema se involucra el producto y cociente de enteros y se aplica la regla de los signos **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones que intervienen en este ítem: el cociente entre dos números de distinto signo, es negativo; y el cociente entre dos números de mismo signo, es positivo.

Situación problema 23

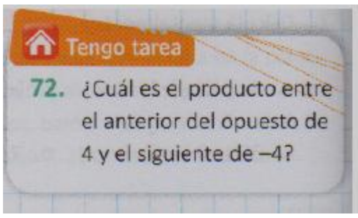


Figura 133. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.20).

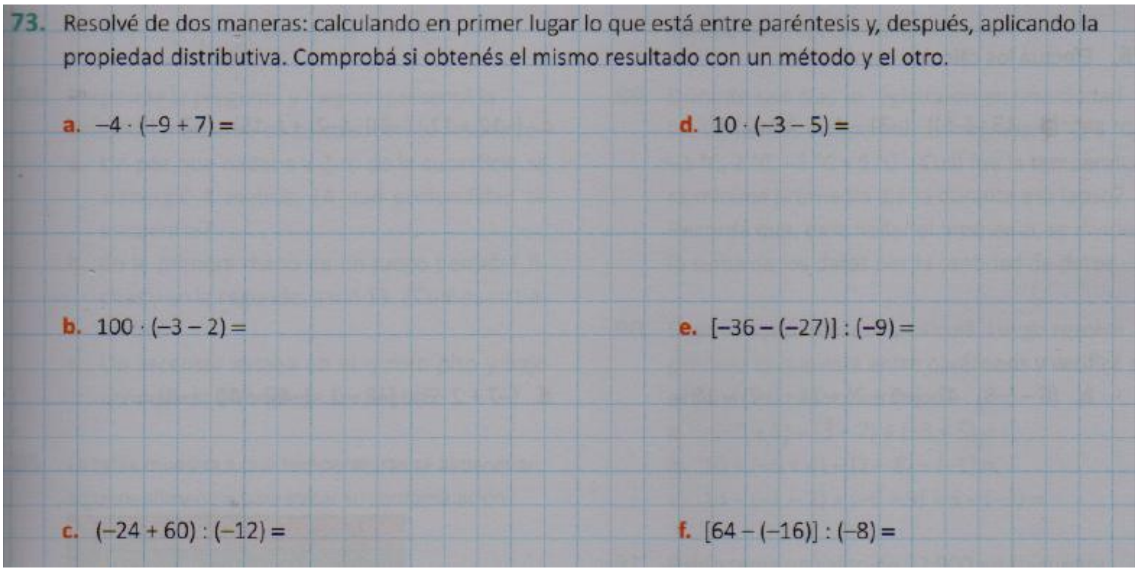
Esta situación problema es intramatemática y solicita encontrar el resultado de un cálculo expresado coloquialmente.

Resolución:

Para resolver esta actividad, hay que traducir del lenguaje coloquial al simbólico. El anterior del opuesto de 4 es -5, mientras que el siguiente de -4, es -3 **(concepto).** El producto entre esos números, aplicando la regla de los signos, es $(-5).(-3) = 15$ **(procedimiento)**.

Propiedad/proposición: el producto entre dos factores del mismo signo permite obtener un resultado positivo.

Situación problema 24



73. Resolvé de dos maneras: calculando en primer lugar lo que está entre paréntesis y, después, aplicando la propiedad distributiva. Comprobá si obtenés el mismo resultado con un método y el otro.

a. $-4 \cdot (-9 + 7) =$

d. $10 \cdot (-3 - 5) =$

b. $100 \cdot (-3 - 2) =$

e. $[-36 - (-27)] : (-9) =$

c. $(-24 + 60) : (-12) =$

f. $[64 - (-16)] : (-8) =$

Figura 134. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.21)

Esta situación problema corresponde a un contexto intramatemático y plantea resolver los cálculos combinados con dos métodos distintos.

Resolución:

Esta actividad involucra la suma, resta, multiplicación y división de números enteros **(procedimientos)**. La consigna solicita resolver por mediode dos métodos; en uno, calcular los paréntesis y resolver; en el otro, aplicar la propiedad distributiva **(propiedad aplicada como procedimiento)**. En ambos métodos es necesaria la regla de los signos, la supresión de paréntesis y constatar que ambas resoluciones permitan obtener el mismo resultado **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

- si en una suma o resta, los términos tienen el mismo signo, el resultado es el mismo signo;
- si en una suma o resta los términos tienen distinto signo, el resultado lleva el signo del término con valor absoluto mayor;

- el producto o cociente entre dos números negativos, es positivo;
- el producto o cociente entre dos números de distinto signo, es negativo.

a) Sin propiedad distributiva:

$-4.(-9+7) = -4.(-2) = 8$

Con propiedad distributiva:

$-4.(-9+7) = (-4).(-9) + (-4).7 = 36 - 28 = 8$

b) Sin propiedad distributiva:

$100.(-3-2) = 100.(-5) = -500$

Con propiedad distributiva:

$100.(-3-2) = 100.(-3) + 100.(-2) = -300 - 200 = -500$

c) Sin propiedad distributiva:

$(-24+60):(-12) = 36:(-12) = -3$

Con propiedad distributiva:

$(-24+60):(-12) = (-24):(-12) + 60:(-12) = 2 - 5 = -3$

d) Sin propiedad distributiva:

$10.(-3-5) = 10.(-8) = -80$

Con propiedad distributiva:

$10.(-3-5) = 10.(-3) + 10.(-5) = -30 - 50 = -80$

e) Sin propiedad distributiva:

$[-36-(-27)]:(-9) = (-36+27):(-9) = (-9):(-9) = 1$

Con propiedad distributiva:

$[-36-(-27)]:(-9) = (-36):(-9) - (-27):(-9) = 4 - 3 = 1$

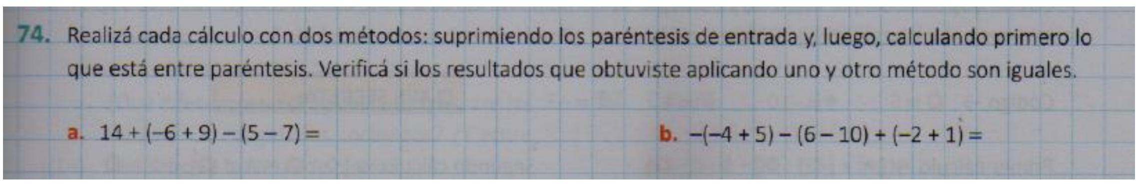
f) Sin propiedad distributiva:

$[64-(-16)]:(-8) = (64+16):(-8) = 80:(-8) = -10$

Con propiedad distributiva:

$[64 — 16):(-8) = 64:(-8) — 16:(-8) = -8 - 2 = -10$

Situación problema 25


74. Realizá cada cálculo con dos métodos: suprimiendo los paréntesis de entrada y, luego, calculando primero lo que está entre paréntesis. Verificá si los resultados que obtuviste aplicando uno y otro método son iguales.

a. $14 + (-6 + 9) - (5 - 7) =$ **b.** $-(-4 + 5) - (6 - 10) + (-2 + 1) =$

Figura 135. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.21).

Esta situación problema corresponde a un contexto intramatemático y plantea resolver los cálculos combinados con dos métodos distintos.

Resolución:

Esta actividad involucra suma, resta, multiplicación y división de números enteros **(procedimientos)**. La consigna solicita resolver por dos métodos; en uno, suprimir los paréntesis y resolver; en el otro, resolver los paréntesis. Luego, hay que constatar que ambas resoluciones permitan obtener el mismo resultado **(procedimientos)**.

Propiedades/proposiciones:

- si en una suma o resta, los términos tienen el mismo signo, el resultado lleva el mismo signo;
- si en una suma o resta los términos tienen distinto signo, el resultado lleva el signo del término con valor absoluto mayor;
- el opuesto de un número negativo, es positivo;
- el opuesto de un número positivo, es negativo.

a) Suprimiendo paréntesis:

$14 + (-6 + 9) - (5 - 7) = 14 - 6 + 9 - 5 + 7 = 19$

Resolviendo paréntesis:

$14 + (-6 + 9) - (5 - 7) = 14 + 3 - (-2) = 14 + 3 + 2 = 19$

b) Suprimiendo paréntesis:

$-(-4 + 5) - (6 - 10) + (-2 + 1) = 4 - 5 - 6 + 10 - 2 + 1 = 2$

Resolviendo paréntesis:

$-(-4 + 5) - (6 - 10) + (-2 + 1) = -1 - (-4) + (-1) = -1 + 4 - 1 = 2$

Situación problema 26

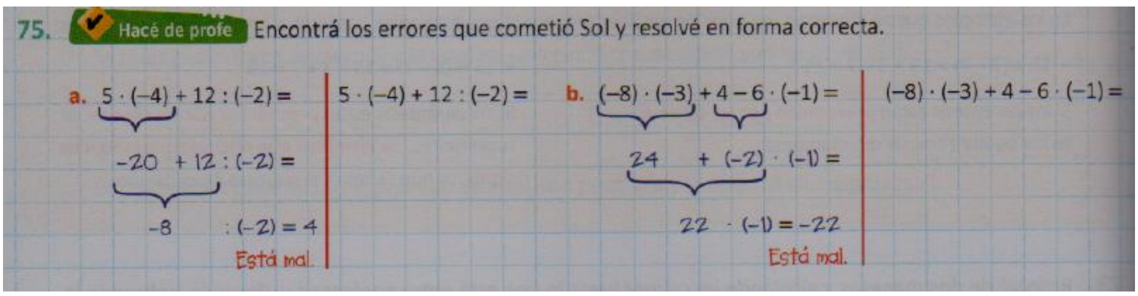


Figura 136. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.22).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en encontrar cuál es el error en la resolución de cálculos combinados y rehacer correctamente.

Resolución:

Esta actividad involucra suma, resta, multiplicación y división de enteros **(procedimientos)**. Además, resolver los cálculos requiere la supresión de paréntesis y la aplicación de la regla de los signos **(procedimientos)**. En ambos incisos, se muestra que Sol cometió errores por no separar en términos correctamente.

Propiedades/proposiciones:

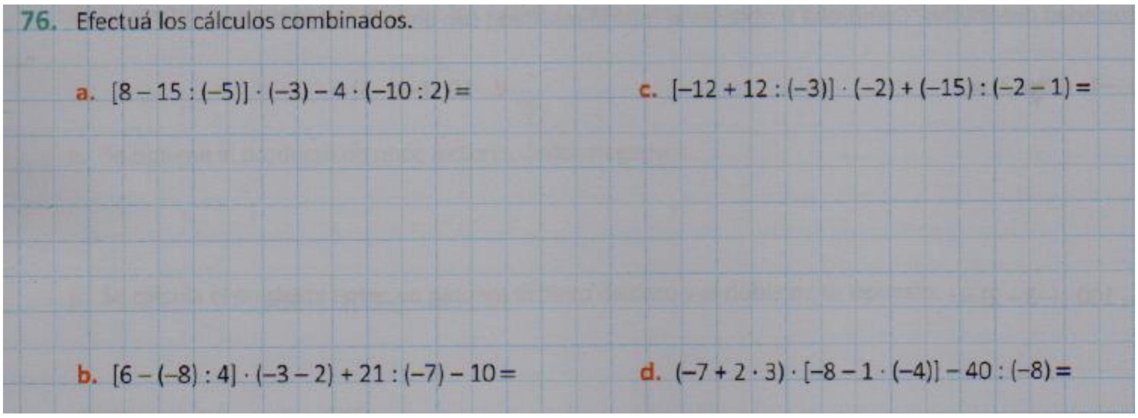
- si en una suma o resta, los términos tienen el mismo signo, el resultado lleva el mismo signo;
- si en una suma o resta, los términos tienen distinto signo, el resultado lleva el signo del término con valor absoluto mayor;
- el producto o cociente entre dos números negativos, es positivo;
- el producto o cociente entre dos números de distinto signo, es negativo.

La resolución correcta es:

a) $5.(-4) + 12:(-2) = -20 + (-6) = -10 - 6 = -26$

b) $(-8).(-3) + 4 - 6.(-1) = 24 + 4 + 6 = 34$

Situación problema 27



76. Efectuá los cálculos combinados.

a. $[8 - 15 : (-5)] \cdot (-3) - 4 \cdot (-10 : 2) =$

c. $[-12 + 12 : (-3)] \cdot (-2) + (-15) : (-2 - 1) =$

b. $[6 - (-8) : 4] \cdot (-3 - 2) + 21 : (-7) - 10 =$

d. $(-7 + 2 \cdot 3) \cdot [-8 - 1 \cdot (-4)] - 40 : (-8) =$

Figura 137. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.22).

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver cálculos combinados con números enteros.

Resolución:

Para efectuar estas sumas, restas, productos y cocientes de números enteros, es necesario separar en términos en el interior y exterior del corchete, aplicar la regla de los signos y suprimir paréntesis **(procedimiento)**.

Propiedades/proposiciones:

- si en una suma o resta, los términos tienen el mismo signo, el resultado lleva el mismo signo;
- si en una suma o resta, los términos tienen distinto signo, el resultado lleva el signo del término con valor absoluto mayor;
- el producto o cociente entre dos números negativos, es positivo;
- el producto o cociente entre dos números de distinto signo, es negativo.

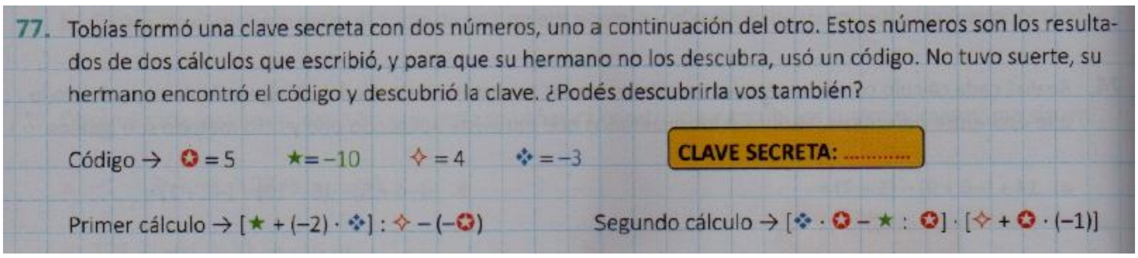
a) $[8-15:(-5)].(-3)-4.(-10:2)=[8+3].(-3)-4.(-5)=11.(-3)+20=\ -33+20=-13$

b) $[6-(-8):4].(-3-2)+21:(-7)-10=[6-(-2)].(-5)+(-3)-10=$
$[6+2].(-5)-3-10=8.(-5)-3-10=-40-3-10=-53$

c) $[-12+12:(-3)].(-2)+(-15):(-2-1)=[-12+(-4)].(-2)+(-15):(-3)=[-12-$
4.−2+5=−16.−2+5=32+5=37

d) $(-7+2.3).[-8-1.(-4)]-40:(-8)=(-7+6).[-8+4]+5=(-1).(-4)+5=4+5=9$

Situación problema 28


77. Tobías formó una clave secreta con dos números, uno a continuación del otro. Estos números son los resultados de dos cálculos que escribió, y para que su hermano no los descubra, usó un código. No tuvo suerte, su hermano encontró el código y descubrió la clave. ¿Podés descubrirla vos también?

Código → ✪ = 5 ★ = −10 ✧ = 4 ❖ = −3

CLAVE SECRETA: ....

Primer cálculo → [★ + (−2) · ❖] : ✧ − (−✪)

Segundo cálculo → [❖ · ✪ − ★ : ✪] · [✧ + ✪ · (−1)]

Figura 138. Extraída de Kaczor y Outón (2016, p.22).

Esta situación problema es extramatemática y consiste en develar una clave secreta a partir de operar con enteros.

Resolución:

Laactividad involucra suma, resta, producto y cociente de números enteros. Para develar la clave, hay que observar la estructura de los cálculos y reemplazar cada símbolo por los números secretos. En el proceso de resolución, es necesario separar en términos, aplicar la regla de los signos y la extracción de paréntesis **(procedimiento, proposición)**.

Primer cálculo: $[-10+(-2).(-3)]:4-(-5)=[-10+6]:4+5=4:4+5=1+5=6$

Segundo cálculo: $[(-3).5-(-10).5].[4+5.(-1)]=[-15+50].[4-5]=35.(-1)=-35$

5.4.6.2 Tabla de objetos primarios y emergentes del Libro 6

Situación Problema y propuesta	Conceptos		Propiedades		Procedimientos		Argumentos			Lenguaje		
	P	**E**	**P**	**E**	**P**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Situación problema 1 extramatemática: contestar preguntas respecto al movimiento de un ascensor y los pisos de un edificio.	*		*		*					*	*	
Situación problema2 extramatemática: contestar preguntas respecto al ascenso y descenso de temperaturas y los metros debajo del nivel del mar.	*		*		*					*	*	
Situación problema 3intramatemática: resolver sumas entre números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 4 extramatemática: calcular la amplitud térmica.	*		*		*					*	*	
Situación problema 5 intramatemática: resolver sumas y restas de enteros y seleccionar qué cálculo representa la situación problema anterior.	*		*		*						*	
Situación problema 6intramatemática: resolver estas entre números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 7 extramatemática: calcular cuántos años vivió el emperador Augusto.	*		*		*				*	*	*	
Situación problema 8intramatemática: extraer paréntesis y resolver sumas y restas.	*		*		*						*	
Situación problema 9extramatemática: responder preguntas sobrela ubicación de un minero.	*		*		*				*	*	*	*
Situación problema 10 extramatemática: calcular en qué casilla del tablero queda posicionada la ficha del jugador.	*		*		*					*	*	
Situación problema 11intramatemática: resolver sumas algebraicas.	*		*		*						*	
Situación problema 12intramatemática: resolver las sumas y restas entre enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 13 extramatemática: calcular la temperatura que hubo en cierto lugar a partir de las variaciones que hubo en el día.	*		*		*					*	*	
Situación problema 14extramatemática: calcular en qué piso se encuentra un ascensor.	*		*		*					*	*	
Situación problema 15intramatemática: resolver productos y cocientes entre números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 16intramatemática: completar con el número que falta	*		*		*						*	

Situación problema 17intramatemática: aplicar la propiedad asociativa del producto.	*		*		*						*	
Situación problema 18intramatemática: resolver mentalmente productos y cocientes.	*		*		*						*	
Situación problema 19intramatemática: identificar qué signo va a tener el resultado de los cálculos.	*		*		*						*	
Situación problema 20intramatemática: identificar qué signo va a tener el resultado de los cálculos.	*		*		*					*		
Situación problema 21intramatemática: encontrar el resultado de cocientes particulares.	*		*		*					*	*	
Situación problema 22intramatemática: identificar la regularidad entre los términos y completar la secuencia.	*		*		*						*	
Situación problema 23 intramatemática: encontrar el resultado de un cálculo expresado coloquialmente.	*		*		*					*	*	
Situación problema 24 intramatemática: resolver los cálculos combinados con dos métodos distintos.	*		*		*						*	
Situación problema 25 intramatemática: resolver los cálculos combinados con dos métodos distintos.	*		*		*						*	
Situación problema26intramatemática: encontrar el error en la resolución de cálculos combinados y rehacer correctamente.	*		*		*						*	
Situación problema 27intramatemática: resolver cálculos combinados con números enteros.	*		*		*						*	
Situación problema 28 extramatemática: develar la clave secreta a partir de operar con enteros.	*		*		*					*	*	

P: Previos — Pp: Propiedades — S: Simbólico

E: Emergentes — Pr: Procedimientos — G: Gráfico

C: Conceptos — V: Verbal

Tabla 6:Identificación de elementos primarios del Libro 6

5.4.6.3Configuración epistémica del Libro 6

A continuación, se muestra la configuración epistémica con la red de objetos intervinientes extraída de la resolución de las 28 situaciones problema que involucran las 4 operaciones fundamentales, entre enteros que se hallan en el Capítulo 1 del libro.

Se encuentra 20 situaciones problema (71,42% del total) pertenecientes a un contexto intramatemático, mientras que las 8 restantes (el 28,57% del total) se plantean en contextos extramatemáticos. Se hallan 3 consignas (10,71% del total) que involucran alguna propiedad como procedimiento.

Respecto del lenguaje, el más utilizado es el simbólico; ya que las 28 situaciones problema lo requieren (100% del total), de las cuales 13 consignas (46,43% del total) apelan, además, al lenguaje verbal, mientras que solo 1 (3,57% del total), involucra el lenguaje gráfico.

En relación a la elaboración de argumentos, se observa que 2 consignas (7,14% del total) solicitan que se argumente sus procedimientos.

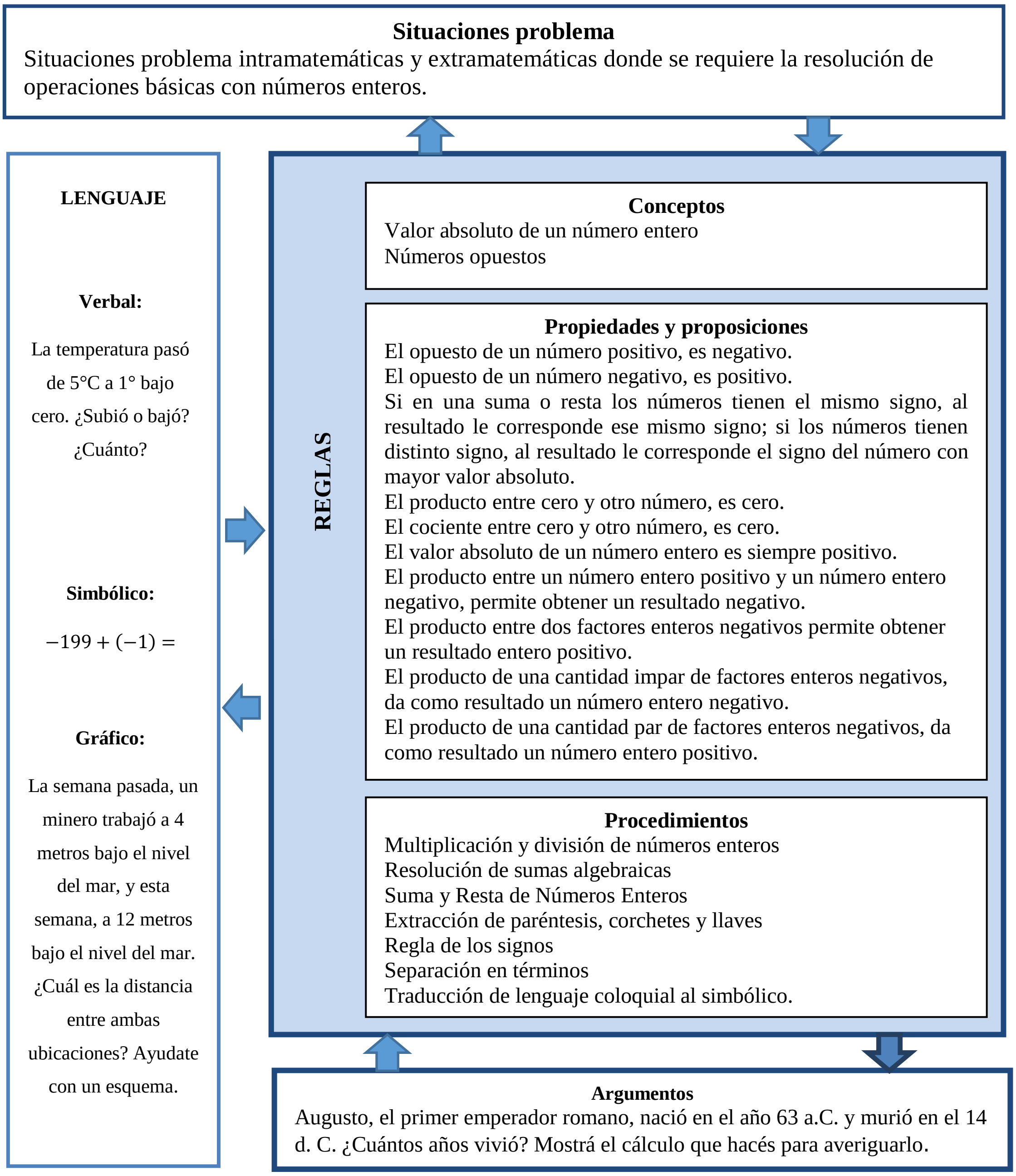


Figura 139: Configuración epistémica del Libro 6

CAPÍTULO 6

DISEÑO, VALIDACIÓN Y APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

6. DISEÑO Y VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

6.1 Diseño del Instrumento

La configuración epistémica de referencia fue elaborada a partir de libros de texto escolares de uso frecuente, el Diseño Curricular provincial y la revisión bibliográfica de investigaciones donde se reportan errores y dificultades cometidos habitualmente por los alumnos cuando trabajan con números enteros. A partir de ella, se diseñó un instrumento que manifiesta la red de relaciones que activan los estudiantes. El mismo, evidencia la comprensión alcanzada al trabajar con situaciones que involucran las operaciones con números negativos, además de revelar el tipo de prácticas operativas y discursivas que desencadenan conflictos, errores o dificultades.

Dicho instrumento está compuesto de siete actividades adaptadas de los libros que fueron objeto de análisis con el propósito de satisfacer los criterios establecidos por Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017) para los enunciados de las consignas. Para poder realizarlo, se llevaron a cabo los siguientes pasos:

(a) Resolución experta y elaboración de la configuración epistémica de las situaciones presentadas a los estudiantes de 2do año de participación voluntaria. La resolución experta de las situaciones problema colaboró tanto en la detección de eventuales dificultades o conflictos semióticos potenciales de los estudiantes como en la anticipación de los procedimientos para su resolución.

(b) Detección de los posibles errores que pudieran cometer los estudiantes al operar en el conjunto numérico de los números enteros en la resolución de las actividades. Esto ayudó a la clasificación de errores encontrados en las investigaciones, detalladas en el Capítulo 2 de esta tesina, según diversas categorías.

(c) Análisis del potencial matemático y actividad matemática de las situaciones problema. Aquí se toma la valoración que realizan Barreiro *et al* (2017, p.27) respecto a que el potencial matemático de una consigna alude:

    - “a las *posibilidades de exploración* que la consigna habilita o no; y
    - a las *posibilidades de argument*ar sobre la validez de la resolución o de la respuesta.”

    En este sentido, cabe destacar que en esta investigación se consideran valiosas las diferentes posibilidades de exploración y argumentación que una consigna pueda admitir por parte de los estudiantes, ya que les permite tomar decisiones, organizar modos para abordar la resolución, recurrir a heurísticas, utilizar distintas habilidades generales matemáticas, reflexionar sobre los intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer una manera de explicar el porqué de la respuesta y validar las conjeturas que emergen del proceso. Este recorrido se asimila al trabajo del matemático, lo que legitima el tipo de actividad esperada por el profesor de matemática en el aula, además de poner en evidencia los errores y dificultades, que son el objeto de estudio de la investigación.

Respecto de las posibilidades de exploración, siguiendo a Barreiro *et al* (2017), se entiende que este proceso se favorece si la consigna admite diferentes caminos de resolución y si no incluye los pasos a seguir, es decir, que no está pautado para un mismo fin y no se le indica al estudiante de qué manera debe hacer la actividad.

En cuanto a la actividad matemática, se entiende como el desempeño, trabajo o quehacer del estudiante, ante una situación problema determinada. En este sentido, la actividad matemática será valiosa si el potencial matemático de la consigna es rico, si el docente le asigna un rol activo al estudiante y si el objetivo que se persigue es cognitivamente exigente.

(d) Validación del instrumento por cuatro pares expertos, que dieron recomendaciones y sugerencias para el mejoramiento del mismo.

6.1.1 La selección de las consignas

Problema 1

El problema original fue tomado de Kaczor y Outón (2016, p.18). Con el objetivo de fomentar las habilidades argumentativas, se solicitó a los alumnos justificar la respuesta. El problema 1 queda de la siguiente manera:

> En una localidad se experimentaron los siguientes cambios de temperatura: amaneció a 3 grados bajo cero, al mediodía la temperatura había aumentado en 8 grados y a las 4 de la tarde había subido otros 2 grados. Desde esa hora hasta la medianoche bajó 4 grados, y desde la medianoche hasta las 6 de la mañana siguiente bajó 5 grados más. ¿Qué temperatura hubo a esa hora? Justificá tu respuesta.

Esta situación problema corresponde a un contexto extramatemático en la que se pide calcular la temperatura que hubo en cierto lugar a partir de conocer las modificaciones de la misma.

Resolución:

La situación problema aborda los números enteros, específicamente la suma y la resta. Para hallar la solución se puede calcular la temperatura solo a partir del contexto **(procedimiento)**. También es posible sumar o restar siguiendo lo que menciona el problema, es decir: si había amanecido a 3 grados bajo cero, al mediodía la temperatura había aumentado en 8 grados, lo que sería$-3+8=5$. A las 4 de la tarde,había subido otros 2 grados, entonces hay que calcular $5+4=7$. Luego, bajó 4 grados, reflejándose $7-4=3$. Finalmente, descendió 5 grados más, quedando$3-5=-2;$ como resultando, se obtiene 2 grados bajo cero **(procedimiento)**.

Otra forma de resolver la situación problema es plantear la suma algebraica $-3+8+2-4-5$. En este momento, se puede decidir si se resuelve calculando la diferencia entre los ascensos de temperatura y sus descensos, que involucraría sumar los números positivos, y restar la suma de los números negativos: $-3+8+2-4-5=(8+2)-(3+4+5)=10-12=-2$. En este punto, se debería interpretar que a las 6 de la mañana había 2 grados bajo cero. Para realizar el procedimiento mencionado, es necesario conmutar y asociar **(procedimiento y propiedades)**.

Otra posibilidad es resolver la suma algebraica sumando o restando de a dos términos **(procedimiento)**. Es decir,$-3+8+2-4-5=5-2-5=3-5=-2$. También, existe la posibilidad de resolver la consigna a partir de desplazar a izquierda y a derecha en la recta numérica **(procedimiento).**

Las **propiedades/proposiciones** que intervienen en la resolución con suma o resta son: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

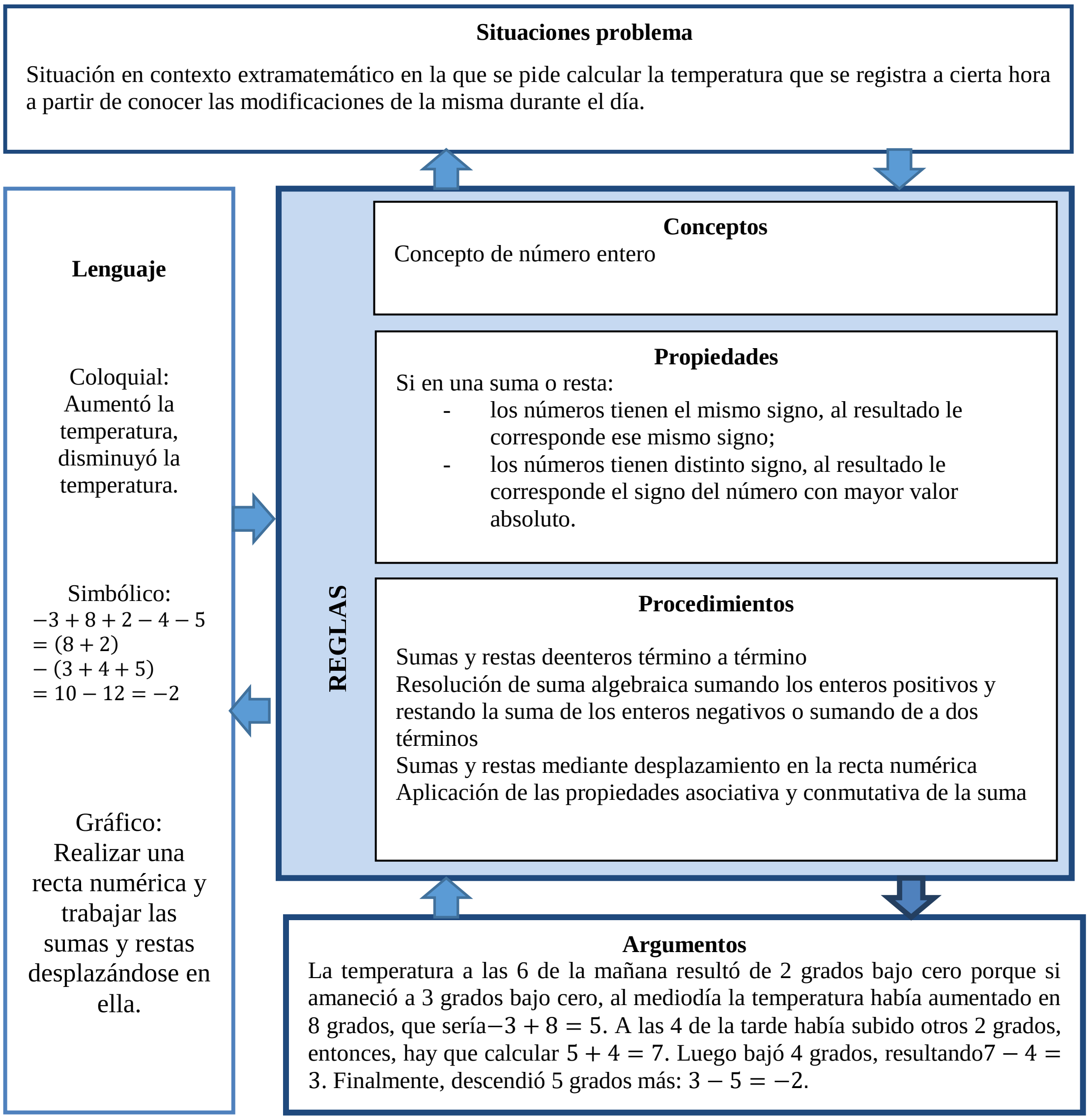


Figura 140: Configuración Epistémica del problema 1

Los posibles errores y dificultades que puede evidenciar un alumno, son los siguientes:

- Que no resuelva el problema o lo resuelva en forma parcial.
- Que no interprete la temperatura bajo cero como entero negativo, es decir, que no advierta que la temperatura inicial es -3. O que después de resolver, conteste que la temperatura es 2 grados sin aclarar que es por debajo de cero, no atendiendo al signo. Esta respuesta resulta incompleta y manifiesta la dificultad de ignorar el signo, tal como la reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

- Que determine que el resultado de una suma o resta es un entero positivo o negativo, pero justifique erróneamente "menos por más, es menos" o "menos por menos, es más" haciendo referencia a la regla de los signos del producto y conduciendo a lo que Radatz (1980) denomina un error de interferencia.
- Que resuelva incorrectamente las sumas y restas de enteros; error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío. Podría suceder que el alumno quiera sumar o restar números enteros y decida:
  a) restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
  b) restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
  c) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
  d) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
- Que cometa errores de cálculo, es decir, que por distracción resuelva mal alguna operación (ejemplo: decir que $-4-5 \text{ es } -8$), tome mal los datos del enunciado o transcriba mal de un renglón a otro. Este tipo de errores son llamados errores técnicos según Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995).
- Que intente resolver la suma algebraica asociando la suma de los positivos y restando la suma de los negativos, pero que finalmente reste la diferencia entre los negativos. Este tipo de error puede clasificarse como teoremas, definiciones (o reglas) deformadas según proponen Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995) Por ejemplo,$-3+8+2-4-5=(8+2)-(-3-4-5)=10-(-12)=10+12=22$.

Análisis del potencial matemático de la consigna

Por un lado, se observa que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Además, la consigna solicita justificar la respuesta, fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual se valora el potencial matemático de este. Por otra parte, este enunciado atiende los criterios mencionados por Barreiro *et all* (2017) para las consignas matemáticas ya que, al relatar una situación en un contexto real, se propone una pregunta que tenga que ver con ese relato y su contexto.

Problema 2

El problema original fue tomado de Effenberger (2013, p.14). Para fomentar las prácticas argumentativas, se decidió adaptarlo y solicitar que expliquen las respuestas que anotan. La consigna del problema 2 quedó enunciada de la siguiente manera:

En la tabla figuran algunos hechos históricos:

Hechos históricos	Año
Se establece la República en Roma	509 a. C.
Comienza la Primera Guerra Púnica	264 a. C.
Grecia es convertida en provincia romana	146 a C.
Augusto toma el título de Emperador	27 a C.
Trajano asume como Emperador	98 d C.
Se divide el Imperio en Imperio de Oriente e Imperio de Occidente	395 d C.
Cae el imperio Romano de Occidente en poder de los invasores	476 d C.

Respondé las siguientes preguntas. Explicá tus respuestas.

a) La primera Guerra Púnica duró 23 años, ¿en qué año terminó?
b) Augusto murió 41 años después de lograr el título de Emperador, ¿en qué año murió?
c) ¿Cuántos años pasaron desde que en Roma estableció la República hasta que Grecia fue anexada como provincia romana?
d) ¿Cuántos años pasaron desde que Augusto asumió como Emperador hasta la caída del Imperio Romano de Occidente?
e) ¿Cuántos años pasaron desde que se establece la República hasta que se divide el Imperio?

Esta situación problema es de índole extramatemática. Se presentan tabulados los años en que acontecieron ciertos hechos históricos y, a partir de allí, se plantean preguntas sobre cuántos años pasaron entre un suceso y otro.

Resolución:

Para abordar esta situación problema, es necesario interpretar lo que se pregunta y, luego de observar la tabla, traducir de lenguaje coloquial al simbólico expresándolo mediante un cálculo.

a) La primera Guerra Púnica duró 23 años. ¿En qué año terminó?

Para contestar esta pregunta es necesario tomar el año de este evento, que es -264, por suceder en el año 264 a.C., y sumarle la cantidad de años que dura la guerra, que son 23. De esa forma, queda planteada la siguiente operación entre números enteros: $-264 + 23 = -241$. Esto quiere decir que la Guerra finalizó en el año 241 antes de Cristo **(procedimiento)**.

También se puede utilizar una recta numérica como recurso para visualizar los datos y, a partir de desplazamientos en la misma, plantear la suma **(procedimiento)**.

b) Augusto murió 41 años después de lograr el título de Emperador, ¿en qué año murió?

Para responder este inciso hay que sumarle 41 al año cuando Augusto toma el título de Emperador, que es el -27. De esa forma, queda planteado el cálculo $-27 + 41 = 14$. Es decir que murió en el año 14 después de Cristo, ya que el resultado toma signo positivo **(procedimiento)**.

También se puede utilizar una recta numérica como recurso para visualizar los datos y, a partir de desplazamientos en la recta, realizar la suma **(procedimiento)**.

c) ¿Cuántos años pasaron desde que en Roma se estableció la República hasta que Grecia fue anexada como provincia romana?

Para esta pregunta, puede ser que se relacione la distancia de los años de los sucesos con la diferencia de los valores absolutos de los años **(concepto de valor absoluto)**, quedando planteado el cálculo $|-509| - |-146| = 509 - 146 = 363$. Es decir que transcurrieron 363 años entre un evento y otro.

También se puede utilizar una recta numérica como recurso para visualizar los datos y, a partir del desplazamiento en la misma, calcular la resta **(procedimiento)**.

d) ¿Cuántos años pasaron desde que Augusto asumió como Emperador hasta la caída del Imperio Romano de Occidente?

Para este inciso, se puede sumar $|-27| + 476 = 27 + 476 = 503$. Es decir que transcurrieron 503 años entre ambos eventos **(procedimiento)**.

También se puede utilizar una recta numérica como recurso para visualizar los datos, y a partir de los desplazamientos en la misma, realizar la suma **(procedimiento)**.

e) ¿Cuántos años pasaron desde que se establece la República hasta que se divide el Imperio?

Para este inciso, se puede plantear $|-509| + 395 = 509 + 395 = 904.$ Es decir que transcurrieron 904 años entre ambos sucesos **(procedimiento)**.

También se puede utilizar una recta numérica como recurso para visualizar los datos y, a partir de los desplazamientos en la misma, realizar la suma **(procedimiento)**. En todos los ítems se puede responder a partir del contexto **(procedimiento)** y aplicar las **propiedades/proposiciones:** si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Situaciones problema

Consigna extramatemática donde se presentan en forma de tabla los años en que acontecieron ciertos hechos históricos y se plantean preguntas sobre cuántos años pasaron entre un suceso y otro.

Lenguaje

Coloquial: ¿Cuántos años pasaron desde que Augusto asumió como Emperador hasta la caída del Imperio Romano de Occidente?

Simbólico: $|-27| + 476 = 27 + 476 = 503$

Gráfico: Resolución de sumas y restas a partir del desplazamiento en una recta numérica o línea de tiempo.

REGLAS

Conceptos

Concepto de número entero
Valor absoluto como distancia de un número al cero

Propiedades y proposiciones

Si en una suma o resta:

- los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo;
- los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

El valor absoluto de un número siempre es positivo.

Procedimientos

Suma y resta de números enteros
Suma y resta involucrando el valor absoluto de un número entero
Suma y resta utilizando un soporte gráfico, es decir, mediante el desplazamiento en la recta numérica o línea de tiempo

Argumentos

Para contestar en qué año terminó la guerra Púnica es necesario tomar el año de este evento, que es -264 por tener lugar en el año 264 a.C. y sumarle la cantidad de años que dura la guerra, que son 23. De esa forma, queda planteada la siguiente operación entre números enteros: $-264 + 23 = -241$. Esto quiere decir que la Guerra finalizó en el año 241 antes de Cristo.

Figura 141: Configuración Epistémica del problema 2

Los posibles errores y dificultades que puede evidenciar un alumno, son los siguientes:

- Que no resuelva el problema o lo resuelva en forma parcial.
- Que cuando se necesita calcular la distancia entre un suceso ocurrido antes de Cristo y otro sucedido después, se opere directamente sin calcular los años transcurridos desde el primer evento al año cuando nace Cristo. Aparece la secuencia temporal como fuente de errores, clasificación que mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

- Que resuelva incorrectamente las sumas y restas de enteros, error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío. Podría suceder que el alumno quiera sumar o restar números enteros y decida:
  a) restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
  b) restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
  c) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
  d) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
- Que determine que el resultado de una suma o resta es un entero positivo o negativo, pero justifique erróneamente "menos por más, es menos" o "menos por menos, es más" haciendo referencia a la regla de los signos del producto y conduciendo a un error de interferencia, tal como indica Radatz (1980).
- Que cometa errores de cálculo, es decir que por distracción resuelva mal alguna operación (ejemplo: decir que $-4-5 \text{ es} -8$), tome mal los datos de la tabla o transcriba mal de un renglón a otro. Este tipo de errores son llamados errores técnicos según Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995).
- Que no recuerde el concepto de valor absoluto, en caso de que el planteo realizado lo requiera.
- Que piense que el orden en los números negativos es el mismo que el orden natural,error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

Análisis del potencial matemático de la consigna:

En esta situación problemase observa que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Además, la consigna solicita justificar la respuesta fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual se valora el potencial matemático de este problema. Por otra parte, este enunciado atiende a los criterios mencionados por Barreiro *et all* (2017) para las consignas matemáticas, ya que, al relatar una situación en un contexto real, se propone una pregunta que tenga que ver con ese relato y su contexto.

Problema 3

El tercer problema se tomó de Crespo, Maradei y Starobinsky (2016, p. 8). Se decidió cambiar la redacción del enunciado para no anticipar posibles respuestas; ya que limitaría la interpretación decir que el resultado puede ser un número positivo, un número negativo o que la información no alcanza para determinarlo. Por tal motivo, el objetivo de este planteo es la exploración del problema y la elaboración de conclusiones por parte de los alumnos. Por ello, fue necesario quitar algunos incisos o reemplazarlos por otros que involucran productos y cocientes. Para reforzar la argumentación, se solicitó la explicación de cada respuesta.

El problema 3 quedó de la siguiente manera:

Determinar si es posible anticipar el signo que tendrá el resultado teniendo en cuenta que ***a*** es un número entero positivo y ***b*** es un número entero negativo. Explicar cada respuesta.

a) $a-7$
b) $a+|a|$
c) $b-7$
d) $b+|b|$
e) $a:(-1)$
f) $b:(-1)$
g) $a.b$
h) $-a.b$

Esta situación problema es intramatemática y consiste en evaluar si el resultado es un entero positivo, un entero negativo o no puede saberse.

Resolución:

Esta situación problema involucra sumas, restas y el módulo de un número **(concepto)**. Para resolverla, el alumno debe considerar que a es entero positivo y b es entero negativo, tal como indica el enunciado.

a) $\mathrm{a}-7$

Se sabe que a es un número entero positivo, pero se desconoce si es mayor que 7, de tal forma que, al restar con 7, se obtenga un número entero positivo; o bien, si es menor que 7, obtener al restar un número entero negativo. También podría considerarse que sea igual a 7 obteniendo cero de resultado, que es neutro **(propiedad)**. Por lo tanto, no puede se puede decir algo respecto signo del resultado, ya que el cero no tiene signo **(procedimiento)**.

También se puede probar reemplazar a por distintos números y evaluar los signos de los resultados obtenidos, aunque ese procedimiento podría conducir a errores por tomar solo ejemplos con cierto tipo de característica en común **(procedimiento)**.

Se puede aplicar la siguiente **propiedad/proposición** en una suma o resta: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

b) $\mathrm{a} + |\mathrm{a}|$

Debido a que a es positivo como indica el enunciado y $|\mathrm{a}|$ también **(propiedad)**, la suma de dos números positivos es positiva **(procedimiento y concepto)**.

También se puede reemplazar a por distintos números y evaluar los signos de los resultados obtenidos, para luego generalizar **(procedimiento)**. La suma de dos términos positivos, es positiva **(propiedad/proposición)**.

c) $\mathrm{b} - 7$

Como b es un número entero negativo, al restarle 7 se obtiene un resultado menor que cero **(procedimiento)**. También se puede reemplazar b por distintos números y encuentra una regularidad entre los resultados obtenidos **(procedimiento)**. Otra posibilidad es aplicar la siguiente **propiedad/proposición**: si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado le corresponde ese mismo signo.

d) $\mathrm{b} + |\mathrm{b}|$

El primer término es negativo porque b es menor que cero y $|\mathrm{b}|$ es mayor que cero **(propiedad)** y opuesto al término anterior. Por esto, el resultado es cero, y este es neutro **(propiedad)**, por lo que no se puede decir el signo del resultado, ya que el cero no tiene **(procedimiento y concepto)**.

También se puede reemplazar b por distintos números y evaluar el tipo de resultado obtenido, para luego generalizar **(procedimiento)**.

e) $\mathrm{a}: (-1)$

Debido a que a es un número entero positivo, al dividirse por -1 se obtiene un resultado entero negativo **(procedimiento)**. El cociente entre un número positivo y otro negativo es negativo **(proposición)**.

También se puede reemplazar a por distintos números mayores que cero para luego generalizar **(procedimiento)**.

f) $b:(-1)$

Teniendo en cuenta que b es un número negativo, al dividirse por -1 se obtiene un resultado entero positivo **(procedimiento)**. El cociente entre dos números enteros negativos es positivo **(proposición)**.

También se pueden tomar varios casos particulares asignándole valores a b para posteriormente generalizar **(procedimiento)**.

g) $a.b$

Como a es un entero positivo y b es un entero negativo, el producto entre ambos va a ser un entero negativo **(procedimiento)**. El producto entre un número entero positivo y otro negativo es negativo **(proposición)**.

También es posible reemplazar a y b por números particulares y luego generalizar **(procedimiento)**.

h) $-a.b$

Como a es un entero positivo, $-a$ es negativo (**concepto** de opuesto o inverso aditivo: el opuesto de a es un número que sumado a a, da cero y se denota $-a$; **propiedad:** el opuesto de un número positivo, es negativo) y b es un entero negativo, el producto entre ambos va a ser un entero positivo **(procedimiento)**. El producto entre dos números enteros negativos es positivo **(proposición)**. Por otra parte, se puede reemplazar a y b por números particulares y luego generalizar **(procedimiento)**.

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Situaciones problema

Esta situación problema es intramatemática y consiste en evaluar si el resultado es un entero positivo, un entero negativo, cero o no puede saberse.

Lenguaje

Coloquial:
Producto, cociente, valor absoluto, entero positivo, entero negativo, cero, etc.

Simbólico:

$a + |a|$

REGLAS

Conceptos

Concepto de número entero
Valor absoluto como distancia de un número al cero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El cero es neutro.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
El valor absoluto de un número es siempre positivo.
El cociente entre un número positivo y otro negativo es negativo.
El cociente entre dos enteros negativos es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo es negativo.
El producto entre dos enteros negativos es positivo.

Procedimientos

Análisis de casos particulares (experimentación) en:

- resolución de sumas entre números enteros;
- resolución de restas entre números enteros;
- resolución de sumas y restas involucrando el valor absoluto de un número entero;
- multiplicación de números enteros;
- división números enteros.

Aplicación de la regla de los signos.

Argumentos

Teniendo en cuenta que b es un número negativo, al dividirse por -1 se obtiene un resultado entero positivo. El cociente entre dos números enteros negativos es positivo.

Figura 142: Configuración Epistémica del problema 3

Los posibles errores y dificultades que puede evidenciar un alumno, son los siguientes:

- Que resuelva la consigna en forma parcial o no la resuelva.
- Que tome a b como un número positivo y $-b$ como negativo, pasando por alto lo que dice el enunciado. Este error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-

Machuca de Alva (1991) y lo califica como identificación de los símbolos literales con números positivos.

- Que reemplace el mismo símbolo literal por dos números distintos en el mismo ejercicio.
- Que a pesar de probar con ejemplos particulares llegue a una conclusión desacertada por tomar casos que tengan la misma característica.
- Que no recuerde el concepto de valor absoluto.
- Que le asigne valores numéricos a los símbolos literales pero resuelva incorrectamente las sumas y restas de enteros; error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío. Podría suceder que el alumno quiera sumar o restar números enteros y decida:
  a) restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
  b) restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
  c) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
  d) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
- Que determine el que el resultado de una suma o resta es un entero positivo o negativo, pero justifique erróneamente “menos por más, es menos” o “menos por menos, es más” haciendo referencia a la regla de los signos del producto y conduciendo a un error de interferencia, tal como indica Radatz (1980).
- Que aplique incorrectamente la regla de los signos en los productos y cocientes, error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y califican como reglas de cálculo, como un formalismo vacío.
- Que cometa errores de cálculo, es decir que por distracción resuelva mal alguna operación (ejemplo: decir que $-4-5$ es -8), tome mal los datos de la tabla o transcriba mal de un renglón a otro. Este tipo de errores son llamados errores técnicos según Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995).
- Que no recuerde el concepto de valor absoluto.

Análisis del potencial matemático de la consigna:

En esta situación problema se observa que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Además, la consigna solicita justificar la respuesta, fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual se valora el potencial matemático de este problema. Además, se evita dar información sobre el tipo de respuesta que se puede obtener (positivo, negativo, cero o no puede saberse), para no condicionar las respuestas del alumno.

Problema 4

Esta actividad se tomó de Broitman e Itzcovich (2011, p.31) y fue adaptado para la situación problema. Con la finalidad de fomentar las prácticas argumentativas de los estudiantes, se solicitó la explicación de las respuestas. El problema 4 queda de la siguiente manera:

Se sabe que ***a*** es un número entero. ¿Bajo qué condiciones ***a. a. a*** es negativo? ¿Y positivo? Justificá tus respuestas.

Esta es una situación problema intramatemática que consiste en determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor que cero o menor que cero.

Resolución:

Para resolver esta situación problema sobre producto de enteros se puede asociar los primeros dos factores del triple producto y luego, al resultado obtenido, multiplicarlo por el tercero **(procedimiento)**.

Hay que tener presente que, tal como indica la consigna, a es un número entero. Un conjunto de números enteroses aquel que contiene los números naturales, sus opuestos y el cero **(concepto)**. La definición hace ver la necesidad de considerar que a puede ser mayor que cero y menor que cero, ya que si $a = 0$, el producto se anula y no se da respuesta al problema.

Si $a < 0$, entonces $a.a.a < 0$ porque en $(a.a).a$ el primer factor es un entero positivo **(procedimiento)** y el segundo, es negativo; por lo tanto, la multiplicación de dos factores de distinto signo es negativa **(concepto y propiedad)**.

Si a > 0 entonces $a.a.a > 0$ porque en $(a.a).a$ el primer factor es un entero positivo **(procedimiento)** y el segundo, también; por lo tanto, la multiplicación de dos factores de igual signo es positiva **(concepto y propiedad)**.

También se puede resolver a partir de la experimentación, es decir, probar con distintos productos y generalizar sobre el tipo de resultado obtenido **(procedimiento)**.

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

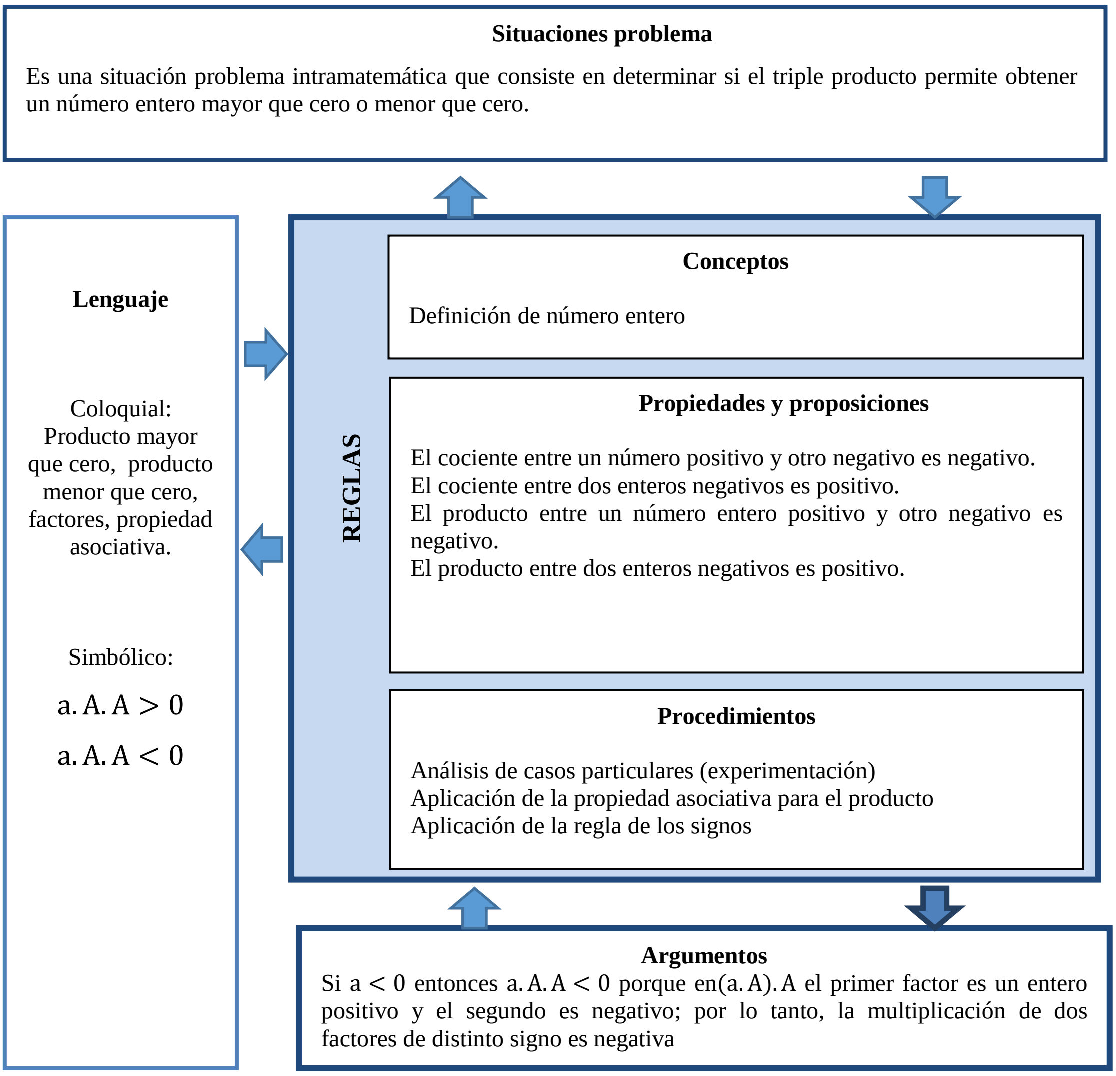


Figura 143: Configuración Epistémica del problema 4

Los posibles errores y dificultades que puede evidenciar un alumno, son los siguientes:

- Que tome al entero a solo como un número positivo. Este error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo clasifican como identificación de los símbolos literales con números positivos.
- Que a pesar de probar con ejemplos particulares llegue a una conclusión desacertada debido a tomar casos que tengan la misma característica.
- Que considere que a puede ser negativo pero, sin embargo, no aplique correctamente la regla de los signos del producto; error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío.
- Que cometa errores de cálculo, es decir, que por distracción resuelva mal alguna operación o transcriba mal de un renglón a otro. Este tipo de errores son llamados errores técnicos según Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995).
- Que reemplace el mismo símbolo literal por dos números distintos en el mismo ejercicio.

Análisis del potencial matemático de la consigna:

En esta situación problema observamos que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Se puede resolver con recursos más bien formales o también a partir de la experimentación. Además, la consigna solicita justificar la respuesta, así se fomentan las habilidades de argumentación, razón por la cual valoramos el potencial matemático de este problema.

Problema 5

El problema fue basado de Effenberger (2013, p.16). Se realizaron ajustes en la redacción de la consigna solicitando identificar el cálculo que permita obtener un resultado menor, si es posible. Se cambiaron algunos cálculos para que también se resuelvan divisiones o triples productos. Además, se redujeron los ítems porque con la resolución de solo cuatro de ellos se pueden identificar las estrategias para resolver y los errores frecuentes. El problema 5 quedó de la siguiente manera:

Indicar, si es posible, qué cálculo, de los dos que se presentan para cada apartado, permite obtener un resultado menor. Justificar la respuesta.

a) $10:(-2)$ $\quad$ $2.(-6)$
b) $12:(-2)$ $\quad$ $-9:(-3)$
c) $(-2).(-5).3$ $\quad$ $(-8).(-1).(-2)$
d) $(-6).2:(-3)$ $\quad$ $(-8).2:(-4)$

Es un tipo de situación problema intramatemático que consiste en determinar qué cálculo del par es menor.

Resolución:

Para resolver problema sobre productos y cocientes entre números enteros, se deben resolver los productos y cocientes y aplicar la regla de los signos. En caso de tener más de una multiplicación, se puede optar por aplicar la propiedad asociativa **(procedimientos)**.

Además, se cumple la siguiente **propiedad/proposición**: el producto o cociente entre dos números enteros negativos, es positivo, y el producto o cociente entre un número positivo y otro negativo, es negativo.

$$10:(-2) = -5 \qquad\qquad 2.(-6) = -12$$

El segundo cálculo permite obtener un resultado menor porque es el de mayor valor absoluto, es decir el que está más lejos de cero.

$$12:(-2) = -6 \qquad\qquad -9:(-3) = 3$$

El primer cálculo permite obtener un resultado menor.

$$(-2).(-5).3 = 30 \qquad\qquad (-8).(-1).(-2) = -16$$

El segundo cálculo permite obtener un resultado menor.

$$(-6).2:(-3) = 4 \qquad\qquad (-8).2:(-4) = 4$$

Ambos cálculos dan el mismo resultado.

Para determinar qué número es menor en el caso de dos enteros negativos, se puede afirmar que es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto

(propiedad).Y si se tiene un número entero positivo y otro negativo, el positivo es el mayor **(propiedad)**.

Otra estrategia para determinar el número menor es realizar una recta numérica para visualizar cuál es el que está más lejos de cero, es decir, cuál tiene mayor valor absoluto **(procedimiento)**.

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

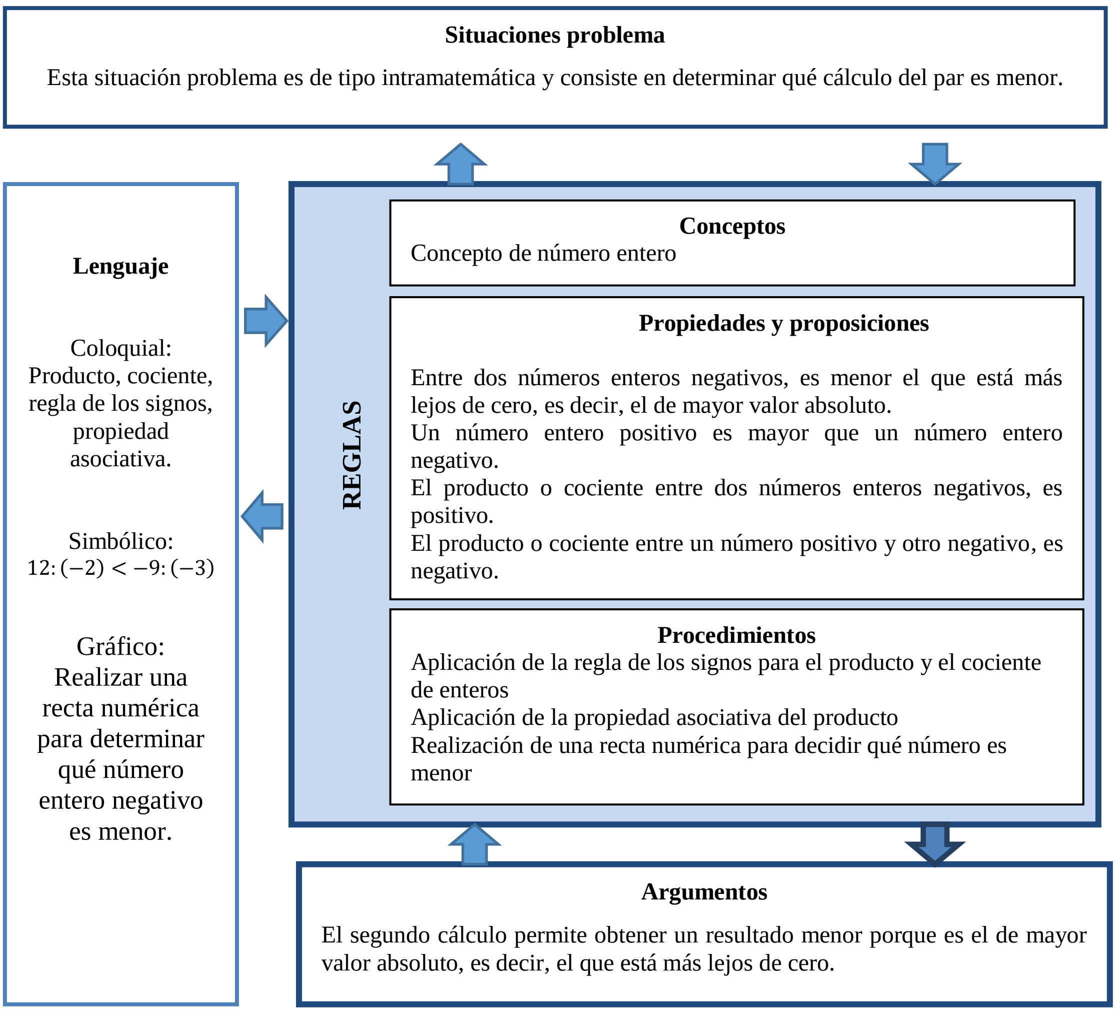


Figura 144: Configuración Epistémica del problema 5

Los posibles errores y dificultades que puede evidenciar un alumno, son los siguientes:

- Que resuelva la consigna en forma parcial o no la resuelva.

- Que no aplique correctamente la regla de los signos del producto y del cociente; error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío.
- Que no pueda determinar correctamente qué resultado es menor. Suele ocurrir que los estudiantes piensan que el orden entre los números negativos es el mismo que el orden natural. Este tipo error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).
- Que tengan un error de transcripción o de cálculo en la multiplicación o división. Este tipo de error puede calificarse como error técnico según proponen Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995).

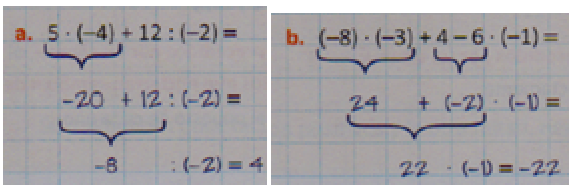
Análisis del potencial matemático de la consigna:

En esta situación problema se pide indicar, en lo posible, qué cálculo permite obtener un resultado menor; sin embargo, no se encuentran indicados los pasos a realizar en la resolución. Hay cálculos en los que se podrá optar por aplicar la propiedad asociativa del producto o resolver las multiplicaciones directamente. En el último inciso, los cálculos permiten obtener el mismo resultado, algo que se tendrá que fundamentar. Además, la consigna solicita justificar todas las respuestas desarrollando las habilidades de argumentación, razón por la cual se incrementa el potencial matemático de este problema.

Problema 6

Esta situación problema está tomada de Kaczor y Outón (2016, p.22). Las adaptaciones que se hicieron tienen que ver con la redacción de la consigna. No se da por sentado que la resolución tiene errores, ofreciendo la oportunidad de decidir entre dos posibilidades. Además, se requiere fundamentar dicha elección.

Hacé de profesor o profesora y decidí si los siguientes cálculos que hizo Sol son correctos o no. En cualquier caso, explicá tu decisión.



Es una situación problema intramatemática y consiste en decidir si los cálculos están correctamente resueltos.

Resolución:

Este problema involucra la suma, resta, multiplicación, división de enteros y el orden jerárquico de las operaciones. Se puede decidir si los cálculos están correctos o no a partir del repaso de los procedimientos visualmente. De esta forma, es posible reconocer que la alumna Sol no separó en términos correctamente **(procedimiento)**. También, se puede rehacer el cálculo para comparar los procedimientos realizados con los resultados obtenidos y, de esa forma, detectar diferencias en la resolución. Resolver los cálculos requiere de la separación en términos, la supresión de paréntesis en algún caso y la aplicación de la regla de los signos para productos y cocientes **(procedimientos)**.

Se cumplen las siguientes **propiedades/proposiciones** en una suma o resta: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Además, se cumplen estas otras **propiedades/ proposiciones:** si el producto o cociente entre dos números negativos, es positivo; si el producto o cociente entre dos números de distinto signo, es negativo.

En la resolución del primer cálculo, se puede apreciar que en el segundo renglón no se separa en términos correctamente porque primero hay que resolver el cociente. En la resolución del segundo cálculo, el segundo término está mal separado, primero hay que resolver el producto.

La resolución correcta de ambos es la siguiente:

$5.(-4) + 12:(-2) = -20 + (-6) = -10 - 6 = -26$

$(-8).(-3) + 4 - 6.(-1) = 24 + 4 + 6 = 34$

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Situaciones problema

Esta situación problema es intramatemática y consiste en decidir si los cálculos están correctamente resueltos.

Lenguaje

Coloquial: Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico:
$(-8).(-3)+4-6.(-1)$
$=24+4+6=34$

.

REGLAS

Conceptos
Concepto de número entero

Propiedades y proposiciones

Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El producto o cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto o cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.

Procedimientos
Detección del error del procedimiento a partir del seguimiento visual del mismo
Separación en términos
Resolución de multiplicaciones y divisiones de números enteros
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas y restas entre números enteros

Argumentos
En la resolución del primer cálculo se puede apreciar que en el segundo renglón no se separa en términos correctamente porque primero hay que resolver el cociente.

Figura 145: Configuración Epistémica del problema 6

Los posibles errores y dificultades que puede evidenciar un alumno, son los siguientes:

- Que no resuelva el problema o lo resuelva en forma parcial.
- Que no se perciba que los términos están separados incorrectamente.
- Que resuelva incorrectamente las sumas y restas de enteros; error que reporta Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de

cálculo como un formalismo vacío. Podría suceder que el alumno quiera sumar o restar números enteros y decida:

a) restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
b) restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
c) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
d) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.

- Que determine que el resultado de una suma o resta es un entero positivo o negativo, pero justifique erróneamente “menos por más, es menos” o “menos por menos, es más” haciendo referencia a la regla de los signos del producto y conduciendo a un error de interferencia, tal como indica Radatz (1980).
- Que aplique mal la regla de los signos del producto y el cociente; error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío.
- Que intente resolver la suma algebraica asociando la suma de los positivos y restando la suma de los negativos, pero que finalmente reste la diferencia entre los negativos. Este tipo de error puede clasificarse como teoremas, definiciones (o reglas) deformadas según propone Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995). Por ejemplo, $-3+8+2-4-5=(8+2)-(-3-4-5)=10-(-12)=10+12=22$
- Que cometa errores de cálculo, es decir, que por distracción resuelva mal alguna operación (ejemplo, decir que $-4-5$ es -8) o transcriba mal de un renglón a otro. Este tipo de errores son llamados errores técnicos según Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995).
- Que suprima paréntesis incorrectamente poniendo de manifiesto la confusión que trae el doble significado de los signos, según comenta Fory (2010).

Análisis del potencial matemático de la consigna:

En esta situación problema se observa que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. El enunciado no solicita encontrar los errores en la resolución dando por sentado que están incorrectos, sino que permite una libre decisión. Además, la consigna pide justificar la respuesta con la finalidad de fomentar las habilidades de argumentación, razón por la cual se valora el potencial matemático de este problema.

Problema 7

Este problema fue tomado de Boccioni, Mercado, Vigione y Cabral (2016, p.27). Una de las modificaciones que se hizo tiene que ver con la redacción de la consigna. Se pregunta cuál de los dos cálculos permite obtener un resultado mayor a fin de darle mayor sentido a la resolución. También, se pide de justificar las respuestas. Los cálculos se modificaron para que se atienda a todos los casos posibles relacionados a las cuatro operaciones básicas. El problema quedó de la siguiente manera:

> ¿Cuál de los dos cálculos permite obtener un número mayor? Justificá tu respuesta.
>
> a) $-4\text{—}9 + 6.(-2 - 1)\text{—}2.(-1) + (-3 + 5) =$
>
> b) $-(-2 - 1 + 7 + 2 - 3 - 6) - (1 - 7): 3 + 4.(2 - 3) =$

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Resolución:

Para esta situación problema se puede resolver el cálculo y comparar los resultados a fin dedecidir cuál de los dos permite obtener un resultado mayor. Para esto, es preciso separar en términos, suprimir paréntesis, resolver sumas, restas, multiplicaciones y divisiones **(procedimientos)**.

Se deben aplicar las siguientes **propiedades/proposiciones** de operaciones básicas de suma o resta: si los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

Otras **propiedades/proposiciones** para su resolución son: el producto o cociente entre dos números enteros negativos, es positivo; el producto o cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.

También, podría aplicarse la propiedad distributiva en el segundo término del primer ejercicio, o utilizar distintas estrategias para abordar la suma algebraica del segundo ejercicio, en este sentido, es posible sumar y restar de a dos términos o plantear la suma de los números positivos, menos la suma de los negativos **(procedimientos)**. Una vez resueltos los cálculos, hay que determinar cuál permite obtener un resultado mayor.

En cuanto a la determinación del número mayor en el caso de dos enteros negativos, se evidencia que lo es aquel que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto **(propiedad)**.

Otra estrategia para determinar qué número es mayor es realizar una recta numérica para visualizar cuál es el que está más cerca de cero, es decir, aquel que tiene menor valor absoluto **(procedimiento)**.

El resultado mayor lo permite obtener el segundo cálculo:

$-(-4)-(-9+6).(-2-1)-(-2).(-1)+(-3+5)=$

$4--3.(-3)-2+2=$

$4-9=-5$

$-(-2-1+7+2-3-6)-(1-7):3+4.(2-3)=$

$2+1-7-2+3+6-(-6):3+4.(-1)=$

$3-(-2)-4=$

$3+2-4=$

$5-4=1$

.

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Situaciones problema

Esta situación problema es intramatemática y consiste en resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial:
Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico:
$-(-4)-(-9+6).(-2-1)$
.

Gráfico:
Realización de la recta numérica

REGLAS

Conceptos

Concepto de número entero.

Propiedades y proposiciones

Un número positivo es mayor que un número negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El producto o cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto o cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El opuesto de un número entero positivo, es negativo, y el opuesto de un número negativo, es positivo.

Procedimientos

Separación en términos
Resolución de multiplicaciones y divisiones de números enteros
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas y restas entre números enteros
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Resolución de sumas algebraicas calculando la diferencia entre la suma de los positivos y los negativos
Realización de una recta numérica para decidir qué número es mayor

Argumentos

El resultado mayor lo permite obtener el segundo cálculo, ya que -2 es más cercano a cero y menor en valor absoluto.

Figura 146: Configuración Epistémica del problema 7

Los posibles errores y dificultades que puede evidenciar un alumno, son los siguientes:

- Que no resuelva el problema o lo resuelva en forma parcial.
- Que no separe en términos correctamente.

- Que resuelva incorrectamente las sumas y restas de enteros; error que reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío. Podría suceder que el alumno quiera sumar o restar números enteros y decida:
    a) restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
    b) restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
    c) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo cuando eso no corresponda.
    d) sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo cuando eso no corresponda.
- Que determine que el resultado de una suma o resta es un entero positivo o negativo, pero justifique erróneamente "menos por más, es menos" o "menos por menos, es más" haciendo referencia a la regla de los signos del producto y conduciendo a un error de interferencia, tal como denomina Radatz (1980).
- Que aplique mal la regla de los signos del producto y el cociente; error que reporta Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denomina reglas de cálculo como un formalismo vacío.
- Que intente resolver la suma algebraica asociando la suma de los positivos y restando la suma de los negativos, pero que finalmente reste la diferencia entre los negativos. Este tipo de error puede clasificarse como teoremas, definiciones (o reglas) deformadas según propone Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995). Por ejemplo, $-3+8+2-4-5=(8+2)-(-3-4-5)=10-(-12)=10+12=22$.
- Que cometa errores de cálculo, es decir, que por distracción resuelva mal alguna operación (ejemplo: decir que $-4-5$ es -8) o transcriba mal de un renglón a otro. Este tipo de errores son llamados errores técnicos según Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995).
- Que suprima paréntesis incorrectamente, poniendo de manifiesto la confusión que trae el doble significado de los signos, según comenta Fory (2010).

- Que piense que el orden de los números negativos es el mismo orden que el de los números naturales; error que reporta Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

Análisis del potencial matemático de la consigna

En esta situación problemase observa que no están indicados los pasos a realizar en la resolución (no se pide aplicar cierta propiedad en particular ni se les recuerda algún procedimiento). El enunciado solicita indicar qué cálculo permite obtener un resultado mayor y justificar la respuesta; de este modo, se fomentan las habilidades de argumentación, razón por la cual se incrementa el potencial matemático de este problema.

6.1.2 Configuración epistémica del instrumento

La configuración epistémica del instrumento en general es la siguiente:

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día partiendo del conocimiento de sus modificaciones durante el día; y calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial:
Aumentó y disminuyó la temperatura.
Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico:
Utilizar el cálculo simbólico para describir el enunciado de un problema.
Resolver un cálculo.
$a.a.a > 0$
$|b|$

Gráfico:
Realización de la recta numérica para resolver sumas y restas desplazándose sobre ella y comparar números.

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Valor absoluto como distancia de un número al cero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El valor absoluto de un número siempre es positivo.
El cero es neutro.
El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
El opuesto de un número entero negativo, es positivo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto

Procedimientos

Resolución a partir del contexto
Interpretación los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Resolución de sumas algebraicas calculando la diferencia entre la suma de los positivos y los negativos
Suma y resta mediante desplazarse en la recta numérica
Realización de una recta numérica para decidir qué número es mayor o menor
Aplicación de la propiedad asociativa de la suma y el producto
Aplicación de la propiedad conmutativa de la suma
Análisis de casos particulares (experimentación):

- Resolución de sumas entre números enteros
- Resolución de restas entre números enteros
- Resolución de sumas y restas involucrando el valor absoluto de un número entero
- Multiplicación de números enteros
- División números enteros

Multiplicación números enteros
División números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones; y exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 147: Configuración Epistémica del Instrumento

6.2 Validación del instrumento por pares expertos

En relación con la validación de pares expertos, se acudió a profesionales que cuentan con amplia trayectoria en docencia de grado y posgrado e investigación en Matemática y/o Educación Matemática; los mismos se encuentran nombrados en el Capítulo 4. El protocolo de la solicitud de valoración del instrumento de indagación se incluye en la sesión de Anexos.

El Mg. Fabián Espinoza expresa que el problema 1 o 2 podrían eliminarse o integrarse en una única consigna, pues si bien pertenecen a contextos diferentes, involucran los mismos procedimientos de resolución. Respecto a esta observación, se decidió conservar ambos porque se reflexionó en los fundamentos de Cid y Bolea (2010), quienes ponen en tela de juicio la aparente familiaridad de los estudiantes con los problemas enmarcados en modelos concretos. La resolución de ambos problemas podría exponer errores y dificultades de los alumnos.

Por otra parte, Espinoza realiza una segunda observación sobre la tercera situación sugiriendo problematizar el empleo del valor absoluto también para un número entero negativo. Efectivamente, el ítem d se considera $|b|$ siendo b un número entero negativo. La última sugerencia que propone tiene que ver con el planteamiento de situaciones problema de resolución de operaciones con números más grandes. Sin embargo, para el armado del instrumento, se decidió dejar de lado los números con varias cifras porque el objetivo no estaba puesto en aumentar la dificultad a los alumnos al operar, puesto que no disponían de calculadora y por otra parte, los conceptos, propiedades y procedimientos que se ponen en juego al resolver las situaciones problema del instrumento se pueden evidenciar utilizando números más pequeños.

En relación a las consideraciones generales, recomienda que en consigna inicial, además de solicitar la escritura de los procedimientos, se podría pedir la explicitación de las fundamentaciones. No obstante, se consideró apropiado recordar en cada enunciado que se justifique porque los estudiantes no están habituados a hacerlo. El Mg. Fabián Espinoza determinó que el instrumento es aplicable.

La Lic. Raquel Abrate expresó que el problema 1 podría eliminarse, ya que tiene características similares al problema 2 y este último propone más instancias de argumentación. Sin embargo, como se comentó anteriormente, se decidió conservar el problema para que el trayecto de los alumnos arroje fortalezas y errores en la resolución de problemas en contexto. Por lo tanto, tener dos problemas en el instrumento ayudó a sacar una conclusión más acertada al respecto. La Lic. Raquel Abrate determinó que el instrumento es aplicable.

La Dra. María Laura Distéfano considera que el instrumento es aplicable atendiendo a cierta observación. Comenta que la consigna del problema 3 no es adecuada y sugiere modificarla por: "Determinar, si es posible, el signo que tendrá el resultado, teniendo en cuenta que a es un número entero positivo y b es un número entero negativo. Justificá cada respuesta". Atendiendo a su propuesta, se reformula la consigna del problema 2 según la observación.

Determinar, si es posible, el signo que tendrá el resultado, teniendo en cuenta que a es un número entero positivo y b es un número entero negativo. Justificá cada respuesta.

a) $a - 7$
b) $a + |a|$
c) $b - 7$
d) $b + |b|$
e) $a: (-1)$
f) $b: (-1)$
g) $a. b$
h) $-a. b$

Para el problema 4, comenta que resulta redundante la pregunta "¿y positivo?", porque lleva al mismo tipo de análisis y no aportaría información distinta. Sin embargo, el propósito de esta situación problema es que el estudiante evidencie su comprensión sobre a, que es un número entero y por lo tanto puede ser un entero mayor a cero, menor que cero o cero (aunque por este último caso no se considera en la consigna). El estudio de los dos casos hace que se obtenga un tipo de resultado diferente. Además, un potencial error que reporta la bibliografía es que solo consideren que a es positivo (Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva, 1991).

Respecto al problema 5 comenta que, tal como está formulado, requiere de muchas comas y oraciones subordinadas, lo que probablemente dificulte la lectura. Sugiere, entre otras, la siguiente reformulación: "En cada caso, recuadrar el cálculo cuyo resultado es el menor entre los dos dados. Justificar la respuesta".

Se ajusta la consigna del problema 5 atendiendo esta observación. Finalmente, la Dra. María Laura Distéfano considera el instrumento aplicable.

En cada caso, indicar el cálculo cuyo resultado es el menor entre los dos dados. Justificar la respuesta.

a) $10:(-2)$ $\quad$ $2.(-6)$
b) $12:(-2)$ $\quad$ $-9:(-3)$
c) $(-2).(-5).3$ $\quad$ $(-8).(-1).(-2)$
d) $(-6).2:(-3)$ $\quad$ $(-8).2:(-4)$

El Lic. Mario Álvarez considera que el instrumento es aplicable y encontró un error de tipeo en la resolución experta del problema 3, el cual fue corregido.

6.3 Aplicación del instrumento

Se administró el instrumento a un grupo de 31 (treinta y uno) estudiantes de 2^{do} año de secundaria del Instituto del Sol, de General Pacheco, partido de Tigre, que voluntariamente desearon participar de la investigación. Se analizaron las producciones de aquellos que resolvieron más del 50% de las actividades propuestas del instrumento, siendo estos un total de 12 (doce) jóvenes.

Para las instancias de resolución de problemas, la docente a cargo de la clase de matemática, quien a su vez desarrolla la presente investigación, tuvo en consideración las recomendaciones que establecen Barreiro *et al* (2017):

- evitar dar más información que la estrictamente propuesta en la pregunta/ respuesta del estudiante;
- intervenir desde la lógica que siguió el estudiante y no desde la que el docente tiene pensada la resolución experta del problema;
- estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol;
- evitar intervenciones, salvo cuando lo que el estudiante hizo esté mal; y
- pedir explicaciones aún cuando la respuesta dada por el estudiante sea correcta.

Este modo de gestionar la clase tiene la intención alentar los procesos de argumentación y otorgarles a los estudiantes la posibilidad de elaborar conjeturas, demostraciones y validaciones. A su vez, se persigue el objetivo de que lleguen al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un concepto aprendido.

Es importante destacar que para esta investigación se tuvieron en cuenta las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes a fin de establecer el modo en que articulan los objetos primarios involucrados en la resolución de las situaciones problema (conceptos o definiciones, propiedades, procedimientos o técnicas, argumentaciones y lenguaje). A ello, se suma el hecho de que se realizaron entrevistas de tipo semiestructurado para poder reinterpretar y complementar el análisis de lo que manifestaron en forma escrita u oral; este material se encuentra en la sección de anexos. Gracias a dicha información, se estructuraron las configuraciones cognitivas de los estudiantes y se detectaron los errores y dificultades que tuvieron en cada problema.

6.4 Configuraciones cognitivas de los estudiantes, detección de errores y dificultades

En esta se analizarán las producciones de los alumnos; la información necesaria se presenta del siguiente modo:

(a) Configuración Cognitiva de cada estudiante

(b) Errores identificados en la resolución del instrumento

Los mismos se sistematizaron en una tabla que relaciona cada problema con los tipos de errores. La X indica la presencia de un tipo de error en uno de los problemas. El espacio sombreado o coloreado en gris, indica que ese tipo de error no se manifiesta en el problema.

(c) Descripción y caracterización de los errores cometidos por los estudiantes

6.4.1 Configuración cognitiva y detección de errores y dificultades del alumno 1

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día partiendo del conocimiento de sus modificaciones durante el día; y calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Antes de Cristo hace mención a los números negativos, por el contrario, después de Cristo son números positivos.

Simbólico: $-a.-a.-a =$ $a.-a = -a$

Gráfico: Visualizar una recta numérica para ubicar los sucesos antes y después de Cristo, y saber cuánto tiempo pasó desde un suceso al otro.

REGLAS

Conceptos

Números enteros
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación de datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Suma y resta mediante desplazamiento en la recta numérica
Análisis de casos particulares (experimentación):

- Resolución de sumas entre números enteros
- Resolución de restas entre números enteros
- Multiplicación de números enteros
- División de números enteros

Multiplicación de números enteros
Divisiónde números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual
.

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

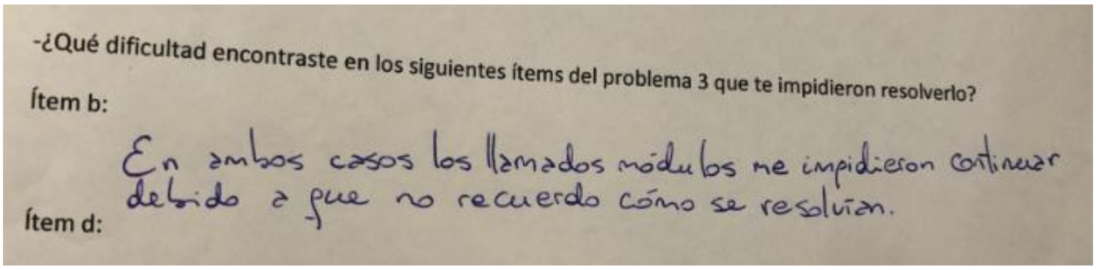
Figura 148: Configuración Cognitiva del alumno 1

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.									
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales							
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros									
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos						X			
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación									
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos									
Suprimir paréntesis incorrectamente									
No resolver un problema en forma total o parcial									

Tabla 7: Identificación de errores y dificultades del alumno 1

A continuación, se exponen algunos errores en los que persiste el alumno 1 en sus prácticas operativas y discursivas.

En la resolución del problema 3, el alumno explicó que no recordaba cómo calcular el valor absoluto de un número entero, motivo por el cual dejó los ítems b y d sin responder.



-¿Qué dificultad encontraste en los siguientes ítems del problema 3 que te impidieron resolverlo?

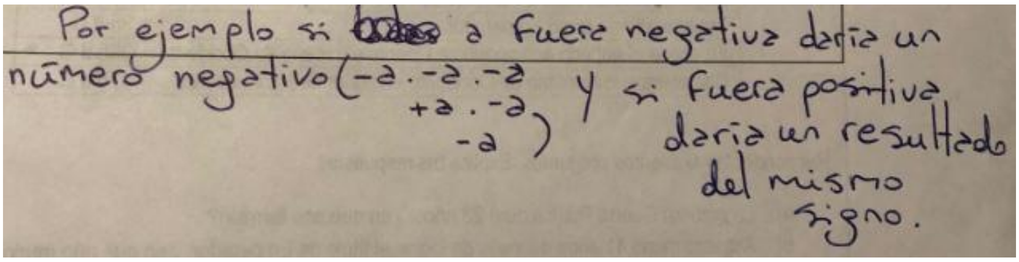
Ítem b:

En ambos casos los llamados módulos me impidieron continuar debido a que no recuerdo cómo se resolvían.

Ítem d:

Figura 149: Errores y dificultades del alumno 1

En el problema 4, consideró al número entero a como un número positivo, tal como se puede observar en la siguiente imagen (Figura 150). Este error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo clasifican como identificación de los símbolos literales con números positivos.



Por ejemplo si a fuera negativa daría un número negativo ($-a \cdot -a \cdot -a$ / $+a \cdot -a$ / $-a$) y si fuera positiva daría un resultado del mismo signo.

Figura 150: Errores y dificultades del alumno 1

6.4.2 Configuración cognitiva y detección de errores y dificultades del alumno 2

Situaciones problema

En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse, determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial:
Aumentó y disminuyó la temperatura.
Separación en términos, regla de signos, etc.

Simbólico:
Utilizar el cálculo simbólico para describir el enunciado de un problema.
Resolver un cálculo.
a. A. A

Gráfico:
Realización de la recta numérica para comparar números.

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.

Procedimientos

Interpretación los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la propiedad asociativa de la suma
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Realización de una recta numérica para decidir qué número es mayor o menor
Análisis de casos particulares (experimentación):
- Resolución de restas entre números enteros
- Multiplicación de números enteros
- División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 151: Configuración Cognitiva dela alumno 2

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.			X						
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales					X		
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros					X				
Error técnico		resolver una suma o resta							X
		resolver una multiplicación o división					X		X
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro							X
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación									
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos								X	X
Suprimir paréntesis incorrectamente								X	X
No resolver un problema en forma total o parcial									

Tabla 8: Identificación de errores y dificultades del alumno 2

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por la alumo 2 en sus prácticas operativas y discursivas.

En el problema 1, no identificó la temperatura inicial con el entero -3. Este tipo de error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo denominan ignorar el signo.

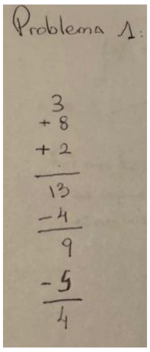


Figura 151: Errores y dificultades del alumno 2

En el problema 2, se observa que el alumno cometió errores al calcular cuántos años pasaron desde cierto suceso antes de Cristo a uno después de Cristo. Este tipo de error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo llaman secuencia temporal como fuente de errores.

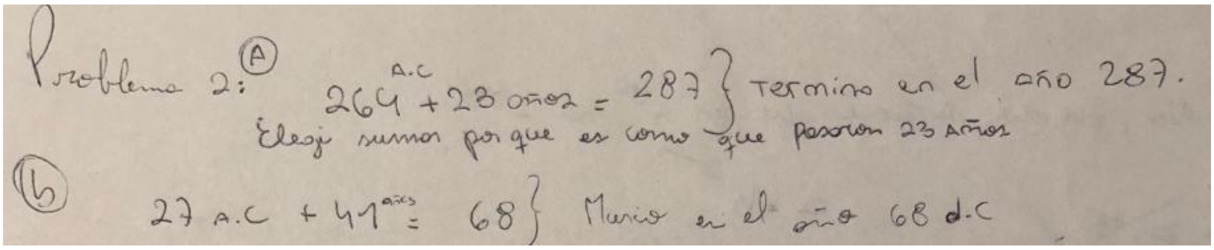


Figura 152: Errores y dificultades del alumno 2

En la resolución del ítem a del problema 3, el alumno no consideró que a puede ser mayor o menor a 7, generando un resultado positivo o negativo. En los ítem b y d expresó que no recordaba el concepto de valor absoluto; dificultad que no es reportada por ningún autor considerado en la revisión bibliográfica. En la justificación del ítem c, aplicó la regla del producto a la resta de enteros. En sus prácticas discursivas explicó que el resultado es positivo aludiendo que “menos por menos es más”; de este modo, hizo referencia a la regla del producto y cometió un error de interferencia, tal como lo llama Radatz (1980).

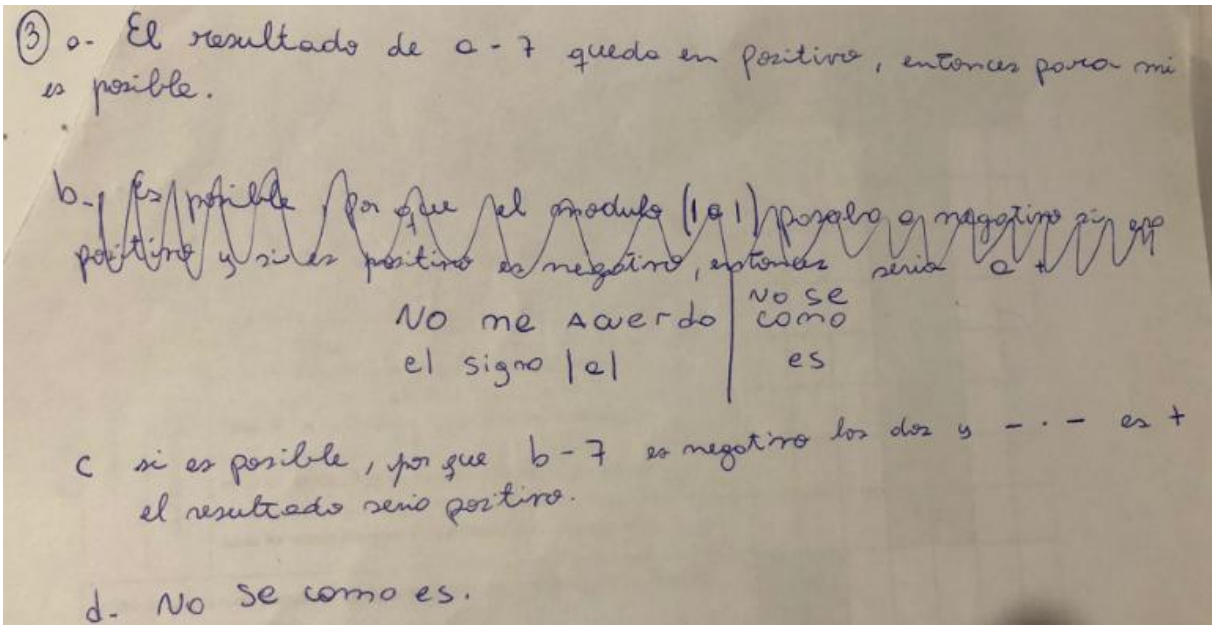


Figura 153: Errores y dificultades del alumno 2

En el desarrollo del ítem c del problema 5, el alumno cometió un error técnico; ya que, ante el producto de tres factores, sumó los primeros dos y luego multiplicó con el tercero. A este tipo de error lo reportan Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995). Por otra parte, no aplicó la regla de los signos para el producto; este error es mencionado por Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío.

En el problema 6, el alumno identificó que el cálculo b está separado en términos incorrectamente. Sin embargo, cuando propuso su propia resolución, volvió a cometer el mismo tipo error que advirtió; este caso no es informado por ningún autor de los consultados en la revisión bibliográfica.

En el primer cálculo del problema 7, se observan varios errores. Por un lado, el alumno afirma que $-9+6=4$. En este caso, se infiere que intentó restar los valores absolutos, aunque con un error de cálculo; al mismo, lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío, mientras que al error de cálculo, Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995) lo clasifican como error técnico. En el término siguiente se observa un error cuando el alumno transcribió de un renglón a otro, ya que olvidó anotar el producto. Avanzando en el cálculo, escribió$-(-2).(-1) = +3$; a partir de esto, se infiere que sumó los factores en vez de multiplicarlos. Estos dos errores son clasificados como técnicos por Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995). Por otra parte, en el último término resolvió $-3 + 5 = 8,$ evidentemente, sumó los valores absolutos; ese error corresponde a reglas de cálculo como un formalismo vacío, clasificado por Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995). También, se observa que no resolvió bien la suma algebraica. No obstante, cuando se le preguntó al alumno qué procedimiento hizo para llegar a ese resultado, rápidamente advirtió su error y comentó que el resultado era 8.

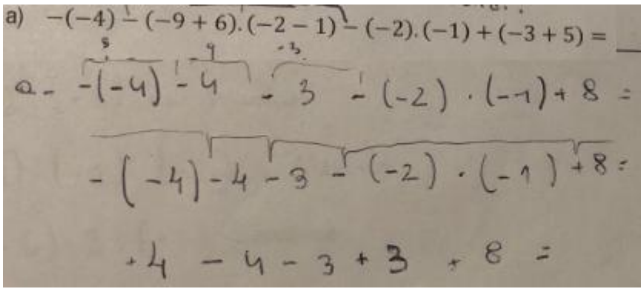


Figura 154: Errores y dificultades del alumno 2

En el segundo cálculo también se detectan varios errores. Al resolver $-2 - 1 = 3,$ la alumna sumó los valores absolutos. En $-3 - 6 = -3$, restó los valores absolutos y al resultado le otorgó un signo negativo. Es llamativo que ambos cálculos presenten las mismas características pero hayan sido resueltos de distinta forma. Los dos errores se clasifican en tanto reglas de cálculo como un formalismo vacío, según Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

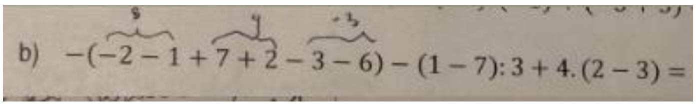


Figura 155: Errores y dificultades del alumno 2

Avanzando en ese mismo cálculo, resolvió$-(1 - 7) = -6$, poniendo de manifiesto la confusión que trae el doble significado de los signos, según comenta Fory (2010). Además, separó en términos erróneamente y, a continuación, resolvió$-3 + 4 = -7$, sumando los valores absolutos y asignándole al resultado un signo negativo. También escribió que $-3 + 4 = -7$, donde sumó los valores absolutos y decidió que el resultado era negativo y que $9 - 7$ =17, aquí, en vez de restar, sumó pero con error. Lo mismo ocurrió en la división

$6\colon 3 = 3$; Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995) clasifican este error como técnico, mientras que los anteriormente mencionados los reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y hablan de ellos como un formalismo vacío.

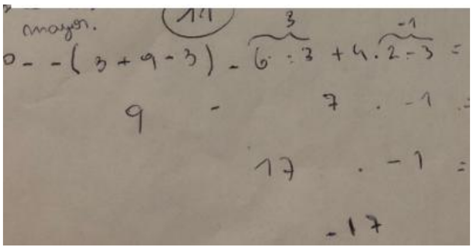


Figura 156: Errores y dificultades dela alumna2

6.4.3 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 3

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Separación en términos, regla de signos, etc.

Simbólico: Resolver un cálculo. a. A. A

REGLAS

Concepto

Definición de número entero

Propiedades y proposiciones

El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.

Procedimientos

Interpretación de los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la propiedad asociativa del producto
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Análisis de casos particulares (experimentación):
- Multiplicación de números enteros
- División de números enteros

Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

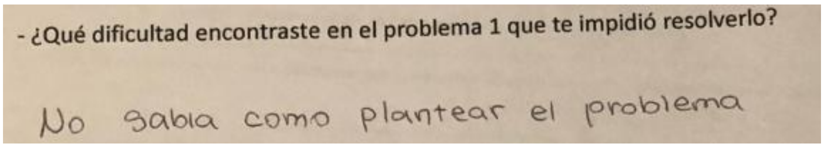
Figura 157: Configuración Cognitiva del alumno 3

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la resta de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la resta de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales						X	
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos distintos							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el cociente	con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros					X				
Error técnico		resolver una suma o resta							
Error técnico		resolver una multiplicación o división							
Error técnico		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
Error técnico		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación						X			
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural							X		
Separar incorrectamente en términos								X	
Suprimir paréntesis incorrectamente									X
No resolver un problema en forma total o parcial			X		X	X			

Tabla 9: Identificación de errores y dificultades del alumno 3

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 3 en sus prácticas operativas y discursivas.

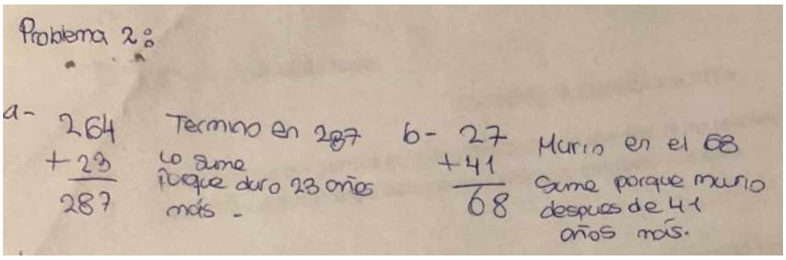
En el problema 1, el alumno explicó que no supo cómo abordar la consigna.


- ¿Qué dificultad encontraste en el problema 1 que te impidió resolverlo?

No sabia como plantear el problema

Figura 158: Errores y dificultades del alumno 3

En el problema 2, se detectan errores. Cuando se necesitó calcular la distancia entre un suceso ocurrido antes de Cristo y otro sucedido después, el alumno operó directamente, sin calcular los años transcurridos desde el primer evento al año cuando nació Cristo. Aparece la secuencia temporal como fuente de errores, clasificación que mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

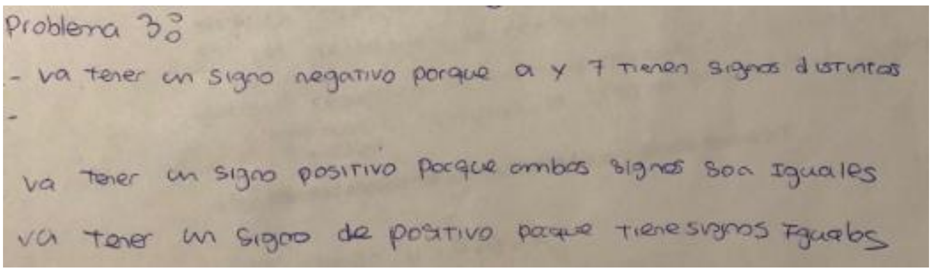

Problema 2:

a- 264 + 23 = 287 Termino en 287 lo sume porque duro 23 años más.

b- 27 + 41 = 68 Murio en el 68 Sume porque murio despues de 41 años más.

Figura 159: Errores y dificultades del alumno 3

En el problema 3, el alumno justificó los ítems que involucran suma y resta con la regla de los signos del producto, cometiendo un error de interferencia; tal como menciona Radatz (1980). A los ítems que involucran el valor absoluto de un número, no los resolvió; en la entrevista, él explicó que no recordaba qué significa $|a|$ y $|b|$.


Problema 3:

- va tener un signo negativo porque a y 7 tienen signos distintos

-

va tener un signo positivo porque ambos signos son iguales

va tener un sigoo de positivo paque tiene signos Iguales

Figura 160: Errores y dificultades del alumno 3

Al problema 4 no lo resolvió; en la entrevista explicó que no entendía si a podía ser positivo y negativo en el mismo producto.

En el problema 5, el alumno cometió un error vinculado al orden de los números enteros. Al decidir qué número es menor entre dos enteros negativos, seleccionó el de menor valor absoluto. En la consigna se solicitó que, luego de resolver, se indique qué cálculo permite obtener un resultado menor. Este error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo clasifican como orden entre los negativos es el mismo que el orden natural.

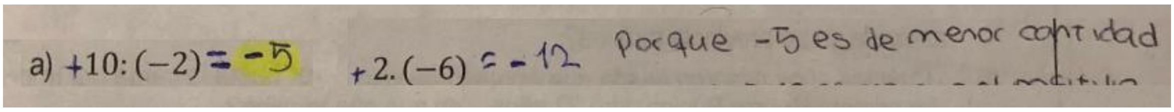


Figura 161: Errores y dificultades del alumno 3

Llegando al problema 6, el alumno identificó que el segundo cálculo no estaba separado en términos correctamente, pero no lo hizo en el primero; este error no es reportado por ningún autor. Además, el alumno decidió realizar nuevamente el ítem b y allí escribió que $-6.(-1) = -6$, aplicando mal la regla de los signos del producto; a este error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío.

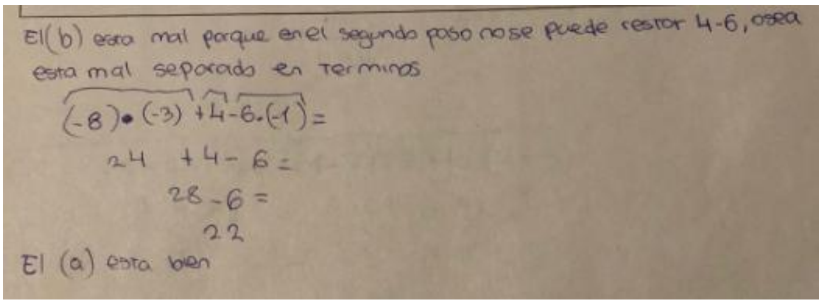


Figura 162: Errores y dificultades del alumno 3

En el último problema se encuentran varios errores. En el primer ítem, el alumno no suprimió bien los paréntesis, manifestando la confusión que trae el doble significado de los signos, según comenta Fory (2010). Además, no resolvió correctamente varias operaciones. A continuación, se muestran esas operaciones y se describe el procedimiento que siguió el alumno:

$-9 + 6 = 3$, restó los valores absolutos y consideró que el resultado es positivo.

$-2 - 1 = 3$, sumó los valores absolutos y consideró que el resultado es positivo.

$-4 - 9 = 13$, sumó los valores absolutos y consideró que el resultado es positivo.

$-2 + 2 = -4$, sumó los valores absolutos y consideró que el resultado es negativo.

Todos estos casos se clasifican en tantoreglas de cálculo como un formalismo vacío, según Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

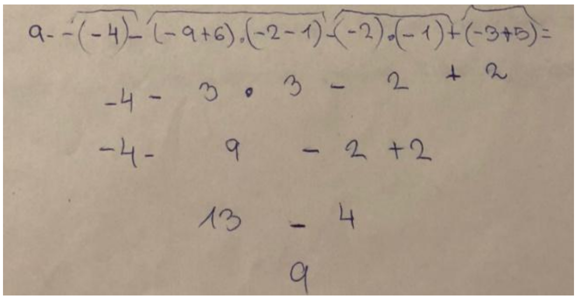


Figura 163: Errores y dificultades del alumno 3

En el segundo ítem, sucede algo similar. A la suma algebraica, el alumno la resolvió sumando o restando de a dos términos. Se encontraron varios errores que se muestran a continuación y se describe el procedimiento que realizó el alumno:

$-2 - 1 = 3$, sumó los valores absolutos y consideró que el resultado es positivo.

$-3 - 6 = -3$, restó los valores absolutos y consideró que el resultado es negativo.

$1 - 7 = 6$, restó los valores absolutos y consideró que el resultado es positivo.

$2 - 3 = 1$, restó los valores absolutos y consideró que el resultado es positivo.

$-9 - 2 + 4 = 15$, sumó los valores absolutos.

Estos errores han sido clasificados por Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) como reglas de cálculo como un formalismo vacío.

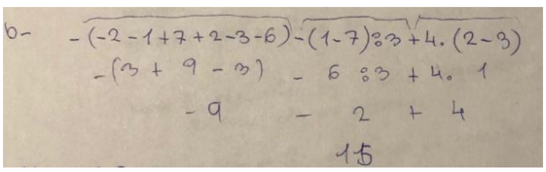


Figura 164: Errores y dificultades del alumno 3

6.4.4 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 4

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Separación en términos, regla de signos, etc.

Simbólico: Resolver un cálculo. a. A. A

REGLAS

Concepto

Definición de número entero

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, se puede afirmar que es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Análisis de casos particulares (experimentación):
- Multiplicación de números enteros
- División de números enteros

Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 165: Configuración Cognitiva del alumno 4

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales							
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros					X				
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación									
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos								X	
Suprimir paréntesis incorrectamente									X
No resolver un problema en forma total o parcial			X						

Tabla 10: Identificación de errores y dificultades del alumno 4

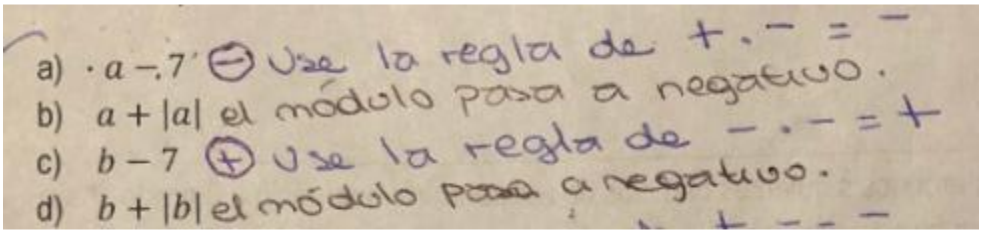
A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 4 en sus prácticas operativas y discursivas.

En el problema 1, explicó que no supo cómo abordar la consigna.

Enel problema 2, se requirió calcular cuántos años pasaron entre un suceso que tuvo lugar antes de Cristo y otro después. El alumno operó directamente sin calcular los años transcurridos desde el primer evento al año cuando nació Cristo; estos errores los clasifican Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) en tanto secuencia temporal como fuente de errores.

En el problema 3, se observa que el estudiante utilizó la regla de los signos del producto para justificar qué tipo de resultado se podía obtener en las sumas y restas; este error es clasificado por Radatz (1980) como error de interferencia. Además, en los ítem b y c, se evidencia que no recordó el concepto de valor absoluto; dificultad que no es reportada por ningún autor considerado en la revisión bibliográfica.

Figura 166:



Errores y dificultades del alumno 4

Para resolver el problema 4, decidió reemplazar a por 2, para explicar que $2.2.2$ es positivo. También reemplazó por -2 para explicar que $(-2).(-2).(-2)$ es negativo, pero no generalizó.

En el problema 6, el alumno detectó que,en el primer cálculo, la separación en términos no se realizó correctamente, mientras que en la segunda, no lo percibió; a este tipo de error no lo reporta ningún autor de los considerados en la revisión de esta investigación.

Por otra parte, en el problema 7, cometió un error al suprimir paréntesis. También se encuentran errores cuando un signo negativo precede a un número negativo; este error lo reporta Fory (2010) y lo describe como doble significado del signo “menos”.

$$-(-2).(-1) = 2$$

$$-(-2) + (-4) = -6$$

6.4.5 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 5

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial:
Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico:
Utilizar el cálculo simbólico para describir el enunciado de un problema.
Resolver un cálculo.
$-a.-a.-a$ es negativo

Gráfico:
Pensar en la recta numérica para determinar qué número es menor

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación de los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Realización de una recta numérica para decidir qué número es mayor o menor
Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 167: Configuración Cognitiva del alumno 5

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo						X	
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales					X		
		de factores con signos distintos					X		
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales					X		
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros									
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado	X					X	
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos						X			
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación									
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos									
Suprimir paréntesis incorrectamente									
No resolver un problema en forma total o parcial					X				

Tabla 11: Identificación de errores y dificultades del alumno5

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 5 en sus prácticas operativas y discursivas.

En el problema 1, se observa que olvidó utilizar el dato de la temperatura inicial que aporta el enunciado. Este error de tipo técnico, es clasificado por Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995).

En el problema 2, se solicitaba calcular cuántos años pasaron entre un suceso que tuvo lugar antes de Cristo y otro después. Aparece la secuencia temporal como fuente de errores, clasificación que mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

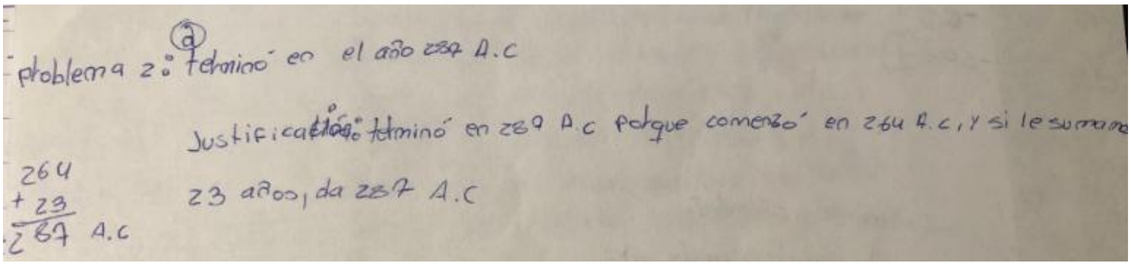


Figura 168: Errores y dificultades del alumno 5

En el problema 3, el estudiante manifestó que no pudo resolver los ítems b y d porque no recordaba el concepto de valor absoluto; esta dificultad no es reportada por ningún autor considerado en la revisión bibliográfica.

En el problema 4, el estudiante interpretó que a es un número positivo; a este error lo anuncian Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo clasifican como identificación de los símbolos literales con números positivos.

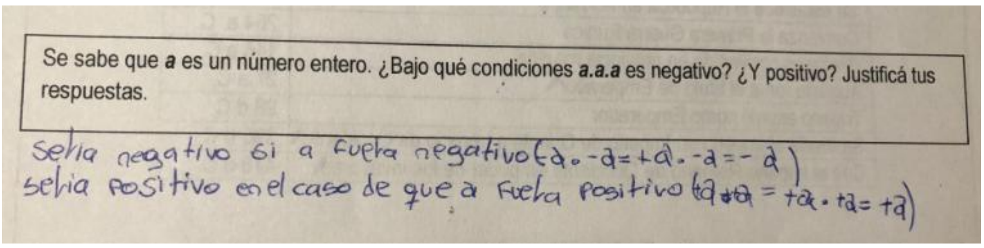


Figura 169: Errores y dificultades del alumno 5

En el problema 5, resuelve algunas multiplicaciones y divisiones aplicando mal la regla de los signos del producto y el cociente; a este error lo clasifican Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) en tanto reglas de cálculo como formalismo vacío.

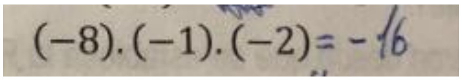


Figura 170: Errores y dificultades del alumno 5

En el ítem a del problema 6, el alumno no advirtió que el primer cálculo no estaba separado en términos correctamente; esta dificultad no fue anunciada por ningún autor. En el ítem b, identificó que el cálculo está mal resuelto, pero no percibió que está mal la separación en términos. Interpretó que entre -8 y 3había una resta en vez de un producto, y afirmó que$(-8)-(-3)=8+3=11$. Se estima que sumó los valores absolutos y determinó que el resultado sería positivo; aquí, por un lado, se encuentra un error técnico, porque reescribió mal el cálculo del enunciado, según Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995); y, por otro lado, se encuentra un error que comentan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío.

En el problema 7, el alumno cometió un error en el cálculo en$-2+2=4$. Evidentemente, sumó los valores absolutos; a este error lo clasifican Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) en tanto reglas de cálculo como formalismo vacío.

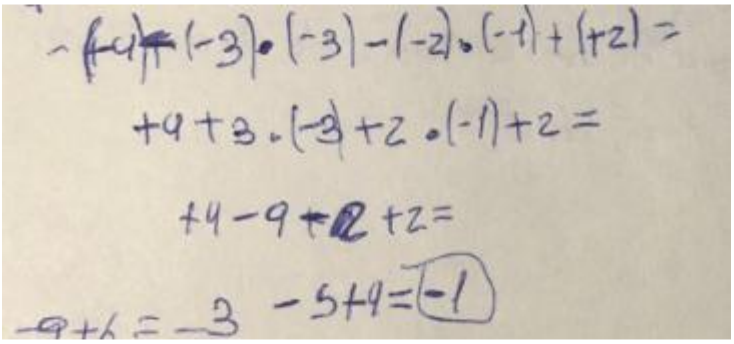


Figura 171: Errores y dificultades del alumno 5

6.4.6 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 6

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día a partir de conocer las modificaciones de la misma durante el día; calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.

En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Separación en términos, regla de signos, etc.

Simbólico: Utilizar el cálculo simbólico para describir el enunciado de un problema. Resolver un cálculo. $a. A. -a$

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.

Procedimientos

Interpretación de los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 172: Configuración Cognitiva del alumno 6

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo						X	
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo		X					
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales			X				
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							X
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros					X			X	
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación									
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural							X		
Separar incorrectamente en términos								X	X
Suprimir paréntesis incorrectamente									
No resolver un problema en forma total o parcial						X			

Tabla 12: Identificación de errores y dificultades del alumno 6

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 6 en sus prácticas operativas y discursivas.

El ítem d del problema 2, pedía calcular cuántos años transcurrieron entre un suceso antes de Cristo y otro posterior. Se observa que el alumno operó directamente, sin calcular los años transcurridos desde el primer evento al año en que nace Cristo; de este modo, aparece la secuencia temporal como fuente de errores, clasificación que mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

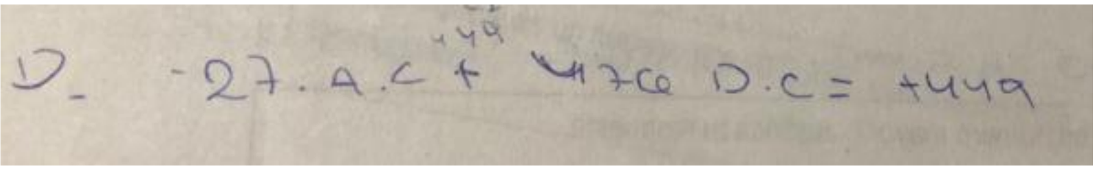


Figura 173: Errores y dificultades del alumno 6

En la resolución del problema 3,el estudiante aplicó la regla de los signos para el producto y el cociente en las sumas y restas; este error se denomina de interferencia, según Radatz (1980). Además, en el ítem b enunció mal la regla de los signos del producto; a este error lo mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo llaman reglas de cálculo como un formalismo vacío.

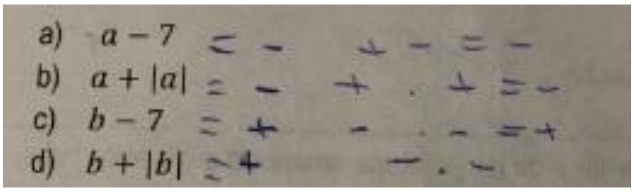


Figura 174: Errores y dificultades del alumno 6

En ítem a del problema 6, el alumno no observó que estaba mal separado en términos. En el ítem b, explicó que la resolución era incorrecta porque afirmó que $24 + (-2) = -26$, incluso, explicó que “más por menos, es menos”. Evidentemente, aludió a la regla de signos del producto cuando el ejercicio trataba sobre la suma de enteros; este, es un error de interferencia, tal como indica Radatz (1980). Por otra parte, el procedimiento que llevó a cabo en ese cálculo consistió en sumar los valores absolutos y determinar que el resultado era negativo; a este error lo anuncian Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo llaman reglas de cálculo como un formalismo vacío.

En el problema 7, se detectaron tres errores. El primero es que el alumno separó mal en términos; el segundo es que afirmó que $-2+2=4$, evidenciando que sumó los valores absolutos; el tercero es $6:3=-2$, aplicando mal la regla de los signos del cociente. A estos errores los reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y los llaman reglas de cálculo como un formalismo vacío.

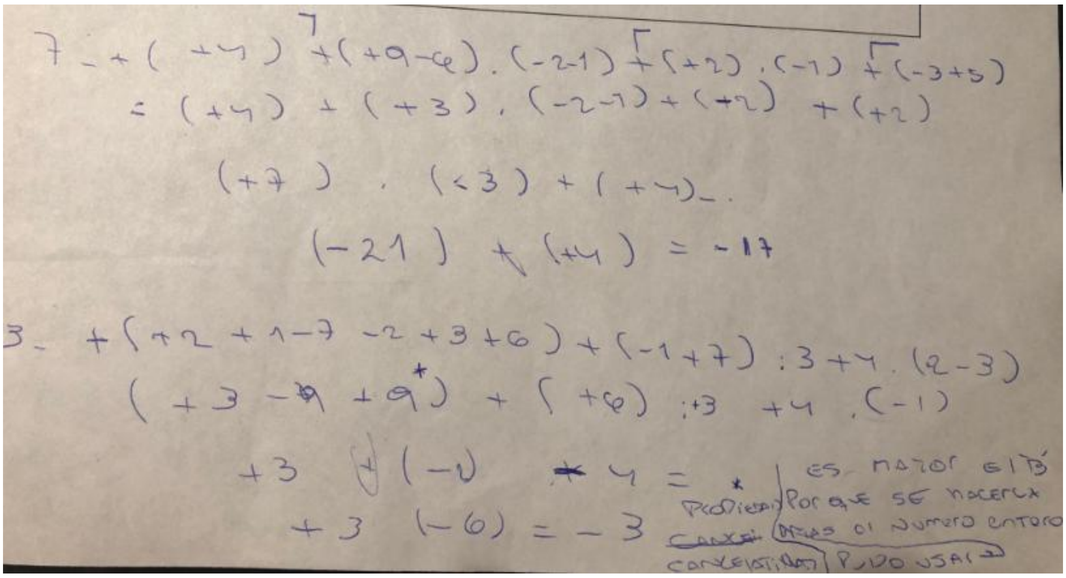


Figura 175: Errores y dificultades del alumno 6

6.4.7 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 7

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día del conocimiento de sus modificaciones durante el día; y calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Aumentó y disminuyó la temperatura. Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico: Resolver un cálculo.

Gráfico: Realización de la recta numérica para comparar números.

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación de los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Aplicación de la propiedad asociativa del producto
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Realización de una recta numérica para decidir qué número es mayor o menor
Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 176: Configuración Cognitiva del alumno 7

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.			X						
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo	X						
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales				X			
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros					X				
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división					X		
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación						X			
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos									
Suprimir paréntesis incorrectamente									X
No resolver un problema en forma total o parcial									

Tabla 13: Identificación de errores y dificultades del alumno7

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 7 en sus prácticas operativas y discursivas.

En la resolución del problema 1 se advirtieron dos errores. El primero, tiene que ver con que el alumno no identificó la temperatura inicial como un número negativo; a este tipo de error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo denominan ignorar el signo. El segundo, tiene que ver con la operatoria, ya que escribió que $3 - 5 = -8$; evidentemente, sumó los valores absolutos y escribió el resultado como negativo. Los últimos autores mencionados clasifican y nombran a este error en tanto reglas de cálculo como un formalismo vacío.

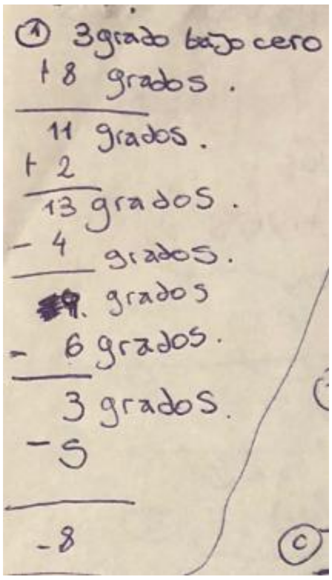


Figura 177: Errores y dificultades del alumno 7

En la resolución del problema 2, el alumno presentó inconvenientes al calcular cuántos años transcurrieron de un suceso a otro, especialmente, si uno de ellos tuvo lugar antes de Cristo; a este error lo comentan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo llaman secuencia temporal como fuente de errores.

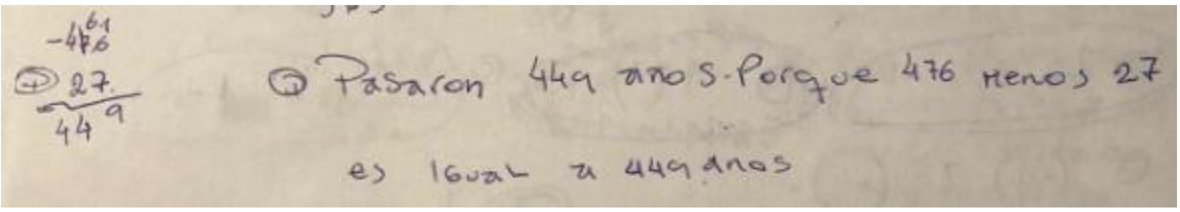


Figura 177: Errores y dificultades del alumno 7

En la resolución del problema 3, se detectó un error de interferencia, según menciona Radatz (1980). El estudiante justificó el tipo de resultado que se obtiene en una suma de números enteros a partir de la regla de signos del producto. También, dejó manifestado que no recuerda el concepto de módulo.

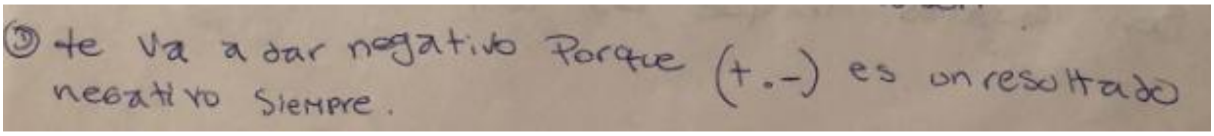


Figura 178: Errores y dificultades del alumno 7

En el desarrollo del problema 4, el alumno interpretó que un mismo símbolo literal podía tomar más de un valor numérico en el mismo producto; este error no es identificado por ningún autor. También, se puede mencionar que la propuesta del resolutor, para que el producto sea negativo, no satisface tal condición debido a que el alumno realizó una incorrecta aplicación de la regla de los signos; Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) lo denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío.

En el problema 5, se evidenció un error de cálculo, ya que el alumno sumó los valores absolutos de los factores en vez de multiplicar; Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995) denominan a estos casos como errores técnicos.

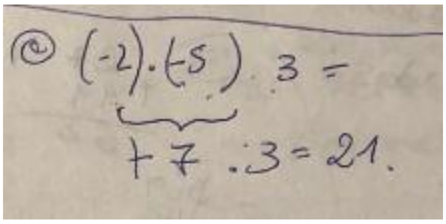


Figura 179: Errores y dificultades del alumno 7

En el desarrollo del primer ítem del problema 7, se detectaron errores en el cálculo de restas y en la supresión de paréntesis. Al primer error, lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo denominan reglas de cálculo como un formalismo vacío. Al segundo error, lo menciona Fory (2010) como doble significado del signo "menos”.

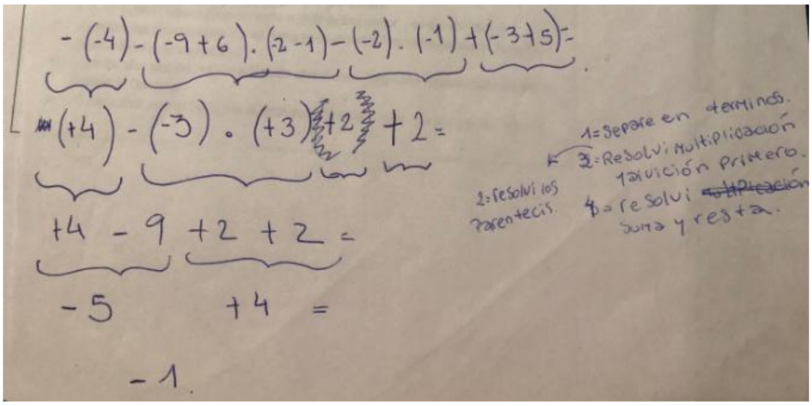


Figura 180: Errores y dificultades del alumno 7

En el desarrollo del segundo ítem del problema, se encontraron errores en la supresión de paréntesis; Fory (2010) habla de este tipo de error como doble significado del signo “menos”. También, se el alumno resolvió erróneamente la resta $2 - 3 = -5$, evidentemente, sumó los valores absolutos y determinó que el resultado era negativo; a este error lo menciona Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) en tanto reglas de cálculo como un formalismo vacío. Es llamativo que en el mismo cálculo había otra resta de las mismas características que la mencionada anteriormente y, sin embargo, no las resolvió con el mismo procedimiento.

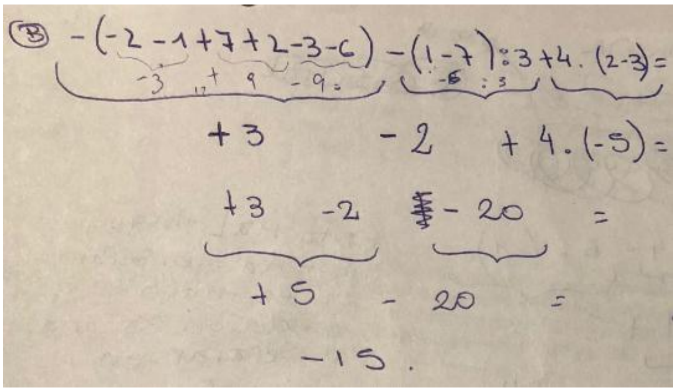


Figura 181: Errores y dificultades del alumno 7

6.4.8 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 8

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día a partir de conocer las modificaciones de la misma durante el día; y calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.

En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial:
Aumentó y disminuyó la temperatura.
Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico:
Resolver un cálculo.

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación de los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Aplicación de la propiedad asociativa del producto
Supresión de paréntesis
Análisis de casos particulares (experimentación):
- Resolución de restas entre números enteros

Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 182: Configuración Cognitiva del alumno 8

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales							
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros					X				
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro					X		
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación					X	X			
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos									
Suprimir paréntesis incorrectamente									
No resolver un problema en forma total o parcial							X		

Tabla 14: Identificación de errores y dificultades del alumno 8

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 8 en sus prácticas operativas y discursivas.

En la resolución del ítem d del problema 2, se encontró un error relacionado con el cálculo de los años transcurridos entre un acontecimiento sucedido antes de Cristo y otro posterior a Cristo. Aparece la secuencia temporal como fuente de errores; clasificación que mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).

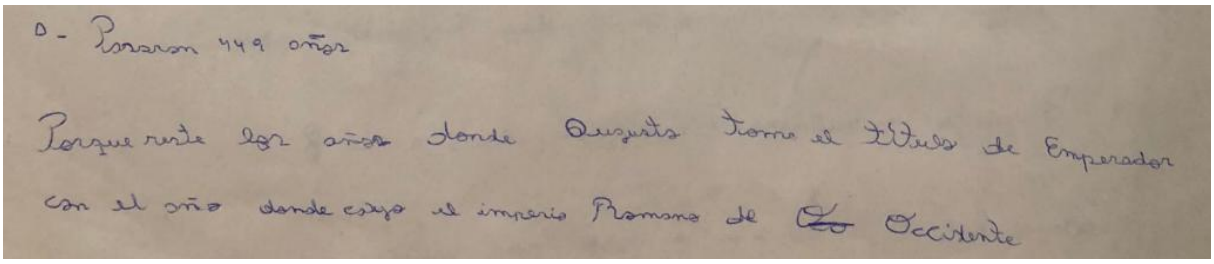

D- Pasaron 449 años
Porque reste los años donde Augusto tomo el titulo de Emperador
con el año donde cayo el imperio Romano de ~~Oc~~ Occidente

Figura 183: Errores y dificultades del alumno 8

En el desarrollo del problema 3 aparecieron varios errores. En el ítem b, el alumno apeló a la regla de los signos del producto cuando se trataba de una suma, produciendo un error de interferencia, como lo menciona Radatz (1980). En el ítem d, se evidencia que el estudiante no recordaba el concepto de valor absoluto y, mediante experimentación, asignó dos valores numéricos al mismo símbolo literal; estos errores no fueron clasificados por ningún autor de la bibliografía consultada.

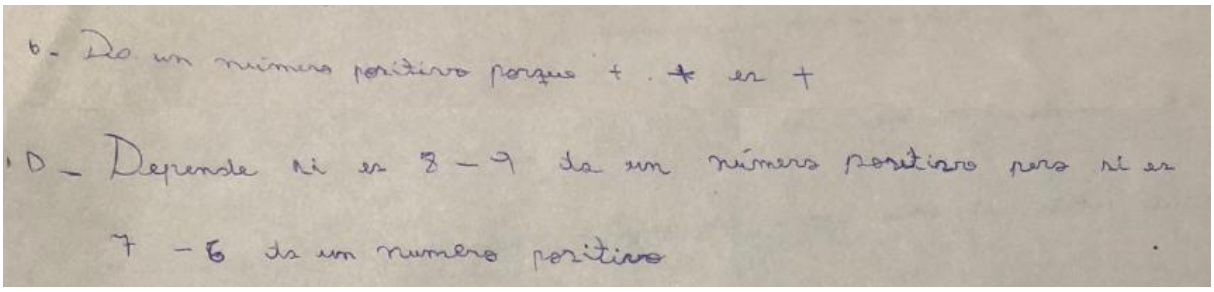

b- Da un numero positivo porque + . + es +
D_ Depende si es 8 − 9 da un número positivo pero si es
7 − 6 da un numero positivo

Figura 183: Errores y dificultades del alumno 8

En el problema 4, el alumno explicó que un producto es negativo cuando se tienen dos factores de signos diferentes. Se infiere que pretendía asignarle al mismo símbolo literal dos signos distintos en el mismo producto; este error no lo reporta ningún autor de la bibliografía.

En el desarrollo del problema 5, se advierte un error relacionado con la incorrecta aplicación de la regla de los signos para el producto; error clasificado por Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) en tanto reglas de cálculo como un formalismo vacío. También, se encontró un error de transcripción del cálculo de la consigna a la hoja; el mismo, se denomina error técnico, según proponen Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995).

En la resolución del problema 7, el estudiante cometió un error en una resta; evidentemente, restó los valores absolutos. Este error también es reportado por Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) en tanto reglas de cálculo como un formalismo vacío.

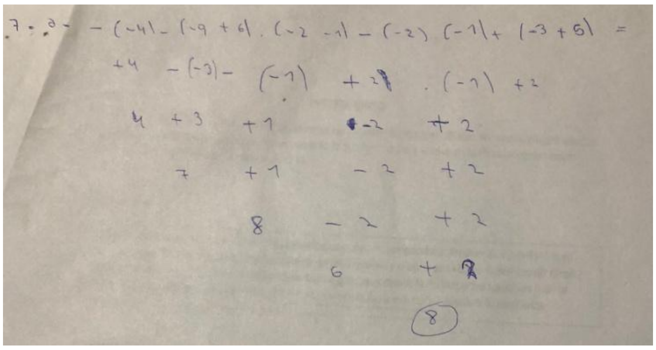


Figura 184: Errores y dificultades del alumno 8

6.4.9 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 9

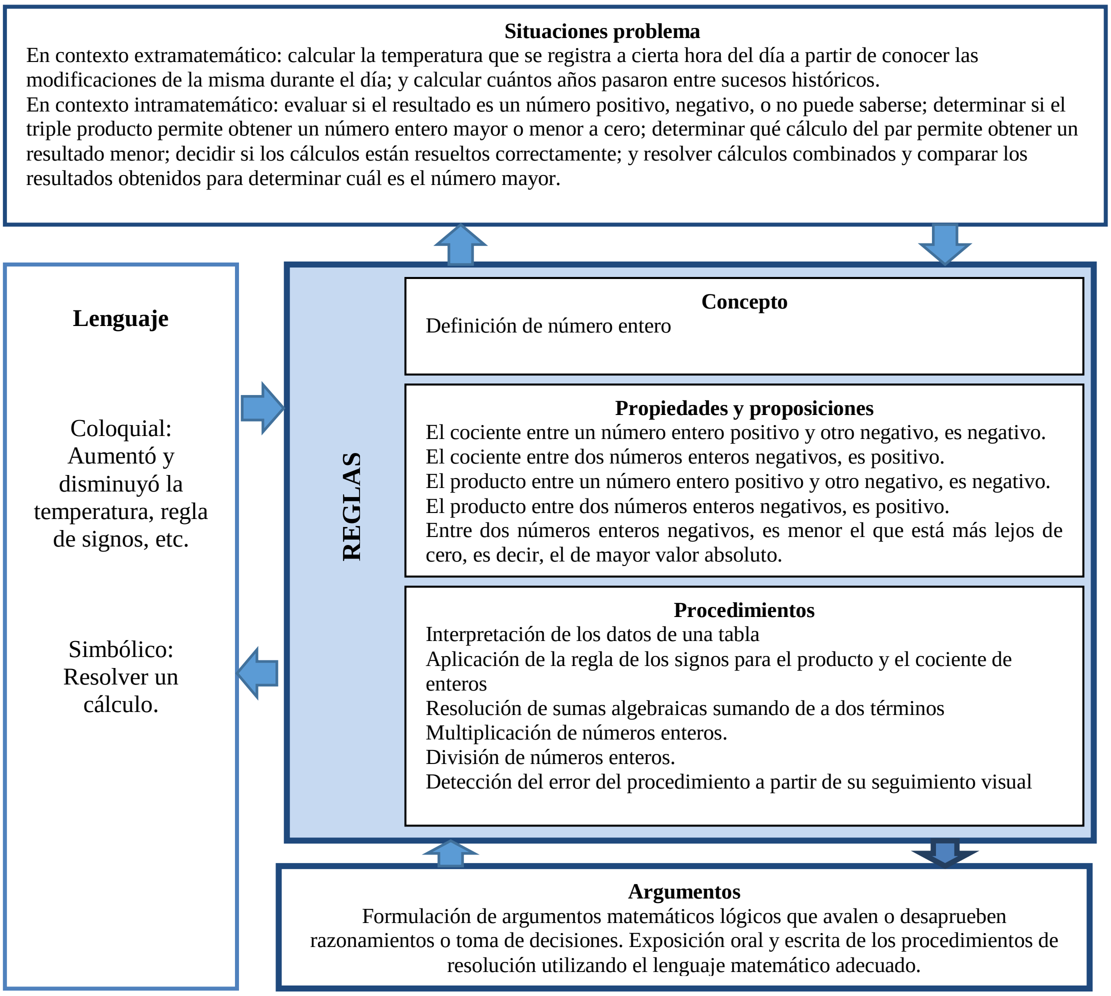


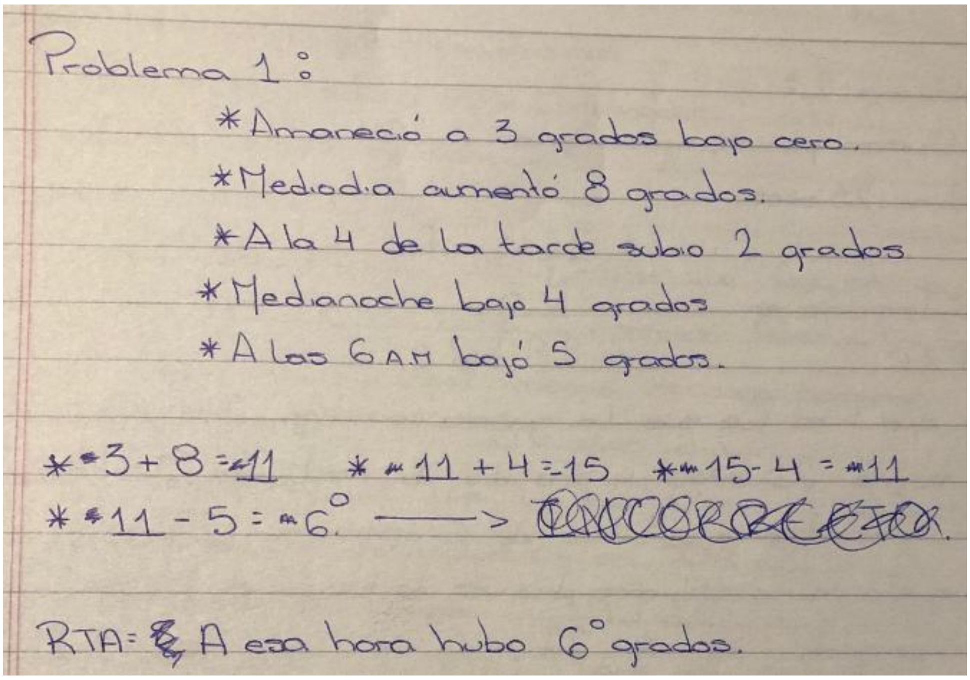
Figura 185: Configuración Cognitiva del alumno 9

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.			X						
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales			X		X		
		de factores con signos distintos					X		
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales					X		
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros					X				
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división					X		X
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación									
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									X
Separar incorrectamente en términos								X	X
Suprimir paréntesis incorrectamente									X
No resolver un problema en forma total o parcial								X	

Tabla 15: Identificación de errores y dificultades del alumno 9

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 9 en sus prácticas operativas y discursivas.

En la resolución del problema 1, el alumno no identificó la temperatura inicial como un número entero negativo; a este tipo de error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo denominan ignorar el signo.



Problema 1:

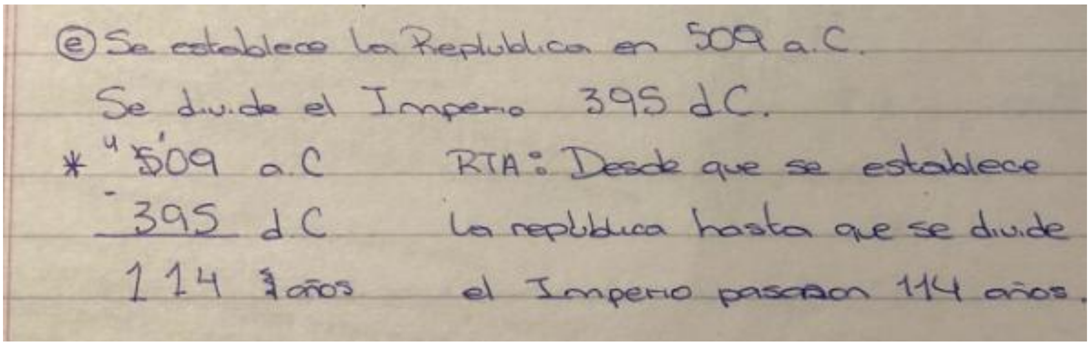
*Amaneció a 3 grados bajo cero.
*Mediodia aumentó 8 grados.
*A la 4 de la tarde subio 2 grados
*Medianoche bajo 4 grados
*A los 6 A.M bajó 5 grados.

* 3 + 8 = 11   * 11 + 4 = 15   * 15 - 4 = 11
* 11 - 5 = 6° ——>

RTA: A esa hora hubo 6° grados.

Figura 186: Errores y dificultades del alumno 9

En el desarrollo del problema 2, el alumno presentó dificultades al calcular cuántos años pasaron entre un suceso ocurrido antes de Cristo y otro después; operó directamente sin calcular los años transcurridos desde el primer evento al año cuando nació Cristo; aquí aparece la secuencia temporal como fuente de errores, clasificación que mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991).



(e) Se establece la Republica en 509 a.C.
Se divide el Imperio 395 d.C.

* 509 a.C
- 395 d.C
114 años

RTA: Desde que se establece la republica hasta que se divide el Imperio pasaron 114 años.

Figura 187: Errores y dificultades del alumno 9

En el problema 3, se encontraron varios errores y dificultades. Por un lado, en los ítems b y d el alumno no utilizó el concepto de módulo de un número entero; a esta dificultad no la anuncia ningún autor. Además, explicó que todos los ítems del problema los resolvió con la regla de los signos del producto y el cociente, pero la enunció mal; a estos, los clasifican Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) como errores de interferencia y reglas de cálculo como un formalismo vacío.

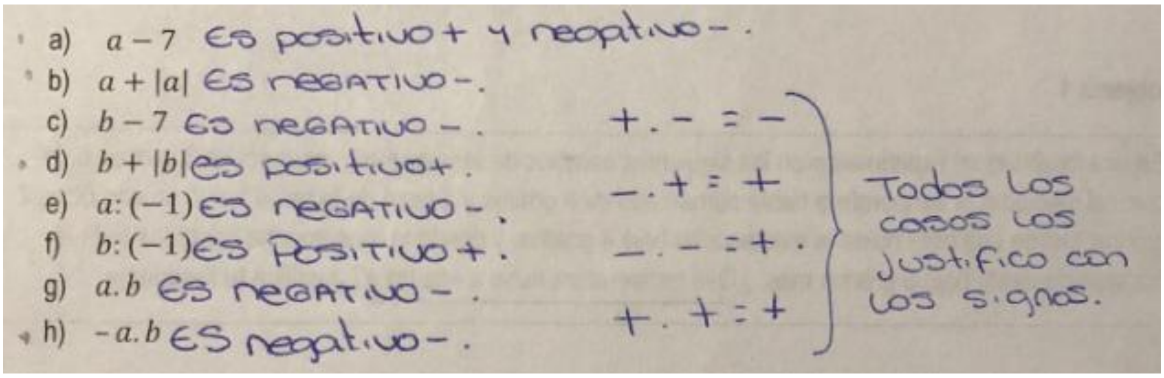


Figura 188: Errores y dificultades del alumno 9

En el problema 5, se encontraron errores en las multiplicaciones. En el ítem g, en vez de calcular el producto de los factores, el alumno sumó los valores absolutos y, ante un nuevo producto, decidió restar los factores y asignarle al resultado un signo negativo. En el ítem h, elevó 8 al cuadrado, en lugar de multiplicarlo por 2. Estos errores se clasifican como técnicos, según Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995).

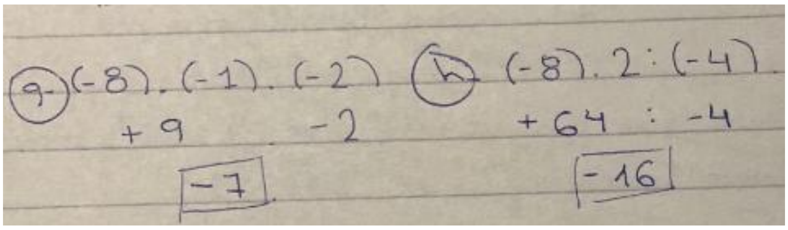


Figura 189: Errores y dificultades del alumno 9

Respecto del problema 6, solo identificó que estaba mal separado en términos el cálculo del ítem a. No comentó nada acerca del ítem b.

En la resolución del problema 7, arrojó gran cantidad de errores. Para el caso de las sumas entre un número entero negativo y otro positivo, el alumno operó sumando los valores absolutos y decidió que el resultado era positivo. Más adelante, en el cálculo resolvió una resta sumando los valores absolutos y decidió que el resultado es negativo. Estos errores los clasifica Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) como errores de interferencia y reglas de cálculo como un formalismo vacío. Se evidencia, además, que no separó en términos correctamente y tampoco suprime paréntesis; al respecto, Fory (2010) habla de este tipo de error como doble significado del signo “menos”.

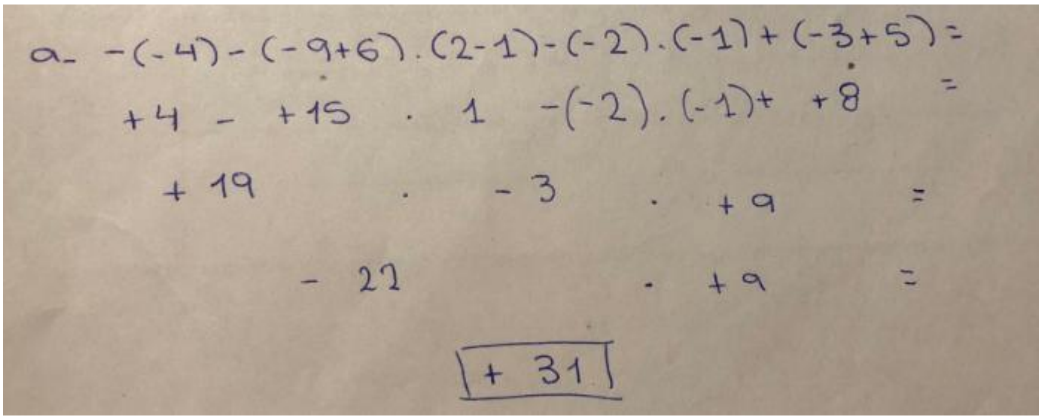


Figura 190: Errores y dificultades del alumno 9

6.4.10 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 10

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día a partir de conocer las modificaciones de la misma durante el día; y calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Aumentó y disminuyó la temperatura. Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico: Utilizar el cálculo simbólico para describir el enunciado de un problema. Resolver un cálculo.
$-a. A. A$

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, se restan sus valores absolutos y al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación de los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Aplicación de la propiedad asociativa de la suma
Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 191: Configuración Cognitiva del alumno 10

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales							
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros									
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado		X					
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos						X			
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación					X				
No recordar el concepto de valor absoluto				X					
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos									
Suprimir paréntesis incorrectamente									X
No resolver un problema en forma total o parcial									

Tabla 16: Identificación de errores y dificultades del alumno 10

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 10 en sus prácticas operativas y discursivas.

En la resolución del problema 2, se identificaron errores relacionados a calcular cuántos años transcurrieron de un suceso a otro, especialmente, si uno de ellos ocurrió antes de Cristo, porque el alumno no lo relacionó a la escritura de un número negativo; Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) reportan estos casos y los llaman secuencia temporal como fuente de errores.

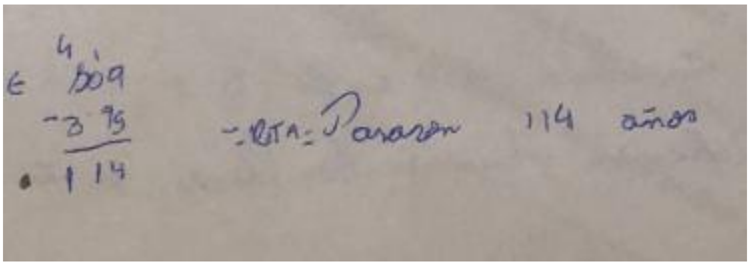

4
509
-3 95
1 14
-RTA: Pasaron 114 años

Figura 192: Errores y dificultades del alumno 10

Por las respuestas del alumno en los problemas 3, se puso de manifiesto que interpretó que un mismo símbolo literal podía tomar dos valores numéricos distintos en el mismo cálculo; este error no es clasificado por ningún autor.

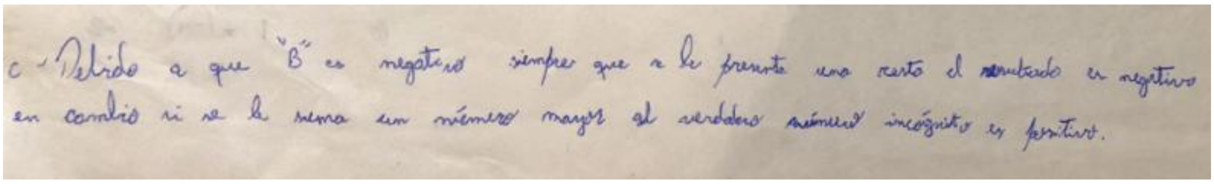

c- Debido a que "B" es negativo siempre que se le presenta uno resto el resultado es negativo en cambio si se le suma un número mayor al verdadero número incógnito es positivo.

Figura 192: Errores y dificultades del alumno 10

En el problema 4, se evidenció que el alumno asoció los símbolos literales a números positivos; este error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo clasifican como identificación de los símbolos literales con números positivos.

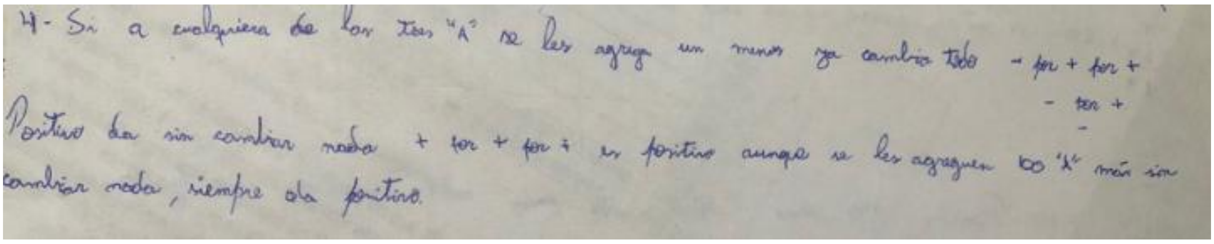

4- Si a cualquiera de los tres "A" se les agrega un menos ya cambia todo - por + por +
- por +
-
Positivo da sin cambiar nada + por + por + es positivo aunque se les agreguen 100 "A" más sin cambiar nada, siempre da positivo.

Figura 193: Errores y dificultades del alumno 10

En la resolución del problema 7, el alumno cometió un error relacionado a la supresión de paréntesis; en la investigación realizada por Fory (2010), se habla de este tipo de error como doble significado del signo “menos”.

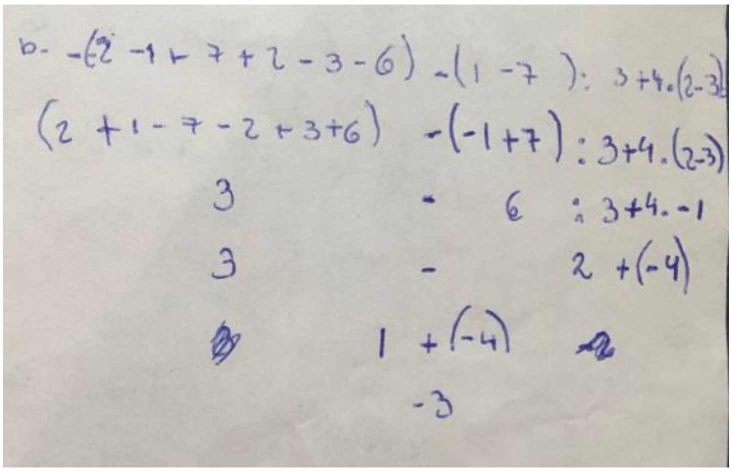


Figura 194: Errores y dificultades del alumno 10

6.4.11 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 11

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día a partir de conocer las modificaciones de la misma durante el día; y calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.
En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo, o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Aumentó y disminuyó la temperatura. Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico: Utilizar el cálculo simbólico para describir el enunciado de un problema. Resolver un cálculo.

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Números opuestos

Propiedades y Proposiciones

El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la propiedad asociativa del producto
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Análisis de casos particulares (experimentación):

- Resolución de sumas entre números enteros
- Resolución de restas entre números enteros

Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 195: Configuración Cognitiva del alumno 11

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.									
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales							
		de factores con signos distintos					X		
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros									
Error técnico		resolver una suma o resta		X					
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación									
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos									
Suprimir paréntesis incorrectamente									
No resolver un problema en forma total o parcial									

Tabla 17: Identificación de errores y dificultades del alumno11

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 11 en sus prácticas operativas y discursivas.

En la resolución del ítem d del problema 2, se halló un error. El cálculo que planteó el alumno es adecuado para dar respuesta a la pregunta, sin embargo, cometió un error técnico al sumar, según propone Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995).

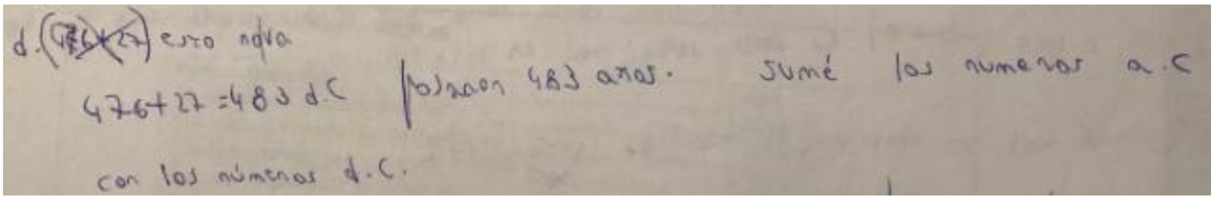


Figura 196: Errores y dificultades del alumno 11

El desarrollo del ítem d del problema 3, evidenció que el estudiante no recordaba el concepto de valor absoluto de un número entero; esta dificultad no es comentada por ningún autor de la bibliografía.

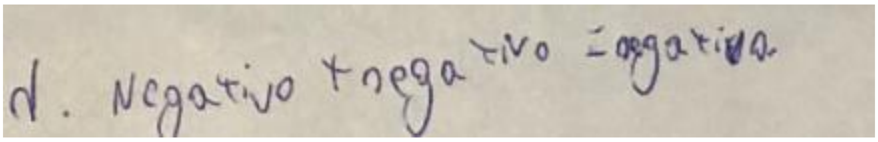


Figura 197: Errores y dificultades del alumno 11

En la resolución del ítem c del problema 5, el estudiante aplicóde forma equívoca la regla de los signos del producto de enteros; Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) reportan este caso y lo clasificanen tanto reglas de cálculo como formalismo vacío.

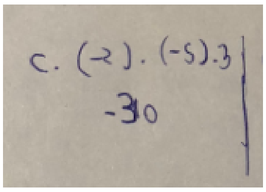


Figura 198: Errores y dificultades del alumno 11

Llegando al problema 7, se detectó un error en una resta de enteros. El alumno afirmó que $1 - 7 = 6$, se infiere que lo hizo luego de restar los valores absolutos, y expresó el resultado como positivo; a este caso lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo definen en tanto reglas de cálculo como formalismo vacío.

6.4.12 Configuración cognitiva, detección de errores y dificultades del alumno 12

Situaciones problema

En contexto extramatemático: calcular la temperatura que se registra a cierta hora del día a partir de conocer las modificaciones de la misma durante el día; y calcular cuántos años pasaron entre sucesos históricos.

En contexto intramatemático: evaluar si el resultado es un número positivo, negativo o no puede saberse; determinar si el triple producto permite obtener un número entero mayor o menor a cero; determinar qué cálculo del par permite obtener un resultado menor; decidir si los cálculos están resueltos correctamente; y resolver cálculos combinados y comparar los resultados obtenidos para determinar cuál es el número mayor.

Lenguaje

Coloquial: Aumentó y disminuyó la temperatura. Separación en términos, regla de signos, supresión de paréntesis, etc.

Simbólico: Utilizar el cálculo simbólico para describir el enunciado de un problema. Resolver un cálculo.

REGLAS

Conceptos

Definición de número entero
Valor absoluto como distancia de un número al cero
Números opuestos

Propiedades y proposiciones

El valor absoluto de un número siempre es positivo.
El opuesto de un número entero positivo, es negativo.
Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo; si los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.
El cociente entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El cociente entre dos números enteros negativos, es positivo.
El producto entre un número entero positivo y otro negativo, es negativo.
El producto entre dos números enteros negativos, es positivo.
Entre dos números enteros negativos, es menor el que está más lejos de cero, es decir, el de mayor valor absoluto.
Un número entero positivo es mayor que un número entero negativo.
Entre dos enteros negativos, es mayor el que está más cerca de cero, es decir, el de menor valor absoluto.

Procedimientos

Interpretación de los datos de una tabla
Separación en términos
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente de enteros
Supresión de paréntesis
Resolución de sumas algebraicas sumando de a dos términos
Análisis de casos particulares (experimentación):

- Resolución de sumas entre números enteros
- Resolución de restas entre números enteros

Multiplicación de números enteros
División de números enteros
Detección del error del procedimiento a partir de su seguimiento visual

Argumentos

Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 199: Configuración Cognitiva del alumno 12

Tabla de errores y dificultades			Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.									
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X					
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo							
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo							
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En el producto	de factores con signos iguales							
		de factores con signos distintos							
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales							
		con dividendo y divisor de signos distintos							
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros									
Error técnico		resolver una suma o resta							
		resolver una multiplicación o división							
		tomar mal los datos de una tabla o enunciado							X
		transcribir mal de un renglón a otro							
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica									
Identificar los símbolos literales con números positivos									
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación						X			
No recordar el concepto de valor absoluto					X				
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural									
Separar incorrectamente en términos								X	
Suprimir paréntesis incorrectamente									
No resolver un problema en forma total o parcial									

Tabla 18: Identificación de errores y dificultades del alumno12

A continuación, se presentan algunos errores cometidos por el alumno 12 en sus prácticas operativas y discursivas.

En la resolución del problema 2, se encontraron dos errores al calcular cuántos años transcurrieron desde un suceso ocurrido antes de Cristo con un suceso posterior a Cristo; Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) reportan estos casos y los llaman secuencia temporal como fuente de errores.

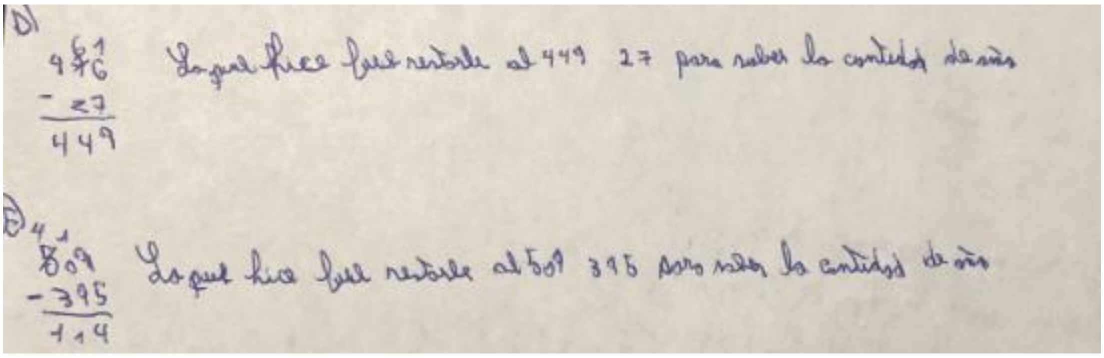


Figura 200: Errores y dificultades del alumno 12

En el desarrollo del ítem d del problema 3, se percibió que el alumno no aplicó correctamente el concepto de valor absoluto. Aunque en el margen derecho escribió la definición, cuando justificó su respuesta escribió que ambos términos son negativos y que el signo positivo había que cambiarlo por el negativo; este error no es anunciado por ningún autor.

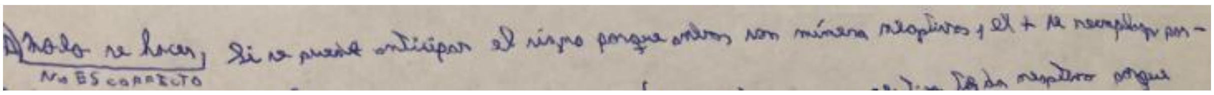


Figura 201: Errores y dificultades del alumno 12

En el problema 4, el alumno propuso que para que el producto $a.a.a$ resulte negativo, un factor tenía que ser negativo y los otros dos, positivos; y para que el producto sea positivo, dos factores tenían que ser negativos y uno, positivo. No identificó que tenía que ser el mismo factor las tres veces. Además, propuso un caso de cada tipo. Este error no es identificado por ningún autor.

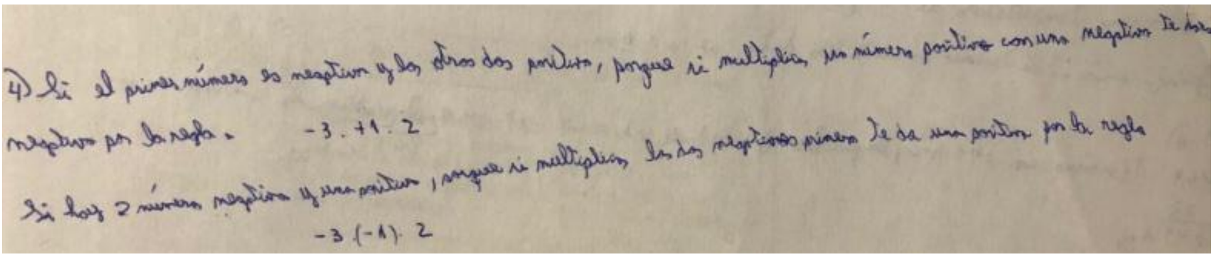


Figura 202: Errores y dificultades del alumno 12

En el problema 6, el alumno no percibió que los cálculos no estaban resueltos correctamente. No identificó que estaba mal realizada la separación en término en ambos ítems; este tipo de error no es mencionado por ningún autor.

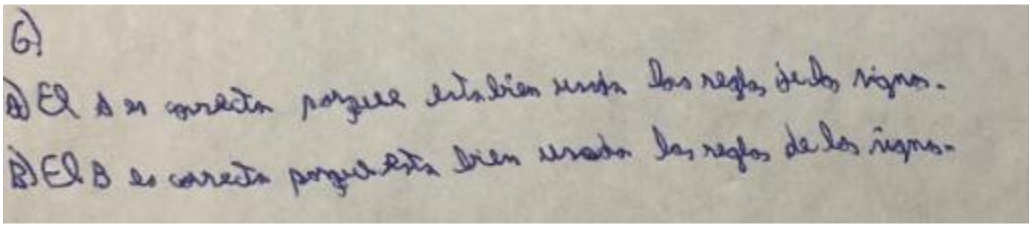


Figura 203: Errores y dificultades del alumno 12

En el primer cálculo del problema 7, el alumno transcribió mal el resultado de un producto de un renglón al otro; este tipo de error se clasifica como error técnico, según propone Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995).

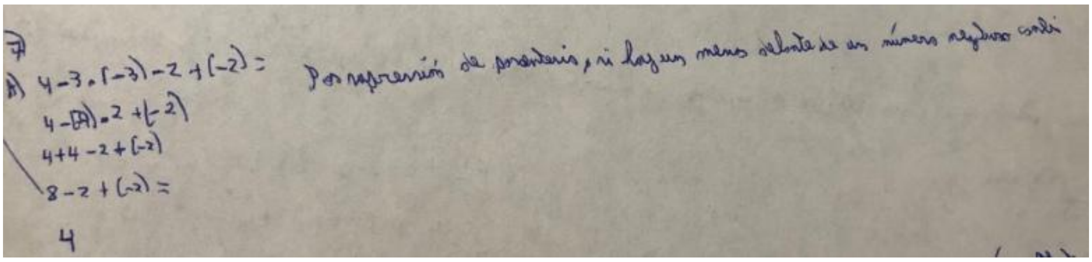


Figura 204: Errores y dificultades del alumno 12

6.5 Errores persistentes en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

Se registraron en una tabla los tipos de errores cometidos por los 12 alumnos que participaron en la realización de las 7 actividades propuestas. Tres estudiantes cometieron errores en el problema 1 al no conseguir relacionar las temperaturas por debajo de los cero grados con números enteros negativos. Además, 10 alumnos tuvieron dificultades tanto para calcular cuántos años pasaron desde un suceso anterior a Cristo a uno posterior como para determinar cuántos años duró cierto hecho histórico. Estos errores son identificados por Iriarte

Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) como ignorar el signo y la secuencia temporal como fuente de errores respectivamente. La presencia de estos errores verificó lo que anuncia Cid (2002) en sus investigaciones respecto a los problemas con números enteros enmarcados en modelos concretos. La supuesta familiaridad de los alumnos con situaciones en contexto no los eximió de cometer errores al operar con números enteros.

Un total de nueve alumnos cometieron, al menos, un error al resolver sumas y restas con números enteros. Uno de los casos que se presentó con más frecuencia es el de la suma entre un número negativo y otro positivo. Un total de cinco alumnos resolvieron este tipo de cálculos sumando los valores absolutos y expresando el resultado como positivo.

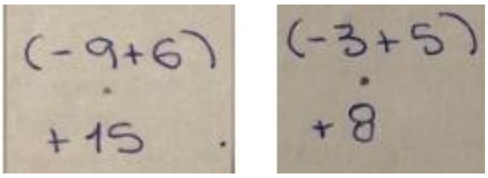


Figura 205: Resolución de la Situación Problema

Se registraron dos casos de alumnos que resolvieron el mismo tipo de cálculo restando los valores absolutos y expresaron el resultado como positivo.

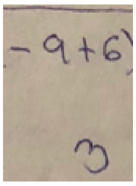


Figura 206: Resolución de la Situación Problema

También, se encontró un caso donde el estudiante decidió resolver restando los valores absolutos y expresando el resultado como negativo.

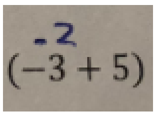


Figura 207: Resolución de la Situación Problema

Se registraron doscasos de alumnos que resolvieron el mismo tipo de cálculo sumando los valores absolutos y expresando el resultado negativo.

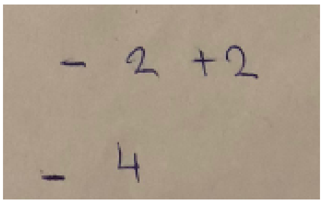


Figura 208: Resolución de la Situación Problema

En el caso de la suma entre enteros siendo el primer término positivo y el segundo negativo, se encontró el caso de un estudiante que resolvió sumando los valores absolutos y asignándole al resultado un signo negativo; además, como se va a comentar más adelante, trató de justificar su procedimiento mediante la regla de los signos del producto.

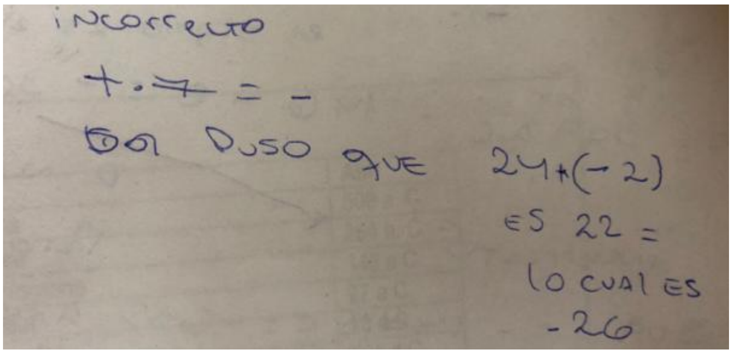


Figura 209: Resolución de la Situación Problema

Respecto de la resta entre números enteros, también se registraron distintos tipos de errores. Se encontraron cinco alumnos que resolvieron sumando los valores absolutos y expresando el resultado positivo.

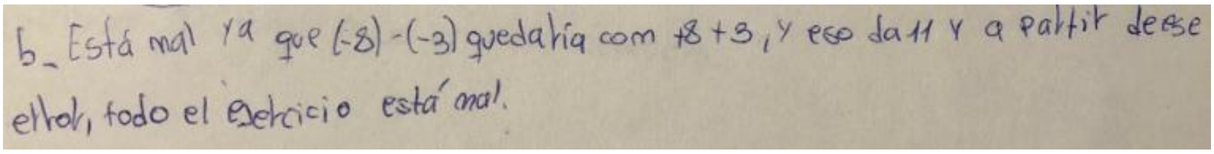


Figura 210: Resolución de la Situación Problema

Continuando con la resta, se observó que cuatro alumnos resolvieron restando los valores absolutos y asignándole al resultado un signo negativo

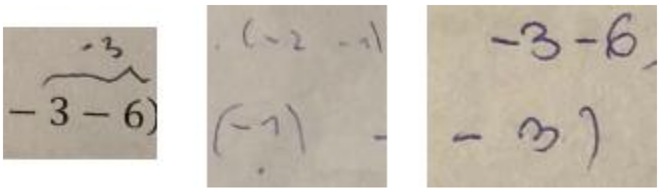


Figura 211: Resolución de la Situación Problema

Otro caso de resolución errónea en la resta de enteros se dio cuando el primer término fue de menor valor absoluto que el segundo, entonces, el estudiante decidió resolver sumando los valores absolutos y asignándole al resultado un signo negativo. Se registraron tres casos que operaron de esta forma.

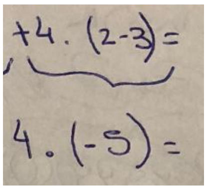


Figura 212: Resolución de la Situación Problema

Otros casos de errores reportados en la resta de enteros por parte de los alumnos, se presentó cuando dos de estos decidieron restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo.

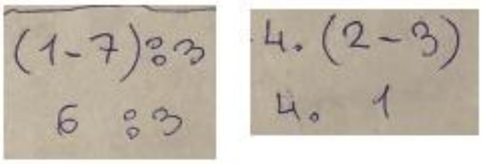


Figura 213: Resolución de la Situación Problema

En total, seis alumnos no resolvieron correctamente sumas entre números enteros, mientras que fueron ocho los que tuvieron resoluciones erróneas en la resta. Se puede concluir que, en el grupo donde fue aplicado el instrumento para esta investigación, generó más errores la operación resta.

Es preciso destacar que, en el caso de la alumna 2, los errores no fueron consistentes en el tanto se le presentaron dos ejercicios con las mismas características y los resolvió arrojando errores distintos. Además, se encontraron siete casos, específicamente de los alumnos 3, 5, 6, 7, 8, 11 y 12, donde los errores tampoco resultaron consistentes; pues, ante un ejercicio potencialmente generador de error que implica el mismo tipo de algoritmo, en un caso lo cometieron y en otro, no.

Todos los errores antes mencionados son llamados, por Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991), reglas de cálculo como un formalismo vacío.

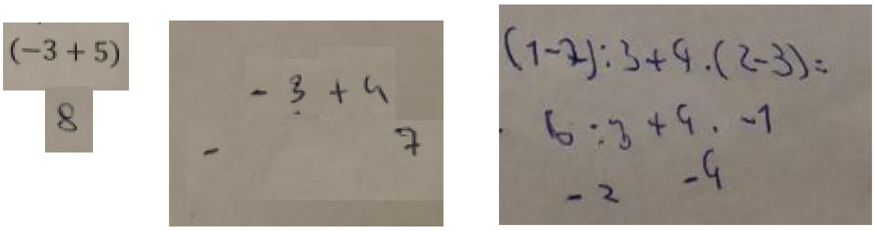


Figura 214: Resolución de la Situación Problema

En relación a la multiplicación y división de enteros, se encontraron siete casos de alumnos que resolvieron erróneamente multiplicaciones, mientras que tres presentaron errores en las divisiones como consecuencia de aplicar mal la regla de los signos. En ambas operaciones, el grupo donde se aplicó el instrumento generó más errores cuando se trataba de un producto con un factor positivo y otro negativo, o un cociente con dividendo y divisor de distinto signo. Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) llaman a este tipo de errores reglas de cálculo como un formalismo vacío.

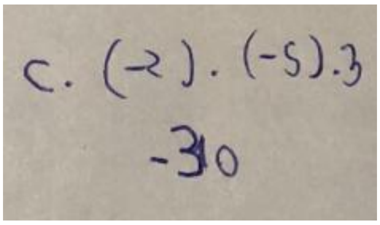


Figura 215: Resolución de la Situación Problema

Continuando con la regla de los signos, se identificaron seis estudiantes que en sus prácticas operativas y discursivas cometieron errores de interferencia. Este consiste en aplicar la regla de los signos del producto y el cociente en las sumas y las restas, tal como dice Radatz (1980).

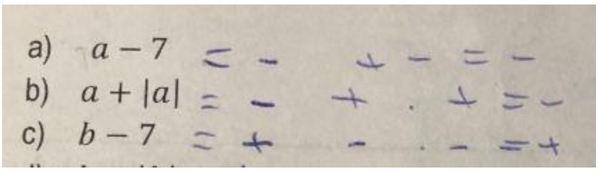


Figura 216: Resolución de la Situación Problema

En la resolución de problemas matemáticos es muy frecuente transcribir mal de un renglón a otro, hacer un cálculo básico mal por distracción o tomar los datos de una tabla o enunciado en forma errónea. Estos errores son técnicos, según proponen Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995). Tres alumnos cometieron errores técnicos al resolver sumas y restas; y dos, al resolver multiplicaciones y divisiones. Dos estudiantes tomaron mal los datos de la tabla o enunciado; y tres, transcribieron mal de un renglón a otro.

En el instrumento, se incluyeron dos problemas en los que se trabajaba con símbolos literales. Un total de tres estudiantes interpretó que el símbolo literal es un número positivo. De esta manera, se constata lo que mencionan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991) y lo clasifican como error de identificación de los símbolos literales con números positivos.

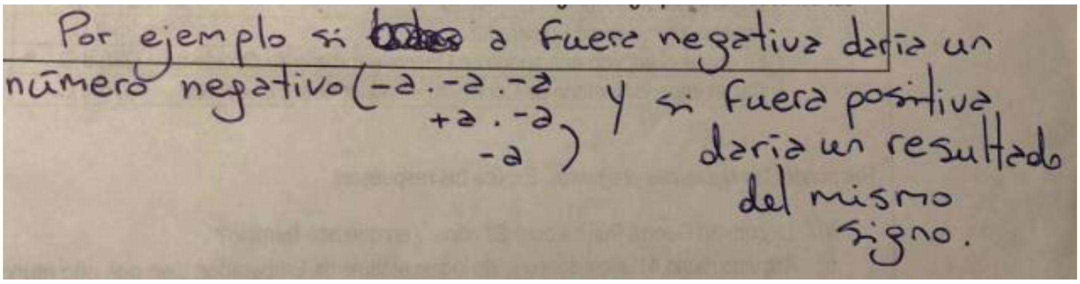


Figura 217: Resolución de la Situación Problema

Con respecto al el trabajo con símbolos literales, cinco alumnos asignaron dos o más valores numéricos a un mismo símbolo en la operación. Además, la totalidad de los doce alumnos no ha podido resolver correctamente los ejercicios que implicaban el concepto de valor absoluto. Estos errores no han sido mencionados por ningún autor considerado para la revisión bibliográfica de la investigación.

En lo concerniente al orden de los números enteros, tres estudiantes no determinaron correctamente qué número entero es mayor o menor que otro. Suele ocurrir que los estudiantes piensan que el orden entre los negativos es el mismo que el orden natural; a este tipo de error lo reportan Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991). Solo un estudiante, señaló el resultado mayor.

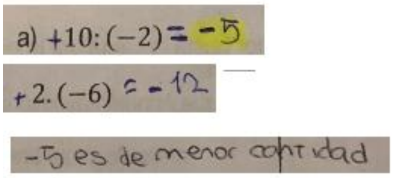


Figura 218: Resolución de la Situación Problema

Un error que fue muy recurrente y tiene que ver con la separación en términos. Se encontraron seis casos de alumnos que manifestaron este tipo de falencia. Algunos no separaron en términos, y otros lo hicieron pero no lo tuvieron en cuenta. A este error no lo comenta ningún autor de los considerados para la revisión bibliográfica.

Por último, la supresión de paréntesis trajo dificultades a seis estudiantes, especialmente, cuando hubo un signo negativo por delante del paréntesis. Este error puso de manifiesto la confusión que trae el doble significado del signo "menos", según comenta Fory (2010).

Una sistematización de los errores cometidos por cada alumno se registra en la siguiente tabla:

Tabla de errores y dificultades			Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6	Alumno 7	Alumno 8	Alumno 9	Alumno 10	Alumno 11	Alumno 12
Ignorar el signo: No interpretar la temperatura bajo cero como entero negativo.				X					X		X			
Secuencia temporal: Calcular erróneamente el tiempo transcurrido.				X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
Reglas de cálculo como formalismo vacío	En la suma de enteros	restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo		X										X
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo												X
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo		X	X		X	X			X			
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo			X			X						
	En la resta de enteros	sumar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo		X	X		X		X		X			
		sumar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo						X	X		X			
		Restar los valores absolutos y expresar el resultado como positivo		X	X				X	X				
		restar los valores absolutos y expresar el resultado como negativo			X								X	
cálculo como formali	En el product o	de factores con signos iguales		X	X		X	X			X			

		de factores con signos distintos					X		X		X		X	
	En el cociente	con dividendo y divisor de signos iguales					X	X						
		Con dividendo y divisor de signos distintos									X			
Error de interferencia: Aplicar la regla de los signos del producto en sumas y restas de enteros				X	X	X		X		X	X			
Error técnico		resolver una suma o resta		X	X								X	
		resolver una multiplicación o división		X							X			
		Tomar mal los datos de una tabla o enunciado					X					X		
		Transcribir mal de un renglón a otro		X						X				X
Teoremas, definiciones o reglas deformadas al resolver una suma algebraica														
Identificar los símbolos literales con números positivos			X				X					X		
Asignar dos o más valores a un símbolo literal en la misma operación					X				X	X		X		X
No recordar el concepto de valor absoluto			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Pensar que el orden entre los negativos es el mismo orden natural					X			X			X			
Separar incorrectamente en términos				X	X	X		X			X			X
Suprimir paréntesis incorrectamente				X	X	X			X		X	X		
No resolver un problema en forma total o parcial				X	X	X	X	X	X	X	X			

Tabla 19: Tabla de registro de errores de los 12 estudiantes

6.6 Determinación de la presencia o ausencia de elementos primarios del objeto matemático

Con el objetivo de determinar la presencia, total o parcial, o la ausencia de conceptos, propiedades y procedimientos puestos en marcha por los estudiantes en la resolución del instrumento, se realizó la comparación entre la Configuración Epistémica del instrumento y las Configuraciones Cognitivas de los alumnos. La información, se sistematizó en la siguiente tabla donde, con una X, se marca la presencia de cada objeto primario.

Conceptos, propiedades y proposiciones		Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6	Alumno 7	Alumno 8	Alumno 9	Alumno 10	Alumno 11	Alumno 12
Conceptos	Número entero	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Valor absoluto												X
	Números opuestos	X	X			X		X	X		X	X	X
Propiedades y proposiciones	El valor absoluto es siempre positivo												X
	El cero es neutro												
	El opuesto de un número positivo, siempre es negativo. El opuesto de un número negativo, es positivo	X	X		X	X	X	X	X		X	X	X
	Si en una suma o resta los números tienen el mismo signo, al resultado le corresponde ese mismo signo.	X			X	X	X	X	X		X	X	X
	Si en una suma o resta los números tienen distinto signo, al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.	X			X	X	X	X	X		X	X	X
	El cociente entre un número positivo y otro negativo, es negativo	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	El cociente entre dos números negativos, es positivo	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	El producto de dos números negativos, es positivo	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	El producto entre un número negativo y otro positivo, es negativo	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Entre dos números negativos, es menor el de mayor valor absoluto	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X
	Un número positivo es mayor que un negativo	X		X	X	X	X		X	X	X	X	X
	Entre dos números negativos, es mayor el de menor valor absoluto	X		X	X	X			X	X	X	X	X

Tabla 20: Tabla de presencia o ausencia de conceptos, propiedades y proposiciones

En la siguiente tabla se registra la presencia, total o parcial, de procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución del instrumento.

Procedimientos	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6	Alumno 7	Alumno 8	Alumno 9	Alumno 10	Alumno 11	Alumno 12
Interpretar los datos de una tabla	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Separar en términos	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X
Aplicación de la regla de los signos para el producto y el cociente	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Supresión de paréntesis	X				X	X	X	X		X	X	X
Resolución de las sumas algebraicas sumando o restando de a dos términos	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Resolución de las sumas algebraicas calculando la diferencia entre los números positivos y el valor absoluto de la suma de los negativos												
Sumar o restar mediante desplazarse en la recta numérica	X											
Realización de una recta numérica para saber qué número es mayor o menor que otro.		X					X					
Aplicación de la propiedad asociativa de la suma		X								X		
Aplicación de la propiedad asociativa del producto			X				X	X			X	
Aplicación de la propiedad conmutativa de la suma												
Experimentación: resolver sumas, restas, multiplicaciones y divisiones mediante números enteros.	X	X	X	X				X			X	X
Multiplicar números enteros	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Dividir números enteros	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Detección del error de un procedimiento a partir del seguimiento visual del mismo	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 21: Tabla de presencia o ausencia de procedimientos

En esta tabla se registra la presencia, total o parcial, o ausencia de argumentos basados en conceptos, procedimientos y propiedades.

Argumentos	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6	Alumno 7	Alumno 8	Alumno 9	Alumno 10	Alumno 11	Alumno 12
Argumentación a través de conceptos												X
Argumentación a través de procedimientos	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Argumentación a través de propiedades	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 22: Tabla de presencia o ausencia de argumentos

6.6.1 El tipo de lenguaje utilizado en el proceso de argumentación

El proceso de argumentación en los alumnos fue realizado en el momento de aplicación del instrumento; sin embargo, fue preciso entrevistar a tres alumnos para completar este proceso. Según las observaciones pertinentes, utilizaron el lenguaje simbólico para resolver los cálculos propuestos y el lenguaje verbal, y poco formal, para llevar a cabo las justificaciones de las resoluciones. En la mayoría de los casos, se registraron respuestas incompletas o los alumnos manifestaban el uso de términos no adecuados, por lo que se considera que el proceso de argumentación ha sido deficiente. Se halló que solo tres alumnos manejaron alguna forma de lenguaje gráfico para argumentar.

Tipos de lenguaje	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6	Alumno 7	Alumno 8	Alumno 9	Alumno 10	Alumno 11	Alumno 12
Lenguaje simbólico	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Lenguaje verbal	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Lenguaje gráfico	X	X					X					

Tabla 23: Tabla de tipos de lenguaje utilizados

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

7. CONCLUSIONES

7.1 Consideraciones generales

En el presente Capítulo se comentan las principales conclusiones de este trabajo cuyo propósito fue analizar los errores y dificultades que tienen frecuentemente los alumnos cuando resuelven actividades con números enteros. Para determinar los errores y dificultades se analizó el Diseño Curricular provincial (DCES2, 2007) y seis libros de texto que los docentes utilizan frecuentemente; específicamente, se estudiaron las secciones referidas a las cuatro operaciones básicas entre números enteros. A partir de siete problemas presentes en ellos, se diseñó el instrumento de evaluación y se optimizaron con la finalidad de aumentar el potencial matemático de las consignas.

El instrumento y la configuración epistémica del mismo se sometieron al análisis y discusión de cuatro pares expertos; los mismos realizaron sugerencias para mejorar la calidad de la investigación y, posteriormente, validarlo. Fue de este modo que se decidió aplicarlos en un curso de segundo año del Instituto del Sol, ubicado en General Pacheco, Partido de Tigre, en la Provincia de Buenos Aires, durante el año 2018. Participaron en total doce alumnos; las resoluciones se las situaciones problema y las entrevistas realizadas permitieron estructurar las configuraciones cognitivas. Posteriormente, se llevó a cabo la comparación entre la configuración epistémica y las configuraciones cognitivas de los estudiantes.

Para abordar cualquier tipo de conclusión, resulta necesario retomar los objetivos de esta investigación enunciados en el Capítulo 1, a saber:

- Determinar los conceptos, propiedades, procedimientos, técnicas, tipo de argumentaciones y uso de lenguaje al que recurren los alumnos cuando resuelven actividades vinculadas a números enteros.
- Identificar las estrategias a las cuales recurren los alumnos cuando operan con números enteros.
- Detallar los errores y dificultades que generan algunas estrategias de resolución vinculadas a la operatoria con números enteros.

Para finalizar el desarrollo de este Capítulo, se presentarán algunas consideraciones generales, reflexiones y limitaciones encontradas en esta investigación y que resultarán de gran interés para perspectivas futuras y la continuación del estudio.

7.2 Los objetos primarios a los que recurren los alumnos cuando resuelven actividades vinculadas a números enteros

En el Capítulo 6 se analizó cualitativamente las respuestas brindadas por doce alumnos a las actividades planteadas en el instrumento elaborado y validado por los profesionales. Se determinaron las configuraciones cognitivas de cada uno y se las cotejó con la configuración epistémica del instrumento; como resultado de esta comparación, se evidenció el manejo de los elementos primarios en los estudiantes en forma total o parcial.

Respecto de los conceptos

- La totalidad de los alumnos pusieron en práctica adecuadamente el concepto de número entero.
- Solo un alumno definió y puso en práctica el concepto de valor absoluto de un número entero.
- Ocho alumnos pusieron en práctica el concepto de número opuesto.

Respecto de las propiedades y proposiciones

- Solo un alumno expresó que el valor absoluto de un número entero es siempre positivo.
- Ningún alumno precisó que el cero es neutro.
- Diez alumnos dieron cuenta que el opuesto de un número positivo es siempre negativo y el opuesto de un número negativo, es positivo.
- Nueve alumnos aplicaron las propiedades:
  - en la suma o resta de números del mismo signo, el resultado lleva ese mismo signo; y
  - en la suma o resta de números con distinto signo, el resultado lleva el signo del número con valor absoluto mayor.
- La totalidad de los alumnos precisó que:
  - el cociente entre un número positivo y otro negativo, es negativo;
  - el cociente entre dos números negativos, es positivo;
  - el producto entre un número positivo y otro negativo, es negativo; y
  - el producto entre dos números negativos, es positivo.
- Diez alumnos identificaron que entre dos números negativos, es menor el de mayor valor absoluto.

- Diez alumnos identificaron que un número positivo es mayor que un número negativo.
- Nueve alumnos identificaron que entre dos números negativos, es mayor el de menor valor absoluto.

Respecto de los procedimientos

- La totalidad de los alumnos interpretaron los datos que se encuentran en una tabla.
- La totalidad de los alumnos, separaron en términos.
- La totalidad de los alumnos aplicaron la regla de los signos para productos y cocientes de números enteros.
- Nueve alumnos realizaron supresiones de paréntesis.
- La totalidad de los alumnos resolvieron sumas y restas entre enteros, y operaron cada dos términos.
- Ningún alumno resolvió sumas algebraicas sumando los números positivos y restando la suma de los valores absolutos de los negativos.
- Un alumno alegó que se imaginó una recta numérica para resolver sumas y restas entre números enteros.
- Dos alumnos realizaron una recta numérica para determinar qué número entero es mayor o menor.
- Dos alumnos aplicaron la propiedad asociativa de la suma.
- Cuatro alumnos aplicaron la propiedad asociativa del producto.
- Ningún alumno aplicó la propiedad conmutativa de la suma.
- Siete alumnos, ante un problema con símbolos literales, experimentaron resolviendo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números enteros.
- La totalidad de los alumnos resolvió multiplicaciones y divisiones números enteros.
- La totalidad de los alumnos detectó el error en un procedimiento dado a partir del seguimiento visual del mismo.
- Ningún alumno detectó el error en un cálculo a partir de la comparación de procedimientos.

Respecto a las argumentaciones

- Un alumno refirió a conceptos.

- La totalidad de los alumnos refirió a propiedades.
- La totalidad de los alumnos utilizó procedimientos para argumentar.

Respecto del lenguaje utilizado en los procesos de argumentación

- La totalidad de los alumnos utilizaron el lenguaje simbólico al resolver las actividades.
- La totalidad de los alumnos utilizaron el lenguaje verbal para dar cuenta de lo que hacían.
- Tres alumnos utilizaron el lenguaje gráfico para resolver las consignas.

7.3 Las estrategias a las cuales recurren los alumnos cuando operan con números enteros

A continuación, se comentan los procedimientos utilizados por los estudiantes, ya sea en forma correcta o con algunas deficiencias:

- La totalidad de los alumnos pudo resolver sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números enteros.
- La totalidad de los alumnos presentaron alguna deficiencia al interpretar problemas verbales o cuando requieren símbolos literales donde se involucran números enteros.
- Dos alumnos utilizaron el soporte gráfico de una recta para comparar números enteros.
- Seis alumnos separaron en términos correctamente cuando realizaron operaciones con números enteros.
- Seis alumnos consiguieron suprimir paréntesis correctamente.

7.4 Los errores y dificultades que generan algunas estrategias de resolución vinculadas a la operatoria con números enteros

El análisis de las prácticas operativas y discursivas llevadas a cabo por el grupo de estudiantes participantes frente a las situaciones problema, permitió observar y sintetizar que los alumnos tienen:

- Dificultades para relacionar las temperaturas por debajo de los cero grados con números enteros negativos.

- Dificultades para calcular cuántos años pasaron desde un suceso anterior a Cristo a uno posterior, así como para determinar cuántos años duró cierto hecho histórico.
- Errores y dificultades en la aplicación de algoritmos para resolver sumas y restas entre números enteros, siendo la resta la que registró más errores por parte de los alumnos. Algunos resolvieron bien las sumas y restas pero, eventualmente, cometen algún error. Otros, cometieron gran cantidad de errores pero utilizando más de un algoritmo no estándar para resolver una suma o resta que tiene iguales características. También, se registraron casos donde se aplicó la regla de los signos del producto en las sumas y restas.
- Errores y dificultades en la multiplicación y división de enteros como consecuencia de la incorrecta aplicación de la regla.
- Errores técnicos al transcribir mal de un renglón a otro, hacer un cálculo básico mal por distracción o tomar los datos de una tabla o enunciado en forma errónea.
- Errores y dificultades al interpretar símbolos literales como números positivos.
- Errores y dificultades al determinar qué número entero es mayor que otro, fundamentalmente cuando son negativos.
- Errores y dificultades al suprimir paréntesis.

Autores como Iriarte Bustos, Jimeno Pérez y Vargas-Machuca de Alva (1991); Mavshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citados en Rico, 1995), Fory (2010); y Radatz (1980); han advertido la presencia de estos errores en sus investigaciones. Sin embargo, hay errores que no han sido reportados por los autores considerados en la revisión bibliográfica:

- Errores y dificultades al asignarle más de un valor numérico a un mismo símbolo literal en la operación $a.a.a$ o $b + |b|$.
- Errores al separar en términos.
- Dificultades al aplicar el concepto de valor absoluto.

7.5 Sobre los textos escolares que involucran a los números enteros

La mayoría de los docentes utilizan textos escolares en sus clases, y las características que presentan sus actividades pueden o no favorecer el trabajo en el aula. Llamó la atención que los libros, objeto de análisis de esta investigación, posean propuestas centradas fundamentalmente en consignas intramatemáticas y en procedimientos. Resultaron escasas y, en algunos casos, nulas, las actividades en contextos extramatemático o que requerían la utilización de propiedades, del lenguaje gráfico para resolver, o de recursos tecnológicos.

En los textos no se promueve el proceso de argumentación. Incluso, las exiguas consignas que solicitaban fundamentación, pedían argumentar respecto de procedimientos y no sobre conceptos o propiedades. Con este tipo de consignas, es comprensible que a muchos estudiantes les sea dificultoso este aspecto de la práctica matemática.

El análisis didáctico realizado coincide con Pluvinage y Flores (2016) respecto a que los textos ponen un fuerte énfasis en las operaciones y los algoritmos operatorios, como la regla de los signos; mientras que se evidencia cierta carencia en relación a la génesis discursiva. Asimismo, pareciera ser que prescinden de la visualización gráfica, aspecto sumamente fundamental para la comprensión del sentido de los conceptos; además, esto puede llevar aque se pondere el álgebra sobre la geometría.

7.6 Reflexiones finales

Teniendo en cuenta los numerosos errores y dificultades descriptos en este estudio, se formulan más abajo algunos criterios que pueden tenerse en cuenta en el diseño o rediseño de situaciones problema que involucren a los números enteros como objeto de estudio. Los mismos, se utilizaron para la elaboración del instrumento de evaluación y parten de la necesidad de nuevas propuestas didácticas que pongan en evidencia los objetos primarios para las operaciones básicas con números enteros.

Del trabajo de Cid (2002), se valoró la mirada acerca de importancia de evitar actividades que pongan un énfasis excesivo en los modelos concretos; ya que justifican con cierta simplicidad la suma y la resta de números enteros, pero difícilmente explican a los estudiantes el orden, el producto y el cociente. A partir de esta reflexión, se elaboró el primer criterio:

- Seleccionar o diseñar situaciones problema con números enteros en contextos intra y extramatemáticos apropiados que permitan articular adecuadamente conceptos, propiedades, procedimientos, técnicas, rutinas y diversas representaciones lingüísticas sobre este objeto matemático.

De la investigación de Pluvinage y Flores (2016), se adhiere a que gran parte de los libros de texto ofrecen actividades con carencias en la génesis discursiva. Este aspecto, condujo a la elaboración del segundo criterio:

- Proponer situaciones problema que generen y promuevan procesos de argumentación y no solo la aplicación de algoritmos con números enteros.

De Barreiro *et al* (2017) se consideraron las sugerencias relacionadas al aumento del potencial matemático de una consigna; a saber, que admita diferentes caminos de resolución y que no paute los pasos a seguir. Se entiende que la variedad en las formas de resolución implica, a la vez, variedad en el registro de las respuestas. Atendiendo a ello, se elaboró el tercer y último criterio:

- Proponer situaciones problema sobre números enteros redactadas de manera que no condicionen al estudiante en su quehacer matemático, sino que promuevan el uso de diferentes registros de representación y el lenguaje, verbal, simbólico y gráfico.

7.7 Limitaciones de la investigación y futuras perspectivas

Los resultados y las conclusiones se formularon a partir del trabajo de campo en un contexto determinado, por lo que no se puede generalizar y extender a otros grupos. Sin embargo, la metodología de la investigación y el instrumento pueden utilizarse para determinar los errores y dificultades que presentan otros estudiantes al resolver actividades que involucren las operaciones básicas de números enteros y, además, servir de apoyo en el diseño de nuevas situaciones problema.

El estudio deja algunas líneas posibles de profundización en la investigación. En este sentido, sería interesante aplicar el instrumento al mismo grupo en 6^{to} año con el objetivo de evaluar si los errores frecuentes tienen que ver con la reciente adquisición del concepto de números enteros y si se han superado alconcluir la escuela secundaria. Otra propuesta es analizar la idoneidad didáctica del Capítulo de Números Enteros de los textos escolares de uso frecuente de 2^{do} año en la escuela secundaria; puesto que se lograría determinar si existen libros que presentan tareas con idoneidad epistémica alta, cuyas situaciones posean potencial matemático rico y promuevan una variedad de conceptos, propiedades y procedimientos donde se involucren diferentes formas de expresión.

Para concluir, es válido hacer referencia a la metodología de investigación abordada; puesto que, para determinar los errores y dificultades que tienen los alumnos, se utilizaron las herramientas del EOS como línea de la Didáctica de la Matemática. Cabe destacar que, al basarse este estudio en dicho marco teórico particular, es posible que se haya sesgado o limitado el modo de analizar. Es decir, si se hubiese llevado a cabo otro enfoque de la Didáctica de la Matemática, las conclusiones no necesariamente hubieran sido las mismas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R.;Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Villa María, Argentina: Universidad de Villa María

Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica.* Caracas, Venezuela: Episteme

Bachelard, G. (1972). *La formación del espíritu científico.* Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNGS

Bell, A. (1986). La enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias,* 4 (3), 190-208

Boccioni, M., Mercado, L. y Vigione, Y. (2016). *Nuevo Activados*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Puerto de Palos

Broitman, C. e Itzcovich, H. (2011). *Matemática en secundaria 1°CABA/ 2°ES*. Buenos Aires, Argentina: Santillana

Brousseau, G. (1989). Les obstacles epistémologiques et les problémes en mathemátiques. *Recherles en Didactique des Mathematiques*. Recuperado el 3 de Marzo de 2017 de http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Les_obstacles_epistemologiques_et_la_didactique_des_mathematiques89

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números,* 29,5-18. Recuperado el 31 de agosto de 2012 dehttp://sinewton.org/numeros/numeros/29/Articulo01.pdf

Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 4 (2), 415-427. Recuperado el 31 de agosto de 2012 dehttp://dmle.cindoc.csic. Es/pdf/GACETARSME_2001_04_2_05.pdf

Caputo, L. y Soto, N. (2002). *Proporcionalidad directa e inversa: dificultades en su aprendizaje*. Corrientes, Argentina: Universidad Nacional del Nordeste

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* (pp. 529-542). Zaragoza, España: Publicaciones de la Universidad de Zaragoza

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Lagade. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autressavoirs) commeoutils de connaissance et dáction* (pp. 575-594). Montpellier: IUFM

Crespo, S.; Maradei, M. y Starobinsky, M. (2016). *Carpeta de Matemática 2. Serie Práctica Huellas.* Buenos Aires, Argentina: Estrada

DCES1 (2006). Diseño Curricular para la Escuela Secundaria – 1° Año. En A. y M. Paulozzo (Coords). *Matemática*. La Plata, Argentina: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires

DCES2 (2007). Diseño Curricular para la Escuela Secundaria – 2° Año. En D. Guil, E. Maqueda, J. Brisuela y S. Rodríguez (Coord.). *Matemática*(pp. 293-351). La Plata, Argentina: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires

DCES3 (2009). Diseño Curricular para la Escuela Secundaria – 3° Año. En C. Bracchi (Coord.). *Matemática*. La Plata, Argentina: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires

Díaz Mora, H. (2015). *La Ley de los Signos: Una Propuesta para la Enseñanza-Aprendizaje de la Multiplicación de Números Enteros*. Trabajo de grado. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Bogotá.Recuperado el día 26 de Octubre de 2018 del sitio web http://bdigital.unal. Edu.co/51415/1/28061173.2015.pdf

Di Blasi Regner, M; Espro, F.; Lois, A. y Milevicich, L. (2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso. *Actas del II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería*. Buenos Aires: Facultad de Ingeniería de la UBA

Effenberger, P. (2013). *Matemática II*. Buenos Aires, Argentina: Kapulusz

Esteley, C. y Villarreal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en Matemática. *Revista de Educación Matemática* 11(1), 16 – 33

Fory, O. (2010). *Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares.* Tesis de pregrado. Universidad del Valle. Cali, Valle, Colombia

Gallardo, A.y Hernández, A. (2007). *Historia versus enseñanza: los números negativos*. México: Cinvestav-IPN. Recuperado el día 10 de octubre de 2013 del sitio web: www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig2/gallardo.pdf

Gallardo, A. y E. Basurto (2010). *La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros.* Recuperado el día 31 de julio de 2016 del sitio web http://www.clame.org.mx/relime/201014d.pdf

Gamboa, J. (1997). *Los errores en el aprendizaje de la Matemática*. Recuperado el 1 de septiembre de 2012 de http://macareo.pucp. Edu.pe/~jhenost/articulos /errores.htm

Giraldo Osorio,l. F. (2014). *Los números enteros negativos en la matemática moderna y la matemática actual*. Trabajo del grado. Santiago del Cali. Universidad del Valle

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3), 325-355

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO*,25, 77-87

Godino, J. D. (2003) *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada. Extraído el 28 de Febrero de 2017 de http://www.ugr. Es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Godino, J. D.; Batanero C. y Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Universidad de Granada. Recuperado el 1 de septiembre de 2012 de: http://www.ugr. Es/local/jgdino/edu mat-maestros/

Godino, J. D.; Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZentralblattfürDidaktik der Mathematik,* 39(1-2), 127-135

Godfroit, S.; Guayán, C. y Oleaga, M. (2012). *Matemática en Secundario II. Serie Escenarios*. Buenos Aires, Argentina: Estación Mandioca

Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: Editorial Mc Graw Hill

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Actas del XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

INFD (2010). *Proyecto de mejora para laformación inicial de profesores para elnivelsecundario. Área: Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias. Recuperado el 1 de septiembre de 2012 de http://cedoc.infd. Edu. Ar/upload/Matematica.pdf

Iriarte Bustos, M. D.;Jimeno Pérez; M. y Vargas-Machuca de Alva; I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma,* 13-18

Kaczor, P., Outón, V. (2016) *Entre números II: Actividades de Matemática*. Buenos Aires. Santillana

Godfroit, S.; Guayán, C. y Oleaga, M. (2012). *Matemática en Secundario II. Serie Escenarios.* Buenos Aires, Argentina: Estación Mandioca

Pluvinage, F. y Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los Enteros.*Bolema*, (120-141).

Pochulu, M. (2012). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. En M. Pochulu y M. Rodriguez (Comp.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 63-89).Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNGS

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16 – 20

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En. Kilpatrick Jeremy, P. Gómez y L. Rico. (Editores). *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica

Tamayo y Tamayo, M. (2000). *El proceso de la investigación científica.* México: Limusa.

Villagrán, M.; Alcalde Cuevas, C.; Marchena Consejero, E. y Navarro Guzmán, J. (1998). Las dificultades en la resolución de problemas aritméticos al iniciarse el segundo ciclo de la educación primaria. *Actas del II Congreso Iberoamericano de Psicología*. Madrid

ANEXOS

ANEXOS

EVALUACIÓN DE INSTRUMENTO POR JUECES EXPERTOS

Tesista: Prof. Yanel Eliana Martínez

Director: Dr. Marcel David Pochulu

Título de la Tesina: Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2° año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros

Programa: Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Institución: Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco.

Juez experto: Ricardo Fabián Espinoza

Ítem	Criterios a evaluar										Observaciones (Indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (sesgo)		Lenguaje adecuado para el nivel		Mide lo que pretende		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
1	X		X				X		X		
2	X		X				X		X		El problema 1 o 2 podrían eliminarse (ver observación 1).
3	X		X				X		X		
4	X		X				X		X		
5	X		X				X		X		
6	X		X				X		X		
7	X		X				X		X		

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder a las preguntas que se formulan	X		La consigna general, además de solicitar la escritura de los procedimientos,podría pedir la explicitación de las fundamentaciones.
Los ítems permiten el logro de los objetivos de la investigación	X		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	X		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, le agradecemos que nos sugiera los ítems a añadir	x		Ver observaciones 2 y 3.

Validez (marque con una cruz)			
Aplicable	X	No aplicable	
Aplicable atendiendo a las observaciones			

Observaciones:

1. El problema 1 o 2 podrían eliminarse o integrarse en una única consigna, pues si bien pertenecen a contextos diferentes, involucran los mismos procedimientos de resolución.
2. En la tercera situación podría ser interesante problematizar el empleo del valor absoluto también para un número entero negativo.
3. Se podrían plantear tareas de resolución de operaciones con números más grandes.

Fabián Espinoza

EVALUACIÓN DE INSTRUMENTO POR JUECES EXPERTOS

Tesista: Prof. Yanel Eliana Martínez

Director: Dr. Marcel David Pochulu

Título de la Tesina: Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2° año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros

Programa: Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Institución: Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco.

Juez experto: Raquel Abrate

Ítem	Criterios a evaluar										Observaciones (Indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (sesgo)		Lenguaje adecuado para el nivel		Mide lo que pretende		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
1	X		X		X		X		X		Eliminarse (1)
2	X		X		X		X		X		
3	X		X		X		X		X		
4	X		X		X		X		X		
5	X		X		X		X		X		
6	X		X		X		X		X		
7	X		X		X		X		X		

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder a las preguntas que se formulan	X		
Los ítems permiten el logro de los objetivos de la investigación	X		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	X		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, le agradecemos que nos sugiera los ítems a añadir	X		

Validez (marque con una cruz)			
Aplicable	X	No aplicable	
Aplicable atendiendo a las observaciones			

Observaciones:

1. El Problema 1 tiene características similares al Problema 2, y creo que este último propone más instancias de argumentación.

EVALUACIÓN DE INSTRUMENTO POR JUECES EXPERTOS

Tesista: Prof. Yanel Eliana Martínez

Director: Dr. Marcel David Pochulu

Título de la Tesina: Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2° año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros

Programa: Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Institución: Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco.

Juez experto: María Laura Distéfano

Ítem	Criterios a evaluar										Observaciones (Indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (sesgo)		Lenguaje adecuado para el nivel		Mide lo que pretende		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
1	X		X			X	X		X		
2	X (*)		X			X	X		X		(*) El verbo Explicar resulta ambiguo. ¿Se espera una resolución numérica o una explicación coloquial de la situación?
3		X	X			X	X			X	La consigna no es adecuada. Debería ser: *Determinar, si es posible, el signo que tendrá el resultado, teniendo en cuenta…*
4	X (*)		X			X	X		X		(*)Resulta redundante la pregunta *¿Y positivo?*, porque lleva al mismo tipo de análisis y no aportaría información distinta.
5	X (*)		X			X	X		X		(*) Se puede reformular el enunciado con mayor claridad. En el texto se muestran algunas propuestas.
6	X		X			X	X		X		Eliminaría un ítem porque ambos presentan el mismo tipo de error a detectar. Dejaría el b)
7	X		X			X	X		X		

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder a las preguntas que se formulan	X		
Los ítems permiten el logro de los objetivos de la investigación	X		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	X(*)		(*)En general sí, aunque se sugiere invertir el orden en los dos últimos problemas
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, le agradecemos que nos sugiera los ítems a añadir	X		No agregaría ítems pero sí los reordenaría, por nivel de dificultad, de la siguiente manera: 1, 2, 5, 7, 4, 3, 6

Validez (marque con una cruz)			
Aplicable		No aplicable	
Aplicable atendiendo a las observaciones			x

Observaciones:
Las observaciones se incluyen en la última columna de la tabla anterior y en las siguientes páginas, como comentarios a los análisis efectuados.

María Laura Distéfano

EVALUACIÓN DE INSTRUMENTO POR JUECES EXPERTOS

Tesista: Prof. Yanel Eliana Martínez

Director: Dr. Marcel David Pochulu

Título de la Tesina: Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2° año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros

Programa: Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Institución: Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco.

Juez experto: Mario Alvarez

Ítem	Criterios a evaluar										Observaciones (Indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (sesgo)		Lenguaje adecuado para el nivel		Mide lo que pretende		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
1	X		X			X	X		X		
2	X		X			X	X		X		
3	X		X			X	X		X		En las respuestas a nivel experto hay un error de tipeo en las partes (e) y (f)
4	X		X			X	X		X		
5	X		X			X	X		X		
6	X		X			X	X		X		
7	x		x			x	x		x		

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder a las preguntas que se formulan	X		
Los ítems permiten el logro de los objetivos de la investigación	X		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	X		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, le agradecemos que nos sugiera los ítems a añadir	X		

Validez (marque con una cruz)			
Aplicable	X	No aplicable	
Aplicable atendiendo a las observaciones			

Observaciones: