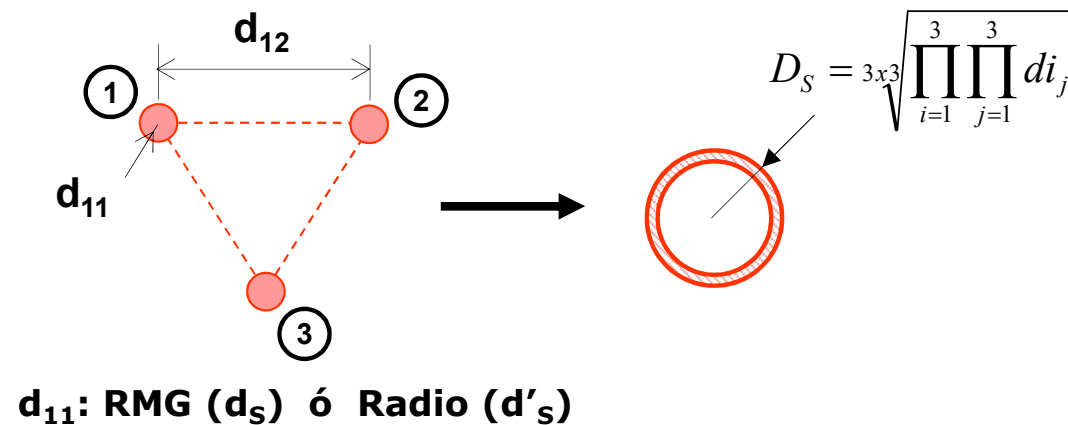
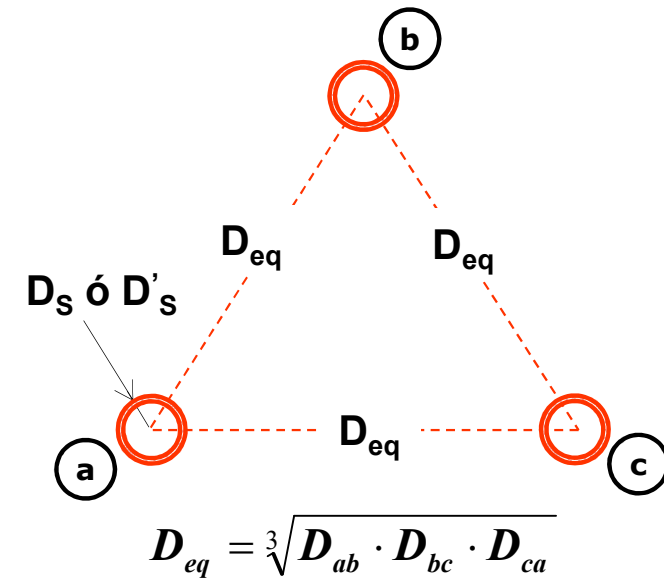
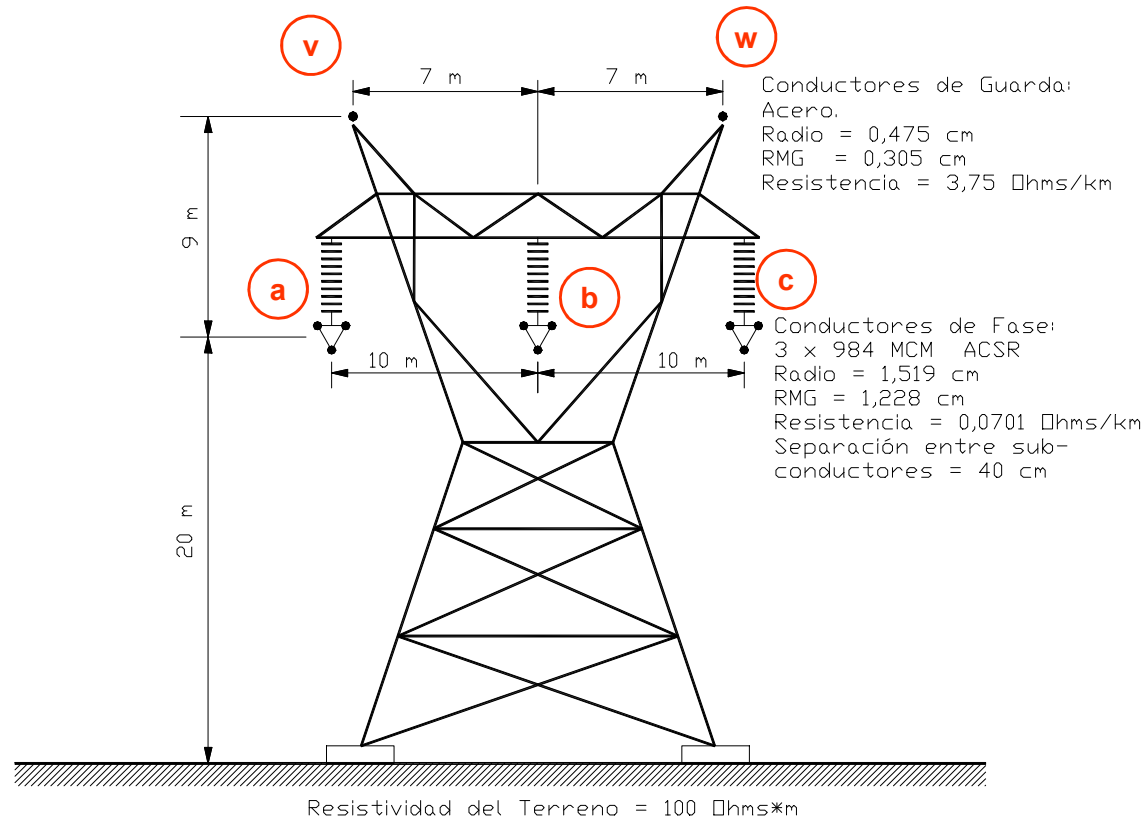


UNIDAD TEMÁTICA N° 2

CÁLCULO ELÉCTRICO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN DE CA

Docentes:
Ing. Julio César Turbay
Ing. Germán G. Lorenzón

UT1 → DE LA GEOMETRÍA DE LA LÍNEA A LOS PARÁMETROS DE LA LÍNEA



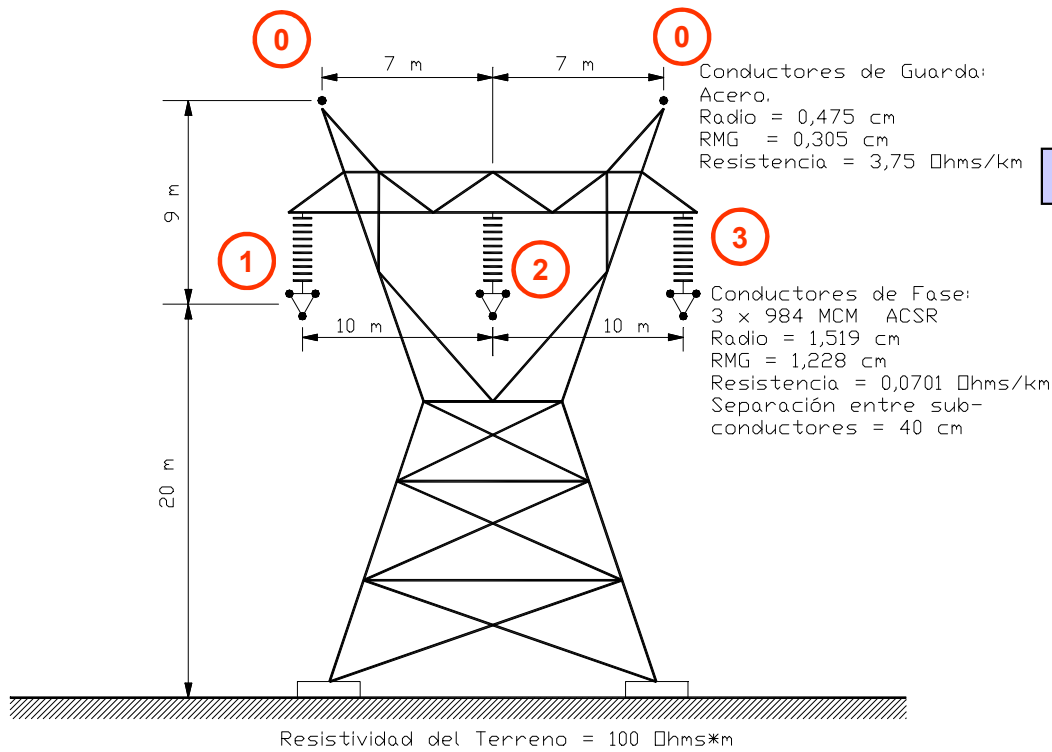
R: Resistencia Conductor de Fase [Ω / km]

$$L_1 = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{D_{eq}}{D_S} \text{ [H / km]}$$

$$G_1 = 0 \text{ [S / km]}$$

$$C_1 = \frac{0,0555}{\ln \frac{D_{eq}}{D'_S}} \text{ [μF / km]}$$

UT1 → DE LA GEOMETRÍA DE LA LÍNEA A LOS PARÁMETROS DE LA LÍNEA



Contiene información de los conductores, de la Línea y del terreno sobre la que está tendida, en un formato preestablecido.

*.LAT

(archivo ASCII)

PARALAT.EXE

Contiene información de los resultados de la ejecución del Programa.

*.SAL

(archivo ASCII)

LINEA DE ALTA TENSION DE 500 kV TOMADA DE LA OBRA DE CHARLES GROSS
 "ANALISIS DE SISTEMAS DE POTENCIA", ED. INTERAMERICANA, pp.462-463

<SISTE> Registro de comentario

METRICO

NC Registro de comentario

5

IC<RESIST><DIAMEX>< RMG >< HORIZ>< VERT ><FLECHA>NH< DIST > Registro de comentario

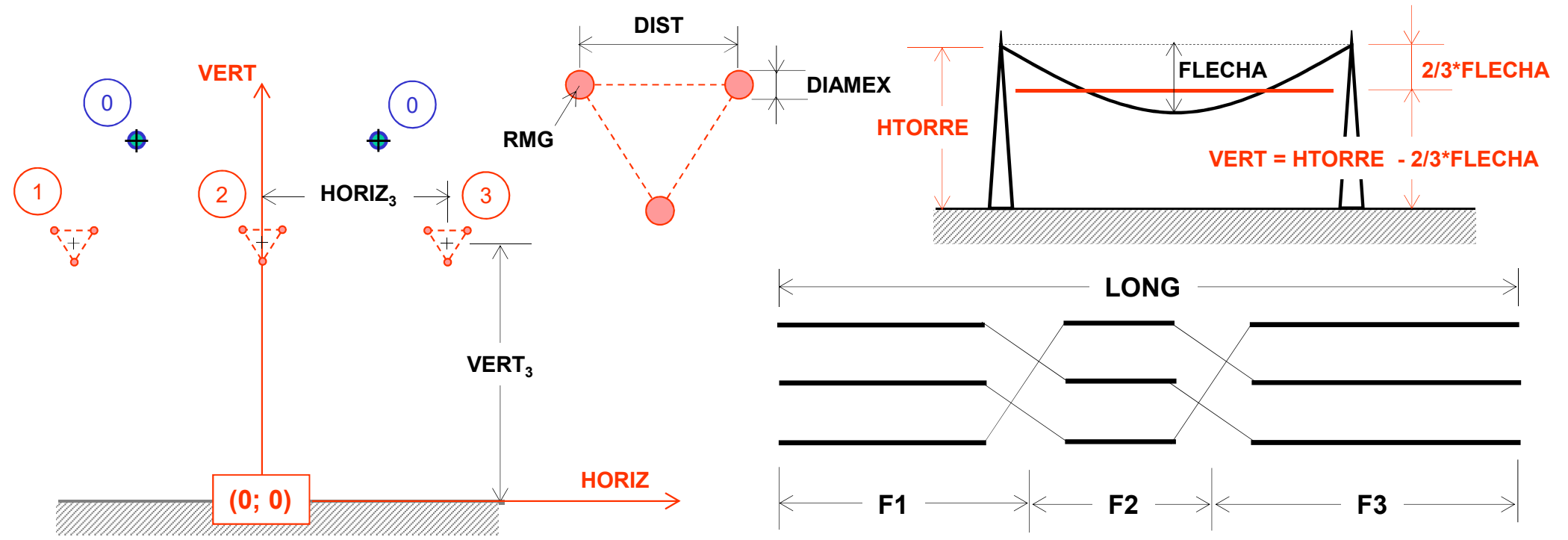
1	0.0701	30.380	12.280	-10.000	20.000	00.000	3	0.400
2				0.000	20.000			
3				+10.000	20.000			
0	3.7500	9.500	3.050	-7.000	29.000	00.000	1	00.000
0				+7.000	29.000			

< LONG >< F1 >< F2 >< F3 >< FREQ >< UNOM >< PBASE> Registro de comentario

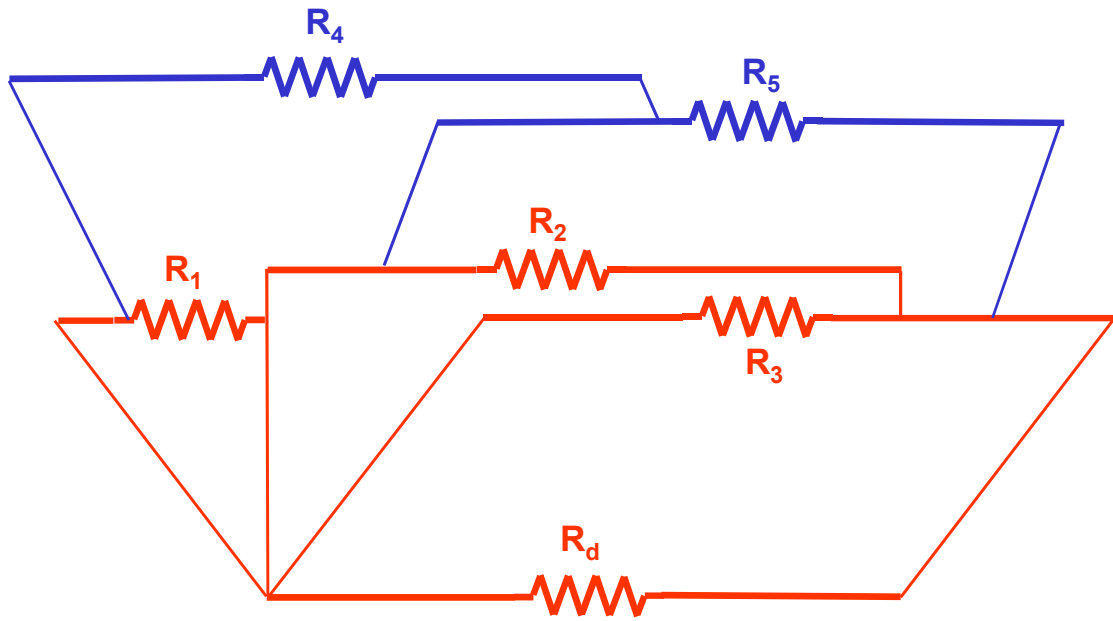
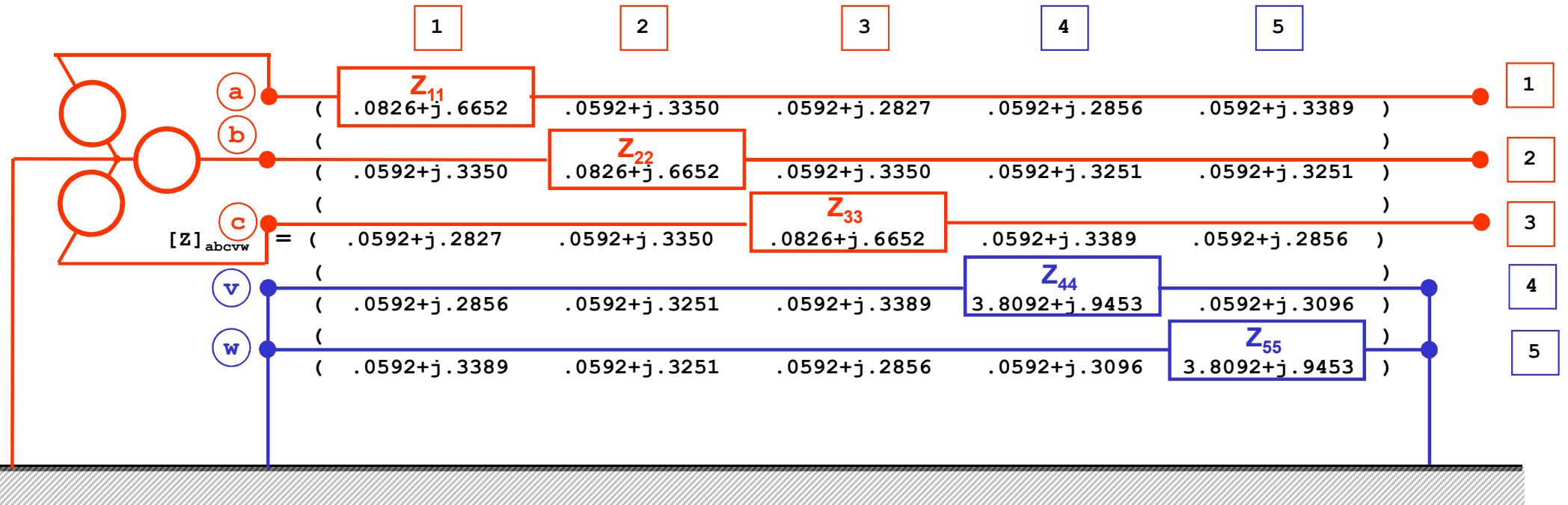
300.00 0.3333 0.3333 0.3333 60.000 500.000

< RHO > Registro de comentario

100.0



MATRIZ DE IMPEDANCIA DE LOS CONDUCTORES REALES, PARA EL TRAMO 1, EN (Ohm/km):

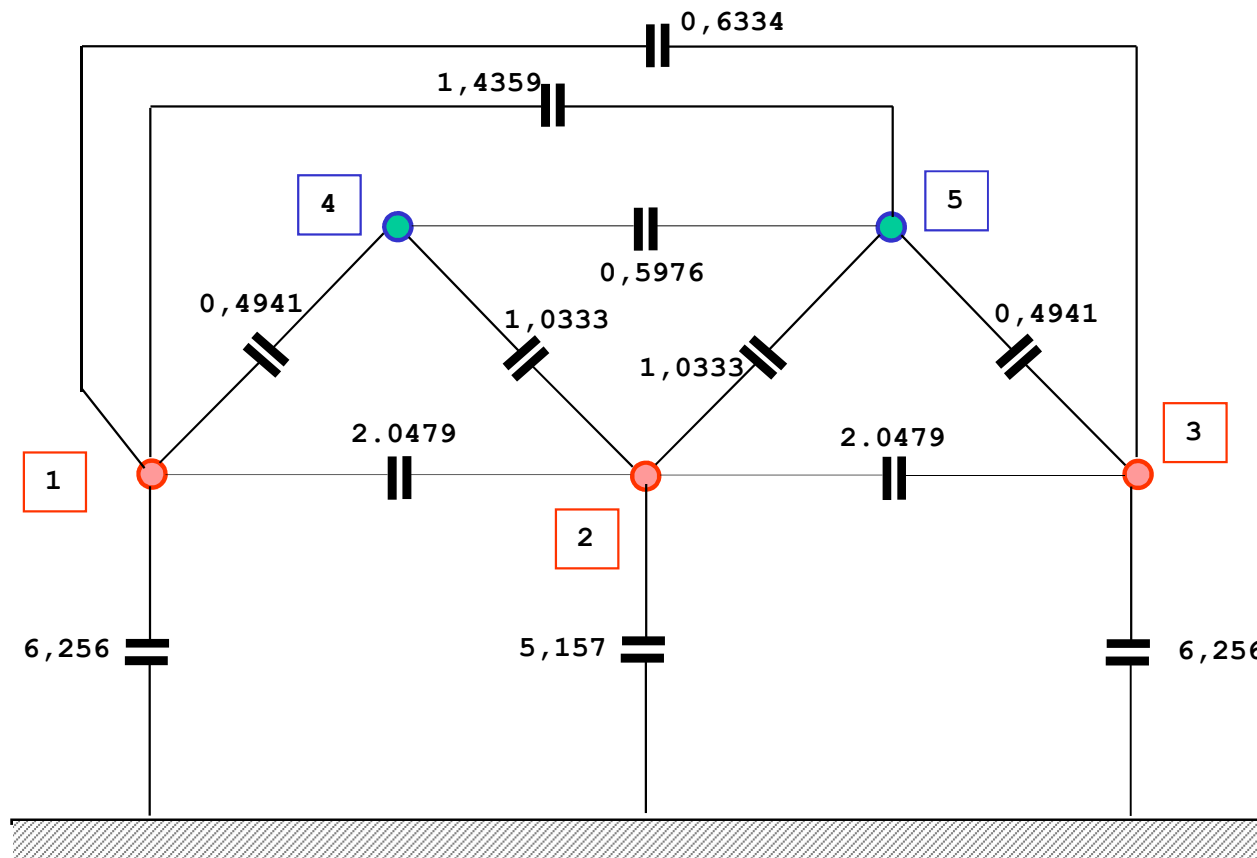


$$Z_{ii} = (R_i + R_d) + jk \cdot \ln(D_e / D_{ii})$$

$$Z_{ij} = (R_d) + jk \cdot \ln(D_e / D_{ij})$$

MATRIZ DE LAS CAPACITANCIAS DE LOS CONDUCTORES REALES, EN EL TRAMO1, EN (nF/km)

	1	2	3	4	5			
[C]abcvw =	(10.8673	-2.0479	-.6334	-.4941	-1.4359)	1
	()	
	(-2.0479	11.3194	-2.0479	-1.0333	-1.0333)	2
	()	
	(-.6334	-2.0479	10.8673	-1.4359	-.4941)	3
	()	
	(-.4941	-1.0333	-1.4359	6.4683	-.5976)	4
	()	
	(-1.4359	-1.0333	-.4941	-.5976	6.4683)	5

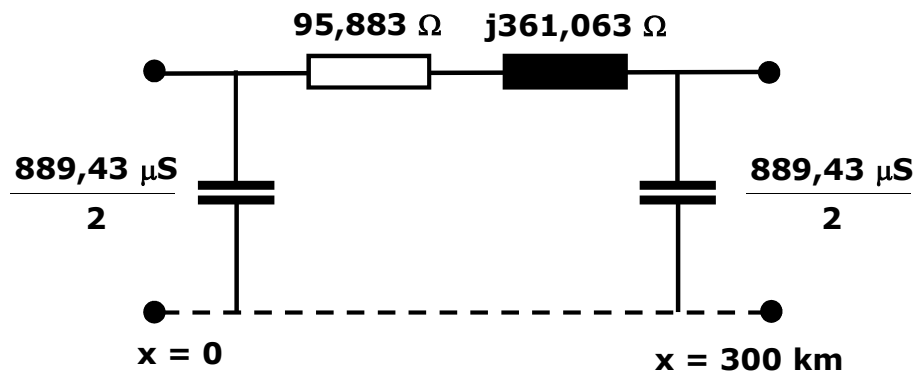


MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE SECUENCIA, EN (Ohm):

	0	1	2		
$[Z]_{012} =$	(95.883+j361.063	.000+j	.000	.000-j .000)	0
	()	
	(-.007-j	.025	7.130+j104.311	-.002-j .036)	1
	()	
	(-.007-j	.025	-.002-j .036	7.130+j104.311)	2

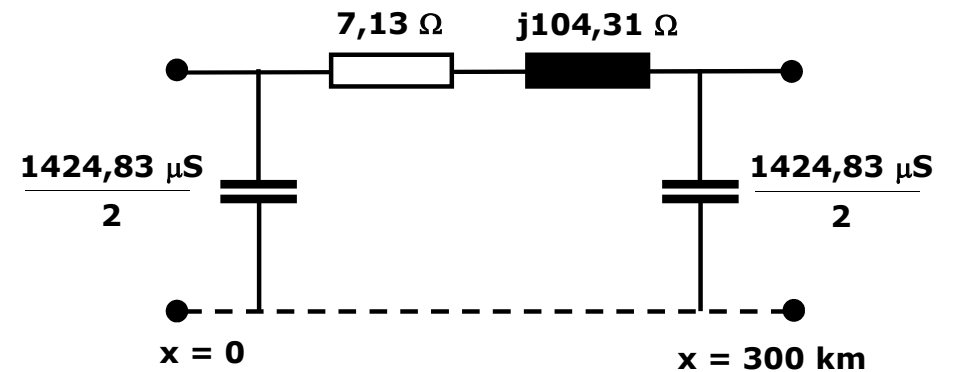
MATRIZ DE SUCEPTANCIAS DE SECUENCIA, EN (uS):

	0	1	2		
$[B]_{012} =$	(889.4328	0.0000	0.0000)	0
	()	
	(-0.0623	1424.8278	-0.4912)	1
	()	
	(-0.0623	-0.4912	1424.8278)	2



Circuito Equivalente Monofásico de Secuencia Homopolar

15/05/2018



Circuito Equivalente Monofásico de Secuencia Directa

UT2 – Página 7

IMPEDANCIAS CARACTERISTICAS DE SECUENCIA:

$$Z_c(0) = 648.088 / -7.44\text{grad.} = 642.637 -j 83.875 \text{ Ohm}$$

$$Z_c(1) = 270.888 / -1.96\text{grad.} = 270.730 -j 9.242 \text{ Ohm}$$

$$Z_c(2) = 270.888 / -1.96\text{grad.} = 270.730 -j 9.242 \text{ Ohm}$$

$$Z_{C0,1,2} = \sqrt{\frac{Z_{0,1,2}}{Y_{0,1,2}}}$$

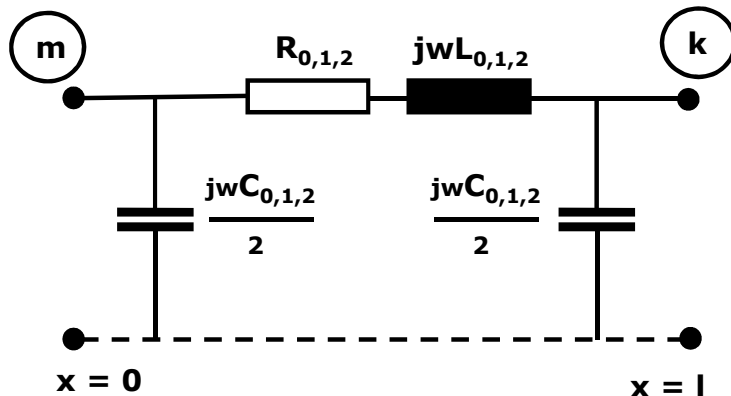
$$Z_{C0,1,2} = \sqrt{\frac{R_{0,1,2} + j\omega L_{0,1,2}}{G_{0,1,2} + j\omega C_{0,1,2}}} \approx \sqrt{\frac{L_{0,1,2}}{C_{0,1,2}}} \quad [\Omega]$$

CONSTANTES DE PROPAGACION DE SECUENCIA: $\Omega \cdot \text{Long} = \text{Alfa} \cdot \text{Long} + j\text{Beta} \cdot \text{Long}$

$$\Omega \cdot \text{Long}(0) = 0.57643 / 82.56 \text{ grad.} = 0.07460 \text{ Neper} + j 0.57158 \text{ rad.}$$

$$\Omega \cdot \text{Long}(1) = 0.38597 / 88.04 \text{ grad.} = 0.01317 \text{ Neper} + j 0.38574 \text{ rad.}$$

$$\Omega \cdot \text{Long}(2) = 0.38597 / 88.04 \text{ grad.} = 0.01317 \text{ Neper} + j 0.38574 \text{ rad.}$$



Circuito Equivalente Monofásico
(uno para cada secuencia)

$$\gamma_{0,1,2} = \sqrt{Z_{0,1,2} \cdot Y_{0,1,2}} = \sqrt{(R_{0,1,2} + j\omega L_{0,1,2}) \cdot (G_{0,1,2} + j\omega C_{0,1,2})} =$$

$$\gamma_{0,1,2} = (\alpha_{0,1,2} + j\beta_{0,1,2}) \quad [\text{Neper/km} \quad \wedge \quad \text{radianes/km}]$$

Para LONG = 1 km

CONSTANTES GENERALIZADAS PARA LA SECUENCIA DIRECTA:

$$A = 0.92661 / 0.3064 \text{ grad.} = 0.92660 + j 0.00495$$

$$B = 101.98370 / 86.1876 \text{ grad.} = 6.78094 + j 101.75801 \text{ Ohm}$$

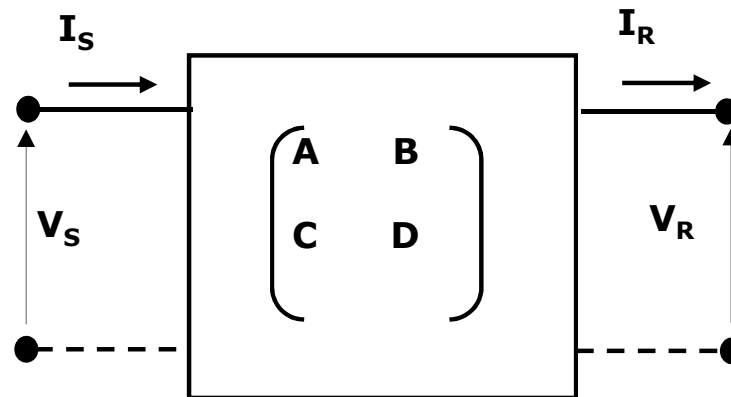
$$C = 0.00139 / 90.0980 \text{ grad.} = -0.00000 + j 0.00139 \text{ S}$$

$$A = Ch(\gamma l)$$

$$B = Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$

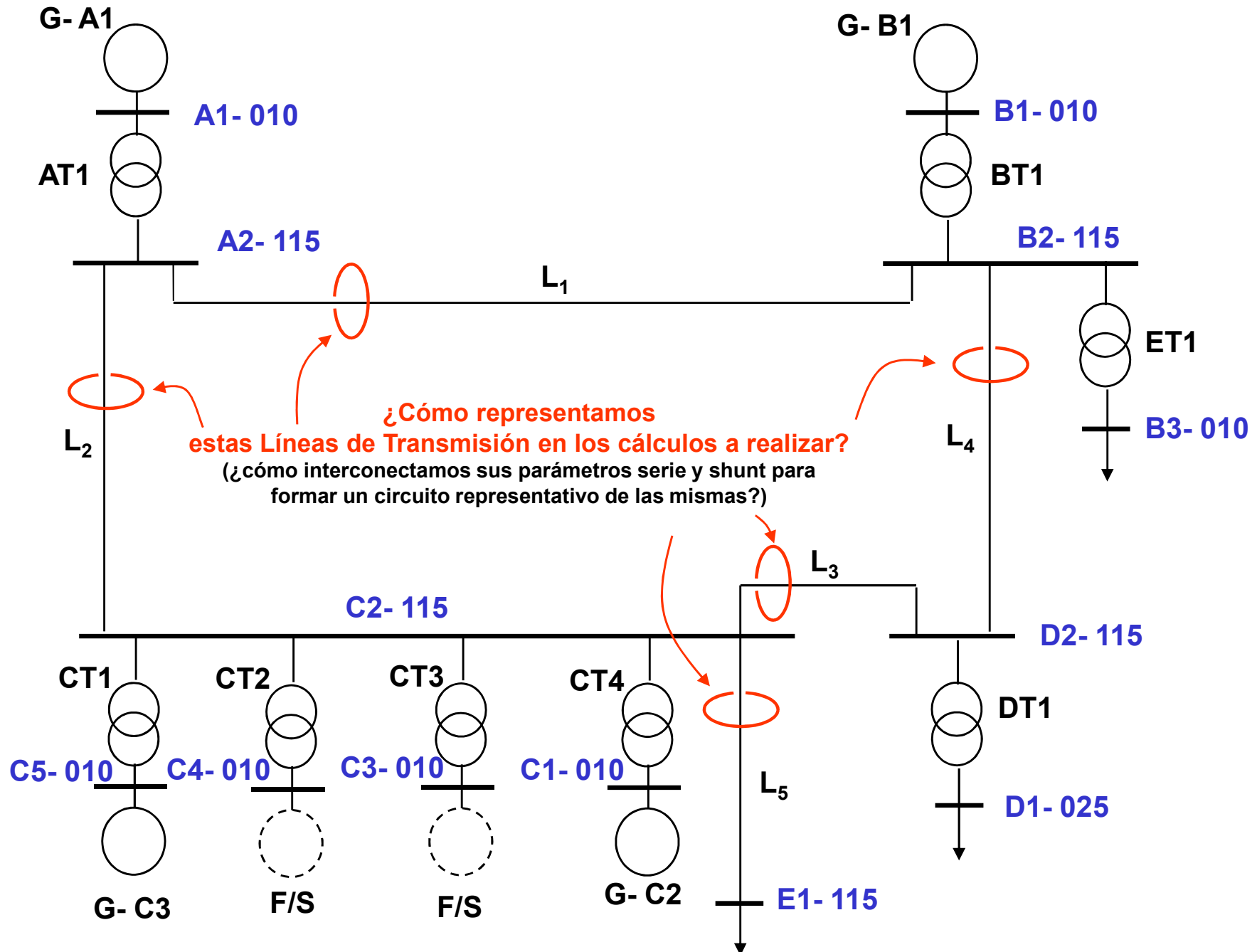
$$C = \frac{Sh(\gamma l)}{Z_c}$$

$$D = A$$

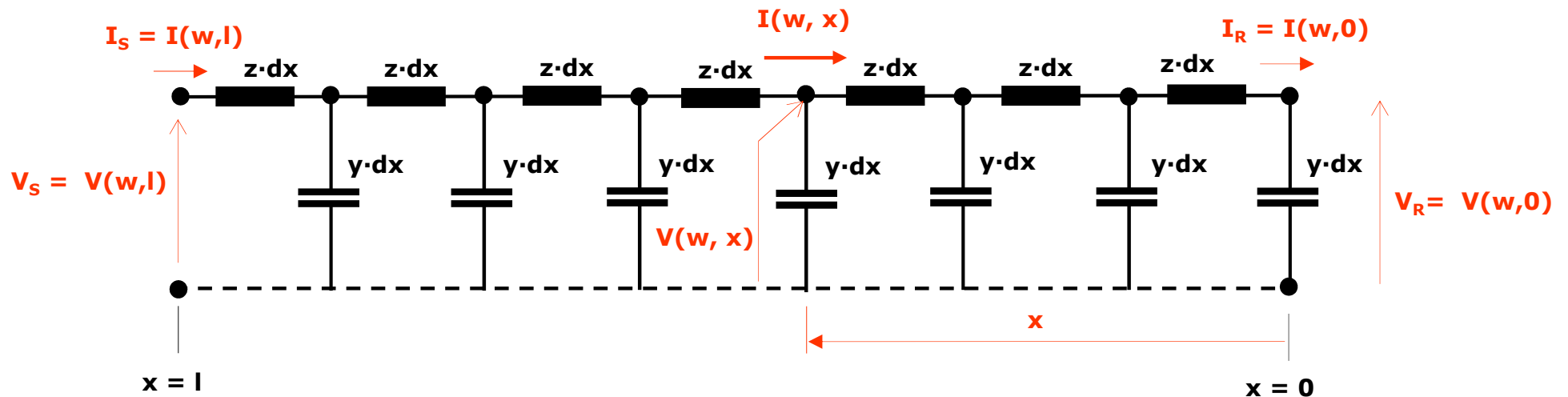
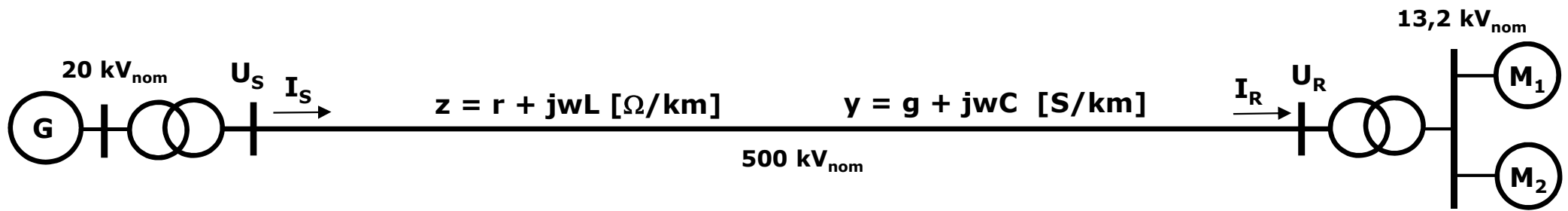


$$\begin{cases} V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R \\ I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R \end{cases}$$

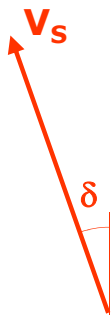
UT2 → DE LOS PARÁMETROS DE LA LÍNEA A SU MODELO CIRCUITAL



UT2 → DE LOS PARÁMETROS DE LA LÍNEA A SU MODELO CIRCUITAL



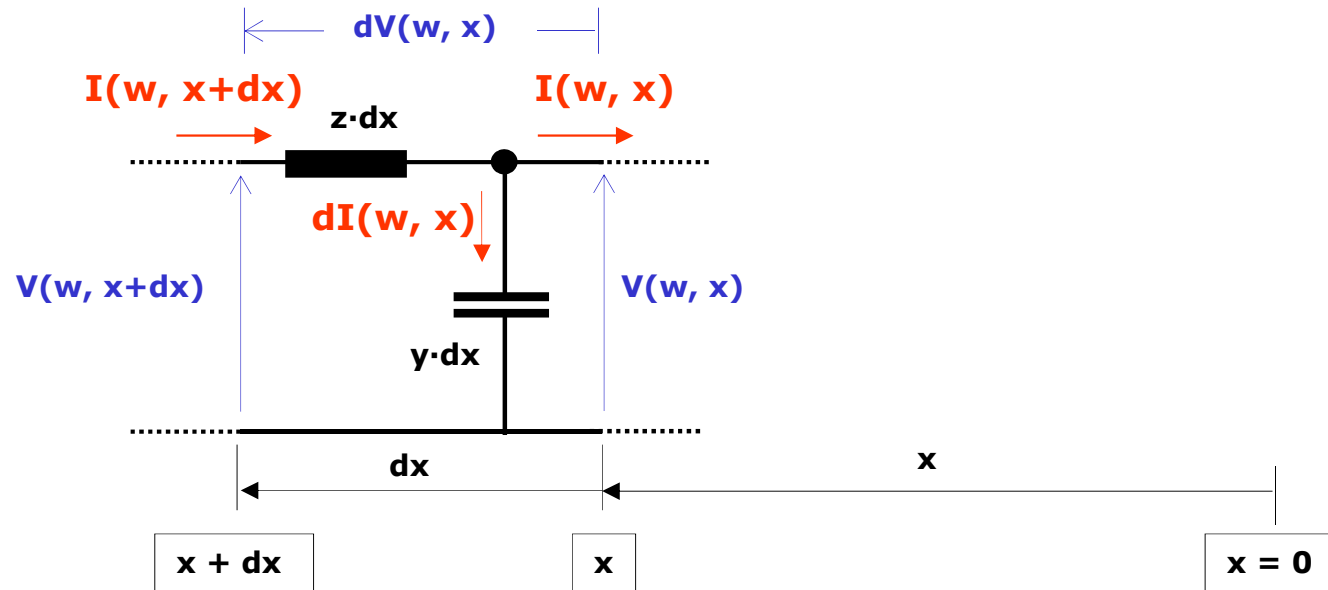
A cada punto de la Línea, individualizado por su coordenada "x", le corresponderá un fasor $V(x)$ y otro $I(x)$.



Transitando progresivamente de $x = 0$ a $x = l$ se pasa, también de manera progresiva, de V_R a V_S (pero no necesariamente de manera líneal)



DE LOS PARÁMETROS DE LA LÍNEA AL MODELO CIRCUITAL DE LA LÍNEA



**Análisis en el dominio fasorial:
¡Advertir que $V(\omega, x)$ e $I(\omega, x)$ son fasores!**

$$\left\{ \begin{array}{l} dV(\omega, x) = z \cdot dx \cdot [I(\omega, x) + dI(\omega, x)] \quad (1a) \\ dI(\omega, x) = y \cdot dx \cdot V(\omega, x) \quad (1b) \end{array} \right.$$

**Si $\omega = \text{constante}$, los fasores $V(\omega, x)$ e $I(\omega, x)$ sólo variarán con ' x '.
Luego se los notará, por simplicidad, como $V(x)$ e $I(x)$.**

ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA LÍNEA Y SU SOLUCIÓN

$$dV(x) = z \cdot dx \cdot (I(x) + dI(x))$$

$$dV(x) = z \cdot dx \cdot I(x) + \underbrace{z \cdot dx \cdot dI(x)}_{\text{Infinitésimo de orden superior}}$$

$$\begin{cases} dV(x) = z \cdot dx \cdot I(x) & (1a') \\ dI(x) = y \cdot dx \cdot V(x) & (1b') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV(x)}{dx} = z \cdot I(x) & (2a) \\ \frac{dI(x)}{dx} = y \cdot V(x) & (2b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \cdot \frac{dI(x)}{dx} & (3a) \\ \frac{d^2I(x)}{dx^2} = y \cdot \frac{dV(x)}{dx} & (3b) \end{cases}$$

De (2b) en (3a) y de (2a) en (3b):

$$\begin{cases} \frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot V(x) & (4a) \\ \frac{d^2I(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot I(x) & (4b) \end{cases}$$

Denominando al producto $z \cdot y$ como γ^2

$$\gamma^2 = z \cdot y$$

$$\begin{cases} \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \gamma^2 \cdot V(x) & (4a') \\ \frac{d^2I(x)}{dx^2} = \gamma^2 \cdot I(x) & (4b') \end{cases}$$

- La función cuya derivada "copia", multiplicada por una constante, la forma original, es del tipo:

$$e^{\pm \gamma \cdot x}$$

Se proponen como solución de la (4a'):

$$V(x) = A_1 \cdot e^{+\gamma x} + A_2 \cdot e^{-\gamma x}$$

Y se verifica el acierto (o no) de la propuesta ..

$$\frac{dV(x)}{dx} = +\gamma \cdot A_1 \cdot e^{+\gamma x} - \gamma \cdot A_2 \cdot e^{-\gamma x} \quad (5)$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = +\gamma^2 \cdot A_1 \cdot e^{+\gamma x} + \gamma^2 \cdot A_2 \cdot e^{-\gamma x}$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \gamma^2 \cdot [A_1 \cdot e^{+\gamma x} + A_2 \cdot e^{-\gamma x}] = \gamma^2 \cdot V(x)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA LÍNEA Y SU SOLUCIÓN

De (2a) se tiene

$$I(x) = \frac{1}{z} \cdot \frac{dV(x)}{dx}$$

Y de (5) en la anterior

$$I(x) = \frac{\gamma}{z} [A_1 \cdot e^{+\gamma x} - A_2 \cdot e^{-\gamma x}]$$

$$I(x) = \frac{\sqrt{z \cdot y}}{z} [A_1 \cdot e^{+\gamma x} - A_2 \cdot e^{-\gamma x}]$$

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{z}{y}}} [A_1 \cdot e^{+\gamma x} - A_2 \cdot e^{-\gamma x}]$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} [A_1 \cdot e^{+\gamma x} - A_2 \cdot e^{-\gamma x}]$$

donde

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}} \quad [\Omega]$$

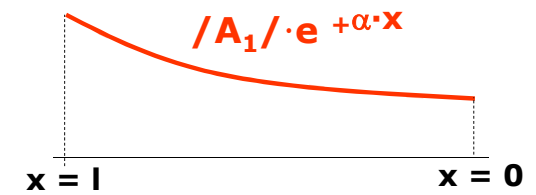
Se denomina "Impedancia Característica de Onda" de la Línea.

Este nombre viene de interpretar estas ecuaciones de $V(x)$ e $I(x)$, así

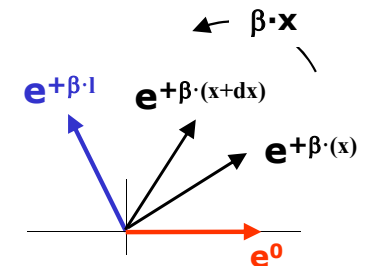
$$\begin{cases} V(x) = A_1 \cdot e^{+\gamma x} + A_2 \cdot e^{-\gamma x} \\ I(x) = \frac{1}{Z_c} [A_1 \cdot e^{+\gamma x} - A_2 \cdot e^{-\gamma x}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(x) = A_1 \cdot e^{+(\alpha+j\beta) \cdot x} + A_2 \cdot e^{-(\alpha+j\beta) \cdot x} \\ I(x) = \frac{A_1 \cdot e^{+(\alpha+j\beta)x}}{Z_c} - \frac{A_2 \cdot e^{-(\alpha+j\beta)x}}{Z_c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V^+(x) = A_1 \cdot e^{+(\alpha+j\beta) \cdot x} \\ V^-(x) = A_2 \cdot e^{-(\alpha+j\beta) \cdot x} \end{cases}$$



$$\begin{cases} I^+(x) = \frac{A_1 \cdot e^{+(\alpha+j\beta)x}}{Z_c} \\ I^-(x) = -\frac{A_2 \cdot e^{-(\alpha+j\beta)x}}{Z_c} \end{cases}$$



$$\begin{cases} V(x) = V^+(x) + V^-(x) \\ I(x) = I^+(x) + I^-(x) \end{cases}$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA (Ver Anexo)

• INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE $V(x)$ e $I(x)$.

Si denominamos entonces ...

$$V^+(x) \leftarrow A_1 \cdot e^{(\alpha+j\beta) \cdot x}$$

$$V^-(x) \leftarrow A_2 \cdot e^{-(\alpha+j\beta) \cdot x}$$

Resultará que ...

$$I^+(x) = \frac{V^+(x)}{Z_c}$$

$$I^-(x) = -\frac{V^-(x)}{Z_c}$$

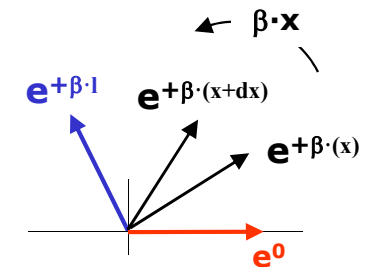
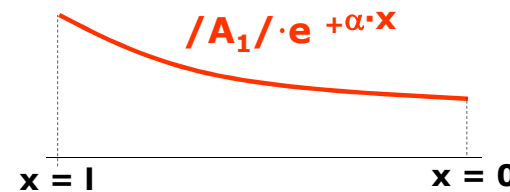
$$I^+(x) = \frac{V^+(x)}{Z_c}$$

¡Por ésto el nombre adjudicado a Z_c !

$$I^-(x) = -\frac{V^-(x)}{Z_c}$$

Por otra parte ...

$$\left\{ \begin{array}{l} V^+(x) = A_1 \cdot e^{+\gamma \cdot x} = (A_1 \cdot e^{+\alpha \cdot x}) \cdot e^{+j\beta \cdot x} \\ V^-(x) = A_2 \cdot e^{-\gamma \cdot x} = (A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot x}) \cdot e^{-j\beta \cdot x} \end{array} \right.$$



$$\gamma x = (\alpha + j\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + j\beta \cdot x \left\{ \begin{array}{l} \alpha: \text{modula la } \mathbf{amplitud} \text{ de los fasores } V^+, V^-, I^+ \text{ e } I^-, \text{ según varía "x"} \\ \beta: \text{modula la } \mathbf{fase} \text{ de los fasores } V^+, V^-, I^+ \text{ e } I^-, \text{ según varía "x"} \end{array} \right.$$

Por esas razones se denominan ...

Constante de propagación

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \alpha + j\beta$$

Constante de fase, en [radianes/km]

Constante de amortiguamiento, en [Neper/km]

EXPRESIÓN DE LAS ECUACIONES $V(x)$ e $I(x)$ EN FUNCIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE

En el extremo receptor de la Línea ...

$$\left\{ \begin{array}{l} V(0) = V_R = A_1 + A_2 \quad (1) \\ I(0) = I_R = \frac{A_1}{Z_c} - \frac{A_2}{Z_c} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$A_1 = V_R - A_2 \quad (3)$$

$$I_R = \frac{V_R - A_2}{Z_c} - \frac{A_2}{Z_c}$$

$$I_R = \frac{V_R}{Z_c} - \frac{2 \cdot A_2}{Z_c}$$

$$A_2 = \frac{(V_R / Z_c) - I_R}{2} \cdot Z_c$$

$$A_2 = \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2}$$

Reemplazando esta última en (3)

$$A_1 = V_R - \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2}$$

$$A_1 = \frac{V_R + I_R \cdot Z_c}{2}$$

Reemplazando estas expresiones de A_1 y A_2 en

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x) = A_1 \cdot e^{+\gamma x} + A_2 \cdot e^{-\gamma x} \\ I(x) = \frac{1}{Z_c} \cdot [A_1 \cdot e^{+\gamma x} - A_2 \cdot e^{-\gamma x}] \end{array} \right.$$

Resultan las ...

$$V(x) = \frac{V_R + I_R \cdot Z_c}{2} \cdot e^{+\gamma x} + \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2} \cdot e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{(V_R / Z_c) + I_R}{2} \cdot e^{+\gamma x} - \frac{(V_R / Z_c) - I_R}{2} \cdot e^{-\gamma x}$$

“Formas Exponenciales de las Ecuaciones de la Línea”.

EXPRESIONES HIPERBÓLICAS DE LAS ECUACIONES $V(x)$ e $I(x)$ EN FUNCIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE

Reagrupando términos en las últimas expresiones

$$\begin{cases} V(x) = V_R \cdot \frac{e^{+\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + I_R \cdot Z_c \cdot \frac{e^{+\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \\ I(x) = \frac{V_R}{Z_c} \cdot \frac{e^{+\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + I_R \cdot \frac{e^{+\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \end{cases}$$

Y considerando que

$$Ch(\gamma x) = \frac{e^{+\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \quad Sh(\gamma x) = \frac{e^{+\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$$

Resultan las ...

$$\begin{cases} V(x) = V_R \cdot Ch(\gamma x) + I_R \cdot Z_c \cdot Sh(\gamma x) \\ I(x) = V_R \cdot \frac{Sh(\gamma x)}{Z_c} + I_R \cdot Ch(\gamma x) \end{cases}$$

“Formas Hiperbólicas de las Ecuaciones de la Línea”.

En el caso particular en que “ $x = l$ ”

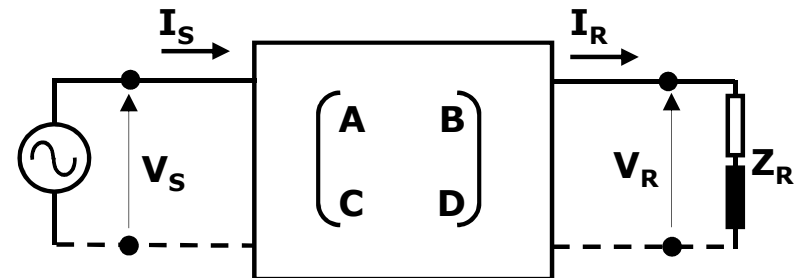
$$\begin{cases} V(l) \rightarrow V_S : \text{Tensión Extremo Transmisor} \\ I(l) \rightarrow I_S : \text{Corriente Extremo Transmisor} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_S = V_R \cdot Ch(\gamma l) + I_R \cdot Z_c \cdot Sh(\gamma l) \\ I_S = V_R \cdot \frac{Sh(\gamma l)}{Z_c} + I_R \cdot Ch(\gamma l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = Ch(\gamma l) \\ B = Z_c \cdot Sh(\gamma l) \\ C = \frac{Sh(\gamma l)}{Z_c} \\ D = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R \\ I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R \end{cases}$$

Donde **A**, **B**, **C** y **D** son conocidas como las “**Constantes Generalizadas de la Línea**” y ésta suele representarse así



Prestar atención a que ...

$$\begin{aligned} Ch(\gamma l) &= Ch(\alpha l + j\beta l) = Ch(\alpha l) \cdot \cos(\beta l) + jSh(\alpha l) \cdot \sen(\beta l) \\ Sh(\gamma l) &= Sh(\alpha l + j\beta l) = Sh(\alpha l) \cdot \cos(\beta l) + jCh(\alpha l) \cdot \sen(\beta l) \end{aligned}$$

MÁXIMA POTENCIA TRANSMISIBLE POR UNA LÍNEA

- Límites para la potencia transmisible por una Línea: impuestos por ...

1. Estabilidad transitoria
2. Efectos Térmicos
3. Caída de tensión

- **Por estabilidad transitoria.**
Se verá en la Unidad Temática N° 7.

- **Por Efectos Térmicos**

I_{nom} : Valor máximo admitida por los conductores [kA]

U_{nom} : Tensión Nominal [kV]

$$S_{m\acute{a}xima} = \sqrt{3} \cdot U_{Nom} \cdot I_{Nom} \quad [MVA]$$

- **Por caída de Tensión**

Se visualizará en el Diagrama Circular de Potencia.

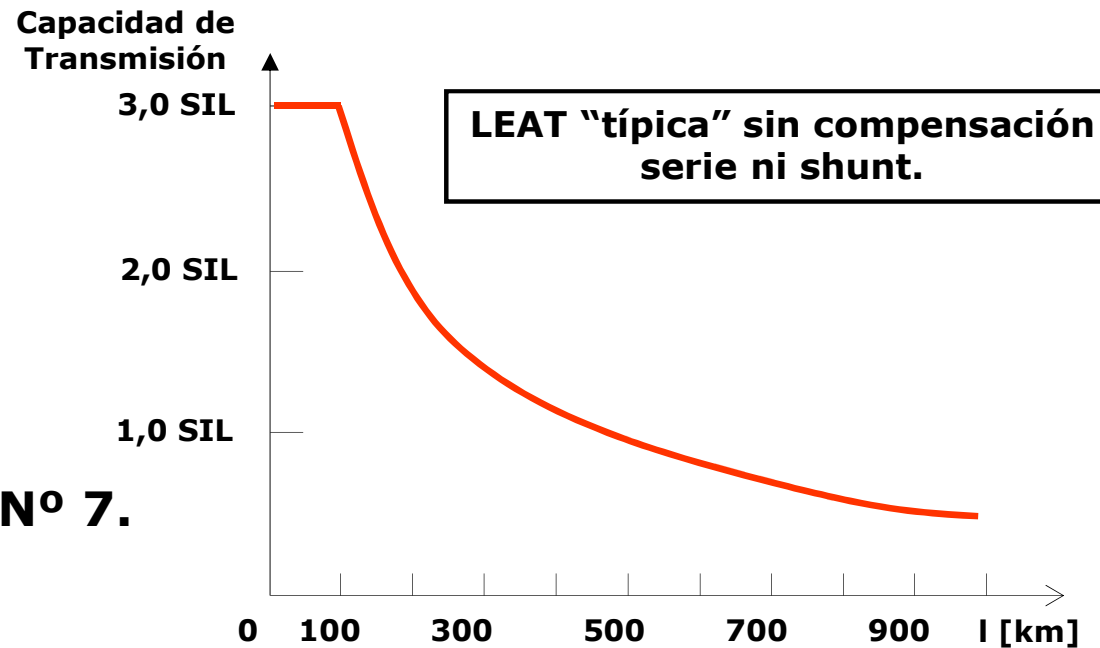
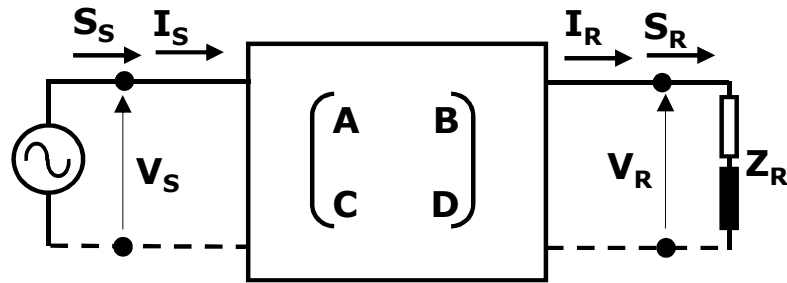


DIAGRAMA CIRCULAR DE POTENCIA

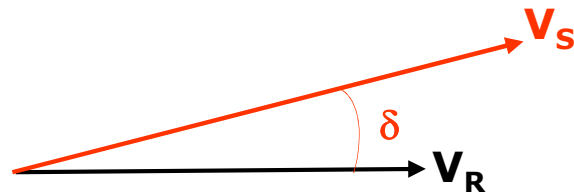
Considerando a la Línea mediante su modelo ...



$$V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R \quad (1)$$

$$I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = |A| \angle \alpha \\ B = |B| \angle \beta \\ V_S = |V_S| \angle \delta \\ V_R = |V_R| \angle 0^\circ \end{array} \right.$$



Se buscará expresar S_R en función de las tensiones V_S y V_R . Así, de (1) ...

$$I_R = \frac{V_S}{B} - \frac{A \cdot V_R}{B}$$

$$I_R = \frac{|V_S|}{|B|} \angle \delta - \beta - \frac{|A| \cdot |V_R|}{|B|} \angle \alpha - \beta$$

$$I_R^* = \frac{|V_S|}{|B|} \angle \beta - \delta - \frac{|A| \cdot |V_R|}{|B|} \angle \beta - \alpha$$

La potencia compleja en el extremo receptor,

$$S_R = 3 \cdot V_R \cdot I_R^*$$

... en función de las tensiones, será

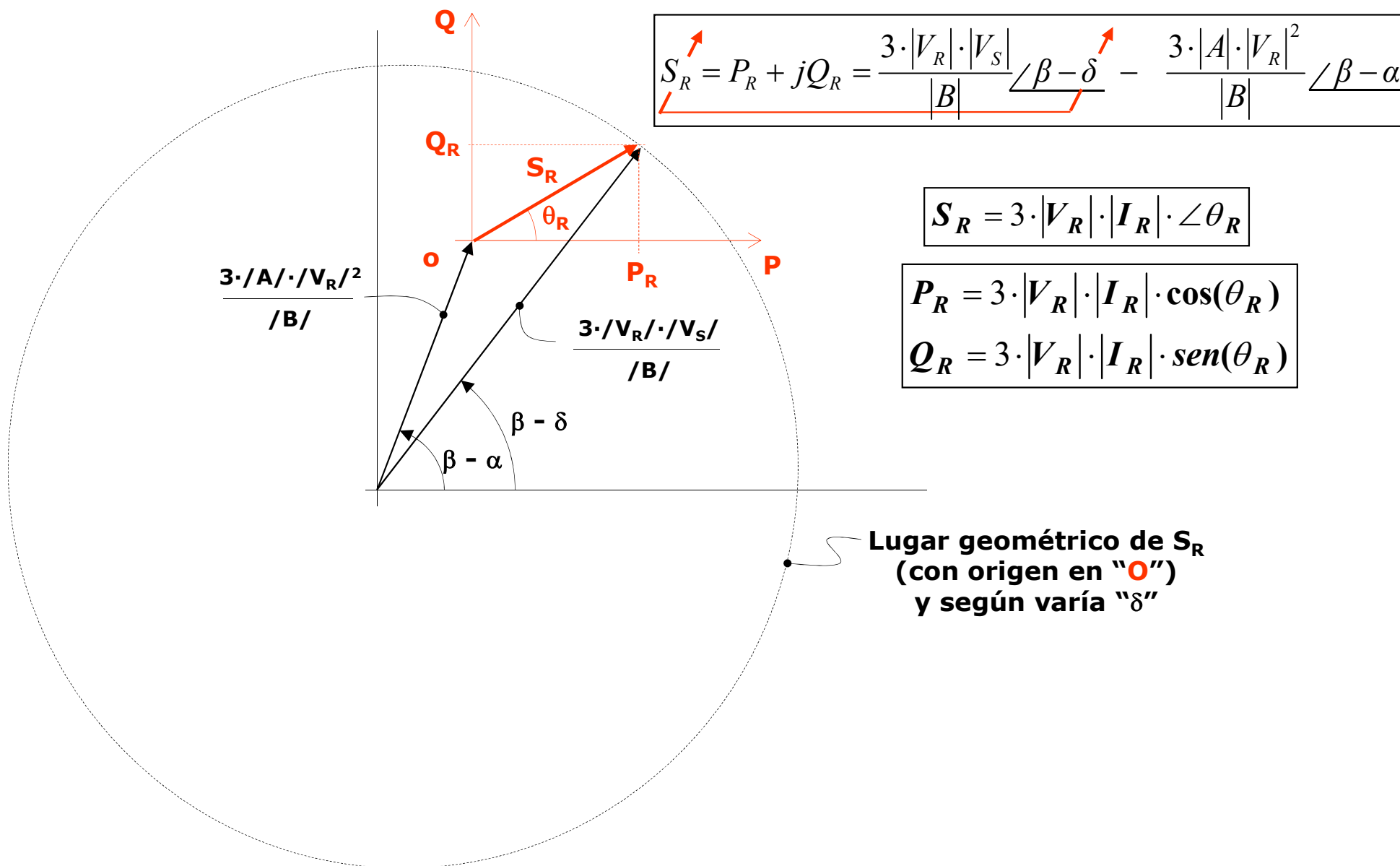
$$S_R = P_R + jQ_R = \frac{3 \cdot |V_R| \cdot |V_S|}{|B|} \angle \beta - \delta - \frac{3 \cdot |A| \cdot |V_R|^2}{|B|} \angle \beta - \alpha$$

Normalmente $|V_S|$ y $|V_R|$ varían en estrecho margen.

Asumiendo $|V_S| \sim |V_R| \sim$ constantes $\rightarrow S_R = f(\delta)$

δ : Ángulo de Par

DIAGRAMA CIRCULAR DE POTENCIA

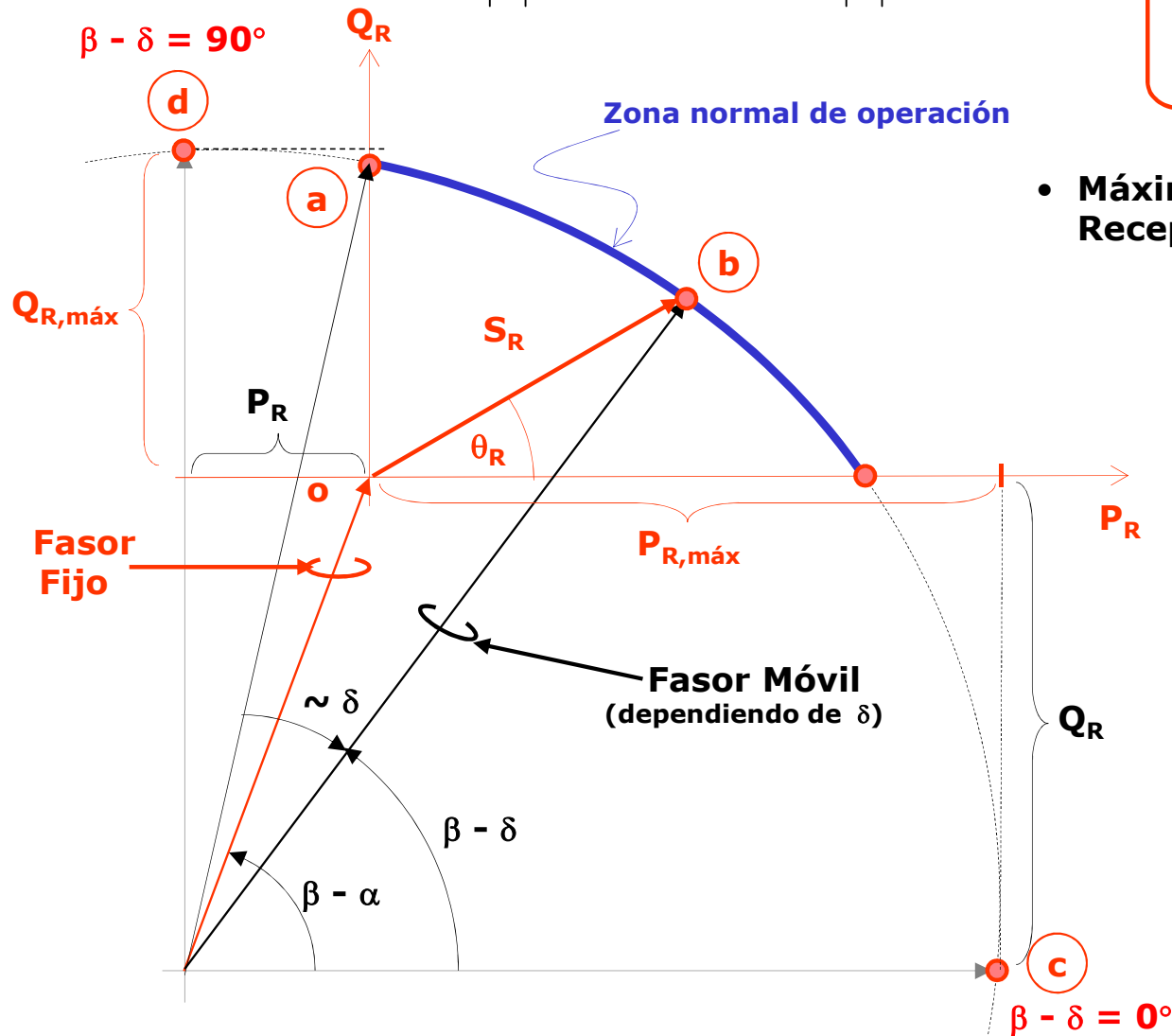


MÁXIMA POTENCIA TRANSMISIBLE POR UNA LÍNEA

- Asumiendo $|V_S| \sim |V_R| \sim V_{\text{Nominal}}$

$$S_R = P_R + jQ_R = \frac{3 \cdot |V_N|^2}{|B|} \angle \beta - \delta - \frac{3 \cdot |A| \cdot |V_N|^2}{|B|} \angle \beta - \alpha$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_R &= \frac{3 \cdot |V_N|^2}{|B|} [\cos(\beta - \delta) - |A| \cdot \cos(\beta - \alpha)] \\ Q_R &= \frac{3 \cdot |V_N|^2}{|B|} [\sin(\beta - \delta) - |A| \cdot \sin(\beta - \alpha)] \end{aligned} \right.$$



- Máximas Potencias posibles de entregar al Receptor, asumiendo, como es usual ($A \approx 1$) ...

$$P_{R,m\acute{a}x} \rightarrow \beta - \delta = 0 \rightarrow \text{punto "c"}$$

$$P_{R,m\acute{a}x} = \frac{3 \cdot |V_N|^2}{|B|} (1 - \cos(\beta - \alpha))$$

$$Q_R = -\frac{3 \cdot |V_N|^2}{|B|} \cdot \sin(\beta - \alpha)$$

$$Q_{R,m\acute{a}x} \rightarrow \beta - \delta = 90^\circ \rightarrow \text{punto "d"}$$

$$Q_{R,m\acute{a}x} = \frac{3 \cdot |V_N|^2}{|B|} (1 - \sin(\beta - \alpha))$$

$$P_R = -\frac{3 \cdot |V_N|^2}{|B|} \cdot \cos(\beta - \alpha)$$

LÍNEAS SIN PÉRDIDAS y CON CARGA CARACTERÍSTICA (O ADAPTADA) - POTENCIA NATURAL (SIL)

- Una Línea “**sin pérdidas**” (activas) es aquella en la que **R = 0** y **G = 0**, cumpliéndose entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega \cdot L}{G + j\omega \cdot C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega] \quad \text{Número "Real" puro} \\ \gamma \cdot l = \sqrt{Z \cdot Y} = \sqrt{(R + j\omega \cdot L) \cdot (G + j\omega \cdot C)} = \underbrace{0}_{\alpha} + j\omega \underbrace{\sqrt{L \cdot C}}_{\beta} \quad \dots \text{Número "Imaginario" puro} \end{array} \right.$$

- Y estará “Adaptada” si **Z_R = Z_c** (siendo **Z_R** la impedancia de carga extremo receptor)
- Por otra parte, recordando las Ecuaciones Exponenciales de la Línea ...

$$V(x) = \frac{V_R + I_R \cdot Z_c}{2} \cdot e^{+\gamma x} + \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2} \cdot e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{(V_R / Z_c) + I_R}{2} \cdot e^{+\gamma x} - \frac{(V_R / Z_c) - I_R}{2} \cdot e^{-\gamma x}$$

- Se describen reemplazando en la primera **I_R** por **(V_R/Z_R)** y en la segunda **V_R** por **(I_R·Z_R)**

$$V(x) = \frac{V_R}{2} \cdot \left(1 + \frac{Z_c}{Z_R}\right) \cdot e^{+\gamma x} + \frac{V_R}{2} \cdot \left(1 - \frac{Z_c}{Z_R}\right) \cdot e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{I_R}{2} \cdot \left(1 + \frac{Z_R}{Z_c}\right) \cdot e^{+\gamma x} + \frac{I_R}{2} \cdot \left(1 - \frac{Z_R}{Z_c}\right) \cdot e^{-\gamma x}$$

LÍNEAS SIN PÉRDIDAS y CON CARGA CARACTERÍSTICA (O ADAPTADA) - POTENCIA NATURAL (SIL)

- En este caso especial en el que $Z_c = Z_R$

$$\begin{cases} V(x) = V_R \cdot e^{+\gamma x} \\ I(x) = I_R \cdot e^{+\gamma x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{iNotar que no habrá} \\ \text{Onda Negativa o Inversa!} \end{array}$$

- Y si además $R = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \gamma = j\beta$

$$\begin{cases} V(x) = V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x} \\ I(x) = I_R \cdot e^{+j\beta \cdot x} \end{cases}$$

- Esto significa que

$$\begin{cases} |V(x)| = |V_R| = |V| \\ |I(x)| = |I_R| = |I| \end{cases} \quad \text{para todo valor de "x"}$$

- Las tensiones, en módulo, son las mismas en todos los puntos de la Línea (Lo mismo pasa con las corrientes) y ¡No hay caída de tensión (en módulo) a lo largo de la Línea!

- En cualquier punto "x" de la Línea

$$S(x) = P(x) + jQ(x) = V(x) \cdot I^*(x)$$

$$S(x) = \left(V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x} \right) \cdot \left(\frac{V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x}}{Z_c} \right)^*$$

$$S(x) = \left(V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x} \right) \cdot \left(\frac{V_R \cdot e^{-j\beta \cdot x}}{Z_c} \right)$$

$$S(x) = \frac{|V_R|^2}{Z_c} = P(x) + j0$$

- Cuando $V_R = V_{\text{Nominal}}$ se define ...

$$SIL_{\text{Monofásica}} = \frac{|V_N|^2}{Z_c}$$

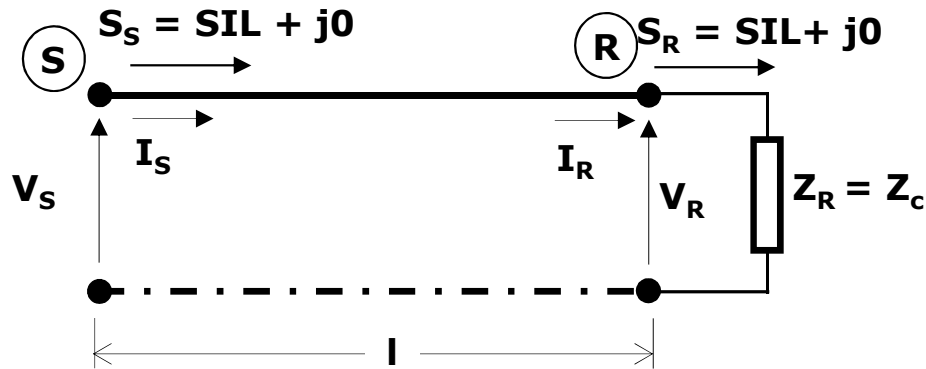
$$SIL = 3 \cdot \frac{|V_N|^2}{Z_c} = \frac{|U_N|^2}{Z_c}$$

Potencia Natural (Trifásica)

LÍNEAS SIN PÉRDIDAS y CON CARGA CARACTERÍSTICA (O ADAPTADA) - POTENCIA NATURAL (SIL)

- Cuando "x = l"

$$\begin{cases} V_S = V_R \cdot e^{+j\beta \cdot l} \\ I_S = I_R \cdot e^{+j\beta \cdot l} \end{cases}$$



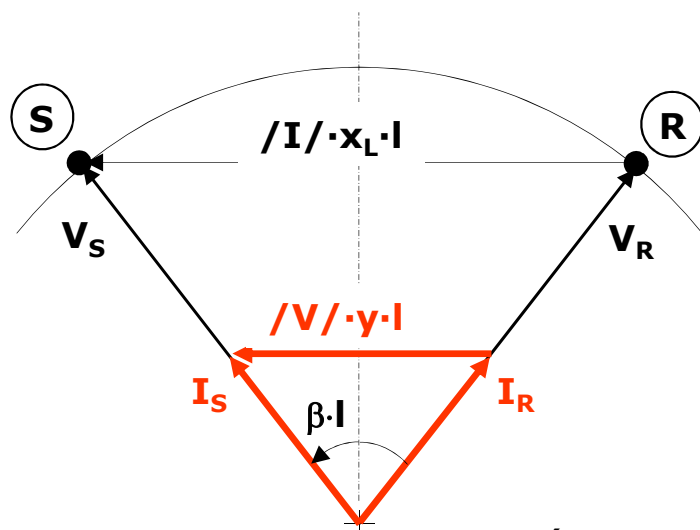
- Del diagrama fasorial

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\beta \cdot l}{2}\right) = \frac{|I| \cdot x_L \cdot \frac{l}{2}}{|V|} = \frac{|V| \cdot y \cdot \frac{l}{2}}{|I|}$$

$$|I|^2 \cdot x_L \cdot l = |V|^2 \cdot y \cdot l$$

$$|I|^2 \cdot X_L = |V|^2 \cdot Y$$

$$Q_L = Q_C$$



- Valores típicos de SIL

$$U_{\text{nom}} = 33 \text{ kV} \rightarrow Z_C = 365 \Omega \rightarrow \text{SIL} \sim 3 \text{ MW}$$

$$U_{\text{nom}} = 132 \text{ kV} \rightarrow Z_C = 375 \Omega \rightarrow \text{SIL} \sim 50 \text{ MW}$$

$$U_{\text{nom}} = 220 \text{ kV} \rightarrow Z_C = 260 \Omega \rightarrow \text{SIL} \sim 185 \text{ MW}$$

$$U_{\text{nom}} = 500 \text{ kV} \rightarrow Z_C = 250 \Omega \rightarrow \text{SIL} \sim 1000 \text{ MW}$$

MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS y LARGAS

Si interesara obtener un circuito R-L-C que permita representar a la Línea (**¿Porqué interesaría?**), observando el desarrollo en series de las funciones hiperbólicas

$$\begin{cases} Ch(\gamma x) = 1 + \frac{(\gamma x)^2}{2!} + \frac{(\gamma x)^4}{4!} + \frac{(\gamma x)^6}{6!} + \dots \\ Sh(\gamma x) = \gamma x + \frac{(\gamma x)^3}{3!} + \frac{(\gamma x)^5}{5!} + \frac{(\gamma x)^7}{7!} + \dots \end{cases}$$

Puede notarse que, para "l < 300 km",

$$\begin{cases} Ch(\gamma l) \approx 1 + \frac{(\gamma l)^2}{2!} \\ Sh(\gamma l) \approx \gamma l \end{cases}$$

Con lo que la primera de las "**Ecuaciones Hiperbólicas de la Línea**" resulta

$$V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right] + I_R \cdot Z_c \cdot (\gamma l)$$

Advirtiendo que

$$(\gamma l) = (\sqrt{zy} \cdot l) = \sqrt{Z \cdot Y} \quad (\gamma l)^2 = (\sqrt{zy} \cdot l)^2 = Z \cdot Y$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{zl}{yl}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

Se desarrolla

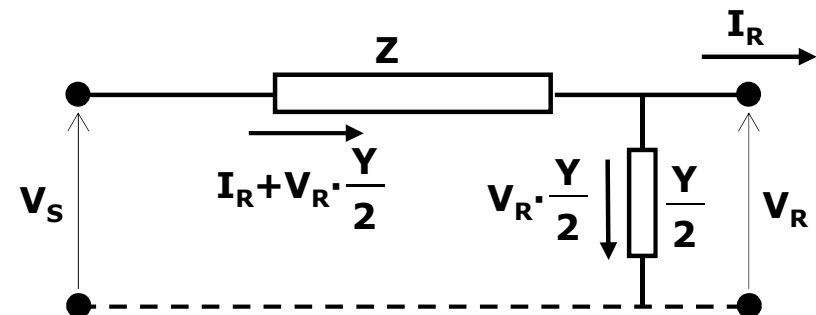
$$V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z \cdot Y}{2} \right] + I_R \cdot \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$V_S = V_R + Z \cdot V_R \cdot \frac{Y}{2} + I_R \cdot Z$$

Obteniéndose

$$V_S = V_R + Z \cdot \left(V_R \cdot \frac{Y}{2} + I_R \right)$$

Expresión que se refleja en el circuito ...



MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS Y LARGAS

Por otra parte, si en

$$I_S = V_R \cdot \frac{Sh(\gamma)}{Z_c} + I_R \cdot Ch(\gamma)$$

Se realiza el mismo reemplazo que en V_S

$$I_S = V_R \cdot \frac{\gamma}{Z_c} + I_R \cdot \left[1 + \frac{(\gamma)^2}{2} \right]$$

$$I_S = V_R \cdot \frac{\sqrt{Z \cdot Y}}{\sqrt{Z}} + I_R \cdot \left[1 + \frac{Z \cdot Y}{2} \right]$$

$$I_S = V_R \cdot Y + I_R + I_R \cdot \frac{Z \cdot Y}{2}$$

Y, si del circuito anterior se deduce

$$I_R = \frac{V_S - V_R}{Z} - V_R \cdot \frac{Y}{2}$$

Reemplazando esta expresión de I_R en el último término de la anterior, se tiene

$$I_S = I_R + V_R \cdot Y + \left(\frac{V_S - V_R}{Z} - V_R \cdot \frac{Y}{2} \right) \cdot \frac{Z \cdot Y}{2}$$

$$I_S = I_R + V_R \cdot Y + V_S \cdot \frac{Y}{2} - V_R \cdot \frac{Y}{2} - V_R \cdot \frac{Z \cdot Y^2}{4}$$

Observando que siendo ya de por sí "Y" un parámetro numéricamente pequeño, al encontrarse elevado a la 2 resulta

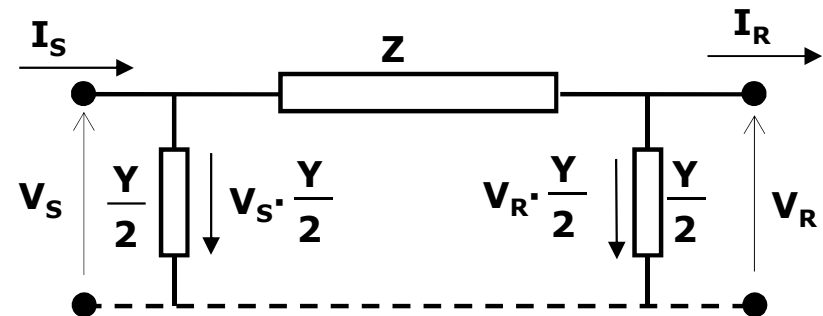
$$\frac{Z \cdot Y^2}{4} \approx 0$$

Se puede considerar entonces que

$$I_S = I_R + V_R \cdot Y + V_S \cdot \frac{Y}{2} - V_R \cdot \frac{Y}{2}$$

$$I_S = I_R + V_R \cdot \frac{Y}{2} + V_S \cdot \frac{Y}{2}$$

Expresión esta última que permite completar el circuito de Líneas de " $l < 300 \text{ km}$ ", denominado "**Modelo en π de Líneas de Media Longitud**", así



MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS Y LARGAS

Si " $l < 100 \text{ km}$ ", pueden despreciarse aún más términos de las expresiones en series de las funciones $Ch(\gamma l)$ y $Sh(\gamma l)$, así

$$\begin{cases} Ch(\gamma l) \approx 1 \\ Sh(\gamma l) \approx \gamma l \end{cases}$$

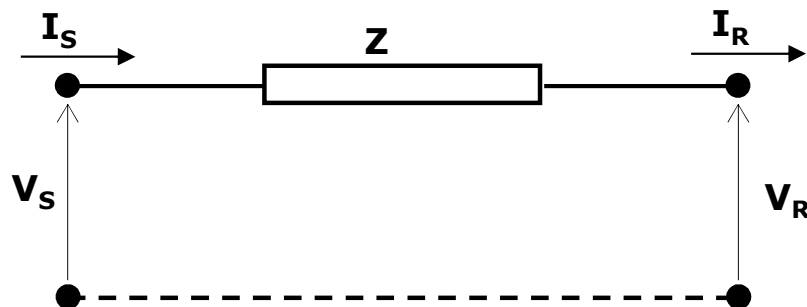
Con estas simplificaciones resulta una expresión de V_S ...

$$V_S = V_R \cdot 1 + I_R \cdot Z_c \cdot (\gamma l)$$

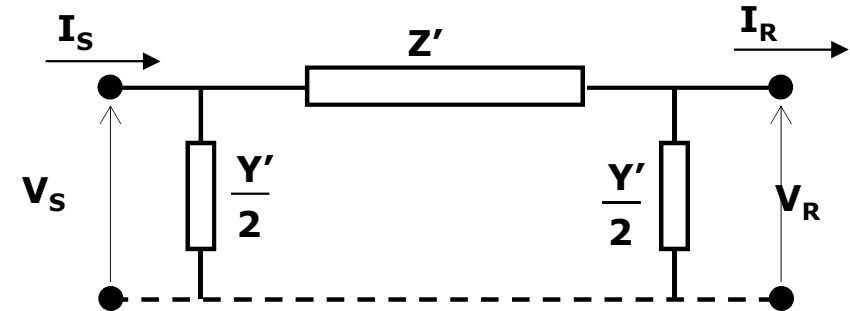
$$V_S = V_R \cdot 1 + I_R \cdot \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$V_S = V_R \cdot 1 + I_R \cdot Z$$

Expresión que se refleja en el circuito siguiente, el cual se conoce como el "**Modelo de la Línea de Corta Longitud**" y es válido para " $l < 100 \text{ km}$ ".



Si " $l > 300 \text{ km}$ " e interesara contar con un circuito equivalente (¿**Porqué interesaría?**), se plantea utilizar uno en " π " como el siguiente.



Las ecuaciones que se construyen a partir de éste, como por caso para las tensiones

$$V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2} \right] + I_R \cdot Z'$$

Deben ser equivalentes a

$$V_S = V_R \cdot Ch(\gamma l) + I_R \cdot Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$

De donde se deduce que

$$\left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2} \right] = Ch(\gamma l)$$

$$Z' = Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$

MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS Y LARGAS

Desarrollando ...

$$Z' = Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$

$$Z' = Z_c \cdot Sh(\gamma l) \cdot \frac{\gamma l}{\gamma}$$

$$Z' = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \frac{Sh(\gamma l)}{\gamma} \cdot \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$Z' = Z \cdot \frac{Sh(\gamma l)}{\gamma}$$

Por otra parte

$$\left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2} \right] = Ch(\gamma l)$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Ch(\gamma l) - 1}{Z'}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Ch(\gamma l) - 1}{Z_c \cdot Sh(\gamma l)}$$

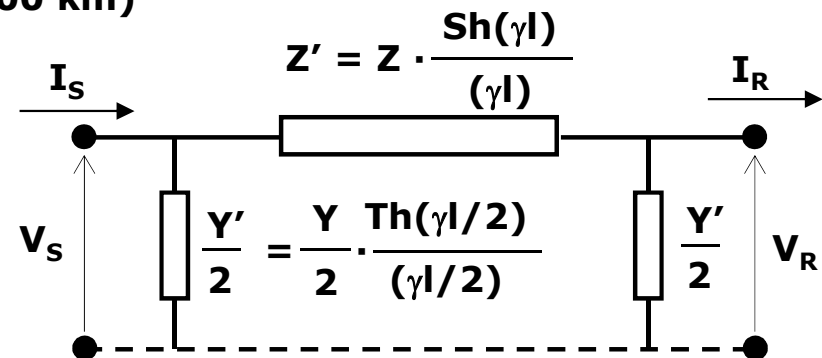
$$\frac{Y'}{2} = \frac{Ch(\gamma l) - 1}{Z_c} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{Z_c}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{Z_c} \cdot \frac{\gamma l / 2}{\gamma l / 2}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{\gamma l / 2} \cdot \frac{\gamma l / 2}{Z_c} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{\gamma l / 2} \cdot \frac{\sqrt{Z \cdot Y} / 2}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{\gamma l / 2} \cdot \frac{Y}{2}$$

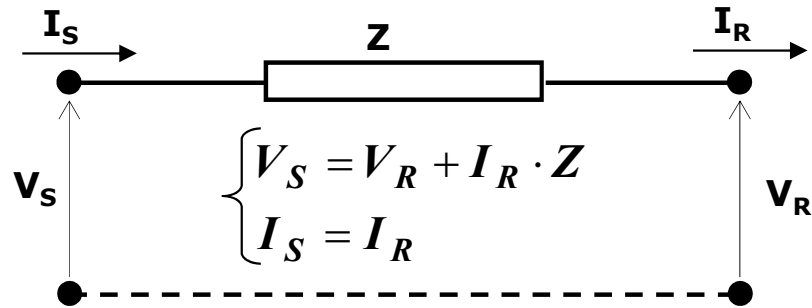
Expresiones que permiten obtener, a partir de los parámetros usuales de una Línea, un **"Modelo en π de la Línea de Larga Longitud"** ($l > 300$ km)



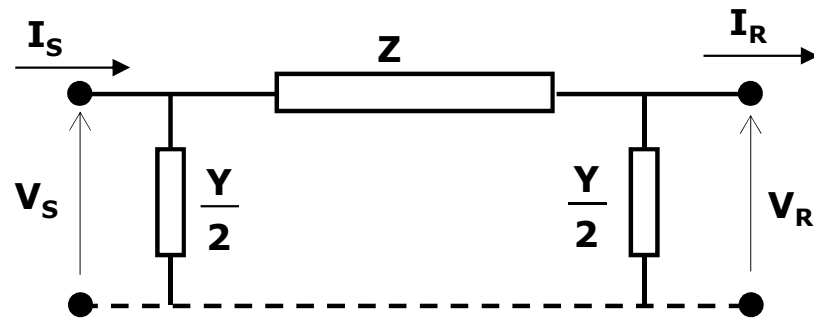
MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS Y LARGAS

• RESUMEN

Modelo de Línea Corta ($l < 100$ km)

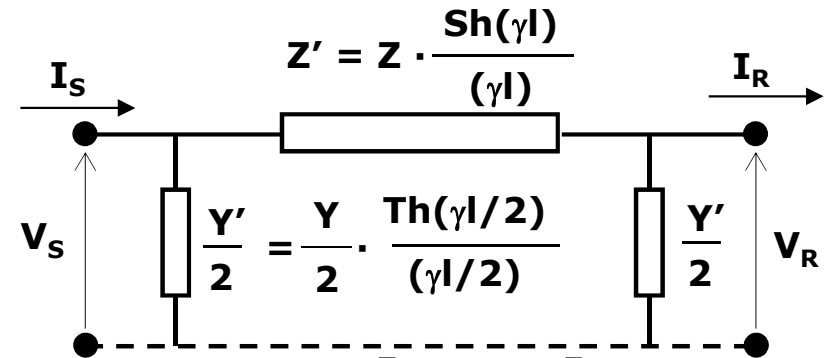


Modelo de Línea Media ($100 < l < 300$ km)

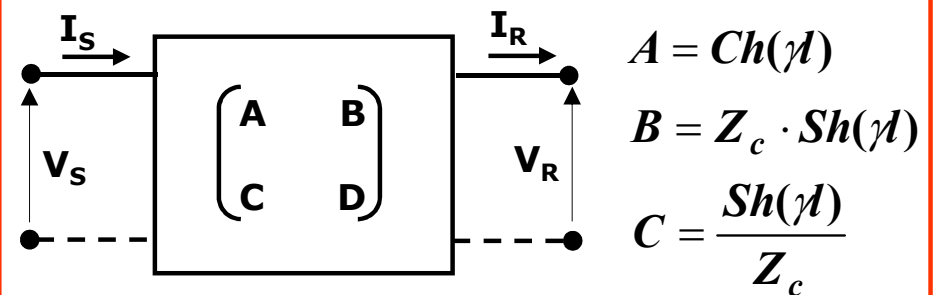


$$\begin{cases} V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z \cdot Y}{2} \right] + Z \cdot I_R \\ I_S = I_R + (V_R + V_S) \cdot \frac{Y}{2} \end{cases}$$

Modelo de Línea Larga ($l > 300$ km)



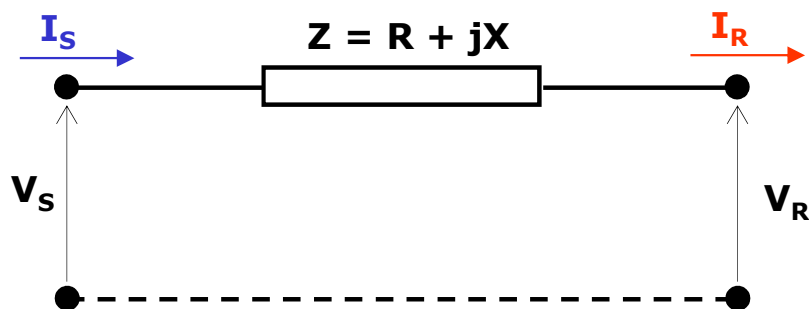
$$\begin{cases} V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2} \right] + Z' \cdot I_R \\ I_S = I_R + (V_R + V_S) \cdot \frac{Y'}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R \\ I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R \end{cases}$$

DIAGRAMA FASORIAL PARA LÍNEAS CORTAS y MEDIAS

Modelo de Línea Corta ($l < 100$ km)



Modelo de Línea Media ($100 < l < 300$ km)

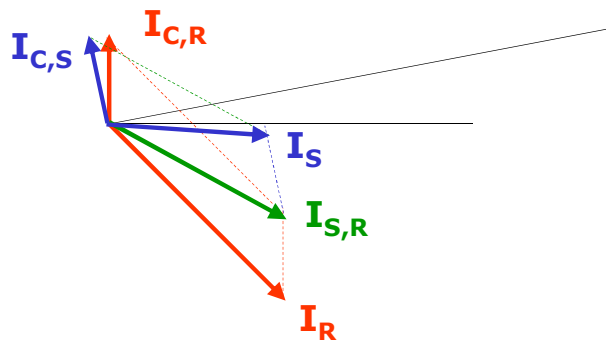
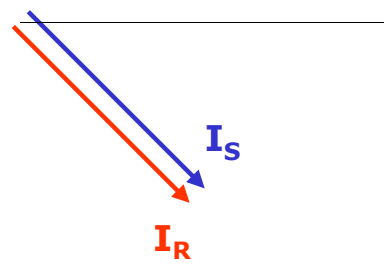
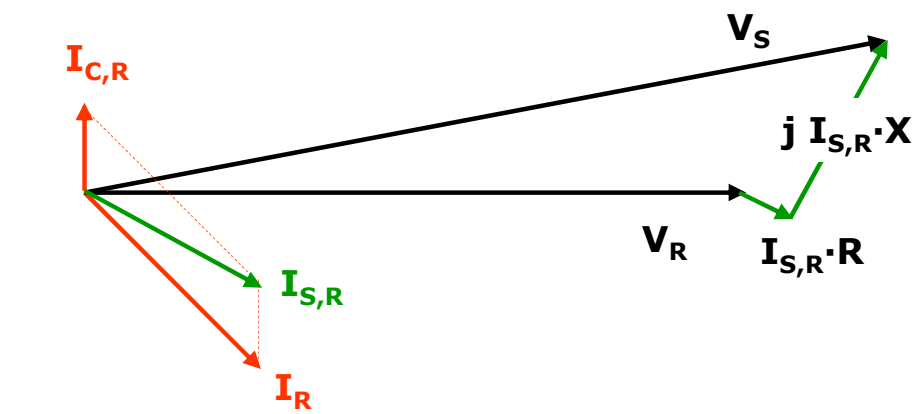
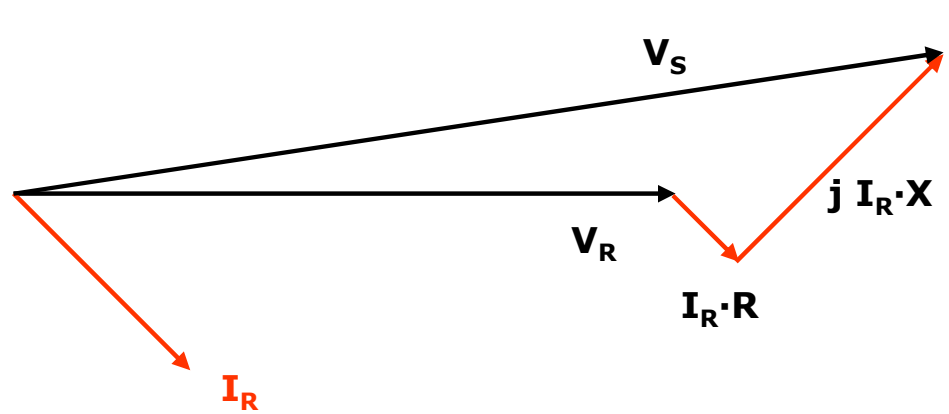
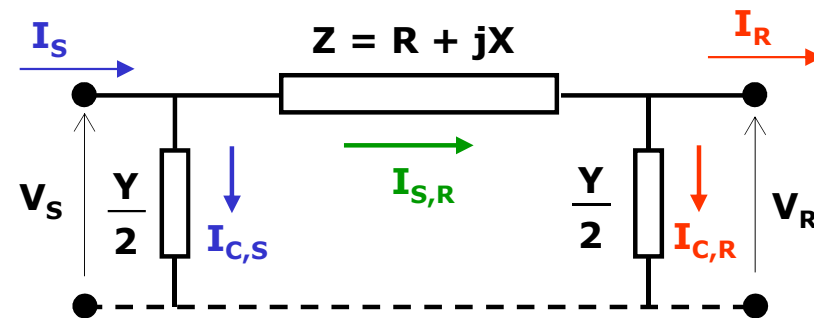
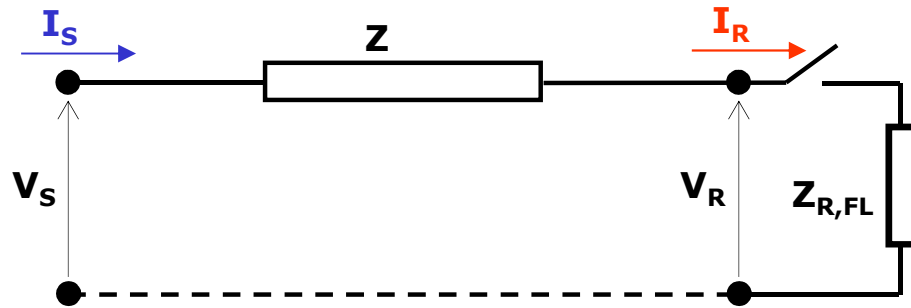
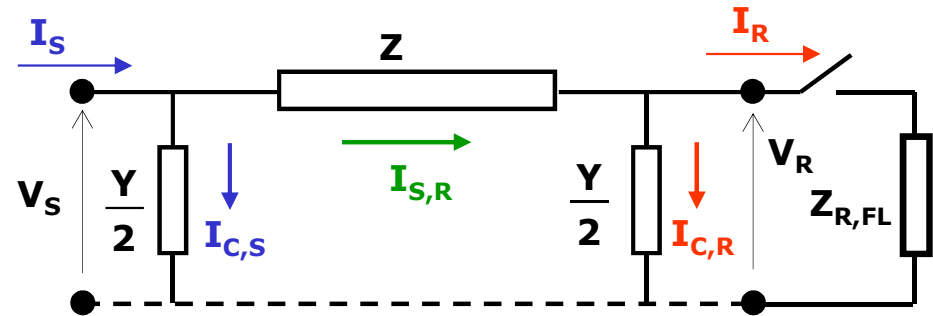


DIAGRAMA FASORIAL PARA LÍNEAS CORTAS Y MEDIAS

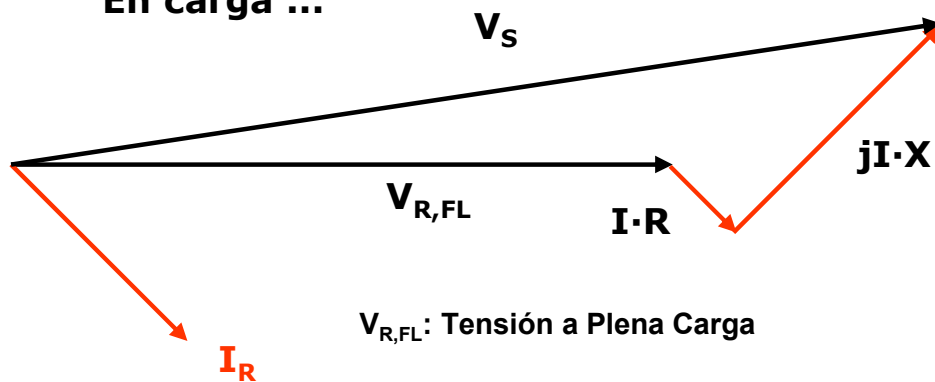
Modelo de Línea Corta ($l < 100$ km)



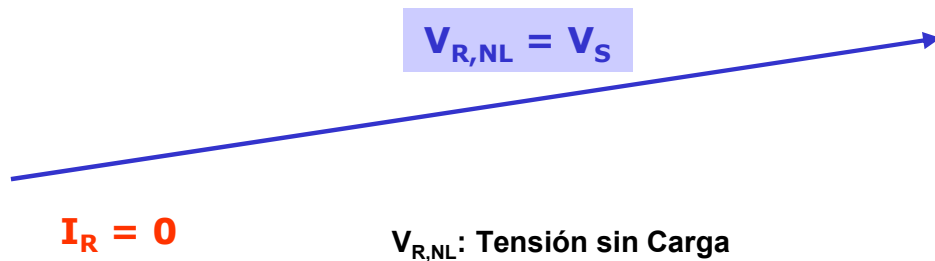
Modelo de Línea Media ($100 < l < 300$ km)



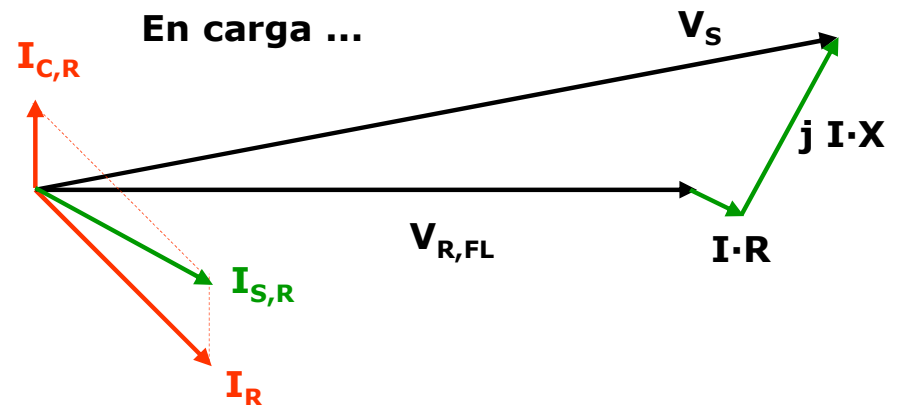
En carga ...



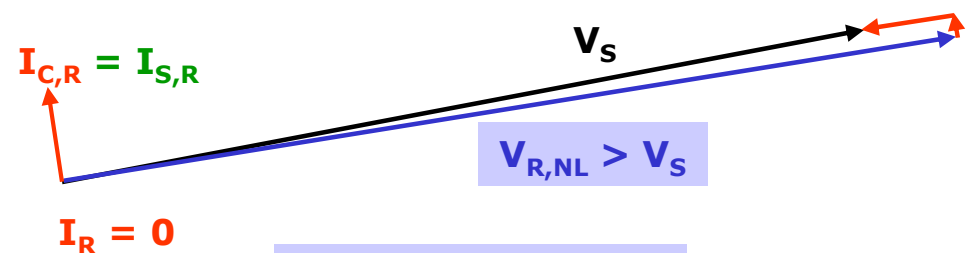
Si se fija V_S y se quita la carga ...



En carga ...



Si se fija V_S y se quita la carga ...



¡ Efecto Ferranti !

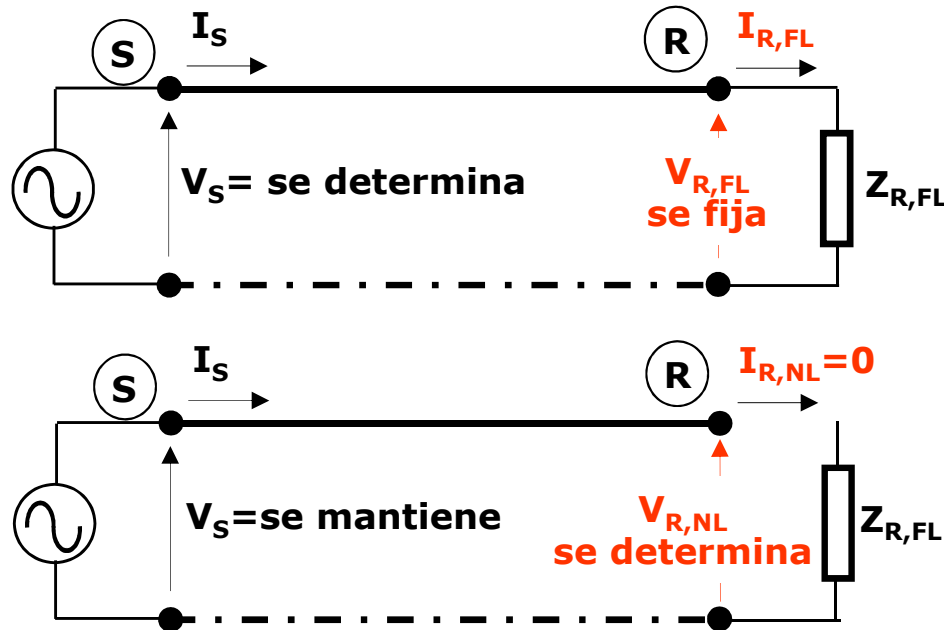
REGULACIÓN DE TENSIÓN

- Se define

$$\text{Regulación de Tensión}(\%) = \frac{|V_{R,NL}| - |V_{R,FL}|}{|V_{R,FL}|} \cdot 100$$

NL: No Load

FL: Full Load



- En el Modelo de Línea Corta

$$|V_{R,NL}| = |V_S|$$

- En el Modelo de Línea Larga

$$V_S = V_{R,NL} \cdot Ch(\gamma) \quad \Rightarrow \quad V_{R,NL} = \frac{V_S}{Ch(\gamma)} > V_S < 1$$

- En el Modelo de Línea Media

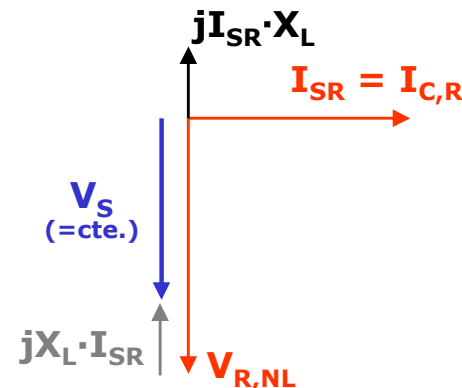
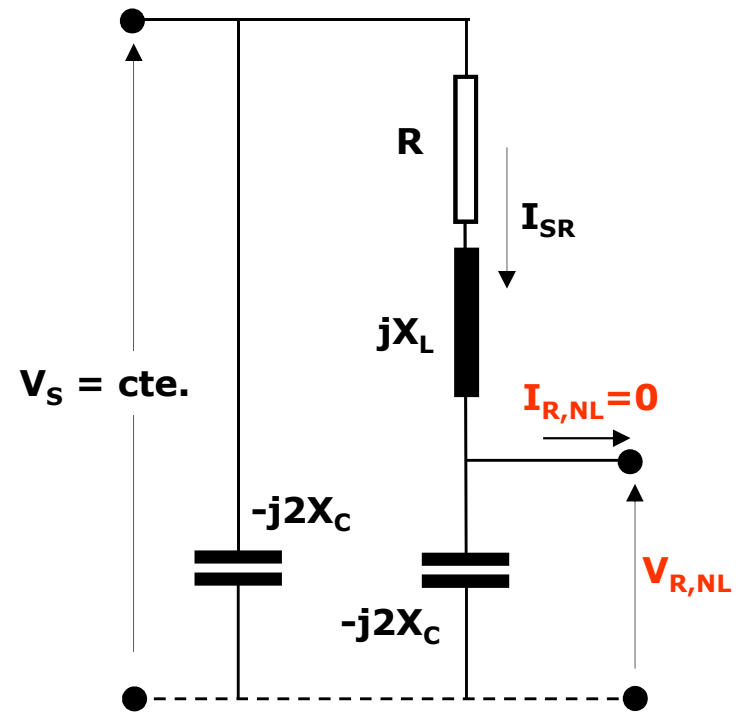


Diagrama Fasorial aproximado ($R \sim 0$ y $X_C \gg X_L$).

En Líneas de Media y Larga longitud $|V_{R,NL}|$ es superior a $|V_S|$ → **Efecto Ferranti**

REGULACIÓN DE TENSIÓN – LÍNEAS COMPENSADAS

- **Compensación**

- **Serie**
- **Shunt, paralelo o transversal.**
- **Inductiva**
- **Capacitiva**

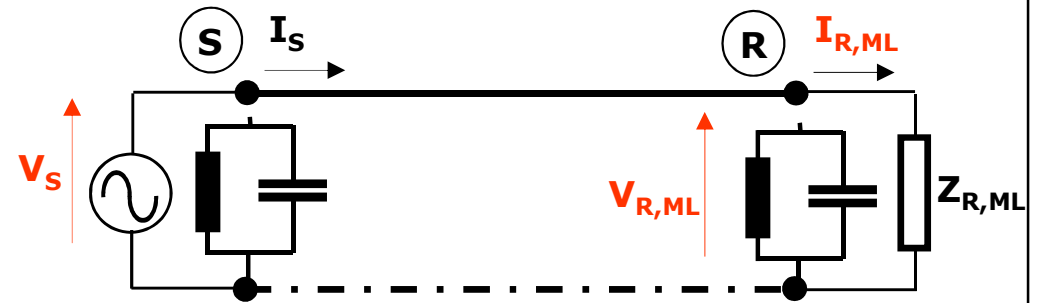
- **Objeto de la Compensación ...**

Regular Tensión, pues V_S y $V_R = 0,97 \dots 1,03$ pu. Y con ello ...
Maximizar Capacidad de Transmisión de Potencia.

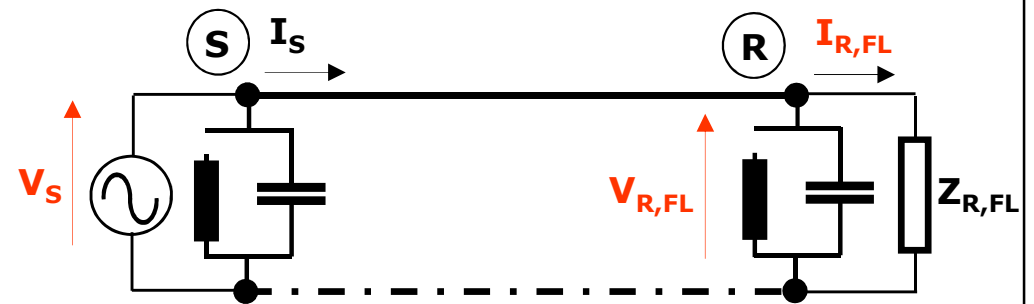
Compensación shunt-capacitiva/inductiva ...



LL: Low Load

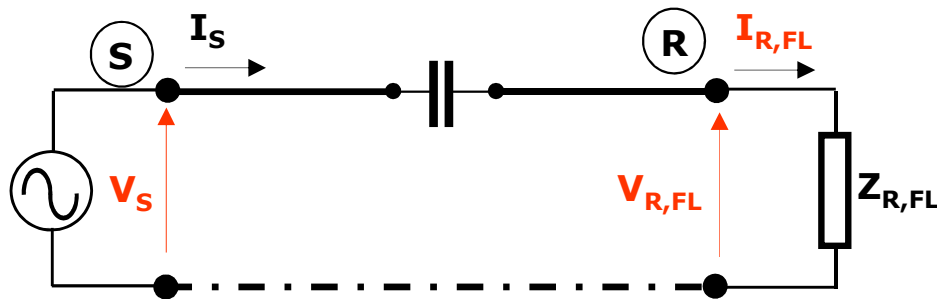


ML: Medium Load



FL: Full Load

Compensación serie-capacitiva ...

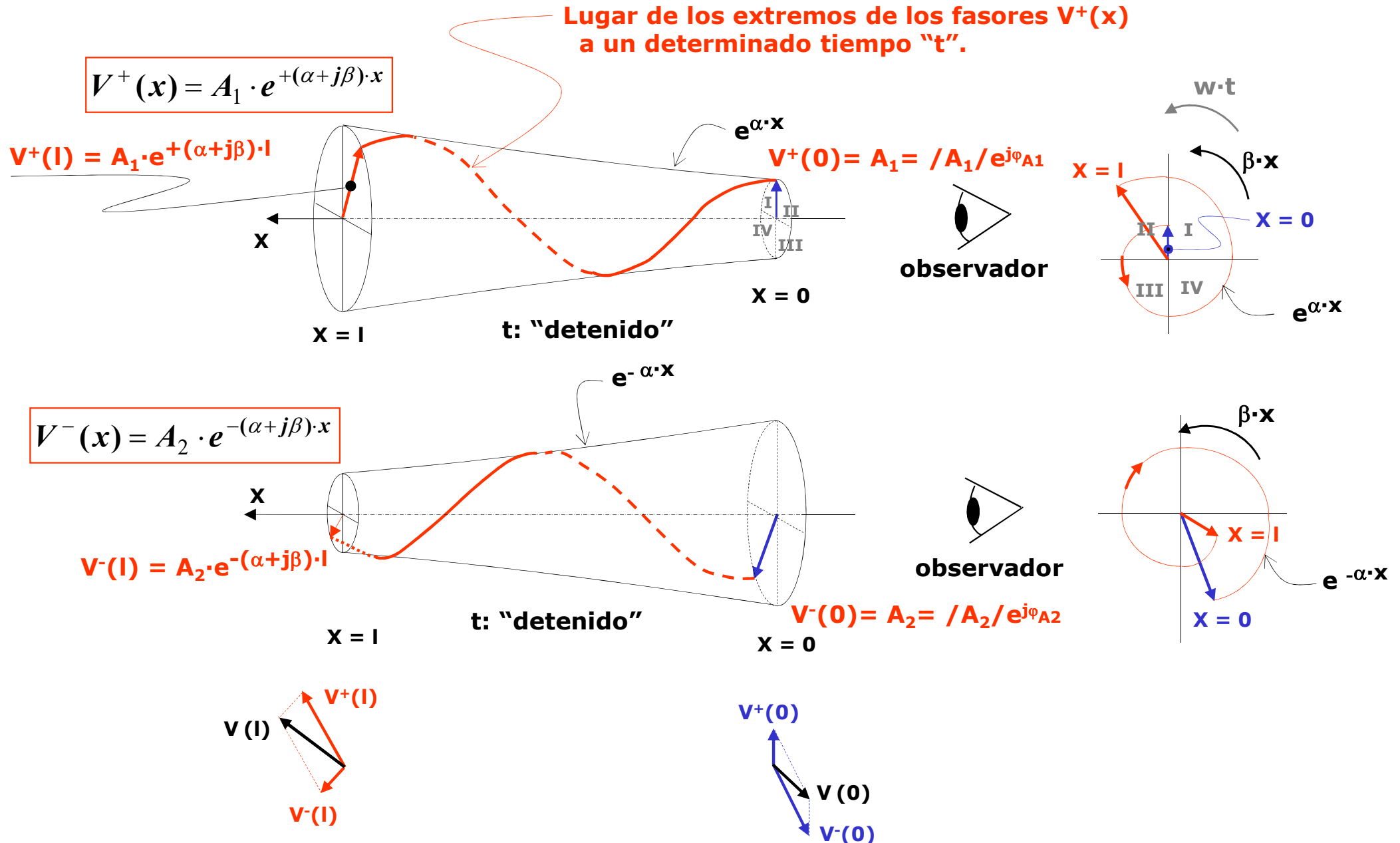


Ventajas / Desventajas

MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

• EN EL DOMINIO DEL ESPACIO.



MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

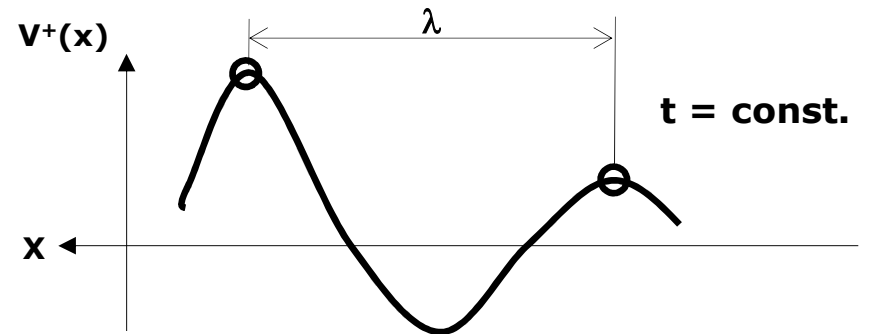
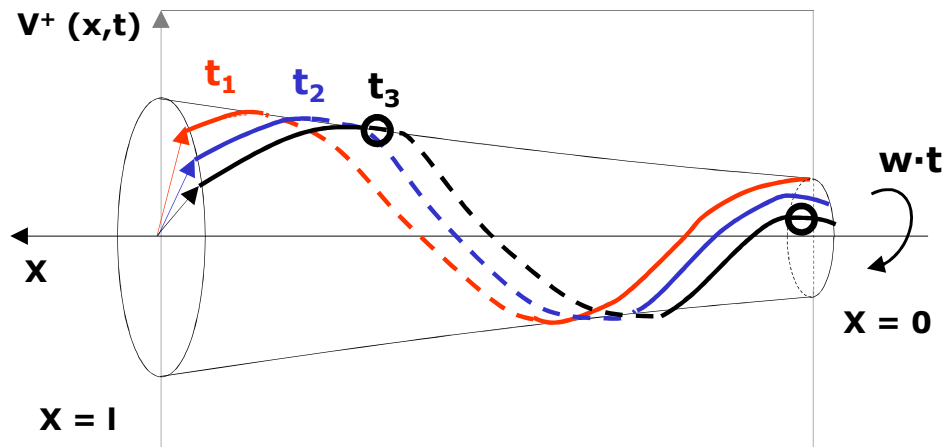
• EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

$$v^+(x,t) = \text{Im} \left[|A_1| \cdot e^{+j(\omega \cdot t + \varphi_{A1})} \cdot e^{+(\alpha + j\beta) \cdot x} \right]$$

$$v^+(x,t) = \text{Im} \left[|A_1| \cdot e^{+\alpha \cdot x} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_{A1} + \beta \cdot x) \right]$$

Si se denomina con "T" al tiempo que le lleva al "cono" dar una vuelta completa, se cumple la relación $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$ [radianes]

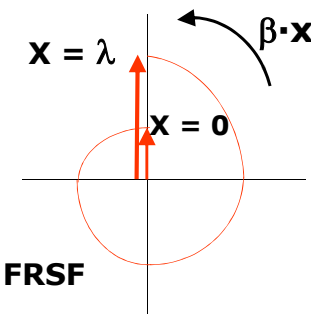
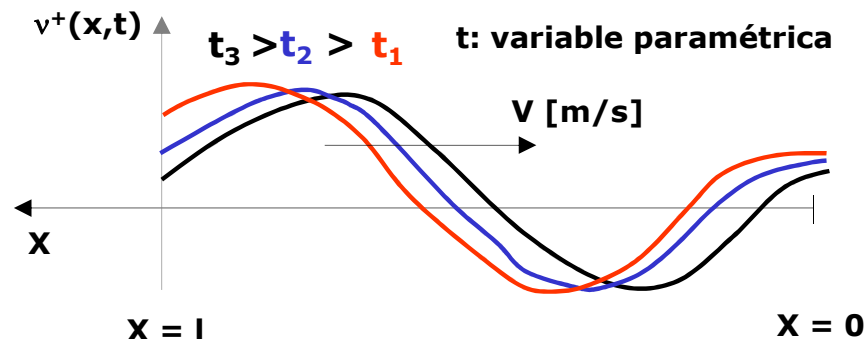
Y el pico de la onda "avanzó" una distancia "λ".



Esto es, el pico de la onda se desplazó a una velocidad dada por la relación:

$$v = \frac{\lambda}{T} \text{ [m / s]}$$

Por otra parte, a un t=constante, avanzando por el eje de las "x" encontramos dos fasores alineados al recorrer esa distancia "λ", tal que se verifica la siguiente relación: $\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi$



MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

Vale decir ...

$$\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} \text{ [km / s]} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi / \beta}{1 / f}$$

... Con lo que que la onda de tensión directa se desplaza a una velocidad dada por la relación

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} \text{ [km / s]}$$

Valores usuales de parámetros de Líneas de 132 kV son:

$$\begin{aligned} r &= 0,1 \text{ } \Omega/\text{km (conductor 300/50 mm}^2 \text{ Al/Ac)} \\ w \cdot l &= 0,4 \text{ } \Omega/\text{km} \\ w \cdot C &= 2,85 \text{ } \mu\text{S/km} \end{aligned}$$

Con lo que

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{(r + j\omega \cdot L) \cdot (j\omega \cdot C)} = \alpha + j\beta$$

$$\gamma = \sqrt{(0,1 + j0,4) \cdot (j2,85 \cdot 10^{-6})}$$

$$\gamma = 1,325 \cdot 10^{-4} + j0,0011$$

$$\beta = 0,0011 \text{ [radianes / km]}$$

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50}{0,0011} = 285.600 \text{ [km / s]}$$

$$v = 0,95 \cdot c$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \text{ [rad]}}{0,0011 \text{ [rad/km]}} = 5.712 \text{ [km]}$$

Y si "r" fuese nula ... ?

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA RECOMENDADA

- **William D. Stevenson y John J. Grainger "Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia", Editorial McGraw-Hill. México, 1.995.**
- **Enrique Ras "Teoría de Líneas Eléctricas", Tomos I y II. Editorial Marcombo. Barcelona, 1.973.**
- **J. Duncan Glover y Mulukutla S. Sarma "Sistemas de Potencia – Análisis y Diseño", International Thomson Editores. México, 2.004.**
- **P. Marcelic "Líneas y Redes Eléctricas", Editorial Ediar. Buenos Aires, 1.957.**

FIN UT2