

# MOTORES DE CC EN APLICACIONES DE ROBÓTICA - METODOLOGÍA E INSTRUMENTACIÓN PARA LA IDENTIFICACIÓN DE SUS PARÁMETROS

**Walter J. D. Cova, Rodolfo A. Cavallero, Sergio E. Olmedo,  
Gustavo J. González, Francisco G. Gutiérrez.**

*CUDAR (Centro Universitario de Desarrollo en Automación y Robótica),  
Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional*

**Resumen:** Se presenta un método de identificación de parámetros para servomotores de corriente continua de aplicación en robótica, basado fundamentalmente en el análisis de la respuesta temporal de la corriente de armadura para diversas tensiones de control. El método incorpora la identificación de la cupla resistente debida a la fricción coulombiana (fricción seca). Paralelamente se presentan el sistema electrónico de adquisición de datos junto con el software aplicativo desarrollados para realizar las mediciones y postprocesar los datos almacenados, supliendo de esta manera carencias de instrumental. La verificación práctica de los resultados obtenidos confirma la utilidad del método de identificación y de los procedimientos experimentales empleados.

**Palabras clave:** Motores de CC, identificación de parámetros, identificación por mínimos cuadrados.

## 1. INTRODUCCION

Los procedimientos paramétricos de identificación de sistemas basados en la respuesta temporal a excitaciones impulsivas y escalonadas fueron desarrollados en las décadas del '60 y '70 y se encuentran ampliamente documentados en la bibliografía de la época, siendo destacables los aportes de Åström y Eykhoff (1970) y Ljung y Söderstrom (1983). La identificación y compensación de parámetros no lineales en motores de continua (fricción seca, juego y efecto de adherencia) han sido temas de interés en los últimos años, véanse Jang y Jeon, (2000); Nordin y Gutman, (2002); Wu y Tung, (2002); Kara y Eker, (2003). El método presentado en este trabajo implementa una extensión no lineal de mínimos cuadrados aplicada a la expresión analítica de la respuesta temporal de la corriente a un escalón de tensión.

La necesidad de contar con un método de identificación se evidenció durante la ejecución del proyecto *SISTEMA ROBOTICO DE ARQUITEC-TURA ABIERTA MULTIPROPOSITO* en el CUDAR (robot cilíndrico de 6GL), pues no se disponía de datos básicos confiables para la determinación de las funciones

de transferencia de los diferentes ejes de actuación y por otra parte se requería la evaluación de las constantes constructivas y elementos no lineales asociados (resistencias, inductancias, momentos de inercia, fricciones, etc.), como punto de partida para el diseño de un sistema de control sin identificación on-line.

Como además se carecía de instrumental para la captura de los datos de ensayo, se procedió a diseñar e implementar un subsistema electrónico de adquisición de datos complementado por un paquete de software aplicativo especialmente desarrollado.

### 1.1 Contenido del artículo.

La sección 1 presenta las motivaciones y fundamentos del trabajo realizado. La sección 2 está dedicada a la metodología de identificación propuesta. En la sección 3 se presentan el subsistema de adquisición de datos y el software de procesamiento. La sección 4 discute los resultados experimentales obtenidos. Conclusiones y recomendaciones incluidas en la sección 5, cierran el artículo.

## 2. METODOLOGÍA DE IDENTIFICACIÓN.

### 2.1 Modelado e hipótesis de trabajo.

Los servomotores de corriente continua a excitación independiente (ya sean de campo fijo o a imán permanente) son actuadores ampliamente difundidos y utilizados en sistemas de control de posición y velocidad. Su modelización está perfectamente definida en la literatura standard de control (Ogata, 1990), consignándose en la Fig. 1 el diagrama en bloques simplificado en el que se incluye la influencia de la fricción seca representada por el bloque no lineal  $T_s(\omega)$ .

El estudio de la fricción coulombiana en sistemas dinámicos posee una larga historia, siendo (Den Hartog, 1930), una de las más antiguas e importantes referencias que pueden ser citadas. Si bien la fricción seca no es independiente de la velocidad de rotación, es práctica común caracterizarla mediante una constante con signo opuesto al de la velocidad de giro; véase al respecto el tratamiento brindado por (Oppelt, 1972). En aplicaciones de potencia elevada y/o permanentes inversiones del sentido de giro, puede resultar apropiado emplear funciones de mayor complejidad para representar la dependencia de  $T_s(\omega)$  respecto de la velocidad angular (Kara y Eker, 2003).

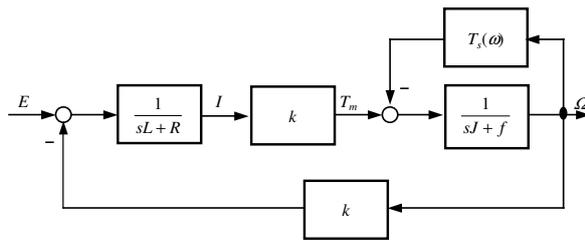


Fig.1. Diagrama en bloques simplificado.  $L$ ,  $R$ : inductancia y resistencia de armadura.  $k$ : constante del motor.  $J$ ,  $f$ : momento de inercia y coeficiente de fricción viscosa del motor cargado referido al eje del motor.  $E$ : tensión de control.  $I$ : corriente de armadura.  $\Omega$ : velocidad de rotación.  $T_s$ : cupla de fricción coulombiana.  $s$ : variable de transformación (Laplace).

Con la simbología empleada en la Fig. 1, el modelo matemático es para  $kI \leq T_s$

$$E = RI + L\dot{I} ; I(0) = 0 \quad (1)$$

es decir, mientras la cupla motriz no alcanza a superar el umbral impuesto por la fricción seca  $T_s$ . Pasado ese umbral se inicia el movimiento y el sistema se describe mediante las ecuaciones

$$E = RI + L(dI/dt) - k\Omega \quad (2)$$

$$T_m - T_s = kI - T_s = f\Omega + J(d\Omega/dt)$$

con las condiciones

$$t \geq t_0 ; I(t_0) = T_s/k ; \Omega(t_0) = 0. \quad (3)$$

Los valores de  $L$  y  $R$  son en general proporcionados por el fabricante del servomotor, aunque a menudo sólo se especifica la resistencia de armadura ya que se presupone que la constante de tiempo eléctrica del motor  $\tau_e = L/R$  es pequeña y despreciable frente a la

constante de tiempo mecánica  $\tau_m = J/f$  del conjunto {rotor + carga mecánica}.

La constante  $k$  del motor (usualmente denominada *constante de cupla*) es dato del fabricante, o bien puede ser calculada mediante ensayos al freno en los que se mida la corriente en el circuito de armadura.

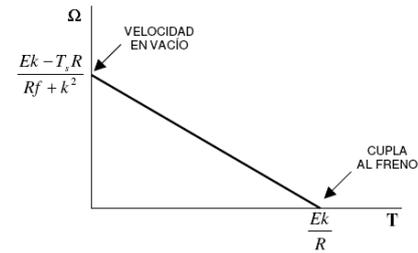


Fig.2. Característica cupla-velocidad de un servomotor.

Si el coeficiente de fricción viscosa  $f$  del motor descargado no es proporcionado por el fabricante, su valor puede ser estimado mediante ensayos en vacío (véase al respecto la Fig. 2). Para obtener el valor de  $f$  del motor cargado, deberán estar perfectamente caracterizados la carga mecánica y los elementos de transmisión de movimiento empleados, resultando un cálculo medianamente complejo y relativamente poco preciso.

El momento de inercia  $J$  del motor, es normalmente especificado. Nuevamente, valen para el cálculo de  $J$  del motor cargado, las mismas consideraciones realizadas en el párrafo precedente con referencia a  $f$ .

Si bien la cupla de fricción seca  $T_s$  para el motor aislado puede ser proporcionada por el fabricante, su valor en condiciones de carga es altamente dependiente del tipo, ajuste y condiciones de lubricación de los componentes del acoplamiento y soporte del motor y su carga (reductores, guías, cojinetes, etc.). La fricción coulombiana constituye una no-linealidad indeseada pero inevitable, que puede ser reducida pero no anulada mediante un diseño mecánico cuidadoso. Su efecto puede ser despreciado en sistemas de control de velocidad (en los que el sentido de giro del motor no cambia), pero ha de ser tenida necesariamente en cuenta en controles de posición, especialmente si los mismos persiguen una elevada precisión.

Para concluir este apartado, resulta necesario consignar las dos hipótesis en que se basa la metodología de identificación propuesta:

- El servomotor de corriente continua responde al modelo lineal descrito mediante las ecuaciones (1) y (2).
- La cupla de fricción coulombiana es aproximable mediante la expresión  $|T_s| = cte$  y signo opuesto a la dirección del movimiento en todo el rango de velocidades de interés.

### 2.2. Influencia de la fricción seca sobre la corriente de régimen.

La resistencia del circuito de armadura  $R$  es el parámetro más fácilmente medible de un servomotor. En lo que sigue, se supone a  $R$  conocido y que se

lo que sigue, se supone a  $R$  conocido y que se conoce además el valor de la constante  $k$  del motor.

Tomando como hipótesis adicional que el motor cargado puede ser sometido a ensayos para diferentes valores de la tensión de armadura  $E$  se obtienen, para condiciones de régimen permanente, las siguientes relaciones a partir del diagrama en bloques de la Fig.1:

$$\Omega_r = \frac{Ek - T_s R}{Rf + k^2} \quad (4)$$

$$I_r = \frac{E - k\Omega_r}{R} \quad (5)$$

donde el subíndice  $r$  de las variables indica justamente condiciones de régimen. Reemplazando (4) en (5) y reordenando,

$$\frac{E}{I_r} - R = \frac{k^2}{f} - \frac{T_s k}{I_r f} \quad (6)$$

En la Ec.(6) el término  $E/I_r$  tiene el sentido de una resistencia: la resistencia aparente  $R_{ap}$  que presenta el motor cargado al generador de la tensión de inducido  $E$ , por lo tanto (6) puede interpretarse como:

$$\Delta R = R_{ap} - R = \frac{k^2}{f} - \frac{T_s k}{I_r f} \quad (7)$$

En ausencia de fricción seca  $\Delta R$  debiera ser constante e independiente del régimen de funcionamiento. Pero el término en  $T_s$  de (7), se hace tanto más importante cuanto más disminuyen la tensión de inducido  $E$  y por ende la corriente de régimen. Si la expresión (7) se formula como una función de  $I_r$ , su forma general es

$$\Delta R = a - \frac{b}{I_r} = \Phi(I_r) \quad (8)$$

Por consiguiente, tabulando  $\Delta R = \Phi(I_r)$  para una serie de ensayos, resulta posible identificar los coeficientes  $a$  y  $b$ , realizando un ajuste no lineal por Gauss-Newton de la función (8).

Empleando el procedimiento *nlinfit*( ) provisto por Matlab®, se han identificado para el ejemplo indicado en la Fig. 3 los valores correspondientes de  $a$  y  $b$ . Véase el Apéndice A para los detalles de empleo de *nlinfit*( ).

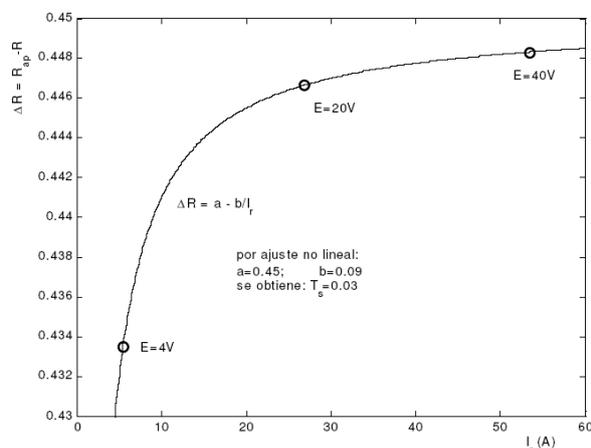


Fig.3. Identificación de  $T_s$  por ajuste no lineal. Se indican las tensiones de ensayo para un motor con  $k = 0.15$  Nm/A,  $f = 0.05$  Nms/rad,  $R = 0.3$  ohm y  $T_s = 0.03$  Nm.

Comparando (7) y (8) se determina el valor de la cupla de fricción

$$T_s = k(b/a) \quad (9)$$

La identificación de la cupla  $T_s$  mediante ensayos de tensión-corriente obliga a trabajar con muy elevada precisión en las mediciones. Obsérvese con referencia al ejemplo de la Fig. 3, que un error de medición del 1% en  $E$  e  $I$  se reflejaría –en el peor caso– como un error del 3.5% en el cálculo de  $\Delta R$ . Pero justamente 3.5% es el rango de variación de  $\Delta R$  en los tres ensayos ejemplificados en la figura. Queda entonces explicitada una debilidad intrínseca de este procedimiento.

### 2.3. Respuesta transitoria de la corriente de inducido.

Mientras la cupla motriz generada por la corriente de inducido es menor que el umbral impuesto por la cupla de fricción  $T_s$  la solución de la Ec.(1) es

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau_e}); \quad t \leq t_0 \quad (10)$$

donde  $t_0$  es el instante para el cual la cupla motriz vale  $kI(t_0) = T_s$  es decir:

$$t_0 = -\tau_e \ln \left( 1 - \frac{RT_s}{kE} \right). \quad (11)$$

Una vez iniciado el movimiento, la corriente corresponde a la solución de las ecuaciones diferenciales (2) bajo las condiciones (3), que podemos escribir descompuesta en tres componentes (para la deducción completa véase el Apéndice A):

$$I(t - t_0) = I_0(t - t_0) + I_{T_s}(t - t_0) + I_E(t - t_0) \quad (12)$$

La componente  $I_0$  se debe al efecto de la corriente  $I(t_0) = T_s/k$  que actúa como condición inicial para la solución del sistema (2). Su expresión es:

$$I_0(t - t_0) = -K_E L \omega_n \alpha \frac{T_s}{k} \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot \sinh \left[ \omega_a(t-t_0) - \sinh^{-1} \left( \frac{\tau_m \omega_n}{\alpha} \right) \right] \quad (13)$$

$I_{T_s}$  es la componente debida a la cupla de fricción:

$$I_{T_s}(t - t_0) = K_s T_s \cdot \left\{ 1 - \gamma \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot \sinh \left[ \omega_a(t-t_0) + \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\gamma} \right) \right] \right\} \quad (14)$$

mientras que la componente  $I_E$  debida a la tensión de inducido vale:

$$I_E(t - t_0) = K_E E \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot \sinh \left[ \omega_a(t-t_0) + \sinh^{-1} \left( \frac{-1}{\alpha} \right) \right] \right\} \quad (15)$$

Las definiciones de los parámetros empleados en las expresiones (13), (14) y (15), dados en función de las constantes físicas del motor son:

$$\text{Ganancia de tensión} \quad K_E = \frac{f}{Rf + k^2} \quad (16)$$

$$\text{Ganancia de cupla} \quad K_s = \frac{k}{Rf + k^2} \quad (17)$$

$$\text{Constante de tiempo eléctrica} \quad \tau_e = \frac{L}{R} \quad (18)$$

$$\text{Constante de tiempo mecánica} \quad \tau_m = \frac{J}{f} \quad (19)$$

$$\text{Pulsación natural} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{Rf + k^2}{LJ}} \quad (20)$$

$$\text{Relación de amortiguamiento} \quad \zeta = \frac{\omega_n}{2} \cdot \frac{Lf + JR}{Rf + k^2} \quad (21)$$

$$\text{Pulsación amortiguada} \quad \omega_a = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}; \quad \zeta > 1 \quad (22)$$

$$\text{Atenuación} \quad \sigma = \zeta \omega_n \quad (23)$$

$$\text{Constante} \quad \alpha = \sqrt{\frac{(\zeta - \tau_m \omega_n)^2}{\zeta^2 - 1}} - 1 \quad (24)$$

$$\text{Constante} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (25)$$

En las expresiones (13) a (15) se han empleado funciones hiperbólicas, teniendo en cuenta que normalmente un servomotor cargado reacciona en forma aperiódica ( $\zeta > 1$ ). Si la respuesta fuera subamortiguada ( $\zeta < 1$ ), las expresiones citadas siguen siendo válidas para valores imaginarios de  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\omega_a$  o, si se desea operar exclusivamente con valores reales, basta recordar la equivalencia  $\sinh(j\beta) = j \cdot \sin(\beta)$  para transformar los senos hiperbólicos en sus equivalentes circulares.

Al objeto de explicitar la importancia relativa de las componentes de la corriente, Ec.(12), se consideran a renglón seguido los valores de régimen permanente para las corrientes  $I_{Ts}$  e  $I_E$ , mientras que para  $I_0$  (cuyo valor final tiende a cero) se considera su valor máximo que ocurre en  $t=t_0$ .

$$I_0(t_0) = \frac{T_s}{k} \quad (26)$$

$$I_{Ts}(\infty) = K_s T_s \quad (27)$$

$$I_E(\infty) = K_E E \quad (28)$$

Comparando (26) con (27) y empleando las definiciones (16) a (25) se obtiene:

$$\frac{I_0(t_0)}{I_{Ts}(\infty)} = \frac{1}{kK_s} = 1 + \frac{Rf}{k^2} \quad (29)$$

y se comprueba que la corriente necesaria para iniciar la rotación es mayor que la corriente de régimen originada en la cupla de fricción seca.

Relacionando ahora (26) con (28)

$$\frac{I_0(t_0)}{I_E(\infty)} = \frac{T_s}{kK_E E} = \frac{T_s}{E} \frac{Rf + k^2}{kf}; \quad (30)$$

resultado que, para valores de la tensión de inducido dados por

$$E > 20T_s \left( \frac{R}{k} + \frac{k}{f} \right) \quad (31)$$

$I_0(t_0)$  representará menos del 5% del valor final  $I_E(\infty)$ . Obsérvese que en virtud de la relación (29), el cumplimiento de la condición (31) asimismo asegura que  $I_{Ts}(\infty)$  será menor que el 5% de  $I_E(\infty)$ . El análisis realizado justifica el empleo de la expresión aproximada

$$I(t) \approx I_E(t) = K_E E \left\{ 1 + \alpha e^{-\sigma t} \sinh \left[ \omega_a t + \sinh^{-1} \left( \frac{-1}{\alpha} \right) \right] \right\} \quad (32)$$

en vez del conjunto de expresiones exactas [(10), (13), (14) y (15)], cuando la tensión de inducido es lo suficientemente elevada. Este hecho brinda la base del método de identificación de parámetros desarrollado en la sección siguiente.

Complementando gráficamente las relaciones deducidas, las figuras adjuntas muestran un ejemplo típico de la evolución temporal de la corriente 'exacta' de un servomotor cargado y del error cometido al emplear la aproximación (32) para diversos valores de la tensión de inducido  $E$ .

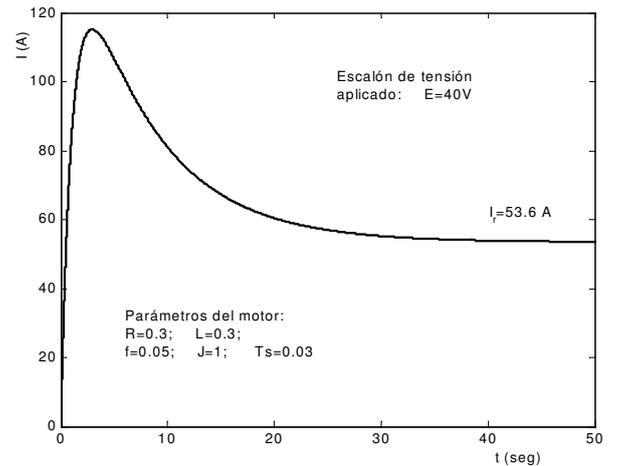


Fig.5. Evolución temporal de la corriente del servomotor cargado.

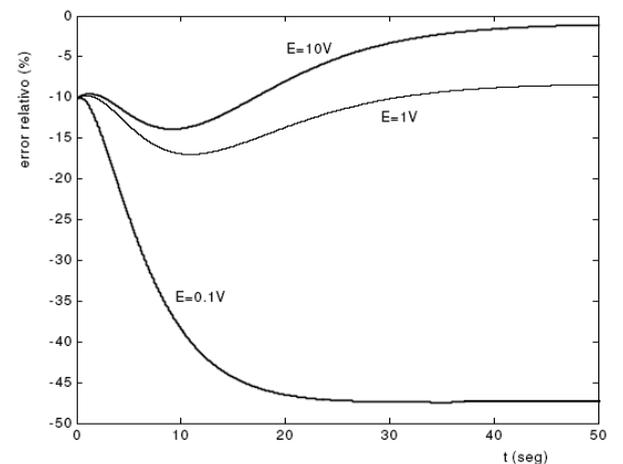


Fig.6. Error relativo porcentual de la aproximación  $I_E \approx I$  y su variación en el tiempo. Los valores de los parámetros del motor son los consignados en la Fig. 5.

#### 2.4. Identificación basada en la respuesta transitoria de la corriente.

El método propuesto consiste en registrar dos respuestas transitorias de la corriente de inducido: un primer ensayo realizado a la máxima tensión admisible, para el cual el efecto de la cupla de fricción sobre la corriente pueda considerarse despreciable; mientras que el segundo ensayo ha de ser llevado a cabo para una tensión de armadura de bajo valor, de modo que quede evidenciado el efecto de la fricción seca.

*Ensayo a tensión elevada.* Si la amplitud del escalón de tensión aplicado es suficientemente alta, puede considerarse que la corriente de armadura está dada por la aproximación (32) que se reescribe normalizando la respuesta respecto de su valor final  $I_{rm}$

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) &= \frac{I(t)}{I_{rm}} \approx \frac{I_E(t)}{K_E E_m} = \\ &= 1 + \alpha \cdot e^{-\sigma t} \cdot \sinh \left[ \omega_a t + \sinh^{-1} \left( \frac{-1}{\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

La Ec.(33) depende de tres parámetros:  $\alpha$ ,  $\sigma$  y  $\omega_a$  o bien, recordando las definiciones (22) a (24), depende de la constante de tiempo mecánica  $\tau_m$ , de la pulsación natural  $\omega_n$  y de la relación de amortiguamiento  $\zeta$  del sistema, que resultan identificables a partir de un registro de la respuesta transitoria de  $I(t)$  como el ejemplificado por la Fig.5, acompañado con la medición de la velocidad de régimen correspondiente ( $\Omega_{rm}$ ), deduciéndose inmediatamente

$$K_{E,c} = \frac{I_{rm}}{E_m} \quad (34)$$

donde se emplea el subíndice adicional  $c$  para destacar que se trata de un valor calculado.

A continuación se procede a normalizar el registro respecto de  $I_{rm}$  y se seleccionan una serie de puntos sobre la curva normalizada convenientemente distribuidos en el intervalo de máxima variación de corriente. Por cierto, si el registro es proporcionado como archivo digital por el instrumento de medición, podrán emplearse en la identificación la totalidad de los valores registrados; de lo contrario bastará con proceder a la digitalización de unos 10 valores en el intervalo de interés.

El método numérico empleado en la identificación -al igual que el mencionado en el punto II.2- es un procedimiento de Gauss-Newton de aproximación no lineal por cuadrados mínimos implementado por la herramienta *nlinfit()* de Matlab.

Aplicando *nlinfit()* se obtienen los parámetros de (33) a los que se agrega el subíndice  $c$  de acuerdo a la convención adoptada:

$$nlinfit() \rightarrow \alpha_c, \sigma_c, \omega_{a,c}$$

Utilizando estos valores y las definiciones (16)-(25), se calculan los parámetros estructurales de la respuesta transitoria

$$\omega_{n,c} = \omega_{a,c} \sqrt{\left( \frac{\sigma_c}{\omega_{a,c}} \right)^2 - 1}; \quad (35)$$

$$\zeta_c = 1 / \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_{a,c}}{\sigma_c} \right)^2}; \quad (36)$$

$$\tau_{m,c} = \left( \frac{\sigma_c}{\omega_{a,c}} + \sqrt{\alpha_c^2 + 1} \right) / \left( \omega_{a,c} \sqrt{\left( \frac{\sigma_c}{\omega_{a,c}} \right)^2 - 1} \right). \quad (37)$$

Operando sobre (16), (19), (20) y (21) se obtiene:

$$L_c = 1 / \left( K_{E,c} \tau_{m,c} \omega_{n,c}^2 \right); \quad (38)$$

$$R_c = \frac{1}{\tau_{m,c}} \left( \frac{2\zeta_c}{\omega_{n,c} K_{E,c}} - L_c \right). \quad (39)$$

Conociendo los valores de régimen de corriente y velocidad angular correspondientes a la tensión de ensayo  $E_m$  resulta

$$f \Omega_{rm} = k I_{rm} \rightarrow \frac{k}{f} = \frac{\Omega_{rm}}{I_{rm}} \quad (40)$$

lo que reemplazado en (16) conduce a:

$$k_c = \frac{I_{rm} (1 - R_c K_{E,c})}{K_{E,c} \Omega_{rm}} \quad (41)$$

y por consiguiente:

$$f_c = \frac{I_{rm}}{\Omega_{rm}} \cdot k_c \quad (42)$$

El momento de inercia del motor cargado se calcula por sustitución de (41) en (19)

$$J_c = \tau_{m,c} f_c \quad (43)$$

y finalmente se calcula la ganancia de cupla, reemplazando valores en (17)

$$K_{s,c} = \frac{k_c}{R_c f_c + k_c^2}. \quad (44)$$

Queda entonces por formular la estimación de la cupla de fricción seca  $T_s$  para completar la identificación.

*Ensayo a tensión reducida.* Aplicando al inducido un escalón de tensión de baja amplitud  $E_b$ , el efecto de la fricción seca adquiere importancia relativa y deja de ser válida la aproximación (32), tal como muestran las curvas de error de la Fig.6, donde se observa que el error en estado de régimen crece con la disminución de la tensión de armadura. Cuando se carece absolutamente de información acerca de la magnitud de  $T_s$ , se deberá proceder a seleccionar en forma empírica el valor de  $E_b$ , constituyendo la expresión

$$E_b \approx \text{Orden} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{R_c}{k_c} + \frac{k_c}{f_c} \right) \right\} \quad (45)$$

-que se deduce de (29) y (30)- un punto de partida que puede ser aprovechado. Con el valor de  $E_b$  adoptado se realiza el ensayo, que también en este caso incluye el registro del transitorio de corriente y la medición de los valores de régimen de corriente ( $I_{rb}$ ) y de velocidad angular ( $\Omega_{rb}$ ).

Una manera de calcular  $T_s$  en base a los dos ensayos realizados, está dada por la aplicación del concepto de

resistencia aparente introducido en la sección 2.2. En efecto, empleando las Ecs. (7) y (8) se puede escribir:

$$\begin{cases} \Delta R_m = \frac{E_m}{I_{rm}} - R_c = a - \frac{b}{I_{rm}} \\ \Delta R_b = \frac{E_b}{I_{rb}} - R_c = a - \frac{b}{I_{rb}} \end{cases} \quad (46)$$

y resolviendo el sistema lineal (46) para  $a$  y  $b$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta R_b I_{rb} - \Delta R_m I_{rm}}{I_{rb} - I_{rm}} \\ b &= I_{rb} I_{rm} \frac{\Delta R_b - \Delta R_m}{I_{rb} - I_{rm}} \end{aligned} \quad (47)$$

Recordando por último la (9) se tiene, en función de los valores medidos:

$$T_{s,c} = k_c \frac{b}{a} = k_c \frac{E_b I_{rm} - E_m I_{rb}}{R_c (I_{rm} - I_{rb}) + E_b - E_m}. \quad (48)$$

Contando con  $T_{s,c}$  es posible ahora realizar un refinamiento en la estimación de las ganancias estáticas de cupla y de tensión, teniendo en cuenta que los valores de régimen de corriente para los ensayos de alta y baja tensión valen

$$\begin{cases} I_{rm} = K_E E_m + K_s T_{s,c} \\ I_{rb} = K_E E_b + K_s T_{s,c} \end{cases} \quad (49)$$

Resolviendo el sistema lineal (49) se obtienen para las ganancias los valores:

$$K_{E,c} = \frac{I_{rm} - I_{rb}}{E_m - E_b} \quad (50)$$

$$K_{s,c} = \frac{E_m I_{rb} - E_b I_{rm}}{T_{s,c} (E_m - E_b)} \quad (51)$$

quedando de esta manera completada la estimación de la totalidad de los parámetros del servomotor.

*Información taquimétrica de apoyo.* Cuando se dispone del registro temporal de la velocidad angular como subproducto de la instrumentación asociada al servomotor, el mismo puede ser empleado para la verificación o para el refinamiento iterativo de los parámetros identificados mediante el transitorio de corriente.

En el Apéndice C se encuentra desarrollada la deducción de la expresión analítica de la velocidad angular y algunas fórmulas aproximantes. Normalizando el registro taquimétrico correspondiente al ensayo a tensión elevada respecto de su valor final se puede emplear la expresión (C.8), que repetimos a continuación,

$$\Omega_{EN}(t) = \left[ 1 - \gamma e^{-\sigma t} \sinh(\omega_d t + \sinh^{-1}(1/\gamma)) \right] \quad (C.8)$$

para verificar los valores calculados de la pulsación natural  $\omega_h$  y de la relación de amortiguamiento  $\zeta$  del servomotor, ya que (C.8) depende tan solo de estos dos parámetros estructurales.

No se puede cerrar esta sección sin mencionar las especiales precauciones con que deben ser procesados los registros taquimétricos, en especial cuando los sensores son tacodínamos de escobillas, cuyas medi-

ciones se hallan invariablemente contaminadas por ruido de conmutación.

### 3. ADQUISICIÓN DE DATOS y SOFTWARE.

La medición de variables de acuerdo a lo discutido en la sección precedente, podría limitarse a la corriente del servomotor cargado y a la velocidad de su eje. Sin embargo se ha implementado un dispositivo de adquisición de datos que incluye la tensión de fuente y la posición angular del eje, obtenible esta última de las señales del encoder óptico integrado al servomotor conjuntamente con un tacogenerador para la medición analógica de la velocidad de rotación. La medición de tensión de armadura aplicada por la fuente, se hizo necesaria para facilitar la determinación de su resistencia interna, ya que su valor influye obviamente sobre la intensidad de la corriente circulante. La medición de la posición fue incluida, sobre todo para disponer de la variable en posteriores instancias de verificación de funcionamiento a lazo cerrado. Debe destacarse que posteriormente esta medición fue muy ventajosamente empleada para el cálculo de la velocidad angular, ya que las señales taquimétricas se revelaron excesivamente contaminadas por el ruido de conmutación de escobillas.

En la figura siguiente se detalla a nivel conceptual el diagrama en bloques del montaje experimental de medición y adquisición de datos utilizado.

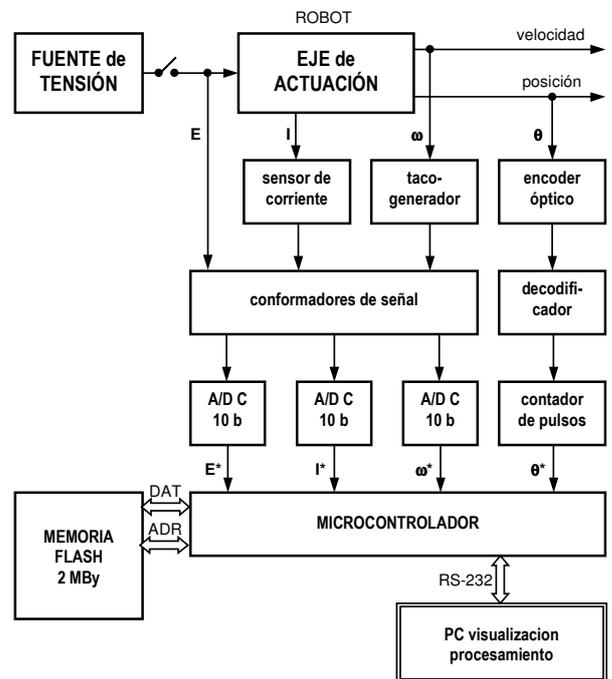


Fig.7. Subsistema de adquisición de datos.

Las señales de las variables analógicas tensión, corriente y velocidad angular son amplificadas y filtradas de ruido por los conformadores de señal, que llevan su nivel al rango de 0 a 5 voltios, al objeto de obtener la mayor precisión posible en la conversión analógico digital de 10 bits implementada en el microcontrolador PIC 16F877 operando a la frecuencia de muestreo de 1 KHz.

La información de posición proporcionada por cada encoder óptico está compuesta por dos señales digitales desfasadas 90° y una señal de sentido de giro, de manera tal que pueden ser procesadas por circuitos contadores cíclicos. Para ello se realizó un diseño alrededor del circuito integrado contador de 12 bits MC4040 empleando flip flops MC74HC374 como buffers de salida (Fig. 8).

Tal como se mencionara, el microcontrolador empleado es un PIC 16F877 operando con un clock de 18.432 Mhz y permite almacenar las mediciones digitalizadas en una memoria tipo flash Dallas DS1270AB-100 de 16Mbits, de donde pueden ser posteriormente transferidos por medio de una interfaz RS-232 a una PC para su análisis y procesamiento. La comunicación serial se implementó a 115250 baudios.

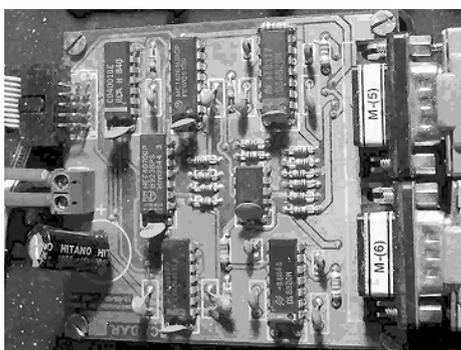


Fig. 8. Decodificador para señales de posición.

Por lo que hace al software, fue desarrollado en Visual Basic bajo entorno Windows con el objetivo de obtener un medio dinámico, interactivo y compatible con los ordenadores existentes. En general, se pueden resumir las facilidades que brinda el programa mediante el diagrama que muestra la Fig. 9.

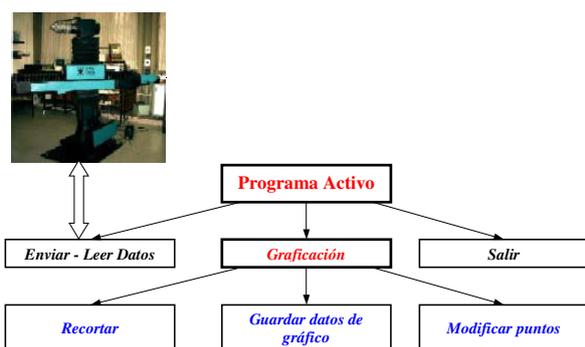


Fig. 9. Esquema funcional del software de adquisición y procesamiento de datos.

La pantalla de presentación permite la visualización simultánea o individual de las mediciones realizadas durante el ensayo, tal como muestra la Fig 10.

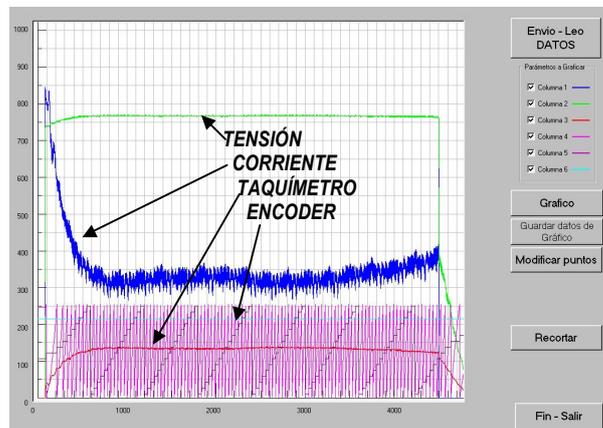


Fig. 10. Pantalla de presentación de datos.

#### 4. RESULTADOS OBTENIDOS.

Se analizarán los resultados deducidos por aplicación del método de identificación propuesto en dos entornos diferentes. En primer lugar se presentarán los resultados en un entorno de simulación para el cual se conocen los parámetros físicos del motor y se procede a recalcularlos: esto posibilita conocer la precisión del método con referencia al modelo empleado. En segundo término se realizará su aplicación experimental, empleando mediciones de laboratorio sobre un motor real: con ello se podrá evaluar aplicabilidad práctica del método.

##### 4.1. Resultados obtenidos para un motor simulado.

En el Apéndice D se presenta el modelo Simulink® correspondiente al diagrama en bloques de la Fig.1. El motor simulado posee los siguientes parámetros físicos:

$$R = 0.3 \Omega; f = 0.05 \text{ Nm/s}^{-1}; L = 300 \text{ mHy}; J = 1 \text{ Nm/s}^{-2}; k = 0.15 \text{ Nm/A} = 0.15 \text{ Vs}^{-1}; T_s = 0.03 \text{ Nm}.$$

Estos valores han sido arbitrariamente elegidos a los efectos de brindar una relación de 20 a 1 entre la constante de tiempo eléctrica y la constante de tiempo mecánica, una relación de amortiguamiento supercrítica y una respuesta transitoria al escalón calculable en un tiempo total de simulación de 50 segundos. La tabla siguiente muestra los valores exactos de los parámetros característicos asociados con los valores (52).

Parámetro	Valor	Unidades	Designación
$K_E$	1.3333	A/V	Ganancia de tensión
$K_s$	4	A/Nm	Ganancia de cupla
$\omega_h$	0.3536	s <sup>-1</sup>	Pulsación natural
$\zeta$	1.4849		Rel. de amortiguamiento
$\sigma$	0.5250	s <sup>-1</sup>	
$\omega_b$	0.3381	s <sup>-1</sup>	Pulsación amortiguada
$\tau_m$	20	s	Cte. de tiempo mecánica
$\tau_e$	1	s	Cte. de tiempo eléctrica
$\alpha$	4.9896		
$\gamma$	0.9110		
$i_0$	0.2	A	Corriente para vencer la cupla de fricción seca.

Tabla 1. Parámetros característicos del motor simulado

Las simulaciones se realizaron empleando el modelo de la Fig. (D.1), para escalones de tensión de inducido de 40 y 2.5 Volts, consignándose en la Tabla 2 los valores de régimen obtenidos.

Valores de Tensión	Valores de régimen	
	Corriente	Velocidad angular
$E_m=40\text{ V}$	$I_m=53.57\text{ A}$	$\Omega_m=159.6\text{ rad/s}$
$E_b=2.5\text{ V}$	$I_b=3.46\text{ A}$	$\Omega_b=9.748\text{ rad/s}$

Tabla 2. Resultados de simulación.

Sobre los valores de corriente arrojados por la simulación a tensión de inducido  $E_m=40\text{ V}$  se realizó el proceso de normalización respecto del valor de régimen  $I_m$  procediéndose posteriormente a calcular por ajuste no lineal vía *nlinfit()* los coeficientes estructurales  $\alpha$ ,  $\sigma$ , y  $\omega_a$  cuyos valores se muestran en la Tabla 3, donde se comparan con los valores exactos correspondientes.

Coefficientes	Valores calculados	Valores exactos	Error porcentual
$\alpha$	4.9832	4.9869	-0.13%
$\sigma$	0.5237	0.5250	-0.24%
$\omega_a$	0.3858	0.3881	-0.59%

Tabla 3. Coeficientes estructurales de la respuesta transitoria.

Mediante los valores calculados y empleando como primera aproximación de la ganancia estática de tensión el valor

$$K_E = \frac{I_m}{E_m} = \frac{53.57}{40} = 1.3393\text{ A/V},$$

se obtienen, por aplicación de las expresiones (35) a (44) los valores consignados en la Tabla 4, junto con los correspondientes errores.

	Valores calculados	Valores exactos	Error porcentual
$\omega_h$	0.3542	0.3536	+0.17%
$\zeta$	1.4788	1.4849	-0.41%
$\tau_m$	19.8097	20.000	-0.95%
$L$	0.3005	0.3000	+0.17%
$R$	0.2996	0.3000	-0.13%
$k$	0.1501	0.1500	+0.04%
$f$	0.0504	0.0500	+0.74%
$J$	0.9978	1.0000	-0.22%
$K_s$	3.9900	4.0000	-0.25%
$K_E$	1.3393	1.3333	+0.45%

Tabla 4. Valores obtenidos de la simulación a máxima tensión.

Empleando la (48) se calcula para la cupla de fricción seca el valor  $T_{sc} = 0.0299\text{ Nm}$ , lo que arroja un error relativo de  $-0.43\%$ . Recalculando las ganancias estáticas de tensión y cupla mediante las formulaciones (50) y (51) obtenemos

$$K_E = 1.3363\text{ A/V} \quad (+0.22\%)$$

$$K_s = 3.9950\text{ A/Nm} \quad (-0.13\%)$$

que comparados con los valores de la Tabla 4, representan una mejora muy poco sustancial para justificar la repetición del cálculo de los parámetros del motor.

Sintéticamente podemos concluir que el método de identificación propuesto ha permitido el cálculo de los parámetros del motor simulado con un margen de error máximo del 1%.

#### 4.2. Resultados obtenidos para motores reales.

Se procedió a identificar los parámetros de los servomotores cargados correspondientes al robot cilíndrico disponible en el Laboratorio del CUDAR, obteniéndose resultados que fueron aplicados sin inconvenientes para el diseño de los lazos de control de posición y velocidad pertinentes.

Con fines ilustrativos, se adjuntan las curvas de corriente y velocidad correspondientes a un juego de mediciones sobre las que se superponen las curvas calculadas en base a los parámetros identificados, comprobándose su alto grado de ajuste. Las mediciones corresponden al servomotor del Eje 1 (rotación azimutal) del robot citado.

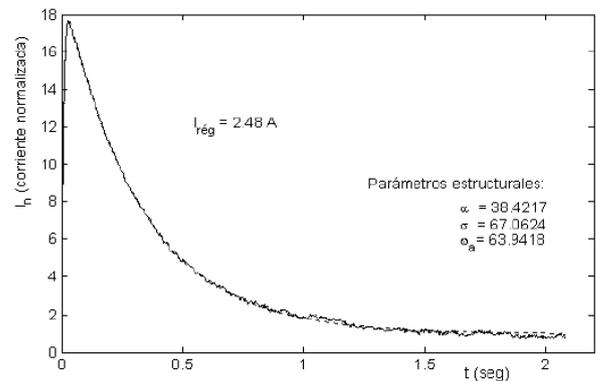


Fig. 11. Respuesta de la corriente del servomotor.

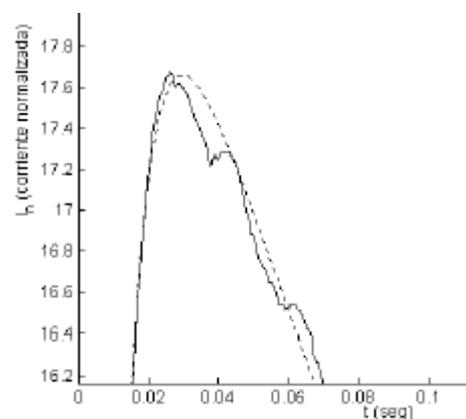


Fig. 12. Detalles del pico de la respuesta transitoria de corriente.

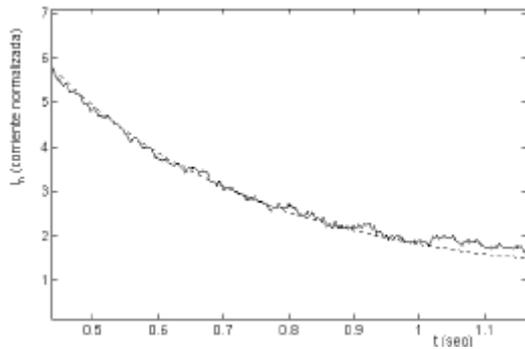


Fig. 12. Detalles del valle de la respuesta transitoria de corriente.

En la Fig. 11 se muestra en trazo continuo la corriente (normalizada) medida en el motor y en línea de puntos se grafica la curva de respuesta en base a los parámetros identificados. No se aplicó filtrado previo a los valores medidos al objeto de demostrar la calidad del ajuste “grosero” que puede obtenerse. Las Figs. 12 y 13 muestran detalles de pico y valle de la Fig. 11.

La Fig. 14 grafica la respuesta de la velocidad angular ante el escalón de tensión aplicado.

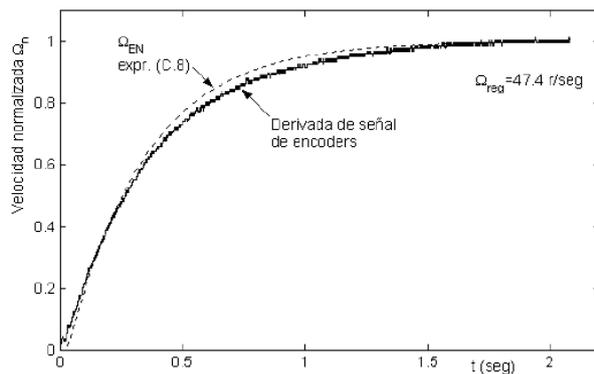


Fig. 14. En trazo continuo: velocidad angular (normalizada) medida por derivación de la señal de encoder y en línea de puntos se grafica la curva de respuesta por aplicación de la aproximación (C.8) con un valor de  $t_0$  de aprox. 0.025 seg.

## 5. CONCLUSIONES

El método de identificación no lineal de los parámetros de un servomotor basado en el análisis transitorio de la corriente de inducido propuesto en el presente trabajo, ha demostrado poseer una buena precisión y ser de utilidad para su aplicación práctica en problemas de diseño de sistemas de control de posicionamiento.

## REFERENCIAS

Åström, K. J., Eykhoff, P.: “System Identification”, Survey Paper, IFAC Symposium, Prag (1970).  
Den Hartog, J.P.: “Forced vibrations with combined viscous and coulomb damping”. III International

Congress on Mechanical Techniques, Stockholm. Proceedings, Vol. 3, 181-189. (1930).

Jang, J.O., Jeon, G.J.: “A parallel neuro-controller for DC motors containing nonlinear friction”. Neurocomputing, 30:233-248. (2000);

Kara, T., Eker, I.: “Nonlinear modeling and identification of a DC motor for bidirectional operation with real time experiments”. University of Gaziantep, Turkey. (2003).  
www1.gantep.edu.tr/~kara/in%20press.pdf

Ljung, L., Söderstrom, T.: “Theory and Practice of Recursive Identification”, The MIT Press. (1983).

Nordin, M., Gutman, P.: “Controlling mechanical systems with backlash – A Survey”. Automatica, 38(10):1633-1649. (2002).

Ogata, K.: “Modern Control Engineering”. Prentice Hall, New-York. (1990).

Oppelt, W.: “Klein Handbuch technischer Regelungsvorgänge”. Verlag Chemie GmbH. Darmstadt. 565-567. (1972).

Wu, R.H., Tung, P.C.: “Studies of stick-slip friction, presliding displacement, and hunting”. J. Dyn. Syst. Trans. ASME; 124:111-117. (2002).

◆

## APÉNDICE A

*Descripción y aplicación de la herramienta nlinfit( ).*

NLINFIT realiza un ajuste de datos no lineal por mínimos cuadrados (método de Gauss-Newton).

NLINFIT(X,Y,FUN,BETA0) estima los coeficientes de una función no lineal. Y es un vector. X es un vector o matriz con el mismo número de filas que Y. FUN es una función que acepta dos argumentos: un vector de coeficientes y un arreglo de valores de X, devolviendo un vector de valores ajustados Y. BETA0 es un vector que contiene la estimación inicial de los valores de los coeficientes.

[BETA,R,J] = NLINFIT(X,Y,FUN,BETA0) devuelve los coeficientes ajustados BETA, y los valores de los residuos R y Del jacobiano J. Estas salidas pueden ser utilizadas con la herramienta NLPREDCI para producir las estimaciones de error para las predicciones, y con NLPARCI para producir el cálculo del intervalo de confianza 95% correspondiente a las componentes de BETA.

*Aplicación para la Ec.(8)*

Función FUN:

```
function yy=mifun(beta,x)
y=beta(1)-beta(2)./x;
% beta = vector de coeficientes [a; b]
% x= vector de corrientes de regimen
% yy= vector de valores estimados de la función
% deltaR= a - b/Ir
```

Estimación inicial BETA0:

```
beta0=[1; 1];
```

Invocación del procedimiento:

```
[beta] = nlinfit(Ir,deltaR,'mifun',beta0)
% Ir es el vector de corrientes de régimen para las
% cuales se obtuvieron los valores deltaR
```

Aplicación para la Ec.(33)

Función FUN:

```
function yy=idxc(beta,x)
yy=1+beta(1).*exp(-beta(2)*x).*sinh(beta(3)*x
+asinh(-1/beta(1)));
% beta = vector de coeficientes [alfa; sigma; ome
ga_a]
% x= vector de valores de tiempo [ t ]
% yy= vector de valores estimados de la corriente
nor%malizada [ I ]
```

Estimación inicial BETA0:

```
beta0=[1; 1; 1];
```

Invocación del procedimiento:

```
[beta] = nlinfit(t,I,'idxc',beta0)
% t vector de valores de tiempo correspondientes
% a los valores de corriente I.
```

◆

## APÉNDICE B

*Deducción de la expresión analítica de la corriente.*

Aplicando la transformación de Laplace a las Ecs.(2), teniendo en cuenta la condición inicial impuesta por la corriente que circula a través del inducido, y considerando además que el origen de tiempo se toma coincidente con el instante en que se hace  $I=T_s/k$  al sólo objeto de evitar la aparición de factores de la forma  $\exp(-t_0s)$  derivados de la aplicación del teorema del desplazamiento temporal, se tiene:

$$\frac{E}{s} = L\left(s \cdot I(s) - \frac{T_s}{k}\right) + RI(s) + k \cdot \Omega(s) \quad (B.1)$$

$$kI(s) - \frac{T_s}{s} = Js \cdot \Omega(s) + f \cdot \Omega(s)$$

Despejando  $\Omega(s)$  de la segunda expresión, sustituyendo en la primera y resolviendo para  $I(s)$  se obtiene

$$I(s) = L \frac{T_s}{k} \frac{(Js + f)}{(Ls + R)(Js + f) + k^2} + \frac{T_s}{s} \frac{k}{(Ls + R)(Js + f) + k^2} + \frac{E}{s} \frac{(Js + f)}{(Ls + R)(Js + f) + k^2} \quad (B.2)$$

Desarrollando los denominadores y agrupando términos en (B.2) se llega a:

$$I(s) = L \frac{T_s}{k} \left( \frac{f}{Rf + k^2} \right) \frac{\left( \frac{J}{f} s + 1 \right)}{\frac{LJ}{Rf + k^2} s^2 + \frac{JR + fL}{Rf + k^2} s + 1} + T_s \left( \frac{k}{Rf + k^2} \right) \frac{1}{s \left( \frac{LJ}{Rf + k^2} s^2 + \frac{JR + fL}{Rf + k^2} s + 1 \right)} + E \left( \frac{f}{Rf + k^2} \right) \frac{\left( \frac{J}{f} s + 1 \right)}{s \left( \frac{LJ}{Rf + k^2} s^2 + \frac{JR + fL}{Rf + k^2} s + 1 \right)} = I_0(s) + I_{T_s}(s) + I_E(s) \quad (B.3)$$

Por simple inspección de (B.3), las corrientes componentes pueden escribirse en la forma general

$$I_0(s) = L \frac{T_s}{k} \cdot K_E \cdot \frac{\tau_m s + 1}{\left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1} \quad (B.4)$$

$$I_{T_s}(s) = T_s K_s \frac{1}{s \left[ \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right]} \quad (B.5)$$

$$I_E(s) = E K_E \frac{\tau_m s + 1}{s \left[ \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right]} \quad (B.6)$$

donde los símbolos  $\tau_m, \omega_n, \zeta, K_s, K_E$  responden a las definiciones dadas en las expresiones (16) a (21).

Antitransformando (B.4), (B.5) y (B.6); y con la convención de que la variable tiempo empleada es  $\tilde{t} = t - t_0$  se obtiene:

$$I_0(\tilde{t}) = L \frac{T_s}{k} \cdot K_E \cdot \omega_n e^{-\zeta \omega_n \tilde{t}} \cdot \left[ \omega_n \tau_m \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tilde{t}) + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta^2 - 1} (\zeta \omega_n \tau_m - 1) \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tilde{t}) \right] \quad (B.7)$$

$$I_{T_s}(\tilde{t}) = T_s K_s \left\{ 1 + e^{-\zeta \omega_n \tilde{t}} \cdot \left[ -\cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tilde{t}) - \frac{\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta^2 - 1} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tilde{t}) \right] \right\} \quad (B.8)$$

$$I_E(\tilde{t}) = E K_E \left\{ 1 - e^{-\zeta \omega_n \tilde{t}} \cdot \left[ \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tilde{t}) + \frac{(\omega_n \tau_m - \zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tilde{t}) \right] \right\} \quad (B.9)$$

Las expresiones (B.7) a (B.9) son algo engorrosas y pueden ser expresadas en forma más compacta y manejable, al considerar las diferentes condiciones de amortiguamiento posibles.

### B.1. Amortiguamiento subcrítico ( $\zeta < 1$ )

Introduciendo las definiciones siguientes, donde el superíndice <sup>(o)</sup> indica comportamiento oscilatorio,

$$\sigma = \zeta \omega_n ; \alpha^{(o)} = \sqrt{1 + \frac{(\zeta - \tau_m \omega_n)^2}{1 - \zeta^2}} \quad (\text{B.10})$$

$$\gamma^{(o)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} ; \omega_a^{(o)} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

las expresiones (B.7) a (B.9) se convierten en

$$I_0(\tilde{t}) = L \frac{T_s}{k} \cdot K_E \cdot \alpha^{(o)} \omega_n e^{-\sigma \tilde{t}} \cdot \sin \left[ \omega_a^{(o)} \tilde{t} + \sin^{-1} \left( \frac{\tau_m \omega_n}{\alpha^{(o)}} \right) \right] \quad (\text{B.11})$$

$$I_{Ts}(\tilde{t}) = T_s K_s \left\{ 1 + \gamma^{(o)} e^{-\sigma \tilde{t}} \cdot \sin \left[ \omega_a^{(o)} \tilde{t} + \sin^{-1} \left( \frac{-1}{\gamma^{(o)}} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.12})$$

$$I_E(\tilde{t}) = E K_E \left\{ 1 - \alpha^{(o)} e^{-\sigma \tilde{t}} \cdot \sin \left[ \omega_a^{(o)} \tilde{t} + \sin^{-1} \left( \frac{1}{\alpha^{(o)}} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.13})$$

### B.2. Amortiguamiento crítico ( $\zeta = 1$ )

Si se pasa al límite en las expresiones (B.7) a (B.9) para  $\zeta \rightarrow 1$ , y recordando que para  $x \rightarrow 0$  es  $\lim[\sin(x)] = x$ , se obtiene:

$$I_0(\tilde{t}) = L \frac{T_s}{k} \cdot K_E \cdot \omega_n^2 \cdot e^{-\omega_n \tilde{t}} \cdot [\tau_m + (1 - \omega_n \tau_m) \tilde{t}] \quad (\text{B.14})$$

$$I_{Ts}(\tilde{t}) = T_s K_s [1 - e^{-\omega_n \tilde{t}} (1 + \omega_n \tilde{t})] \quad (\text{B.15})$$

$$I_E(\tilde{t}) = E K_E \{1 - e^{-\omega_n \tilde{t}} \cdot [1 + \omega_n (\omega_n \tau_m - 1) \tilde{t}]\} \quad (\text{B.16})$$

### B.3. Amortiguamiento supercrítico ( $\zeta > 1$ )

Si bien las expresiones (B.11) a (B.13) son perfectamente aplicables para  $\zeta > 1$ , existe una natural tendencia a preferir el empleo de funciones reales de variable real, por lo que una ligera modificación de las definiciones (B.10) y el empleo del seno hiperbólico, conducen a:

$$\sigma = \zeta \omega_n ; \alpha = \sqrt{\frac{(\zeta - \tau_m \omega_n)^2}{\zeta^2 - 1} - 1} \quad (\text{B.17})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} ; \omega_a = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

donde se ha omitido el empleo de superíndices, ya que el caso sobreamortiguado es el más comunmente encontrado en la práctica.

Con las definiciones precedentes, (B.7) a (B.9) adquieren las formas:

$$I_0(\tilde{t}) = -L \frac{T_s}{k} \cdot K_E \cdot \alpha \cdot \omega_n e^{-\sigma \tilde{t}} \cdot \sinh \left[ \omega_a \tilde{t} - \sinh^{-1} \left( \frac{\tau_m \omega_n}{\alpha} \right) \right] \quad (\text{B.18})$$

$$I_{Ts}(\tilde{t}) = T_s K_s \left\{ 1 - \gamma \cdot e^{-\sigma \tilde{t}} \cdot \sinh \left[ \omega_a \tilde{t} + \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\gamma} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.19})$$

$$I_E(\tilde{t}) = E K_E \left\{ 1 + \alpha \cdot e^{-\sigma \tilde{t}} \cdot \sinh \left[ \omega_a \tilde{t} + \sin^{-1} \left( \frac{-1}{\alpha} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.20})$$

que pueden ser verificadas con facilidad, recordando la identidad  $\sin(j \cdot x) \equiv j \cdot \sinh(x)$ . Finalmente es menester consignar que, para aplicar las expresiones deducidas, deberá ser tenida en cuenta la definición  $\tilde{t} = t - t_0$ .

## APÉNDICE C

*Deducción de la expresión analítica de la velocidad angular.*

Aplicando la transformación de Laplace a las Ecs.(2), y procediendo tal como se hiciera en el Apéndice B, se despeja

$$\Omega(s) = \frac{kI(s)}{Js + f} - \frac{T_s}{s(Js + f)} \quad (\text{C.1})$$

que podemos reescribir empleando las definiciones (16) a (21) de la manera

$$\Omega(s) = \frac{k}{f} \frac{I(s)}{\tau_m s + 1} - \frac{T_s}{f} \frac{1}{s(\tau_m s + 1)} \quad (\text{C.2})$$

Reemplazando  $I(s)$  por su valor dado por (B.3)

$$\Omega(s) = \frac{k}{f} \left\{ L \frac{T_s}{k} K_E \frac{1}{\left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1} + T_s K_s \frac{1}{s(\tau_m s + 1) \left[ \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right]} + EK_E \frac{1}{s \left[ \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right]} \right\} - \frac{T_s}{f} \frac{1}{s(\tau_m s + 1)} \quad (\text{C.3})$$

y antitransformando, con la convención de que la variable tiempo empleada es  $\tilde{t} = t - t_0$ , se llega a:

$$\Omega(\tilde{t}) = \frac{k}{f} \left\{ L \frac{T_s}{k} K_E \gamma \omega_n e^{-\sigma \tilde{t}} \sinh(\omega_a \tilde{t}) + T_s K_s \left[ 1 - \frac{\tau_m^2 \omega_n^2 \gamma^2}{\alpha^2} e^{-\tilde{t}/\tau_m} + \frac{\gamma^2}{\alpha} e^{-\sigma \tilde{t}} \sinh \left( \omega_a \tilde{t} + \sinh^{-1} \left( -\frac{1 - 2\zeta \tau_m \omega_n}{\alpha} \right) \right) \right] + EK_E \left[ 1 - \gamma e^{-\sigma \tilde{t}} \sinh \left( \omega_a \tilde{t} + \sinh^{-1} (1/\gamma) \right) \right] \right\} - \frac{T_s}{f} (1 - e^{-\tilde{t}/\tau_m}) \quad (\text{C.4})$$

De (C.4) resulta la velocidad de régimen

$$\begin{aligned}\Omega_r &= \Omega(\infty) = \frac{k}{f} [T_s K_s + EK_E] - \frac{T_s}{f} = \\ &= E \frac{k}{Rf + k^2} - T_s \frac{R}{Rf + k^2}\end{aligned}\quad (C.5)$$

que coincide con la expresión (4), como no podía ser de otra manera.

### C.1. Términos dominantes de la expresión (C.4).

Puede ser demostrado con facilidad que la expresión (C.4) es aproximada con buena precisión empleando

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}(\tilde{t}) &= \Omega_E(\tilde{t}) + \Omega_s(\tilde{t}) \approx \Omega(\tilde{t}) \\ \hat{\Omega}(\tilde{t}) &= EK_E \frac{k}{f} \left[ 1 - \gamma e^{-\sigma \tilde{t}} \sinh(\omega_d \tilde{t} + \sinh^{-1}(1/\gamma)) \right] - \\ &\quad - T_s \frac{1 - kK_s}{f} (1 - e^{-\sigma \tilde{t}/4.45})\end{aligned}\quad (C.6)$$

es decir tomando a la velocidad angular igual a la componente de respuesta debida al escalón de tensión  $E$  a la que se suma algebraicamente la influencia de la fricción seca en estado de régimen, estando esta última afectada por una función exponencial que asegura su total aplicación justamente en estado de régimen.

El grado de aproximación con el que (C.6) representa a la expresión (C.4), se muestra en la Fig. (C.1), donde se observa que el error relativo de  $\hat{\Omega}(\tilde{t})$  respecto de  $\Omega(\tilde{t})$  entra y permanece dentro de una banda de  $\pm 5\%$  a partir de los 3.5 segundos.

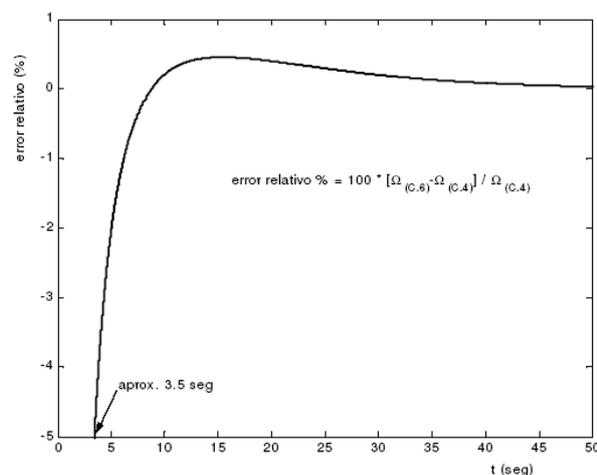


Fig. C-1. Error relativo porcentual de la expresión aproximada (C.6) respecto de la expresión exacta (C.4). Se ha considerado al motor de la Tabla 1, para tensiones de excitación por encima de  $E=0.36V$  (valor que produce una cupla de régimen igual al triple de la cupla de fricción seca).

Un detalle de mucho interés para la identificación de parámetros, surge al normalizar la respuesta en velocidad (C.4) y las aproximantes definidas en (C.6) con respecto de sus respectivos valores finales.

$$\Omega_N(\tilde{t}) = \Omega(\tilde{t}) / \Omega_r$$

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_N(\tilde{t}) &= \frac{\omega_E(\tilde{t}) + \omega_s(\tilde{t})}{EK_E \frac{k}{f} - T_s \frac{1 - kK_s}{f}} \\ &= \frac{\left\{ EK_E \frac{k}{f} \left[ 1 - \gamma e^{-\sigma \tilde{t}} \sinh(\omega_d \tilde{t} + \sinh^{-1}(1/\gamma)) \right] - \right. \\ &\quad \left. - T_s \frac{1 - kK_s}{f} (1 - e^{-\sigma \tilde{t}/4.45}) \right\}}{EK_E \frac{k}{f} - T_s \frac{1 - kK_s}{f}}\end{aligned}\quad (C.7)$$

Además se define

$$\Omega_{EN}(\tilde{t}) = \left[ 1 - \gamma e^{-\sigma \tilde{t}} \sinh(\omega_d \tilde{t} + \sinh^{-1}(1/\gamma)) \right]\quad (C.8)$$

Ahora bien, si se calculan los errores absolutos

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= |\Omega_{EN}(\tilde{t}) - \Omega_N(\tilde{t})| \\ \varepsilon_2 &= |\hat{\Omega}_N(\tilde{t}) - \Omega_N(\tilde{t})| = \left| (\Omega_E(\tilde{t}) + \Omega_s(\tilde{t}))_N - \Omega_N(\tilde{t}) \right|\end{aligned}\quad (C.9)$$

puede observarse, tal como muestra la Fig.C-2, que el error originado en la aproximación  $\Omega_{EN}(\tilde{t}) \approx \Omega_N(\tilde{t})$  es extremadamente bajo, lo que asegura una buena precisión en la estimación de los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$  empleando la expresión de la velocidad  $\Omega_{EN}(\tilde{t})$ .

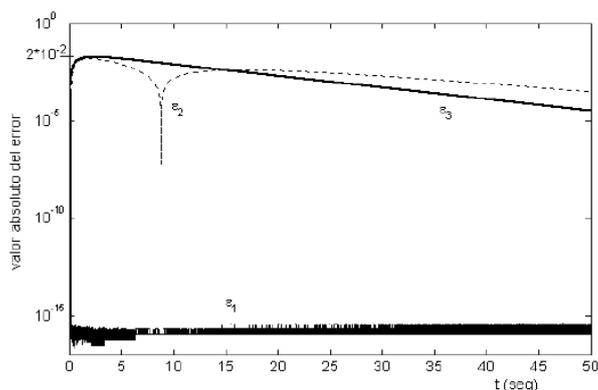


Fig. C-2. Curvas de error de las aproximaciones normalizadas a la velocidad angular.

En la Fig.C-2 se observa que el error absoluto  $\varepsilon_1$  se encuentra en el límite de la precisión alcanzable con Matlab, del orden de  $10^{-16}$ ; sin embargo la definición de  $\varepsilon_1$  dada por (C.8), presupone el conocimiento del valor de  $\tilde{t} = t - t_0$  donde

$$t_0 = -\tau_e \ln \left( 1 - \frac{RT_s}{kE} \right),$$

es el tiempo necesario para vencer la fricción seca.

Si en cambio  $t_0$  no es conocido, y se sustituye directamente la variable  $t$  en la expresión de  $\Omega_{EN}$ , el error cometido en la aproximación se indica en la curva  $\varepsilon_3$  incluida en la Fig. C-2.

Los errores de la aproximación disminuyen sensiblemente al aumentar la tensión de inducido, tal como muestra la Fig. C-3.

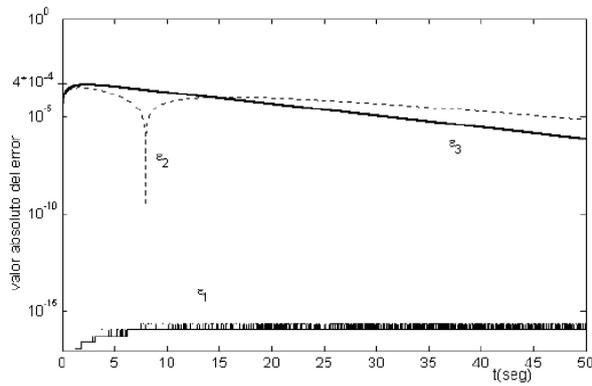


Fig. C-3. Disminución de los errores de aproximación para cuplas de régimen que superan 100 veces la cupla de fricción seca ( $E=15V$ , contra  $E=0.36V$  de la Fig. C-2 precedente).

## APÉNDICE D

### Modelo de Simulación para el Servomotor de Corriente Continua.

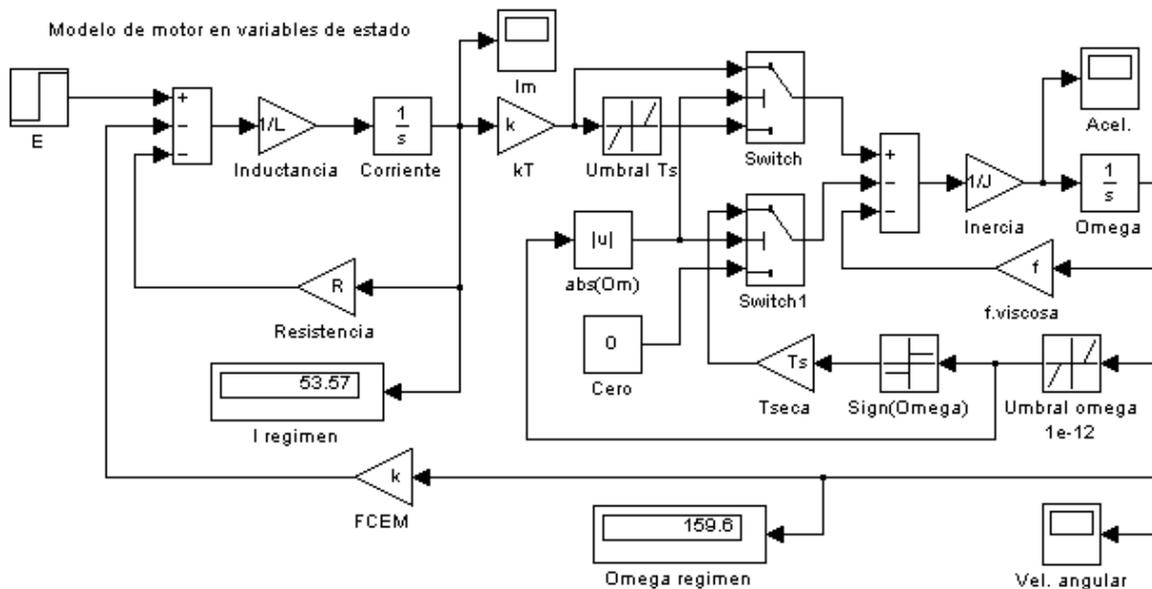


Fig. D-1. Modelo de simulación utilizado.

Un modelo *Simulink*® sencillo y válido bajo las hipótesis de trabajo establecidas es el que se muestra en la Fig. D-1.

La lógica de conmutación incorporada al modelo permite su empleo independientemente del signo de la velocidad angular. La Fig. D-2 proporciona las gráficas de cupla motriz, aceleración y velocidad angular corresponden a los primeros 60 segundos de simulación del servomotor empleado como referencia, sometido a una tensión de excitación senoidal de 0.1 Volt de amplitud y una frecuencia de 0.05 Hz.

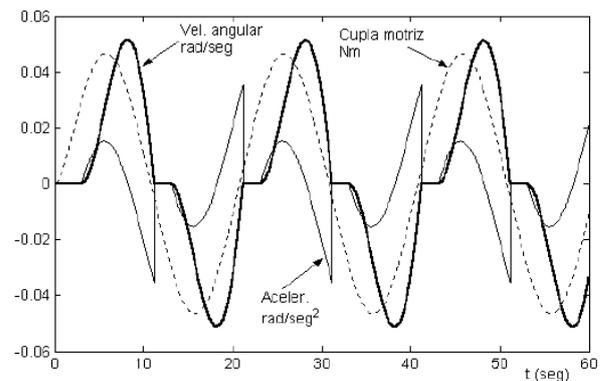


Fig. D-2. Respuesta del modelo a la excitación  $E(t) = 0.1 \cdot \sin(\pi t / 10)$ .