Desarrollo de un instrumento para valorar la comprensión del tópico Integrales dobles

Sonia Pastorelli, Valeria Bertossi, Olga Scagnetti
Facultad Regional Santa Fe. Universidad Tecnológica Nacional.
Lavaisse 610. (3000) Santa Fe, Argentina
spastorelli@frsf.utn.edu.ar, valeriabertossi@live.com.ar, olgaetel@gmail.com

Resumen. Este trabajo se enmarca en el proyecto "El Uso de SAC, Análisis de su Incidencia en la Comprensión de Matemática en Carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Santa Fe" en el que se pretende analizar si la inclusión de la herramienta computacional mejora los desempeños de comprensión de los estudiantes en determinados tópicos. El análisis se hace bajo el marco teórico "Enseñanza para la Comprensión" en el que comprender es sinónimo de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se sabe. La experiencia áulica tiene por objetivo construir el algoritmo del cálculo de integrales dobles sobre regiones generales, usando las visualizaciones como apoyo. Con los registros de observación de la experiencia se diseña un instrumento tendiente a categorizar la comprensión mostrada a través de la misma.

Palabras Clave: Comprensión, Integrales, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

La enseñanza de matemática en las carreras de ingeniería cobra importancia al momento de formar adecuadamente el pensamiento analítico, el rigor demostrativo, el sentido de exactitud, el de la aproximación aceptable, la objetividad numérica y tantas otras cualidades que debe poseer un buen ingeniero.

Lo más importante de la matemática no es solo la simple aritmética del día a día, sino el desarrollo del razonamiento, ya que gran parte de esta ciencia se basa en lógica deductiva; los alumnos deben ser capaces de plantear problemas en pasos lógicos y resolver cada uno de éstos usando técnicas y teoremas que muchas veces son el resultado de años de aprendizaje.

Un punto de partida para trabajar contextos significativos, que permitan la comprensión, es instalar interrogantes y trabajar con ellos. La clave está en proponer situaciones problemáticas que despierten la curiosidad del que aprende, que permitan poner de manifiesto sus concepciones y que estimulen la búsqueda de caminos de resolución de problemas o conflictos planteados.

Bruner [1],[2],[3] propone que el profesor proporcione situaciones problémicas que estimulen al alumno a descubrir por sí solos la estructura de la asignatura, o sea, las ideas fundamentales y las relaciones o esquemas de la asignatura. Postula un aprendizaje inductivo: de lo simple a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto y de lo específico a lo general. En este esquema de aprendizaje por descubrimiento el profesor (o el material didáctico) ofrece preguntas intrigantes, situaciones desconcertantes o problemas interesantes. En lugar de explicar cómo resolver un problema, es preferible proporcionar el material adecuado y estimular a los alumnos para que hagan observaciones, formulen hipótesis y pongan a prueba soluciones. Este aprendizaje por descubrimiento necesita tanto del pensamiento analítico como del intuitivo, ambos necesarios para exhibir verdaderos desempeños de comprensión.

2 Objetivos

El proyecto en que se enmarca este trabajo tiene por objetivo:

- Diseñar secuencias didácticas con SAC, en el área de matemática.
- Elaborar material de estudio que, utilizando SAC, considerando la especificidad de cada ingeniería.
- Generar instrumentos para medir la comprensión de los alumnos en tópicos de matemática.
- Explorar y comparar las posibles fortalezas y debilidades de los aprendizajes, la autonomía en la gestión del conocimiento y el logro de desempeños de comprensión de los alumnos cuando se utiliza materiales didácticos tradicionales y cuando se incorpora el empleo de la computadora, los sistemas algebraicos de cómputos y recursos informáticos de comunicación.

El objetivo particular que se aborda en esta comunicación es socializar la experiencia generada a través del uso en el aula de una aplicación realizada con el software Mathematica y el instrumento diseñado para valorar la comprensión. Consideramos que la misma tiene la potencialidad de intuir el algoritmo que permite pasar de las integrales dobles sobre regiones rectangulares a una general, comenzando por un aprendizaje inductivo para pasar a uno deductivo, tendientes a lograr un aprendizaje significativo.

3 Marco Teórico

Para analizar la comprensión se trabaja bajo el marco teórico Enseñanza para la Comprensión (EpC) [4] desarrollado por Gardner, Perkins, Perrone y colaboradores, integrantes de la Escuela de Graduados en Educación de Harvard. En general, los docentes afirman que el objetivo de las prácticas es que el alumno comprenda lo estudiado teóricamente, pero el significado de "comprensión" puede variar en los distintos modelos de enseñanza. Muchos refrendan que un alumno comprendió si puede reproducir y justificar el tópico además de resolver una variada gama de ejercicios rutinarios. Los libros de textos y los exámenes tipos dan cuenta de ello ya que se acreditan contenidos reproduciendo definiciones, teoremas y habilidades de rutina. Para la EpC, esto es un antecedente de la comprensión, pero no un consecuente. En este marco, comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se sabe.

La comprensión se manifiesta a través de desempeños de comprensión, variedad de actividades que desarrollan y a la vez demuestran la comprensión del alumno al exigirles usar lo que saben de nuevas maneras. Estos desempeños observables serán los que permitirán finalmente categorizar ("medir") la comprensión.

La EpC no es sólo un marco teórico de investigación, sino que es una metodología de enseñanza, que se basa en las siguientes cuatro preguntas

- ¿Qué tópicos se deben comprender?
- ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
- ¿Cómo podemos promover la comprensión?
- ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Las respuestas a cada una de las preguntas dan orígenes a los pilares de la EpC:

- Tópicos generativos
- Metas de comprensión
- Desempeños de comprensión
- Evaluación diagnóstica continua.

Los Tópicos Generativos, son temas, cuestiones, conceptos, ideas, etc., que proporcionan hondura, significación, conexiones y variedad de perspectivas en un grado suficiente como para apoyar el desarrollo de comprensión profundas por parte del alumno. El grupo de trabajo que elaboró el proyecto de EpC luego de años de investigación llegó a la conclusión de que es probable que un tópico sea generativo si: es central para un dominio o disciplina, es rico en conexiones, es accesible e interesante para los alumnos y docentes.

Las Metas de Comprensión detallan los logros básicos a los que apuntan los docentes y los alumnos. Identifican conceptos, procesos y habilidades en torno de los cuales los alumnos desarrollan la comprensión. Las hay de distintos "tamaños", hay metas de comprensión de la unidad de estudio y hay otras que atraviesan distintas unidades, estas se las denomina "hilos conductores". Afirman, explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender. Mientras que los tópicos generativos delinean los contenidos, las metas definen, de manera más específica las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderán mejor por medio de su indagación. Es importante que las metas de comprensión lleven a docentes y alumnos hacia el centro de un trabajo significativo más que hacia zonas periféricas de su agenda. A diferencia de los otros tres elementos del marco conceptual de la EpC, las metas no formaban parte de las primeras formulaciones del mismo. La importancia de este elemento surgió a medida que los docentes e investigadores empezaron a tratar de diseñar materiales y actividades para enseñar los tópicos y a definir criterios para evaluar los desempeños.

Los Desempeños de Comprensión son actividades que desarrollan y demuestran la comprensión del alumno al exigirles usar lo que saben, de nuevas maneras. En esas actividades, los alumnos reconfiguran, expanden y aplican lo que saben y, además, extrapolan y construyen a partir de sus conocimientos previos.

La Valoración Diagnóstica Continua es integrar el desempeño y la realimentación. "No es más que el proceso de brindar información y respuestas claras a los desempeños de comprensión de los alumnos de modo tal que les permita mejorar sus próximos desempeños" (Blythe, Bondy, Kendall, [5]). Exige dos condiciones: que los desempeños de comprensión se ciñan a criterios de evaluación claros, públicos y pertinentes y que los alumnos tengan la posibilidad de recibir realimentación. La valoración debe provenir de distintas fuentes (propia, del docente o pares), permitir estimar el avance, mostrando no sólo los logros sino cómo pueden mejorarse.

El marco EpC, además de ser una metodología de enseñanza también incluye un modelo de investigación.

3. El diseño de la experiencia.

Se trata de un estudio de carácter cualitativo, debido a que intentamos explicar un proceso, la construcción de significados usando Ntic´s, enfoque metodológico que se basa en un esquema experimental sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Dado que la experiencia se ubica dentro de la ingeniería didáctica se trata de un estudio de casos, cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

El estudio abarca la población constituida por los alumnos de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional.

Los conceptos involucrados, integrales dobles en regiones rectangulares y generales son desarrollado tanto en las clases teóricas como prácticas utilizando la bibliografía de la cátedra: Calculo de varias variables del autor James Stewart [6],[7]. Cabe mencionar que se trabaja indistintamente con las ediciones del texto en castellano o en inglés. En la figura 1 se extrae la definición de integrales dobles.

5 Definición La **integral doble** de *f* sobre un rectánculo R es

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A \qquad \textbf{(1)}$$

si ese límite existe

Fig. 1. Definición de integral doble sobre una región rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados.

En la introducción del concepto de integrales dobles el autor hace énfasis (le dedica toda una sección) en el cálculo aproximado de una integral doble sobre una región $[a\,;b]\times[c\,;\,d]$ mediante la aproximación que se muestra en la figura 2.

$$\iint_R f(x,y)\,dA \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A \qquad \textbf{(2)}$$

Fig.2. Aproximación de una integral doble sobre una región rectangular a través de la suma doble de Riemann.

3.1 Materiales y metodología de enseñanza

Usando el soft Mathematica se calculan dobles sumatorias y, con el pretexto de eficiencia, junto a los alumnos de ingeniería en sistemas se construye luego el algoritmo 1, donde se usa el punto medio de R_{ij} , y en el que se puede variar fácilmente la función, recinto de integración y cantidad de sub-intervalos.

Algoritmo 1. Conjunto de sentencias ingresadas en el soft Mathematica, creado colaborativamente entre alumnos y docentes con el objeto de resolver el ejercicios de estimar el volumen del sólido bajo la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ sobre el rectángulo $[-2\,,1]\times[\,0\,,2]$, usando la regla del punto medio en la doble suma de Riemann.

$$\mathrm{f[x\_,y\_]} := 9 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2\ ;$$

```
m=12; n=16;
xi:=-2; xf:=1;
yi:=0;  yf:=2;
```

$$\Delta\mathrm{x} := \frac{\mathrm{xf-xi}}{\mathrm{m}}\ ;\quad \Delta\mathrm{y} := \frac{\mathrm{yf-yi}}{\mathrm{n}}$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{f}\,[\,\mathrm{xi} + 0.5\,\Delta\mathrm{x} + (\mathrm{i}-1)\Delta\mathrm{x}\ , \mathrm{yi} + 0.5\,\Delta\mathrm{y} + (\mathrm{j}-1)\Delta\mathrm{y}\ ]\ \Delta\mathrm{x}\,\Delta\mathrm{y}$$

Se visualizan los resultados obtenidos usando gráficas creadas con el software, las que se generan con sentencias generadas por el docente.

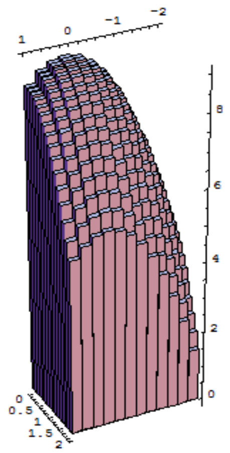


Fig.3. Interpretación gráfica de la salida del algoritmo 1.

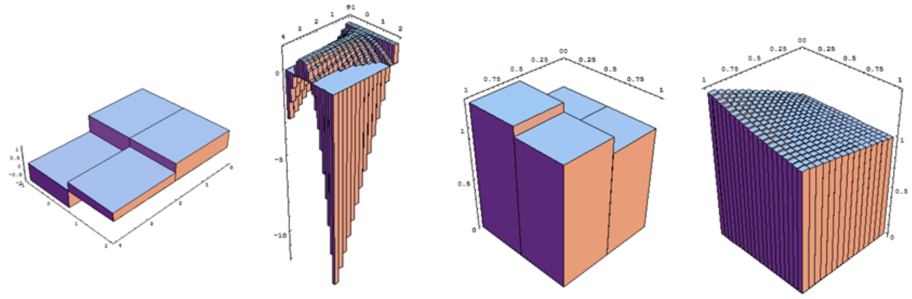
Luego los alumnos lo manipulan y transforman para responder las consignas de los distintos ejercicios (como los que se muestran en la siguiente figura 4) y/o las preguntas que sobre éstos hagan los docentes.

2 Si R = [0 ; 4] x [-1 ; 2], use suma de Riemann con m=2; n=3 para estimar $\iint_R (1 - x\,y^2)\, dA$. Tome como punto muestra: (a) esquina derecha inferior, (b) esquina superior izquierda de los rectángulos

15 Use una calculadora o computadora con un SAC para estimar $\iint_R \sqrt{1 + x\,e^{-y}}\, dA$ donde R = [0 ; 1] x [0 ; 1]. Use la regla del punto medio para los siguientes números de particiones cuadradas de igual tamaño; 1, 4, 16, 64, 256 y 1024.

Fig.4. Ejercicios propuestos en el texto de cátedra en los que se solicita o resulta de interés usar un sistema algebraico de cómputos (SAC).

Tablas y gráficas generadas con el SAC Mathematica permiten inferir, como lo muestra la figura 5, que se necesitan valores "grandes" de m y n para que las sumas parciales evaluadas usando distintos criterios en la elección del punto $(x^*_{ij}\ ;\ y^*_{ij})$ "se parezcan" para el ejemplo 2, aunque no sucede lo mismo con las del 15. Las interpretaciones gráficas son contundentes para generar la respuestas, las que relacionan los nuevos contenidos (propiedades de las integrales dobles) con los ya desarrollados (extremos absolutos en regiones cerradas y acotadas). También permiten abordar el vínculo integral doble –volumen.



$f(x) = 1 - x\,y^2$

n = m = 2 *I ≈ -7,5* *(punto medio)*
n = 15; m= 20 *I ≈ -11,95* *(punto medio)*
n = 15; m= 20 *I ≈ -11,78* *(derecha abajo)*
n = 15; m= 20 *I ≈ -12,16* *(izquierda arriba)*

$f(x) = \sqrt{1 + x\,e^{-y}}$

n = m = 2 *I ≈ 1,14* *(punto medio)*
n = 15; m= 20 *I ≈ 1,13* *(punto medio)*
n = 15; m= 20 *I ≈ 1,14* *(derecha abajo)*
n = 15; m= 20 *I ≈ 1,14* *(izquierda arriba)*

Fig.5. Algunas de las salidas gráficas y numéricas obtenidas al resolver los ejemplos de la figura 4 con SAC.

Finalmente, con el argumento de calcular el volumen del sólido que se muestra en la figura 6 se solicita que los estudiantes diseñen alguna estrategia que "corrija" el algoritmo para poder estimar el valor de una integral definida en una región ya no rectangular. El objetivo es que se vislumbre la sutil y necesaria transformación a realizar en la función a integrar.

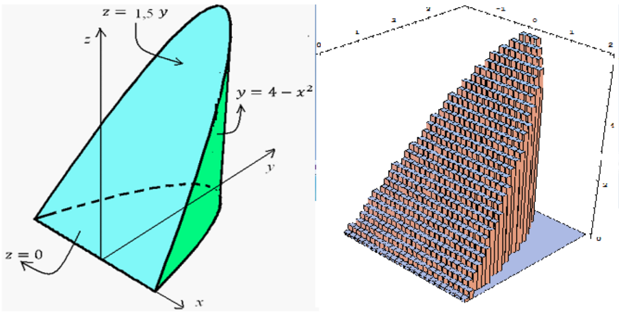


Fig.6. Alguno de las salidas gráficas de los ejemplos del texto resueltos con SAC.

3.2 La experiencia mirada bajo la EpC

En esta práctica estuvieron presentes los cuatro pilares constitutivos de la EpC.

El tópico generativo es “suma doble de Riemann” porque cuenta con todas las cualidades descriptas por el marco ya que: se vincula con facilidad con las experiencias previas de los alumnos, con ideas importantes dentro del Cálculo y fuera del mismo y la indagación sobre él lleva a preguntas más profundas.

La meta de comprensión es que “los alumnos comprendan como utilizar lo que saben para estimar volúmenes de cuerpos”. Esta meta apunta a construir las bases de las integrales múltiples tales como “norma de la partición”, “punto muestral”, “aproximación de una integral usando suma doble de Riemann” y la construcción del algoritmo que permite pasar de una integral sobre región rectangular a una que no lo es.

Los desempeños de comprensión son los elementos más importantes del marco conceptual de la enseñanza para la comprensión. La concepción de la comprensión como un desempeño, más que como un estado mental, subyace a todo el proyecto de investigación colaborativa en el cual está basado el proyecto. Se insiste en que la comprensión se desarrolla y se demuestra poniendo en práctica la propia comprensión. La pregunta a la que se pretende dar respuesta es “¿qué pueden hacer los estudiantes para desarrollar *y demostrar su comprensión*?”. La idea es centrar la atención en actividades que involucren a los alumnos en formas creativas de resolución de problemas y no recibiendo información para luego volcarla en habilidades rutinarias (que sin duda son necesarias para la comprensión). Es común observar una progresión común de categorías de desempeño diseñadas para fomentar la comprensión: etapa de exploración, investigación guiada y síntesis. En las dos primeras etapas los estudiantes usan calculadoras para evaluar sumas dobles de Riemann con número de particiones bajos (n=m=2) para luego escribir y emplear junto a los docentes el sencillo algoritmo 1. El desempeño final de síntesis solicita “corregir el algoritmo usado para aproximar el valor de una integral sobre una región rectangular para poder estimar una integral sobre una región ya no rectangular” (figura 6) y luego “exponer la producción a sus pares”.

La evaluación diagnóstica continua se orienta hacia los próximos pasos, y se dirigen a controlar y evaluar el avance realizado, de modo que los alumnos, no sólo pueden saber cómo han cumplido un desempeño, sino también, cómo pueden mejorarlo. La atención de consultas, la exposición y defensa de lo producido, así como el debate entre pares son excelentes oportunidades tanto para valorar como para el consolidar los nuevos desempeños.

4. Resultados.

Uno de los objetivos del proyecto en el que se enmarca esta experiencia es “generar instrumentos para valorar la comprensión de los alumnos en tópicos de matemática”. En este apartado se expone el instrumento diseñado a partir de la observación de los desempeños de los alumnos en esta experiencia.

En el diseño se tuvo en cuenta que el concepto de comprensión en sí mismo supone múltiples interpretaciones. La EpC asume que comprender es poder llevar a cabo una diversidad de acciones (los desempeños) que demuestre que uno entiende el tópico a la vez que amplía su conocimiento del mismo y lo utiliza de una forma innovadora. Luego, la comprensión no es nunca completa y acabada. Para describir las cualidades de la comprensión, de tal manera que sean respetuosas de la especificidad de la disciplina y a la vez válidas en diferentes dominios, el marco destaca cuatro dimensiones de este constructo y caracteriza en cuatro niveles los desempeños de comprensión para cada una de éstas dimensiones.

- La *dimensión de los Contenidos* evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han trascendido las perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica.
- La *dimensión de los Métodos* evalúa la capacidad de los alumnos para el uso de métodos confiables al construir y validar afirmaciones.
- La *dimensión de los Propósitos* evalúa el potencial de los alumnos para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad para usar este conocimiento en múltiples situaciones.
- La *dimensión de las Formas de Comunicación* evalúa el dominio de los tipos de comunicación, el uso de sistemas de símbolos y la consideración del contexto para expresar lo que se sabe.

Los rasgos se esquematizan en la tabla 1.

Tabla 1. Dimensiones de la comprensión y sus rasgos descriptas por la Enseñanza para la comprensión.

Dimensiones de la comprensión	Dimensión de los Conocimientos	Dimensión de los Métodos	Dimensión de los Propósitos	Dimensión de las Formas de comunicación
Rasgos de la Dimensión.	- Creencias intuitivas transformadas. - Redes conceptuales coherentes y ricas.	- Sano escepticismo. - Construir, dentro del dominio, conocimiento. -Validarlo en el dominio.	-Conciencia de los propósitos del conocimiento. -Múltiples usos del conocimiento. -Buen manejo y autonomía.	- Dominio de los tipos de expresiones. - Efectivo uso de sistemas de símbolos. - Consideración del contexto.

Para valorar los desempeños por los alumnos, manteniendo la especificidad de cada una de las dimensiones revista por la EpC se los caracterizará, según las respuestas a las preguntas que se muestran en la tabla 2, la que forma parte del instrumento diseñado.

Tabla 2. Preguntas para valorar la comprensión en la actividad en cada una de las dimensiones de la comprensión.

Dimensión de los Conocimientos	Dimensión de los Métodos	Dimensión de los Propósitos	Dimensión de las Formas de comunicación
¿Logra diseñar un algoritmo para resolver el problema planteado?	¿Logra explicar/cambiar/ encontrar un error ante requerimiento del docente?	¿Reconoce la importancia de estimar una integral doble a través de sumas de Riemann? ¿En qué medida puede intuir el artificio que permite resolver una integral en una región general?	¿Es capaz de expresar en forma oral y escrita los procedimientos utilizados para resolver los ejemplos propuestos teniendo en cuenta a quien dirige el reporte?

En cuanto a los niveles de los desempeños de comprensión la EpC los clasifica como:

- Los desempeños de comprensión *ingenua*: basados en conocimientos intuitivos, como un proceso no problemático, generalmente poco reflexivos y no estructurados.
- Los desempeños de comprensión de *principiante*: basados en procedimientos mecanizados. La validación de un trabajo depende más de la autoridad externa.
- Los desempeños de comprensión de *aprendiz*: basados en conocimientos y modos de pensar disciplinarios y demuestran un uso flexible de conceptos. Con apoyo, pueden detectar la relación en situaciones cotidianas.
- Los desempeños de comprensión de *maestría*: son integradores, creativos, autoregulados, críticos y transferibles a otro contexto.

La respuesta a cada pregunta de la tabla 2 permitirá identificar el nivel de comprensión en cada una de las dimensiones de cada alumno. Estas respuestas forman el cuerpo del instrumento diseñado y se encuentran catalogadas en la tabla 3

Tabla 3. Instrumento para categorizar los niveles de desempeño de la comprensión en cada una de sus dimensiones.

	Dimensión de los Conocimientos.	Dimensión de los Métodos	Dimensión de los Propósitos	Dimensión de las Formas de comunicación
Desempeños de Ingenuos	No realiza un algoritmo sino que hace sumatorias sin usar soft, o copia producciones de compañeros.	El único método utilizado es ensayo y error. Valida su trabajo si el resultado es similar al de otro compañero. Da por correcto o incorrecto su programa si el soft emite -o no- un mensaje de error.	No exploran potencialidad, sólo sirven para resolver ejercicios. Aún cuando se los alerta que el ejercicio pudo ser resuelto agregando la condición $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$ no extrapolan su uso simbólico (siempre escogen realizar cuentas concretas).	Tiene limitaciones para explicar los procedimientos empleados (las explicaciones suelen reducirse a reproducir lo que escrito).
Desempeños de Principiante	Se aproxima al resultado subdividiendo la región y usando el algoritmo original, cambiando $f(x, y)$ y R. Su estrategia necesitará de cambios importantes si se cambia el enunciado. Sus procedimientos no difieren mucho de los que debería realizar si contase sólo con una calculadora (y no con el SAC).	Si bien nota que resolver el problema es importante, aplica mecánicamente el algoritmo a otros ejemplos propuestos (tales como estimar volúmenes que involucran funciones no definidas o que cambian de signo en la región). La validez de su trabajo depende en gran medida de los mensajes, aunque suele analizarlos.	Reconoce la utilidad de resolver el ejercicio a través de un conjunto de sentencias que no necesite de su intervención ante un pequeño cambio, aunque esa utilidad es en general atribuida a otros ejercicios. Entiende que la condición $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$ facilita el algoritmo para el cálculo aproximado, aunque no intenta usar esto en la obtención de un método de cálculo (exacto) del problema.	Explica su razonamiento y los procedimientos empleados, aunque sin considerar las dificultades del que escucha o si su mensaje es correctamente interpretado.
Desempeños de Aprendiz	Su algoritmo resuelve el problema para función y región dada.	Realiza los cambios válidos adaptándolo al nuevo problema pedido, aunque no siempre de manera sencilla/eficiente ya que tiende a utilizar la misma lógica. Suele analizar el resultado, advertir incoherencias, aún cuando ni el docente o el soft avisan de un posible error. Pueden analizar producciones de otros.	Advierte que el objetivo es usar el ejemplo original y los dados luego, para luego derivar en un procedimiento que resuelva el problema en forma expeditiva. Con ayuda puede usar este problema para vislumbrar el procedimiento de cálculo en regiones similares (y simples)	En forma oral o escrita puede dar a conocer su razonamiento, justificando las estrategias que ha usado/descartado. A solicitud del que escucha, pueden ampliar/reformular las explicaciones.
Desempeños de Maestros	Su algoritmo está previsto para ser transformado a otras regiones y/o funciones.	Reconoce las limitaciones/condiciones de su programa, por lo que no lo usa, si no es posible y lo transforman si fuera posible. Para cada nuevo caso analizan la validez del uso. Pueden esclarecer resultados aparentemente incorrectos.	Advierte que el objetivo es usar el ejemplo para obtener un procedimiento para resolver el problema en forma exacta. Investigando o con ayuda, pueden descubrir el procedimiento para cálculo de volúmenes en regiones sencillas. Son capaces de adaptar lo que concluyeron anteriormente para regiones no simples o a otras aplicaciones ingenieriles.	Fundamenta sus procedimientos en forma oral y/o escrita utilizando el vocabulario rico y pertinente. Sus explicaciones varían según quien sea el que las recibe (compañeros o docentes)

Interesa observar luego del uso de la herramienta esbozada, si se mejoran los desempeños de comprensión y si todas sus dimensiones evolucionan de igual manera cuando se introduce el uso de Tic´s (en particular los SAC). Cabe mencionar que es éste un primer diseño, el que seguramente al usarlo e intentar validarlo, evolucionará a formas más refinadas (lo que implicará una tabla 2 con más preguntas y una tabla tres con más opciones de elección en las respuestas).

Manipular un algoritmo exige previamente un alto niveles de comprensión en los contenidos y métodos, debido a que se debe diseñar un conjunto de sentencias que resuman el plan concebido (el que no debe tener ambigüedades ni incoherencias). Si bien no se usó aún –formalmente- dicho instrumento, una primera observación muestra que la inclusión de los SAC influye de manera muy especial en la *dimensión de los propósitos* y en *las formas de comunicación*, dimensiones que en general no son altamente valorizadas en los exámenes tradicionales escritos.

5. Conclusiones y líneas futuras.

Es preciso que los docentes nos aseguremos que los alumnos pasen una amplia parte del tiempo utilizando y expandiendo activamente sus mentes y no recibiendo pasivamente lo que otros han creado. En tal sentido postulamos que la motivación de nuestros alumnos es un punto de partida para ello. Pero coincidiendo con Stone Wiske - Hammerness y Gray Wilson (en Stone Wiske [4], p.128) la verdadera aspiración es "motivar a los alumnos a desempeños cada vez más sofisticados y a la comprensión de por lo menos una meta abarcadora, que les permitan pensar avanzando más allá de lo que se les dice, confrontando sus ideas y actitudes desde una perspectiva más crítica y combinando y contrastando esas ideas de formas hasta el momento inexploradas".

Nuestro desafío futuro será validar y aplicar el instrumento diseñado no sólo para categorizar el nivel de comprensión exhibido por los estudiantes y observar si todas las dimensiones de la comprensión evolucionan por igual durante la unidad diseñada, sino para refinar nuestra propia comprensión sobre metas y desempeños que ayuden a ajustar el currículo.

A futuro, durante la cursada 2014, se prevé aplicar este instrumento y valorizar la comprensión del colectivo de una clase y relacionar los resultados de la evaluación sumatoria de cada alumno con el nivel de desempeño alcanzado en la experiencia.

Referencias

1. Bruner, J.S.: *Actos de significado.* Madrid. Editorial Alianza. (1990).
2. Bruner, J. S. *La educación, puerta de la cultura*. Madrid. Visor. (2000).
3. Bruner, J. S. *El Proceso mental en el aprendizaje*. Traducción de Jaime Vegas y Pablo Manzano. Madrid. Narcea. (2001).
4. Stone Wiske, M. (comp.) *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires. Paidós. (1999).
5. Blythe, T. y colaboradores. *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente.* Buenos Aires. Editorial Paidós. (1999)
6. Stewart, J. *Cálculo de varias variables*. 6º edición. México. Cengage Learning. (2008).
7. Stewart, J. *Cálculo Multivariable*. 7º edition. México. Cengage Learning. (2010).