Universidad Tecnológica Nacional

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Profesora Ana María Patricia Castro

Directora: Tamara Marino

Co-director: Alberto Formica

DICIEMBRE, 2014

Universidad Tecnológica Nacional

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Profesora: Ana María Patricia Castro

Directora: Tamara Marino

Co-director: Alberto Formica

DICIEMBRE, 2014

LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Autor: Ana María Patricia Castro ______________________________

Directora: Tamara Marino ______________________________

Co-director: Alberto Formica ______________________________

TRIBUNAL

Integrante 1	**Integrante 2**	**Integrante 3**
____________________	____________________	____________________

Lectura de la tesis: ______________________________

PLANEAMIENTO Y RESUMEN DE LA TESIS

La Resolución de Problemas en la enseñanza de la Matemática ha figurado desde hace tiempo en los programas de todas las escuelas medias del país. Si bien no hay acuerdo general sobre la manera de tratar este tema, educadores e investigadores coinciden en que, tal como lo hace la Matemática, el conocimiento matemático de quien aprende avanza y se desarrolla a fuerza de resolver problemas (Sadovsky, 2005).

Este trabajo tiene como propósito plantear que bajo la corriente de la Resolución de Problemas se puede dar una propuesta de enseñanza y aprendizaje en la que los estudiantes adquieran una variedad de estrategias heurísticas, útiles al momento de resolver problemas matemáticos, y logren mejorar su desempeño en esta compleja tarea desarrollando su capacidad metacognitiva.

Este trabajo consta de dos etapas. En la primera se presenta un diagnóstico realizado en un curso de sexto año de una escuela secundaria. El propósito del mismo fue indagar sobre las estrategias con las que cuentan los estudiantes del curso en el proceso de resolver problemas y, además, conocer las características que hacen que una situación constituya un potencial problema para ellos. Para realizar este diagnóstico se diseñó un test en el que se propusieron situaciones (potenciales problemas) para que los estudiantes resolvieran por escrito.

A partir de los resultados obtenidos en el diagnóstico se diseñó una secuencia didáctica, enmarcada en los lineamientos de la Resolución de Problemas, con el fin de promover el desarrollo de aquellas estrategias heurísticas que se observaron menos disponibles entre los estudiantes del curso.

El trabajo consta de 4 capítulos:

En el capítulo 1 se presenta el estado del arte acerca del uso de los problemas en la enseñanza de la Matemática en general y en la Escuela Anglosajona, en particular. También se reseñan diversas investigaciones orientadas tanto al relevamiento y caracterización de heurísticas como a su enseñanza.

El capítulo 2 está dedicado a desarrollar el diseño del diagnóstico y a presentar los resultados obtenidos a partir de su implementación. Este capítulo incluye una primera sección en la que se presenta el marco teórico en el que se fundamenta el diseño del diagnóstico y a partir del cual se sustenta el análisis de los datos obtenidos en el diagnóstico.

En el capítulo 3, al igual que en el capítulo 2, se comienza desarrollando el marco teórico en el que se enmarca la propuesta didáctica diseñada con el fin de promover el desarrollo de ciertas estrategias en los estudiantes y, a su vez, favorecer su capacidad metacognitiva.

Finalmente, en el capítulo 4 se expresan algunas consideraciones finales en las que se vuelcan algunas reflexiones acerca de la convivencia y articulación del marco didáctico de la Resolución de Problemas con otros enfoques de enseñanza y con los aportes de las nuevas tecnologías aplicadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Al concluir con un trabajo tan complejo como es el desarrollo de una tesis es inevitable pensar en todos los que de alguna u otra manera han aportado su granito de arena para que llegue a buen término. Por eso, es un placer dejar plasmado ese aporte invaluable de todos mis seres queridos.

Debo agradecer de manera especial a mí directora Tamara Marino y a mi co-director por su confianza y apoyo en la construcción de esta investigación, aportando ideas valiosísimas basadas en sus propias experiencias y formación, como así también todos los recursos pertinentes, y no menos importante el sostenimiento moral en los momentos en donde parece todo claudicar.

El anhelo de crecer en la carrera y de ponerlo en práctica con las tardes dedicadas al estudio se entrelaza y se cruza con los tiempos que uno le dedica a la familia. Todos los integrantes de mi grupo familiar: mi esposo Jorge, y mis hijos: Miguel Ángel y Lucía, fueron un apoyo más que importante para que pudiera terminar con esta tesis, su tolerancia, su comprensión y el amor fueron un fiel reflejo de ello.

Defender esta tesis significó entre otros motivos, una manera de realizarse profesionalmente, pero además una muestra de agradecimiento a los primeros esfuerzos que hicieron mis padres: Miguel, que desgraciadamente hoy no está conmigo físicamente, y mi madre que, gracias a Dios, pudo ver que a través del trabajo continuo y el sacrificio que ellos me han mostrado en toda su vida, se pudo ver reflejado en este trabajo. Reitero a ellos un infinito gracias, y ojala pueda también retrasmitir a mis hijos lo que ellos mi transmitieron a mí.

ÍNDICE

INDICE DE ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMA

1.1. Introducción

Actualmente está bastante difundida la mala imagen de la Matemática en el imaginario popular. Esta área del saber suele ser considerada como algo remoto, difícil, abstracto, e incluso inaccesible para muchos. No son pocos los estudiantes que asocian a la Matemática con la ansiedad y el fracaso (Ernest, 2000).

Esta problemática es considerada en los Diseños Curriculares para la Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires. En particular en el documento curricular para el sexto año se plantea lo siguiente:

> El imaginario popular asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad. Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, demostraciones formales, y un uso apresurado de la simbología. Esto contribuye a la creencia de que las personas que no son capaces de asimilar los contenidos vinculados a ella de modo sistémico, en el orden y la cantidad en la que se presentan, fracasan por *falta de capacidad* para la matemática. Esta concepción determinista y elitista de la matemática se contrapone con la propuesta del presente Diseño Curricular, que considera a la disciplina como parte de la cultura, y valora a los alumnos como hacedores de la misma. (Diseño Curricular para la Educación Secundaria, Matemática, Ciclo Superior, Sexto año, p. 9).

Acordamos con Ernest (2000) en que para evitar la generación de estas concepciones negativas hacia la Matemática es importante ofrecer a los estudiantes otro tipo de quehacer matemático escolar, que implique un "encuentro" diferente con la Matemática y que permita verla como el producto de procesos sociales y como un saber accesible, creativo y relevante desde el punto de vista de las personas. Asimismo consideramos, tal como sostiene este autor, que un tratamiento de la Matemática escolar conducida por la resolución de problemas permitirá generar un tipo de quehacer matemático vinculado a una visión de la matemática como un campo de la creación y la invención humana en continua expansión, en el cual los patrones son generados y luego convertidos en conocimiento. Así, la matemática es un proceso de conjeturas y acercamientos al conocimiento

En esta misma dirección y recordando que uno de los objetivos centrales de la escuela es formar ciudadanos, resulta oportuno mencionar la perspectiva sociológica dada por García Suárez (1997), quien afirma que la Matemática debe ser vista como

> Una parte sustancial de la cultura y contribuye a la consecución de fines globales -no sólo instrumentales-, ayudando al ciudadano a tener sentido de la vida y del mundo y dotándolo de medios que le proporcionen una mejor comprensión de la experiencia humana.

De esta manera, el valor de trabajar con problemas en las clases de Matemática radica en que permitimos a los estudiantes involucrarse en "un aprendizaje productivo y creador que fomente en los escolares una actitud científica y creativa ante la vida" (Arteaga Valdés, 2010, p. 2).

Tal como sostiene Guzmán (1984, p.11):

> ...lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento

> adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas.

Por otro lado, en diferentes documentos del NCTM[1] (1980, 2000) se destaca la importancia de considerar la resolución de problemas como el eje central de las matemáticas escolares y se promueve el desarrollo de estudios e investigaciones relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se propone la resolución de problemas como una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar de manera individual y colectiva, pues propicia un ambiente para lograr un aprendizaje significativo que implica la intervención de otros procesos de pensamiento como son: la búsqueda de conexiones, el empleo de distintas representaciones, la necesidad de justificar los pasos dados en la solución de un problema y comunicar los resultados obtenidos (Sepúlveda López, 2009)

Es por todo lo expresado anteriormente que sostenemos la importancia de considerar el abordaje de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en el ámbito escolar desde la resolución de problemas.

[1] National Council of Teachers of Mathematics

Es importante aclarar que si bien existe acuerdo dentro de la Educación Matemática sobre la importancia de trabajar con la resolución de problemas, no hay consenso en cuanto a los propósitos didácticos del uso de los problemas para la enseñanza. Desde distintas corrientes teóricas se realizan esfuerzos por definir qué se entiende por problema, qué objetivos de aprendizaje se persiguen, cómo utilizarlos en la clase, etc.

Nuestro trabajo se enmarca específicamente en una de las líneas teóricas de Didáctica de la Matemática, la denominada Escuela Anglosajona o Resolución de Problemas (RP). Iniciada por G. Polya, pone el foco en los procesos de pensamiento implicados en la resolución de problemas, entendiendo a los problemas como situaciones no rutinarias cuyo camino de resolución no es conocida a priori por el resolutor.

En este primer capítulo, realizaremos una breve descripción de distintas conceptualizaciones en torno a la resolución de problemas que existen en Didáctica de la Matemática y luego presentamos, específicamente, un recorrido por el estado del arte de la Resolución de Problemas (RP).

1.2 La resolución de problemas en la Educación Matemática

La Educación Matemática es una disciplina científica que se ocupa de la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos y puede estudiarse bajo distintas corrientes. A continuación realizamos una muy breve descripción de algunas de ellas con la intención de marcar la diferencia entre lo que significa, en el marco de cada una, utilizar la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Una de las líneas con más difusión es la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática, entre cuyos referentes podrían mencionarse a Brousseau, Artigue, Chevallard entre otros. En particular interesa, dentro de esta línea, mencionar a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), que se basa en una perspectiva constructivista en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas. Bajo esta perspectiva, el proceso de resolución de un cierto problema se compara con un juego de estrategias o como un proceso de toma de decisiones. Existen diferentes estrategias, pero sólo algunas de ellas llevan a la solución del problema y a la elaboración, por parte del alumno, del conocimiento necesario para hallar dicha solución. Dentro de la TSD el término "problema" hace alusión a una situación cuya resolución requiere de la construcción, por parte de los estudiantes, de aquellos conocimientos matemáticos que se quieren enseñar. Por ello el foco se encuentra en el contenido, a diferencia del enfoque de la Resolución de Problemas (RP) en donde el interés se encuentra en el desarrollo de estrategias.

De esta manera, tal como propone Charnay (1997), en esta corriente la resolución de problemas es abordada desde un modelo *aproximativo*, el cual está centrado en cómo el alumno construye determinados saberes. Así, el problema es considerado como un *recurso de aprendizaje*, es decir, en la medida en que el estudiante interactúa con dicho problema construye el conocimiento, el cuál luego, será puesto en relación con los saberes a institucionalizar. En este modelo son también centrales la interacción social y las instancias de reflexión sobre los errores y /o aciertos.

Otra de las corrientes teóricas es la Resolución de Problemas (RP) o la Escuela Anglosajona (Problem Solving), iniciada por George Polya para quien la matemática consistía en resolver problemas. En su libro "How to solve it" (1945) planteó una serie de pasos para la resolución de problemas, introduciendo el término de "heurística" para describir los procesos y estrategias involucrados en la resolución de problemas. En esta perspectiva didáctica se prioriza que el estudiante se convierta en un buen resolutor de problemas matemáticos. De esta manera, el foco de los procesos de enseñanza y aprendizaje no está en el contenido -que no deja de estar presente- sino en las estrategias heurísticas y los procesos puestos en marcha en la resolución de problemas.

El modelo presentado por Polya consiste de 4 pasos para resolver cualquier tipo de problema: cómo comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución (Polya, 1945).

Esta corriente parte de la postura de que el alumno es el principal protagonista de su propio aprendizaje y en el proceso de resolver problemas el alumno puede encontrar las herramientas necesarias para elaborar su propia construcción matemática, es decir se compromete con un pensamiento innovador, planteando hipótesis, argumentando sus soluciones y teniendo una reflexión crítica descubriendo un quehacer que lo hace crecer como estudiante. (Vilanova, Rocerau, Valdez, Oliver, Vecino, Medina, Astiz y Alvarez, 2001).

También hace referencia a la resolución de problemas la línea Educación Matemática Realista (EMR), cuyo fundador fue el matemático alemán Hans Freudenthal. Esta corriente didáctica -conocida en el mundo anglosajón como RME, realistic mathematics education- pone énfasis en el uso de situaciones reales, entendidas como razonables, realizables o imaginables, en forma concreta, es decir que está al alcance de su entorno social y cultural (van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Este posicionamiento constituye un valioso aporte para revertir las clases donde prevalecen las prácticas del cálculo como repetición de algoritmos y la solución de problemas sin sentido.

La resolución de problemas bajo esta línea considera la Matemática como una actividad humana, más que una red de conceptos entrelazados. Los alumnos se enfrentan continuamente con la actividad matemática cuando necesitan comprar algo de su interés, viajar hacia algún lugar, u organizar su tiempo, en todos estos casos como en otros tendrán que abordar y resolver problemas utilizando herramientas matemáticas. Partir de una situación "realista" para el alumno, en la cual él puede intervenir (clasificar, interactuar, validar, etc.) da lugar a un primer modelo de su actividad matemática informal (matematización horizontal) y luego irá creciendo a través de la abstracción, generalización, formalización, etc. hacia un modelo que lo lleve hacia una matemática de mayor nivel (matematización vertical). Resolver un problema bajo esta línea es reconocer el mundo real como un inicio o punto de partida para el desarrollo del conocimiento matemático. El problema es el medio para reflexionar individualmente o colectivamente con su grupo, para buscar su autorregulación, a partir de lo que sabe ir cambiando o mejorando para llegar a la solución y poder conseguir un aprendizaje autónomo, es decir lograr una matematización creciente.

Por último, hacemos mención a dos modelos que propone Charnay (1997), que refieren al lugar de los problemas en la enseñanza de la Matemática. Uno es el *incitativo* en el cual el docente responde a los intereses del alumno, guía y responde a las necesidades del mismo. El alumno organiza, busca información y después estudia y aprende. Así, la resolución de problemas es considerada como *móvil de aprendizaje*. Consideramos que este enfoque puede relacionarse con los desarrollos teóricos acerca de la motivación para el aprendizaje de la Matemática.

El otro de los modelos es el *normativo*, que si bien no puede enmarcarse en ninguna de las líneas de Didáctica de la Matemática, puede interpretarse desde un enfoque tradicional de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Dicho modelo está centrado en el contenido, y se asocia a un enfoque en el que el docente transmite los conocimientos, da los ejemplos y explica cómo se aplican los conocimientos para resolver problemas. El alumno escucha atento y aplica lo que le enseñan. El saber no se construye, sólo se aplica. La resolución de problemas es considerada como *criterio de aprendizaje* donde el alumno resuelve los problemas a partir de imitar lo realizado por el docente en un ejemplo del mismo tipo.

En el desarrollo anterior hemos mencionado brevemente algunas de las perspectivas referidas a la resolución de problemas en el marco de la Didáctica de la Matemática. Cabe destacar que en cada una de ellas el término “problema” o “resolución de problemas” alude a conceptos distintos. Por ejemplo, dentro de la Teoría de Situaciones de la Escuela Francesa el término problema alude a una situación cuya resolución requiere de la construcción por parte de los estudiantes de aquellos conocimientos matemáticos que se quieren enseñar. Por ello el foco se encuentra en el contenido, a diferencia del enfoque de la Resolución de Problemas (RP) en donde el interés se encuentra en el desarrollo de estrategias. En este último, la noción de problema se asocia a la de una situación que requiere del despliegue de estrategias heurísticas para su resolución. Así, lo que representa un problema dentro de una línea puede no serlo dentro de otra y, en particular, el tratamiento del problema dentro de una clase que se hace bajo cada perspectiva será diferente, pues los objetivos de aprendizaje son distintos.

Tal como mencionamos anteriormente, este trabajo se enmarca en los desarrollos de la Resolución de Problemas (RP), por ello a continuación, habiendo diferenciado esta perspectiva de otras, ampliaremos los conceptos teóricos relativos a esta línea didáctica.

1.3 Estado actual del conocimiento en la línea didáctica de Resolución de Problemas (RP)

La resolución de problemas en este trabajo es considerada bajo la línea de la Escuela Anglosajona.

Cabe destacar a algunos autores que siguieron la misma línea de Polya tales como Krulik y Rudnik (1987), Schoenfeld (1985, 1992), González (1998), Compistrous y Rizo (1996) y Kilpatrick (1969) entre otros. Cada uno de esos autores enfatizan una u otra idea, pero siempre sosteniendo el objetivo de esta postura: que los estudiantes sean buenos resolutores de problemas.

> Aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático –que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo, y usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras –desarrollo del sentido matemático (Schoenfeld, 1992 citado en Vilanova et al 2001)

Lesh & Zawojewski (2007) definen la resolución de problemas como

> El proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas (p. 782).

Según estos autores una faceta importante del quehacer matemático involucrado en la resolución de problemas es que el estudiante desarrolla recursos, estrategias, y herramientas que le permiten recuperarse de dificultades iniciales y fortalecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la resolución de problemas.

Bajo esta postura el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes se sustenta en la adquisición de estrategias, recursos y de una disposición para involucrarse en actividades que impliquen un quehacer matemático.

Es oportuno dejar en claro que el desarrollo de la habilidad de resolver problemas es básicamente el resultado del trabajo personal, de la práctica adquirida resolviendo problemas y de la reflexión sobre esa práctica. (Nieto Said, 2004). Para aprender a resolver problemas en matemáticas, los estudiantes deben desarrollar formas de pensamiento, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza en sus acciones para explorar situaciones desconocidas (Sepúlveda López, Medina García, Sepúlveda Jaúregui, 2009).

Las ideas centrales de esta línea didáctica tienen que ver con las siguientes cuestiones:

- la noción de problema refiere a las situaciones que se encuentran en el polo opuesto a las situaciones consideradas como “ejercicios”. En estos últimos, el estudiante aplica una técnica o algoritmo determinado y explicado anteriormente; por el contrario en un *problema*, el estudiante debe poner en juego la intuición y la creatividad y utilizar todas sus habilidades cognitivas para buscar la solución más óptima. Durante la resolución se espera que el alumno reflexione continuamente cada decisión tomada, justificando y/o validando sus procedimientos, corrigiendo sus errores si es que los hubiere, mejorando apreciaciones y por último analizando la coherencia de su respuesta.
- los buenos problemas son aquellos en los que el estudiante no queda paralizado, pero sí experimenta una cierta resistencia que no le permita acceder a una solución de manera inmediata; el estudiante debe poseer los conocimientos previos necesarios para el cumplimiento de los objetivos, o bien contar con los recursos necesarios, tal como lo aclara Schoenfeld (1992 citado en Vilanova et al 2001).

- los problemas son relativos al sujeto que resuelve: una situación presentada a un grupo de estudiantes puede resultar un problema para unos y no para otros (Rodríguez, 2012).
- La supervisión y el control de lo que se está haciendo durante la resolución de un problema, es decir el monitoreo del propio funcionamiento cognitivo son capacidades que se interesa desarrollar en los estudiantes. Estas acciones refieren a la Metacognición, dimensión que, según González (1996), solamente se ve plasmada en tareas intelectualmente exigentes como lo es la resolución de problemas. La importancia del desarrollo de capacidades metacognitivas radica en que:

> La metacognición alude a una serie de operaciones cognoscitivas ejercidas por un interiorizado conjunto de mecanismos que permiten recopilar, producir y evaluar información, así como también controlar y autorregular el funcionamiento intelectual propio. Además, también puede notarse que parece existir cierto acuerdo en cuanto a que la metacognición es un constructo tridimensional que abarca: (a) conciencia; (b) monitoreo (supervisión, control y regulación); y (c) evaluación de los procesos cognitivos propios. (González, 1996, p.3).

Los buenos resolutores de problemas matemáticos son aquellos que tiene un buen desarrollo de su capacidad metacogntiva en todos los aspectos mencionados anteriormente.

Algunos autores, que se mencionan a continuación, definen la noción de “problema”.

Para Parra (1990):

> …un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se lo plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas

> totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata (Citado en Marino y Rodríguez, 2008, p. 214).

Por su parte, Marino y Rodríguez (2008) definen:

> Una situación en la que aparece una pregunta, implícita o explícita, será percibida por un sujeto como un problema en la medida en que, si bien el sujeto cuenta con los elementos cognitivos necesarios para comprenderla y abordarla, éstos no son suficientes para responder a dicha pregunta de manera inmediata (p. 215).

Krulik y Rudnik (1987) establecen que un problema "es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma" (Citado en Rodríguez, 2012, p. 154)

Finalmente, Kilpatrick (1985) sostiene que "se puede definir un problema como una situación en la que se debe alcanzar una meta, pero en la cual está bloqueada la ruta directa" (citado en Codina y Rivera, 2001, p. 5).

Otra definición que puede encontrarse en la bibliografía es:

> un problema para un individuo, es una situación que requiere solución y, éste, estando motivado u obligado por circunstancias (académicas, personales o vitales), dispone de herramientas para resolverla, pero no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato (Chacón, Colombano, Formica, Isla Zuvialde, Marino, Real, y Rodríguez, 2012, p.3).

Como puede observarse, si bien las definiciones son diversas, existe coincidencia en algunas de las características que debe cumplir una situación para ser considerada problema.

La coincidencia central entre los distintos autores refiere a que si bien los resolutores pueden contar con los recursos necesarios para afrontar la situación presentada (propios de la Matemática y adquiridos a lo largo de sus años previos de escolaridad), un verdadero problema en esta línea ofrece una resistencia e incertidumbre inicial que genera la sensación de no conocer, de manera inmediata, cuál es el camino de resolución adecuado, lo que genera el despliegue de estrategias y la búsqueda de los medios que permitan llegar a una solución.

Otro concepto importante que se utiliza es el de *heurísticas* (también se las denomina como *herramientas heurísticas* o *estrategias heurísticas*). La Heurística es considerada como "el estudio de medios y métodos de la resolución de problemas" (Polya, 1981, p.10 citado en Vilanova et al 2001). Como adjetivo, significa "servicio al investigador". (Polya, 1945, p.102). Por ello se consideran a las heurísticas como las estrategias, tácticas, ideas o formas de abordaje que resultan útiles a la hora de resolver problemas. Verschaffel (1999 citado en Marino y Rodriguez 2009) definió a las heurísticas como "estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis, la representación y la transformación del problema que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a hacer progreso hacia su solución" (p.217).

El siguiente listado (no exhaustivo) de estrategias heurísticas puede encontrarse en Marino y Rodríguez (2008):

- Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)
- Recordar y recurrir a problemas o situaciones análogas abordadas anteriormente (suele verse redactado esta estrategia como "razonar por analogía")

• Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos.

• Buscar datos adicionales que sean fáciles de obtener.

• Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico.

• Modificar el problema para reducirlo a un problema ya resuelto

• Modificar el problema para reducirlo a un problema más sencillo

• Descomponer el problema en subproblemas

• Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción)

• Considerar casos particulares

• Analizar casos especiales o casos límite

• Razonar por contradicción

• Empezar por el final: suponer que se tiene una solución y analizar sus características

• Trabajar hacia delante: partir desde las condiciones dadas en el problema

• Verificar usando casos particulares

Las mismas autoras presentan en un trabajo posterior (Marino y Rodríguez, 2009) una reorganización de las estrategias heurísticas, la cual constituye una adaptación de la propuesta de Koichu; Berman y Moore (2003). Dicha reorganización se presenta en la siguiente tabla en donde la primera columna muestra los descriptores generales teniendo en cuenta características comunes, la segunda columna presenta las heurísticas propiamente dichas y en la tercera columna se realiza una breve descripción de cada una de las estrategias (ver ilustración 0)

Descriptores generales	Heurísticas	Descripción
Planificar	Trabajar hacia adelante	Abordar el problema partiendo de las condiciones y los datos dados.
	Trabajar empezando por el final	Suponer que se tiene una solución y analizar sus características.
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución.
	Razonar por analogía	Recordar problemas resueltos anteriormente, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema.
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	Realizar una descripción gráfica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico.
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje: del simbólico al coloquial o al numérico, etc.
Modificar el problema	Reducir a problemas ya resueltos	Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido.
	Reducir a un problema más sencillo	Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original.
	Dividir el problema en subproblemas	Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución general.
	Introducir un elemento auxiliar	Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etc.)
Examinar casos particulares	Análisis sistemático de casos (Inducción)	Asignarle valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución.
	Analizar casos límites o especiales	Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades.
	Analizar ejemplos	Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema.
Examinar la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación (ver: Nota 1)	Verificar la respuesta usando un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta.
	Verificar usando casos particulares.	Verificar la respuesta en casos particulares.

Ilustración 1: Organización de heurísticas

Según Bruner (1984) "una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros" (citado en Rizo Cabrera y Campistrus Pérez, 1999, p. 3).

En el trabajo *El problema de diseñar problemas* (Colombano, Isla Zuvialde, Marino y Real, 2009) se propone un procedimiento para crear situaciones que constituyan verdaderos problemas para un determinado grupo de estudiantes desde el punto de vista de la escuela anglosajona. En este trabajo se apela a la idea de que un problema es relativo al sujeto y que los problemas se encuentran en el polo opuesto de los llamados ejercicios rutinarios.

Estableciendo algunos criterios, las autoras se propusieron dar respuesta a la pregunta ¿cómo determinar qué características o requisitos debe cumplir una situación matemática para que sea un problema para un grupo concreto de estudiantes?. Los mismos fueron elaborados siguiendo a González (1998), quien propone que para que una situación represente un problema para un determinado sujeto se requiere de la presencia de elementos objetivos y subjetivos. En relación con los elementos objetivos, los cuales refieren a i) las condiciones dadas u observadas; ii) las condiciones deseadas o metas y iii) las operaciones que deben ser ejecutadas para disminuir la discrepancia existente entre las condiciones deseadas y las observadas, consideran que los dos primeros están presentes en cualquier situación en la que se pida resolver algún asunto o se plantee alguna pregunta. En cuanto a las operaciones o acciones que deben ejecutarse para eliminar la discrepancia entre i) y ii), las autoras plantean que entre dichas acciones se encuentra principalmente el uso de estrategias heurísticas. Por ello destacan la importancia, al momento de considerar una situación, que ésta admita el uso de una variedad de heurísticas para afrontar su resolución. En relación a los elementos subjetivos, las autoras consideran que la mayor complejidad está en lograr que la situación provoque un bloqueo o impedimento para quien resuelve. De esta manera sostienen que para generar el bloqueo resulta relevante proponer situaciones cuyo planteo o consigna no resulte demasiado familiar, para evitar que la resolución sea inmediata. Es decir, que la resolución surja como una elaboración propia y no como una respuesta rutinaria a ejercicios "tipo" trabajados anteriormente.

Sin embargo, advierten las autoras, que la existencia de los elementos objetivos y subjetivos en una situación no garantiza que la situación resulte efectivamente un problema para los sujetos. De esta manera afirman:

> Si a un determinado grupo de estudiantes se le propone una situación en la que están ausentes los elementos objetivos o los subjetivos, seguro podemos decir que dicha situación no representará un problema para ellos. Pero el hecho de que sí estén presentes nos permite afirmar solamente que la situación constituye un *potencial problema* para dichos estudiantes (Colombano *et al*, 2009, p. 3).

De esta manera, considerar a una situación como posible o potencial problema implica tener en cuenta cuestiones tales como los conocimientos necesarios para abordar y encarar la resolución de la situación, tanto en lo que se refiere a contenidos como a habilidades, algoritmos y procedimientos, la "familiaridad" de la consigna, la variedad de heurísticas posibles de ser utilizadas, etc.

El incorporar la RP[2] en las clases de matemática implica considerar al proceso de la resolución de problemas, al uso de las heurísticas y a la reflexión sobre el propio quehacer como "algo a ser enseñado". De esta manera los objetivos de aprendizaje deben atender por

[2]RP: Resolución de problemas

ejemplo a la incorporación de heurísticas y al desarrollo de la reflexión metacognitiva acerca del quehacer involucrado en la resolución de problemas.

Según Rodríguez (2012) una manera de incorporar el enfoque de la RP en un curso es planificando alguna unidad específica que atienda a los objetivos mencionados anteriormente, la cual podría plantear un trabajo transversal a lo largo de la cursada. En cuanto a la modalidad de trabajo en el aula, esta autora destaca la importancia de que el estudiante se enfrente al problema de manera individual, que primeramente se enfrente solo al desafío o bloqueo y que decida de manera autónoma qué camino seguir y qué estrategias utilizar. Luego de esa instancia individual podría compartir con sus pares sus estrategias y conclusiones a las que llegó y ver distintas ideas o formas de resolución de otros en una puesta en común.

Una evaluación acorde a este tipo de trabajo requerirá ver si los estudiantes han adquirido o no la habilidad para aplicar las estrategias adecuadas, reflexionando sobre su decisión y así llegar a ser buenos resolutores de problemas. En ese camino de la reflexión el docente debe tener una mirada permanente de los distintos pasos o adelantos en el desarrollo de las estrategias, por ello es relevante registrar las idas y vueltas en todas las soluciones. Existen distintas maneras de registrar los avances de los alumnos, tal como propone Rodríguez (2012): listas de cotejo, portfolios, rúbricas y diarios. Cada uno de ellos es un instrumento de trabajo y de evaluación orientado al seguimiento del proceso de aprendizaje. Si bien todos favorecen la toma de conciencia de los logros y dificultades por parte de los estudiantes a partir de explicitar los criterios de evaluación y de brindar una retroalimentación en función de dichos criterios, tanto el diario como el portfolio constituyen instrumentos que recopilan información sobre el proceso de aprendizaje y fomentan, de manera explícita, la reflexión sobre las tareas realizadas y los procesos de adquisición de conocimiento.

El portfolio es una colección de trabajos de los estudiantes, con el formato de una carpeta en la que generalmente el último trabajo suele referirse a una reflexión metacognitiva sobre todos los trabajos realizados. Según Gregori (1997 citado en Rodriguez 2006): a) el portfolio intenta recoger información sobre qué pueden hacer los estudiantes; b) las actividades están diseñadas en función de objetivos predeterminados y pueden conformar apartados dentro del porfolio; c) los estudiantes pueden establecer los criterios para mostrar sus producciones pudiendo elegir las mejores, las más complejas, etc. y, d) permite una dinámica que mejora los aprendizajes, eliminando el tiempo acotado de las evaluaciones tradicionales.

Etimológicamente la palabra portfolio proviene de la palabra francesa portefeuille, refiriéndose a una cartera de mano para llevar libros o papeles. Su idea central es una colección de trabajos que recogen la trayectoria de una persona. (Prendes Espinoza y Sánchez Vera, 2008) diferencia la concepción del portafolio en función de la perspectiva a la que atañe:

- Desde una perspectiva general: el portafolio es un registro de trabajos, una colección de materiales y trabajos.
- Desde una perspectiva educativa: es una colección de evidencias del aprendizaje.

A continuación presentamos un recorrido por algunos trabajos de investigación realizados en el marco de la Escuela Anglosajona y que representan antecedentes valiosos para el trabajo que presentamos aquí.

En primer lugar mencionamos los estudios realizados en el curso de ingreso de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), los cuales se enfocaron, en una primera instancia, a la indagación del uso de estrategias heurísticas y, en una segunda instancia, a la enseñanza de estrategias heurísticas.

Con respecto a la indagación acerca de las estrategias heurísticas disponibles en estudiantes, existen sucesivos estudios realizados por investigadores de la mencionada universidad con el objetivo de determinar las estrategias heurísticas que alumnos de nivel pre universitario ponen en juego de manera intuitiva o espontánea a la hora de resolver problemas. Entre ellos podemos mencionar Marino y Rodríguez (2008, 2009), Chacón *et al*, (2012). En dichos estudios se utilizó el mismo procedimiento metodológico para relevar las heurísticas utilizadas por los estudiantes del ingreso: la aplicación de un test y, luego a partir de una selección intencionada de estudiantes que mostraron uso de estrategias heurísticas en el test, la realización de una entrevista para profundizar en el conocimiento acerca del uso de dichas estrategias.

El test consistió de una serie de problemas para que los estudiantes resolvieran por escrito y entregaran tanto una versión final, presentada prolijamente prescindiendo de los intentos que hayan considerados como no útiles, como los caminos no "exitosos" o los "borradores".

Estas actividades fueron diseñadas siguiendo los criterios presentados en Colombano *et al* (2009). Es decir, las mismas representaron potenciales problemas para el grupo de estudiantes, pues se basaron en conocimientos previos, ya sea en habilidades, algoritmos, técnicas, etc. para la resolución de dichos problemas, pero a la vez se cuidó que sus enunciados sean no familiares y que su resolución habilite una variedad de heurísticas como medios para resolverlos.

Cabe destacar las siguientes conclusiones que sintetizan los resultados encontrados a lo largo de los sucesivos estudios:

> …las heurísticas más utilizadas por los alumnos son: trabajar hacia delante; recurrir a teoría relacionada; realizar una descripción gráfica del problema

> en los casos en los que no venía dada; traducir el problema pasando del lenguaje coloquial a un registro algebraico o numérico, examinar casos particulares, algunos realizaron un análisis sistemático de casos, tratando de acercarse a una generalización, no alcanzada en algunos de ellos; analizar casos límite, casos especiales. Se observó en una gran cantidad de alumnos el análisis de ejemplos y la utilización de medios auxiliares como esbozos, figuras de análisis, resumen de fórmulas, figuras ilustrativas, tablas, gráficos, entre otros. Heurísticas cuya utilización ha sido prácticamente nula son las del grupo Modificar el problema[3] categoría que incluye reducir a problemas ya resueltos, reducir a un problema más sencillo, descomponer en sub-problemas o introducir algún elemento auxiliar. (Chacón *et al*, 2012, p. 5).

Como posible explicación de los resultados obtenidos, los autores conjeturan que las estrategias relevadas fueron usadas por los estudiantes no porque éstas hayan sido necesariamente explicadas por docentes anteriores -por ello las consideran espontáneas- sino probablemente debido al tipo de trabajo realizado durante el curso de ingreso, ligado al trabajo con variedad de registros, de la utilización de ejemplos, etc.

En relación con la enseñanza de heurísticas, en Chacón *et al* (2012) se presenta, además de un resumen de los estudios referidos en el párrafo anterior, un dispositivo didáctico para enseñar las heurísticas que resultaron menos utilizadas por los estudiantes del ingreso, tal como se indica en las conclusiones citadas anteriormente. Dicho dispositivo consistió en proponer problemas que abarcaran distintos contenidos matemáticos y que habilitaran el uso de las

[3] Ver ilustración de la página 22

estrategias que se deseaban enseñaran. Luego del trabajo sobre dichos problemas se propuso, como instancia final una reflexión metacognitiva en función de las heurísticas aprendidas.

En el trabajo *La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas* se presenta una investigación llevada a cabo en el estado de Michoacán con alumnos de 16 y 17 años, estudiantes de un Bachillerato. Este trabajo estudia algunos matices que se tienen en cuenta en el proceso de resolver problemas matemáticos y los quehaceres que llevan a la solución del mismo. Como parte de la metodología se brindó a los estudiantes una variedad de problemas que abarcaban distintas formas o caminos de solución. La investigación es realizada en un aula donde el trabajo colectivo y el individual juegan un papel relevante en cada uno de los momentos puestos en marcha en la investigación. El diseño de las tareas tiene el objetivo claro de poder identificar, observar y mejorar el nivel o ciclos de entendimiento de los estudiantes a la hora que resolver problemas, favoreciendo la toma de conciencia de las fortalezas y debilidades en el razonar propio de la lógica matemática, viendo lo que sabe, o no. El objetivo fue que los estudiantes aprendieran a explicar y defender públicamente las ideas que usaron en sus intentos por resolver los problemas, así como a comunicar sus resultados.

CAPÍTULO 2. DIAGNÓSTICO DE HEURÍSTICAS

2.1. Introducción

El presente trabajo consta de dos etapas. La primera, que presentamos en este capítulo, corresponde a un diagnóstico aplicado en un curso del último año de la escuela secundaria, con el que intentamos recolectar datos tanto acerca de qué características deben presentar las situaciones para que generen un bloqueo inicial e impliquen una búsqueda de posibles caminos de resolución -que constituyan problemas desde la Escuela Anglosajona- como de cuáles son las heurísticas que los estudiantes de ese curso utilizan, de manera espontánea, frente a dichas situaciones (problemas). En la segunda etapa, desarrollada en el capítulo 3, se presenta el diseño de una secuencia didáctica orientada a fomentar el aprendizaje de algunas de las heurísticas que no fueron utilizadas por los estudiantes del curso considerado frente a los problemas del diagnóstico o que, habiendo sido utilizadas, su uso no refleje un conocimiento acerca de las posibilidades y limitaciones de dichas estrategias en el proceso de resolución de problemas.

2.2. Consideraciones teóricas

Para llevar adelante esta primera parte del trabajo, asumimos ciertas definiciones y consideraciones teóricas a partir de las cuales sustentamos el diseño del diagnóstico. En tanto que el objetivo del mismo es indagar sobre las estrategias heurísticas (o heurísticas) que ponen en juego estudiantes del último año de la escuela media del curso seleccionado frente a problemas matemáticos y sobre las características del planteo de las situaciones para que constituyan problemas para ellos, consideramos que:

> Un problema para un sujeto es una situación que requiere solución y, éste, estando motivado u obligado por circunstancias (académicas, personales o vitales), dispone de herramientas para resolverla, pero no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato *(*Colombano*et al*, 2009, p. 3).

De esta manera entendemos que las heurísticas son "estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis, la representación y la transformación del problema que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a hacer progreso hacia su solución" (Verschaffel, 1999, p.217). Además, consideramos que dichas estrategias se ponen en juego en el proceso de resolución de un problema matemático, en tanto situación que genera cierta resistencia e incertidumbre acerca de cuáles son los posibles caminos a seguir que permitan llegar a una solución de la situación planteada. Por otro lado, como afirma Rodríguez (2012), consideramos que las heurísticas brindan herramientas que guían la búsqueda de un camino de solución del problema, pero no aseguran el éxito en dicha búsqueda.

La lista de heurísticas que consideramos para este diagnóstico es la presentada por Marino y Rodríguez (2008) (ver capítulo I).

Tal como se mencionó anteriormente, el interés de este diagnóstico es conocer acerca de cuáles son las estrategias heurísticas que utilizan los estudiantes del último año de la escuela secundaria a la hora de resolver problemas y qué características hacen que las situaciones representen verdaderos problemas para los estudiantes del curso considerado. Presentamos a continuación el diseño del trabajo de campo realizado para tal fin.

El diagnóstico consistió en la elaboración e implementación, en un curso del último año de la escuela secundaria, de un test con situaciones que resultan según Colombano *et al,* (2009) posibles o potenciales problemas para los estudiantes de dicho curso.

Para la implementación, que fue realizada en el contexto de una clase, se invitó a los estudiantes a que trabajen, individualmente o con un compañero, sobre las situaciones propuestas en el test. Se solicitó que realizaran una producción escrita con todas las ideas, planteos, procedimientos y posibles caminos de resolución de cada situación, aún aquellos que fueran abandonados o que llevaran a resoluciones no adecuadas o poco satisfactorias. Se solicitó la entrega tanto del trabajo "pasado en limpio" como de los borradores. Estos últimos en general permiten conocer qué estrategias desplegaron en el intento de resolver el problema. Esta información muchas veces queda oculta en la resolución pasada en limpio.

2.3. Contexto

El test fue aplicado en un curso de 6º año de la Escuela Secundaria Superior de la modalidad de Economía y Gestión de una escuela confesional y pública de gestión privada ubicada en la localidad de José C. Paz, zona oeste del conurbano bonaerense. La implementación fue realizada durante el primer trimestre de un ciclo lectivo. Los estudiantes en su trayectoria escolar previa trabajaron con contenidos de álgebra y funciones, aunque necesariamente no con una metodología de trabajo orientada hacia la resolución de problemas, es decir, no recibieron una enseñanza orientada hacia el aprendizaje de estrategias heurísticas para resolver problemas.

El curso en el que aplicamos el diagnóstico fue seleccionado debido a que era un grupo no muy numeroso (no más de 30 alumnos) y porque se vieron actitudes propicias para la elaboración de un trabajo diferente y desafiante, como así también responsabilidad en sus respuestas y apertura a los cambios.

2.4. Instrumento

El diseño del test utilizado en este diagnóstico está basado en el instrumento utilizado por Chacón *et al* (2012) y Marino y Rodríguez (2008, 2009) para relevar estrategias heurísticas en ingreso a la universidad. Cabe aclarar que, al igual que los autores mencionados, consideramos que las estrategias puestas en juego por los estudiantes del curso seleccionado son de tipo espontáneas, pues su uso no implica necesariamente que los estudiantes hayan recibido una enseñanza intencional acerca de la resolución de problema.

Por otro lado, interesa señalar que si bien el diagnóstico que hemos diseñado responde al formato de los test utilizados en los trabajos mencionados, éste no contiene los mismos problemas, pues no existen problemas "universales" sino que dependen de las características de los resolutores. Además en nuestro diagnóstico no utilizamos entrevistas para profundizar el conocimiento acerca del proceso de resolución de problemas como sí se empleó en los trabajos mencionados.

De esta manera se buscó diseñar actividades que, de acuerdo a la definición adoptada, resultaran ser problemas para los estudiantes considerados. Para este diseño se tomaron en cuenta los criterios presentados por Colombano *et al*, (2009) para formular situaciones que resulten "potenciales" o posibles problemas para un cierto grupo de estudiantes.

A continuación se presentará el análisis de las actividades del test, destacando por qué resultan posibles o potenciales problemas para los estudiantes, detallando la variedad de heurísticas posibles de ser usadas en la resolución de cada una.

Las actividades dadas a los estudiantes fueron cuidadosamente elegidas para que sean potenciales problemas para ellos. En primer lugar, buscamos que los problemas abordaran temas presentes en los Diseños Curriculares de años anteriores, como por ejemplo herramientas algebraicas, numéricas o analíticas sencillas, de manera de asegurarnos de que los estudiantes dispusieran de los conocimientos previos necesarios (algoritmos, determinados contenidos, etc.) para encararlos. En segundo lugar, cuidamos que los enunciados no estuvieran expresados como una actividad rutinaria, en los que se indica qué hacer, o como ejercicios "tipo" que habitualmente se resuelven. Por el contrario se buscó proponer enunciados que fomenten la búsqueda de posibles respuestas y la utilización de algunas heurísticas. Consideramos entonces que la no familiaridad de estos enunciados debiera representar un bloqueo inicial, lo que genera la búsqueda de algún camino de resolución, que no es rutinario o algorítmico.

A continuación presentamos los enunciados de los potenciales problemas y un análisis en términos de posibles caminos de resolución y de las heurísticas implicadas.

Actividad 1:

Consigna:

Compara para los distintos valores reales de *a*, las expresiones:

a^2-1 y $1-a$

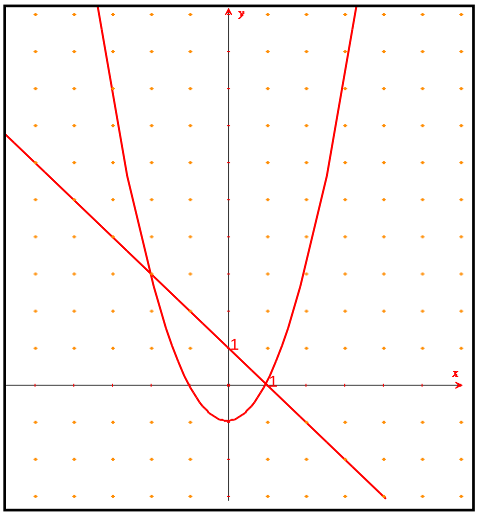
En cuanto a la variedad de heurísticas que pueden resultar útiles, puede observarse a continuación la multiplicidad de caminos para encarar la resolución de la situación.

Como una forma de explorar la situación, se podría recurrir a la heurística ***Considerar casos particulares*** para comparar los resultados obtenidos en ambas expresiones al probar con distintos valores de a . Por ejemplo, se podría elaborar la siguiente tabla

a	a^2-1	$1-a$	Comparación
-3	$(-3)^2-1=9-1=\mathbf{8}$	$1-(-3)$=1+3=4	$a^2-1>1-a$
-2	$(-2)^2-1=4-1=\mathbf{3}$	$1-(-2)$=1+2=3	$a^2-1=1-a$
$\mathbf{-1}$	$(-1)^2-1=1-1=\mathbf{0}$	$1-(-1)$=1+1=2	$a^2-1<1-a$
$\mathbf{0}$	$(0)^2-1=0-1=\mathbf{-1}$	$1-(\mathbf{0})$=1+0=1	$a^2-1<1-a$
$\mathbf{1}$	$(1)^2-1=1-1=\mathbf{0}$	$1-(\mathbf{1})$=1+1=0	$a^2-1=1-a$
$\mathbf{2}$	$(2)^2-1=4-1=\mathbf{3}$	$1-(\mathbf{2})$=-1	$a^2-1>1-a$
$\mathbf{3}$	$(3)^2-1=9-1=\mathbf{8}$	$1-(\mathbf{3})$=1-3=-2	$a^2-1>1-a$

A partir de los resultados obtenidos en esta tabla se podría concluir que dependiendo de los valores de *a* considerados la relación entre ambas expresiones varía. Los resultados sugieren la conclusión de que $a^2-1>1-a$ para valores de *a* que pertenecen al conjunto **(-∞;-2)U(1;+∞)** que $a^2-1=1-a$ cuando *a* = -2 o *a* = 1 y que $a^2-1<1-a$ para valores de *a* que pertenecen al conjunto $(-2;\mathbf{1})$. Si bien la conclusión es correcta, la información proporcionada por la tabla no alcanza para justificarla adecuadamente puesto que de dicha exploración no se desprende que los únicos valores en los que se cumple la igualdad son los mostrados en la tabla.

Por otro lado, se podría apelar a las heurísticas ***recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)*** y ***utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico*** considerando a las expresiones dadas como fórmulas de funciones definidas en el conjunto de los números reales. De esta manera, se podrían realizar los gráficos de dichas funciones, comparar su comportamiento y llegar a la misma conclusión anterior. En este caso, a diferencia de la estrategia anterior, podría considerarse que el argumento gráfico, basado en una mirada funcional de las expresiones, resulta más potente que el numérico; aunque claramente el numérico sería suficiente si se realiza desde una mirada funcional y acompañada por argumentos de continuidad de las funciones involucradas.



Desde un punto de vista analítico apelando a la heurística ***recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)***, se podría plantear la inecuación

$a^2-1<1-a$ que permite, a partir de hallar su conjunto solución, determinar cuáles son todos los valores reales de a para los cuales la expresión a^2-1 resulta menor que la expresión $1-a$. El desarrollo de este planteo sería el siguiente:

$$a^2-1<1-a \leftrightarrow a^2+a-2<0$$

ver la inecuación podría factorizarse la expresión a^2+a-2 , expresándola como producto de dos factores de grado 1 obteniendo, de esta manera, una inecuación equivalente a la inicial: *(a+2).(a-1)<0*

A partir de ella, se podría resolver de forma analítica, realizando un análisis exhaustivo de casos, y llegar a la conclusión de que la condición $a^2-1<1-a$ se cumple únicamente cuando $-2<a<1$:

$(a+2)\cdot(a-1)<0 \Rightarrow a+2>0 \ \wedge \quad a-1<0 \quad \vee \quad a+2<0 \ \wedge \quad a-1>0$

$\Rightarrow (a>-2 \wedge a<1) \quad \vee \quad (a<-2 \ \wedge \ a>1) \Rightarrow a \in (-2;1)$

De esta manera: a^2-1 > 1-a si a ∈ $(-2;1)$

Además podría considerarse la inecuación: $a^2-1>1-a$ y llegar entonces a la conclusión de que la expresión a^2-1 es mayor que $1-a$ cuando $a \in (-\infty;-2) \cup (1;\infty)$

$(a+2)\cdot(a-1)>0 \Rightarrow a+2>0 \ \wedge a-1>0 \ \vee \quad a+2<0 \ \wedge \quad a-1<0$

$a>-2 \ \wedge \ a>1 \ \Rightarrow a>1 \quad \vee \quad a<-2 \ \wedge \ a<1 \Rightarrow a<-2$

$a \in (1;+\infty)$ *o* $a \in (-\infty;-2)$

Asimismo podría plantearse la ecuación $a^2-1=1-a$ para determinar para qué valores reales de *a* se verifica la igualdad entre ambas expresiones.

Finalmente, al llegar a una respuesta, se podría utilizar la estrategia ***verificar usando casos particulares*** lo cual, si bien no representa una validación rigurosa, permitiría reforzar la respuesta.

Actividad 2

Consigna:

¿Qué opción elegirías como truco para realizar con tus amigos y asegurarte el éxito frente a ellos? Justifica tu respuesta.

a) Pensá un número, duplícalo, sumale 8 y quedate con la mitad del resultado obtenido hasta ahora. Por último, restá el número que pensaste… Seguro que obtuviste 4 como resultado.

b) Pensá un número y elévalo al cuadrado. Al resultado réstale el triple del número pensado y por último, suma 2. Como resultado, obtuviste 0.

Considerar casos particulares podría ser un primer paso para explorar el problema. Podrían buscarse números al azar que verifiquen cada una de las opciones, por ejemplo números naturales pequeños. De esta manera es posible darse cuenta de que 1 es solución de ambos trucos. Lo mismo ocurre con 2. Se podría elegir también el 5 y observar que verifica el primer truco pero no el segundo. A partir de esto podría afirmarse que el segundo truco no garantiza el éxito pues existen números que no lo verifican. Esto podría generar la pregunta de si el primer truco asegura o no el éxito. En principio puede observarse que para distintos números se verifica, pero ¿cualquiera verifica? Para dar respuesta a esta situación se podría seguir probando con distintos números enteros o decimales pero esto no permite garantizar que siempre se verificará, aún si se recurriera a la heurística ***Analizar casos especiales*** al considerar casos más "raros" como por ejemplo 2,13, o $\pi\ o\ \frac{1}{3}$. Para tener la certeza de que efectivamente cualquier número real verifica el primer truco podría recurrirse a ***Utilizar un método de expresión o representación adecuada: algebraico*** expresando en lenguaje simbólico lo que se plantea en lenguaje coloquial. El planteo algebraico del truco conduce a la ecuación $(\mathrm{x}.2+8)\colon 2\text{-}\mathrm{x}=4$ la cual es una ecuación lineal de primer grado con infinitas soluciones. Es así como a partir de esto puede garantizarse que cualquier número que se elija podrá resolver el problema del mago. En el segundo truco la expresión resultaría una ecuación de segundo grado $\mathrm{x}^2\text{-}3\mathrm{x}+2=0$ c cuyas soluciones son: $x_1 = 1\ y\ x_2 = 2$ con lo cual esta segunda opción solo aseguraría el éxito si se eligen estos únicos valores, confirmando las observaciones realizadas a partir de la exploración numérica.

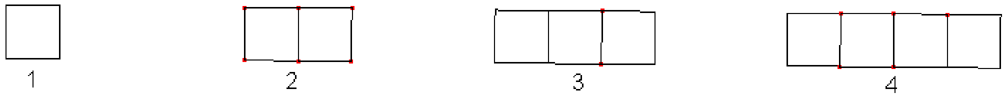
Nuevamente en relación con el primer truco, también podría plantearse simbólicamente una expresión que represente las operaciones a realizar con un número genérico x . De esta manera se llegaría a una expresión algebraica del tipo $(2x\text{-}8)\text{:}\,2\text{-}x$ y mediante manipulaciones algebraicas se arribaría a la conclusión de que independientemente del valor que tome *x* la misma es siempre igual a 4.

Finalmente, al llegar a una respuesta, se podría utilizar la estrategia ***verificar usando casos particulares*** lo cual, si bien no representa una validación rigurosa, permitiría reforzar la respuesta.

Actividad 3

Consigna:

Se construye una sucesión de figuras con palillos, como la siguiente:



¿Cuántos palillos se necesitan para construir la figura que ocupa el trigésimo lugar? ¿Y la que ocupa el lugar número 75?

¿Hay alguna figura que tenga 58 palillos? ¿¿Y 299 palillos? ¿Por qué?

Los alumnos podrían ***considerar casos particulares:***

Para comenzar a explorar la situación podría contarse la cantidad de palillos necesarios para el lugar 1, 2, 3, 4, 5 y 6 y presentando los resultados en una tabla al ***Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos***.

Lugar	Cantidad de palillos
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16

Si bien este camino de resolución podría utilizarse para resolver la primera pregunta referida al lugar trigésimo, extendiendo la tabla hasta el número 30, resulta ineficiente para responder la pregunta siguiente. Por ello se podría, a partir de los datos de la tabla, recurrirse a la heurística ***Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego***

generalizar (inducción) explicitando la estrategia para calcular en cada caso la cantidad de palillos necesarios en función del lugar que la figura ocupa:

Lugar	Cantidad de palillos (estrategia 1)	Cantidad de palillos (estrategia 2)
1	4	1 +3
2	4+3	1+3+3
3	4+3+3	1+3+3+3
4	4+3+3+3	1+3+3+3+3
5	4+3+3+3+3	1+3+3+3+3+3
…		
30	4+3.29	1+3.30

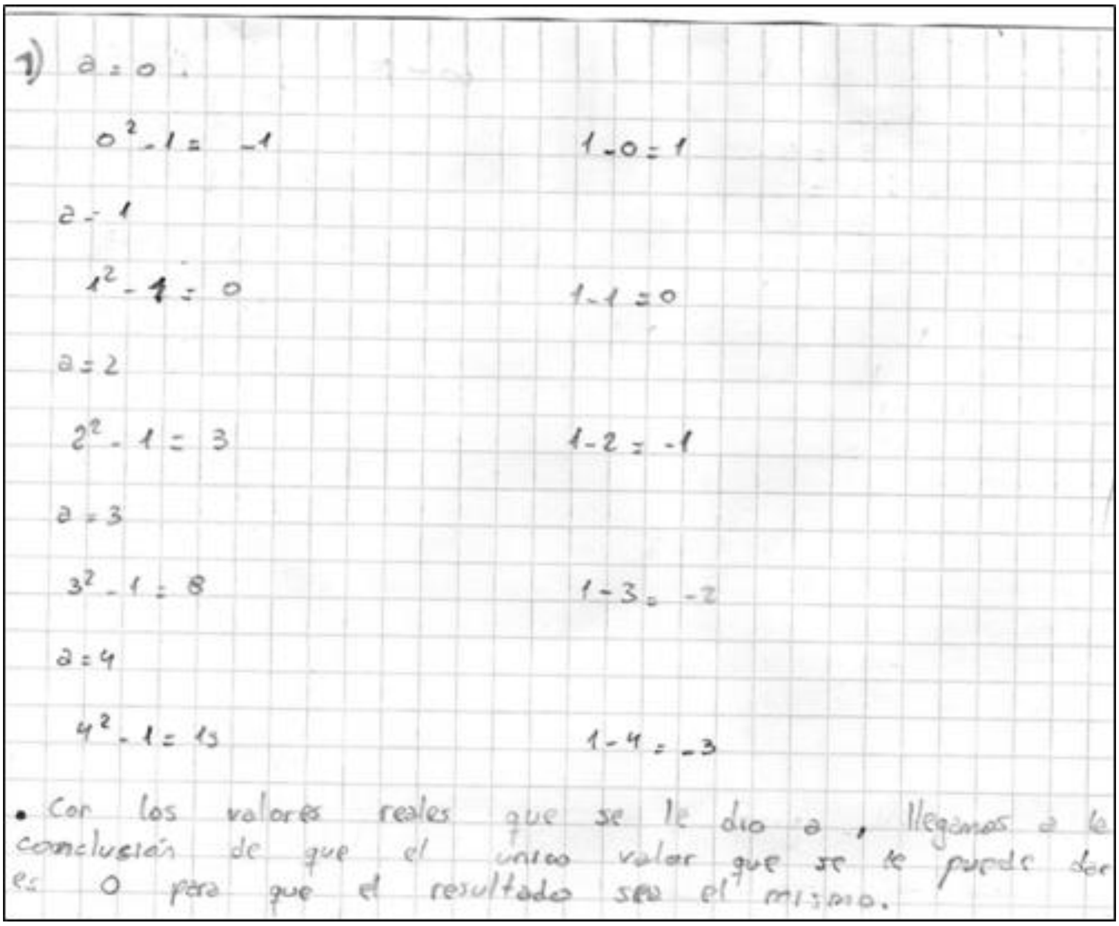
A partir de la percepción de la regularidad obtenida podría plantearse la siguiente generalización al considerar cómo se calcula la cantidad de palillos necesarios para la figura que ocupa el lugar n: $S_n = 4 + 3.(n - 1)$. Como puede observarse en la tabla, podría plantearse otra estrategia de cálculo que invitaría a pensar en una expresión equivalente a la dada: $S_n = 1 + 3.n$. Aquí se estaría recurriendo a la heurística ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: algebraico.*** Para corroborar si la fórmula obtenida funciona, los primeros lugares puede recurrirse a ***verificar usando casos particulares.***

Luego de llegar a la fórmula la misma puede usarse para calcular la cantidad de palillos necesarios para construir la figura número 75: $S_{75} = 1 + 3.75 = 226$. Asimismo puede usarse para plantear la ecuación resultante de considerar cuál debería ser el valor de n para que la figura que ocupe el lugar *n* tenga 299 palillos: 1+3n=299. En este caso *n* = 99,33333… por lo que no es posible armar una figura que tenga exactamente 299 palillos. Para determinar que la figura que tiene 58 fósforos ocupa el lugar número 19 puede apelarse a la tabla realizada (que llegó hasta el lugar 30) o puede recurrirse al planteo de una ecuación, de la misma manera que se hizo con el caso anterior.

2.5. Resultados obtenidos

Luego de analizar las resoluciones planteadas por los estudiantes y a partir de comentarios realizados por algunos alumnos, en los que expresaron que las actividades presentadas les resultaron difíciles, podría decirse que las situaciones presentadas en el test generaron un bloqueo inicial en los alumnos, condición necesaria para ser consideradas problema.

En la actividad 1 se encontró que fueron utilizadas las heurísticas: ***Considerar casos particulares*** (dándose en 7 oportunidades) y ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)*** (en la mayoría de los casos). Las restantes heurísticas no fueron utilizadas en ningún caso. Se muestra a continuación un ejemplo donde se puede visualizar las heurísticas mencionadas:



1) $a = 0$

$0^2 - 1 = -1$ $\quad$ $1 - 0 = 1$

$a = 1$

$1^2 - 1 = 0$ $\quad$ $1 - 1 = 0$

$a = 2$

$2^2 - 1 = 3$ $\quad$ $1 - 2 = -1$

$a = 3$

$3^2 - 1 = 8$ $\quad$ $1 - 3 = -2$

$a = 4$

$4^2 - 1 = 15$ $\quad$ $1 - 4 = -3$

• Con los valores reales que se le dio a, llegamos a la conclusión de que el único valor que se le puede dar es 0 para que el resultado sea el mismo.

Ilustración 1: Solución del alumno 1 de la actividad 1

Como puede observarse en la resolución escrita (Ilustración 1), este alumno evalúa distintos valores en la variable "*a*" pero asocia la tarea de comparar solo con el análisis de la relación de igualdad entre las expresiones. Es decir que recurre a la heurística de ***considerar casos particulares*** para analizar la relación entre ambas expresiones.

En la siguiente resolución (Ilustración 2) el alumno plantea la ecuación que resulta de igualar ambas expresiones. De esta manera apela a la heurística ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)***. Al igual que en la resolución anterior la comparación de las expresiones se reduce al análisis de la relación de igualdad. Por otro lado, como puede observarse en su respuesta, la misma es errónea pues no recoge el resultado que obtuvo: los valores de a para los que ambas expresiones son iguales.

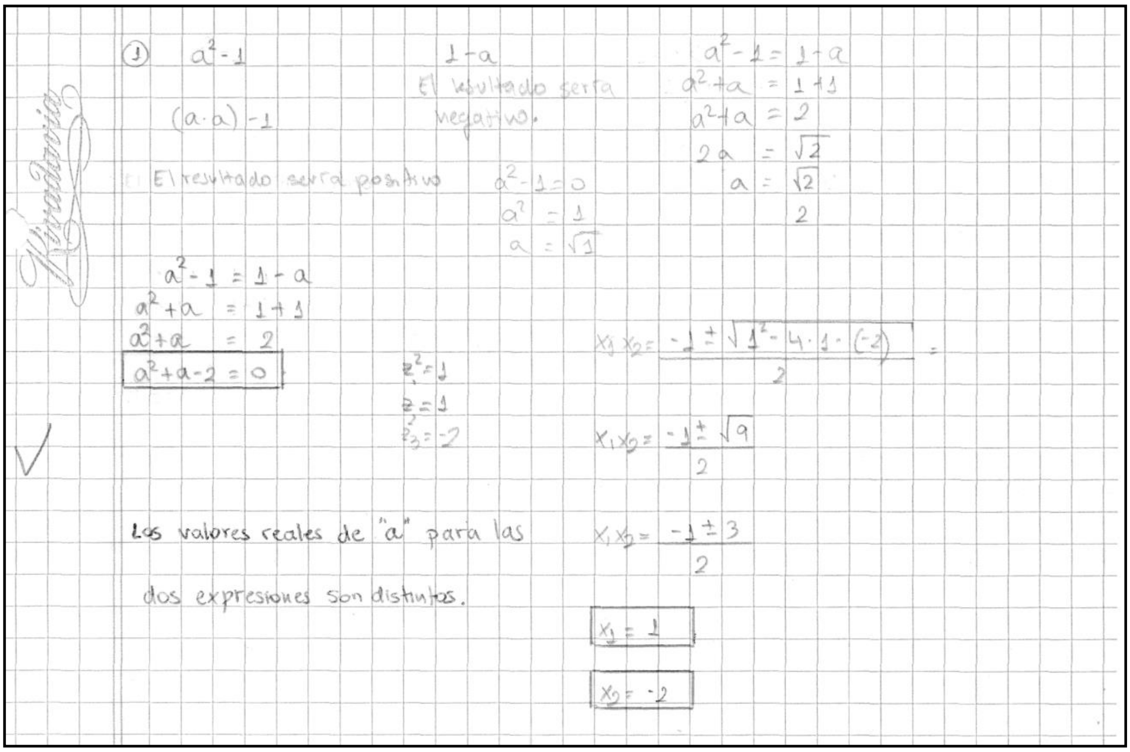


Ilustración 2: Solución del alumno 2 de la actividad 1

En la actividad 2 se utilizaron las heurísticas: ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: algebraico, numérico*** y en todos los casos los alumnos han ***Considerado casos particulares.*** En las siguientes resoluciones (Ilustración 3, 4 y 5) escritas se visualizan dichas heurísticas:

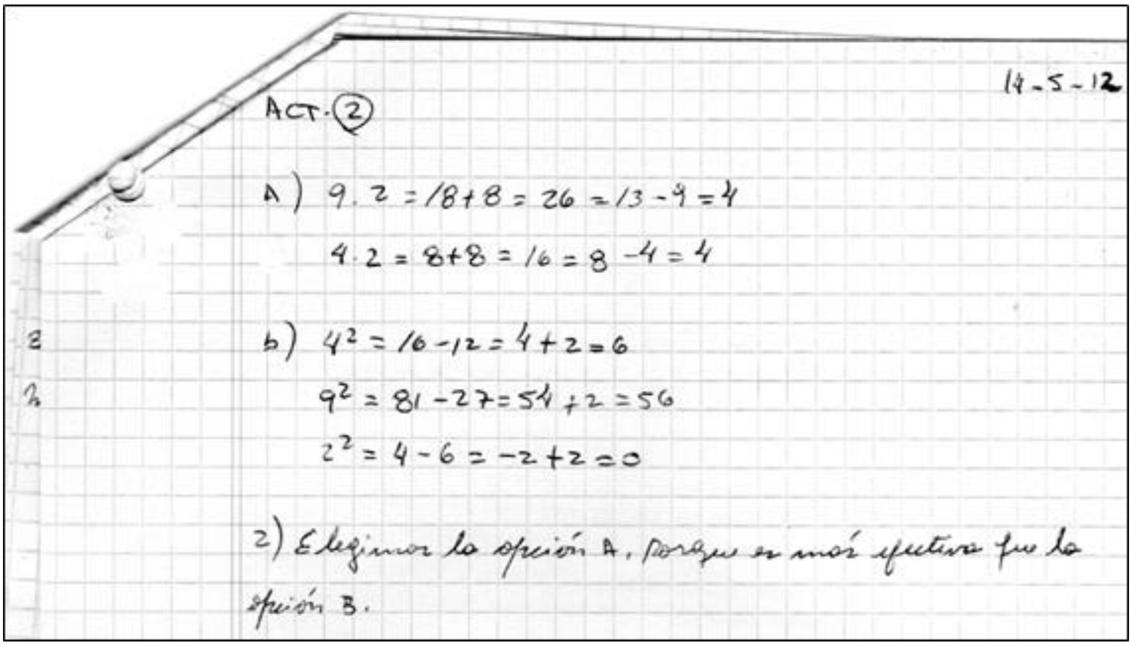


Ilustración 3: Solución de alumno 1 de la actividad 2

Como puede observarse en el escrito (Ilustración 3), el alumno probó con números naturales al azar pudiéndose afirmar que recurrió a la heurística ***Considerar casos particulares***. En la primera opción encontró que en esos casos el truco funciona, análogamente para la segunda opción también prueba con valores, es decir ***Considerar casos particulares***, algunos coincidentes con el caso anterior, otros no, pero encontrando en este segundo caso, que existen valores en los que el truco no se cumple. En su respuesta plantea que el primer truco es "más efectivo" pero no justifica. Evidentemente, no advierte que el probar con dos casos no le alcanza para garantizar la "efectividad" del truco en otros casos aunque sí se da cuenta de que el segundo truco no es efectivo puesto que "falla" en dos de los casos en los que probó.

En la resolución que sigue (Ilustración 4) puede observarse que el alumno también recurrió a ***Considerar casos particulares***. Para el primer truco comprueba que en 4 casos distintos el truco funciona, aunque no elabora ninguna respuesta al respecto. Para el segundo truco prueba con varios números entre los cuales están los valores para los cuales el truco funciona. Tampoco elabora una respuesta en relación a los resultados obtenidos.

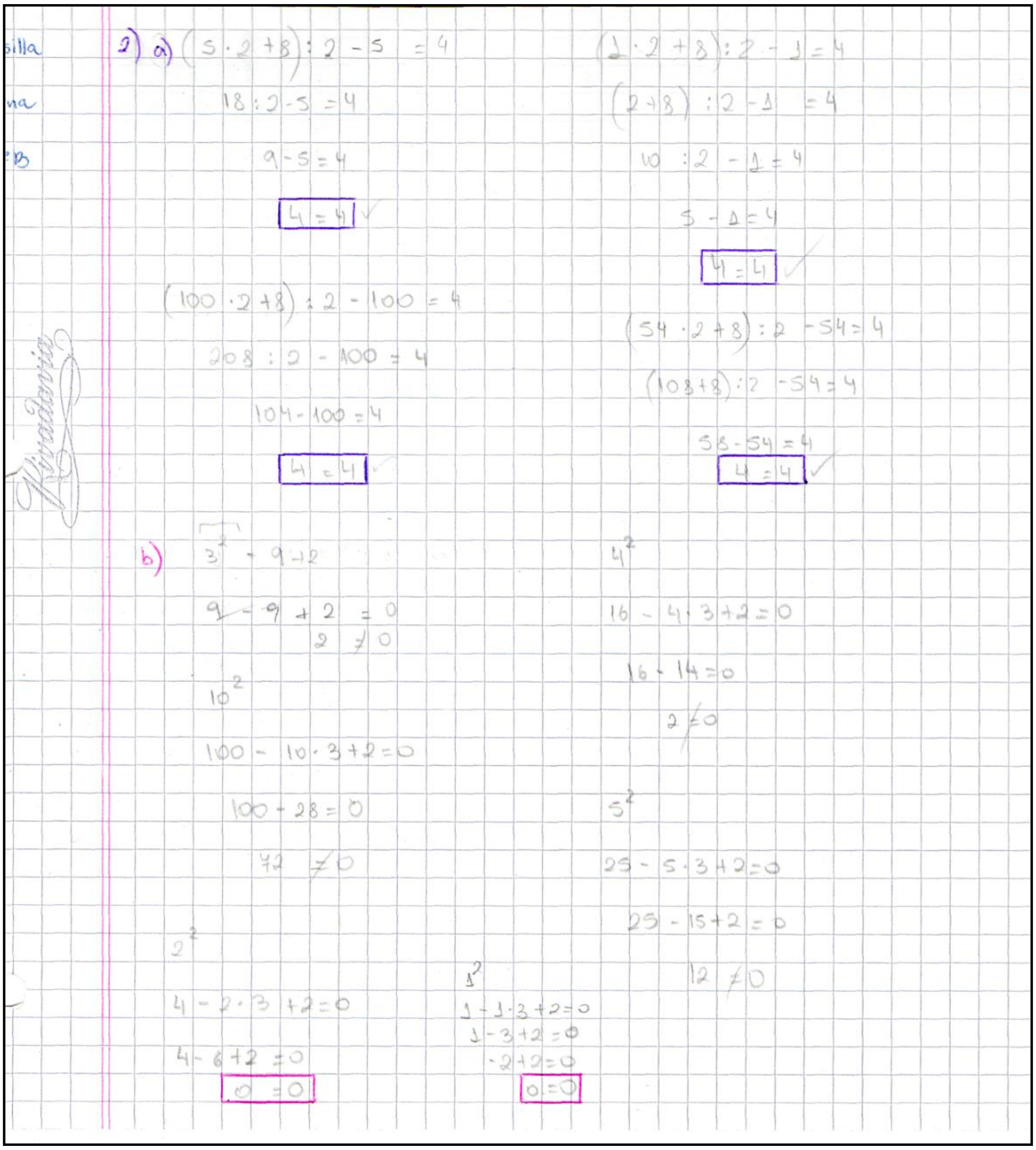


Ilustración 4: Solución del alumno 2 de la actividad 2

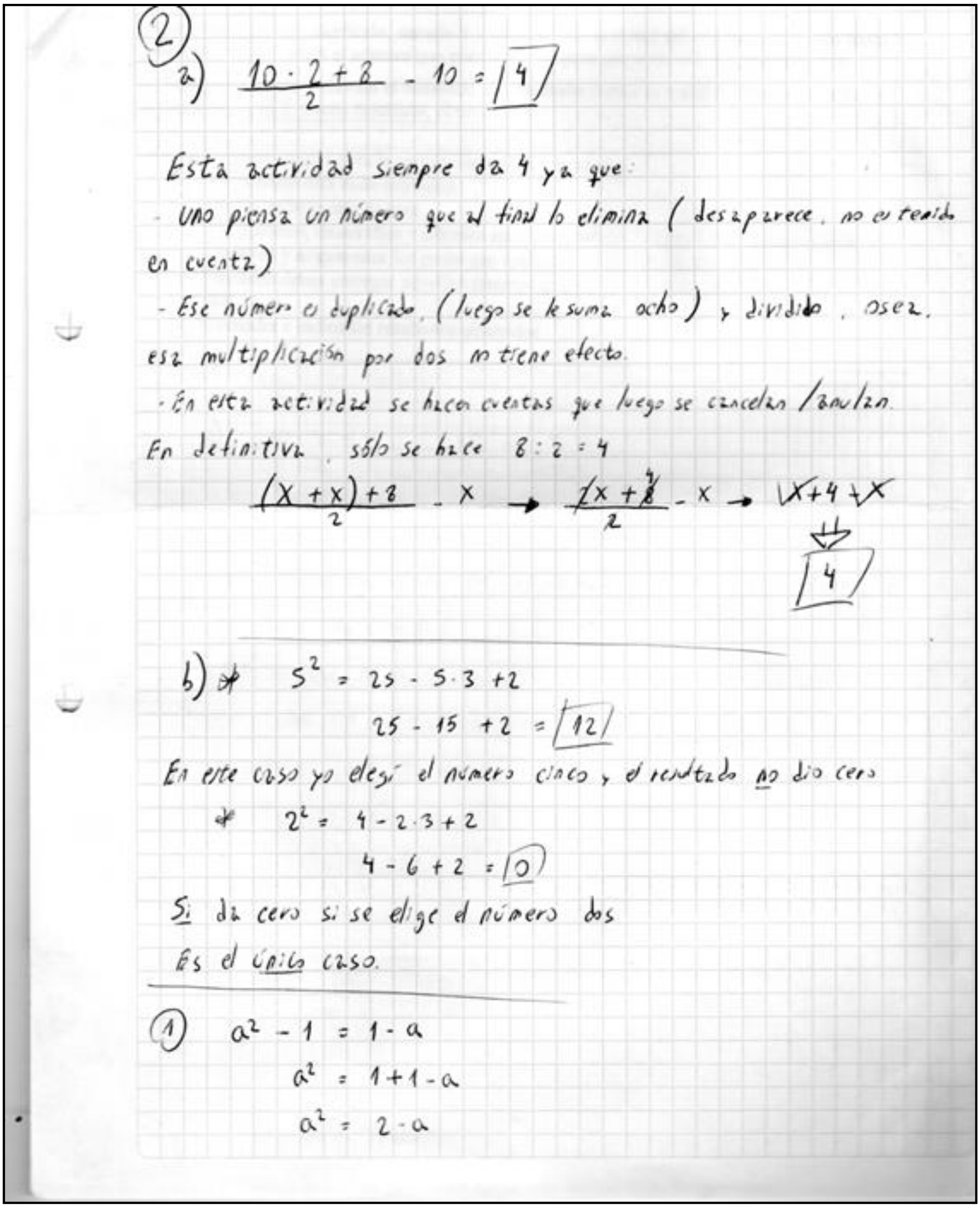


Ilustración 5: Solución del alumno 3 de la actividad 2

En la tercera resolución (Ilustración 5) puede observarse que el alumno prueba con un número que verifica el primer truco, de esta manera ***considera casos particulares***. Luego recurre a plantear las operaciones implicadas en dicho truco de manera general, apelando a *x* para representar un número genérico. En este caso puede identificarse el uso de la heurística

Utilizar un método de expresión o representación adecuada: algebraico, no para el planteo de una ecuación sino para el planteo de una expresión algebraica que representa de manera general los cálculos a realizar. Se da cuenta que utiliza operaciones que luego se cancelan y fue por ello que el resultado es siempre 4. Puede decirse que está aplicando la heurística: ***Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción).***

En la actividad 3 los estudiantes desplegaron una mayor diversidad de heurísticas, algunas de las cuales no fueron puestas en juego en los problemas anteriores tales como ***Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos*** o ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: numérico*** (en tabla) y ***verbal*** como puede observarse en las resoluciones que mostramos a continuación. En todas ellas los estudiantes arriban a las respuestas esperadas.

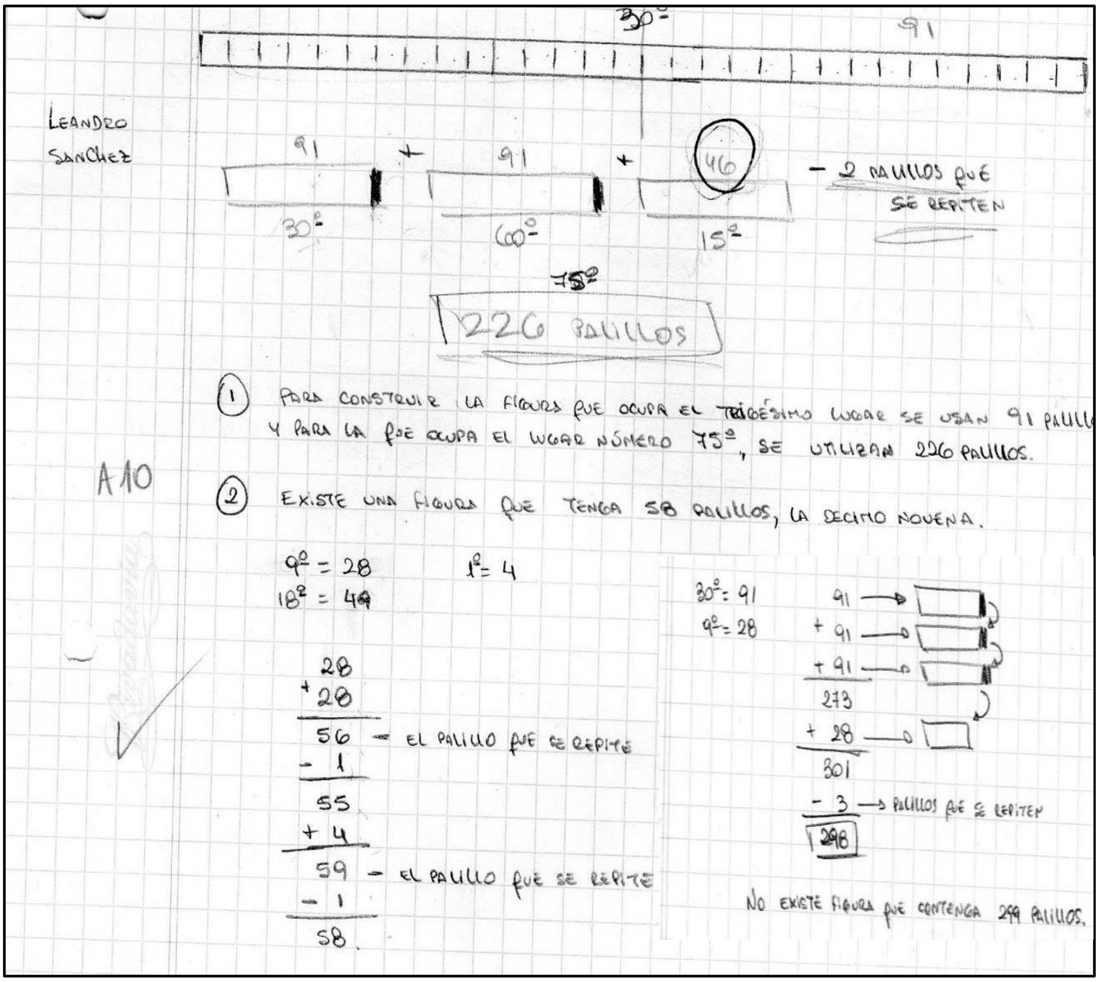


Ilustración 6: Solución del alumno 1 del actividad 3

En la resolución anterior (Ilustración 6) puede observarse que el alumno apeló a ***Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos*** para responder a las preguntas iniciales. Para la primera realiza un dibujo con las 30 figuras y a partir de ello determina la cantidad de palillos. Pero para la segunda realiza solo un esquema que representa las 75 figuras como ayuda para determinar la cantidad de palillos necesarios. Para las siguientes preguntas realiza cuentas a partir de una cierta estrategia para contar la cantidad de palillos, la cual representa y explica mediante esquemas.

Por su parte, en la resolución que sigue (Ilustración 7) puede observarse que el alumno recurrió a ***Analizar casos particulares para buscar regularidades*** y a ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: numérico*** (en tabla) para determinar la cantidad de palillos necesarios según el lugar que ocupa la figura. A partir de la tabla elabora una estrategia para contar palillos que describe en forma verbal haciendo uso de la heurística ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal***.

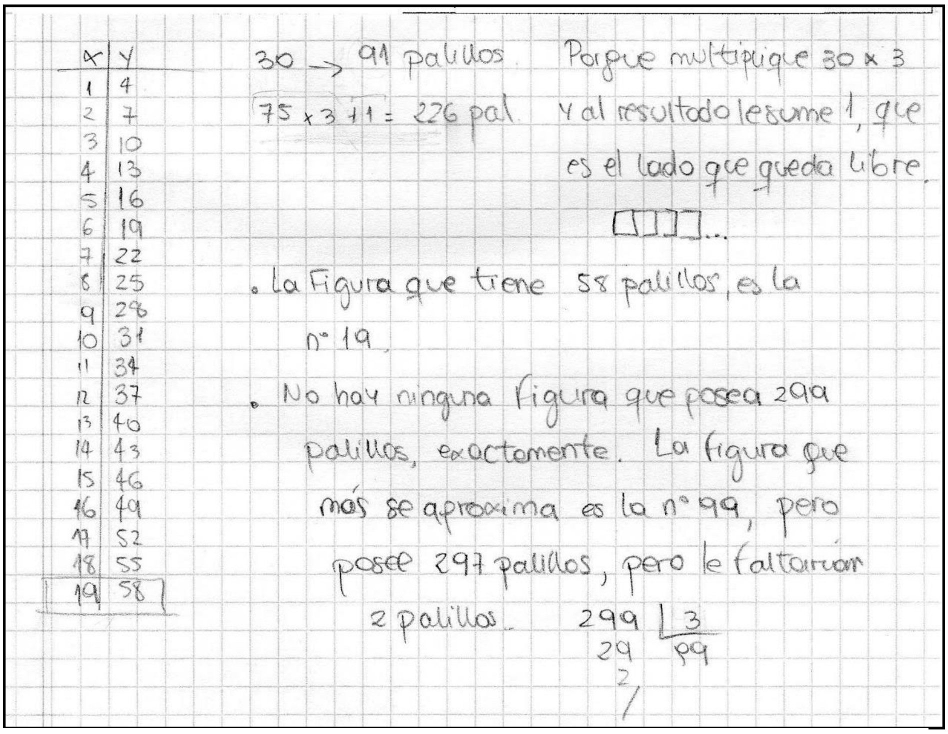
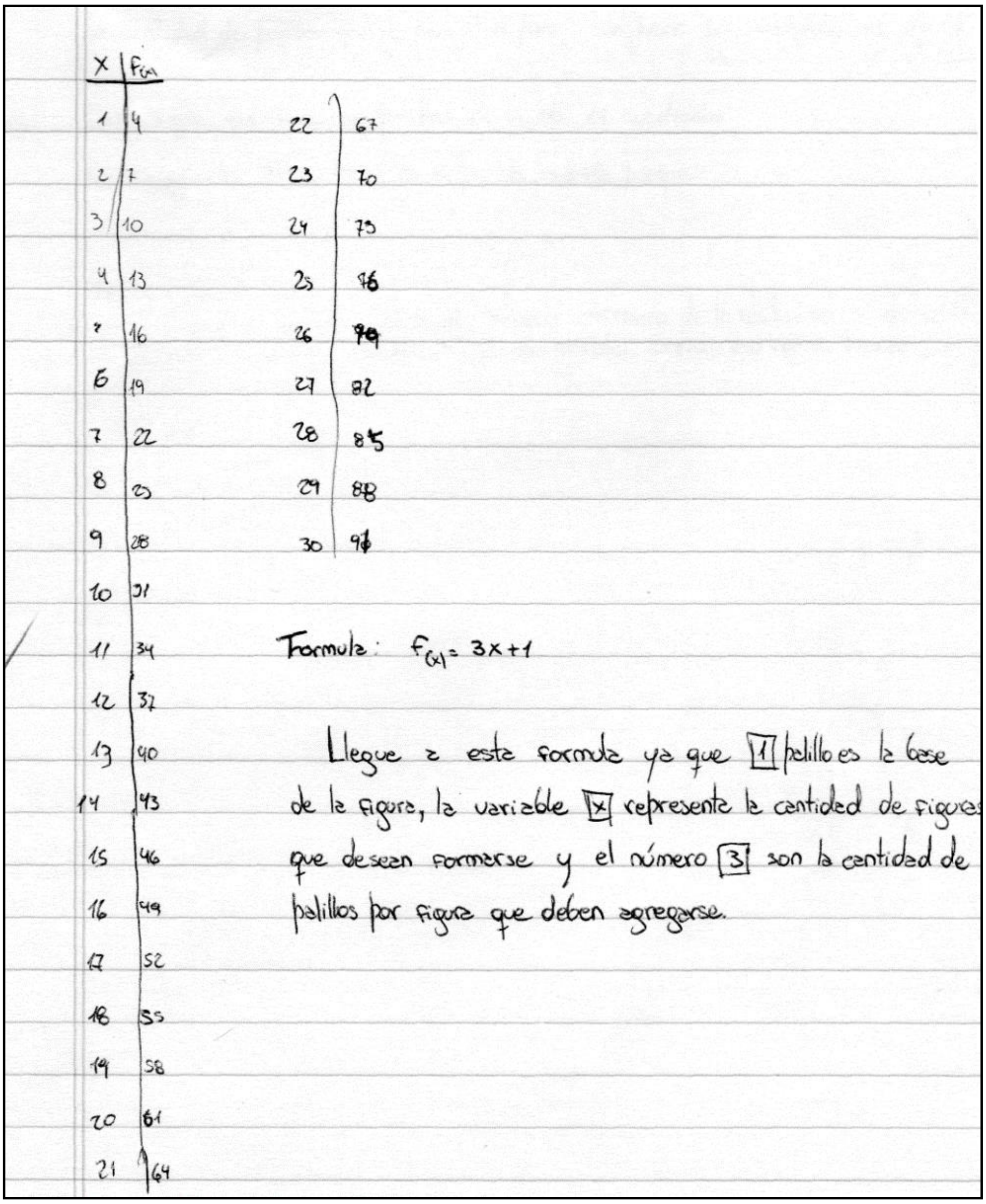


Ilustración 7: Solución del alumno 2 de la actividad 3

En la resolución que se presenta a continuación (Ilustración 8) el alumno ha trabajado sobre el problema de manera similar al caso anterior al ***Analizar casos particulares para buscar regularidades (inducción)*** y ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: numérico*** (en tabla) para determinar la cantidad de palillos necesarios según el lugar que ocupa la figura**.** Sin embargo en esta resolución el alumno planteó en lenguaje simbólico la generalización de los cálculos realizados en la tabla. De esta manera, recurrió a ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: algebraico.*** Es a partir de esta expresión simbólica que resuelve y responde a las preguntas planteadas como se muestra a continuación:

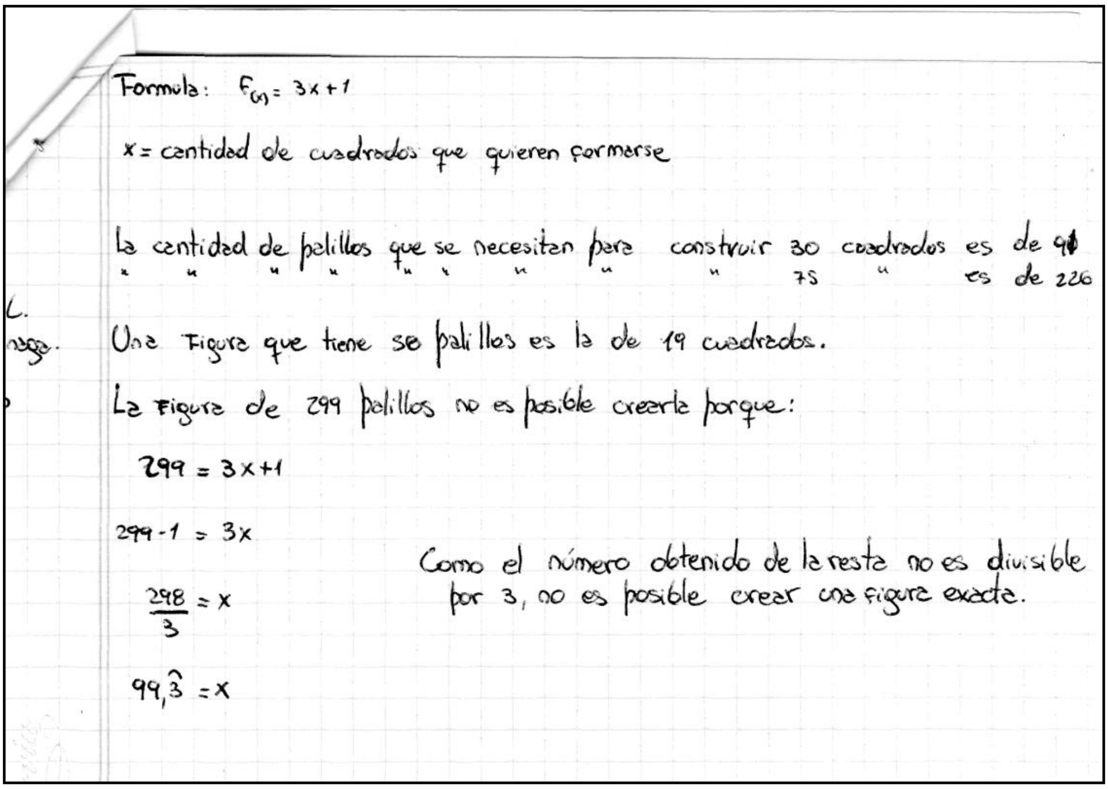


x	$f_{(x)}$
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19
7	22
8	25
9	28
10	31
11	34
12	37
13	40
14	43
15	46
16	49
17	52
18	55
19	58
20	61
21	64
22	67
23	70
24	73
25	76
26	79
27	82
28	85
29	88
30	91

Formula: $f_{(x)} = 3x+1$

Llegue a esta formula ya que $\boxed{1}$ palillo es la base de la figura, la variable $\boxed{x}$ representa la cantidad de figuras que desean formarse y el número $\boxed{3}$ son la cantidad de palillos por figura que deben agregarse.

Ilustración 8: Solución de la actividad 3 del tercer alumno



Formula: $f_{(x)} = 3x+1$

x = cantidad de cuadrados que quieren formarse

La cantidad de palillos que se necesitan para construir 30 cuadrados es de 91
" " " " " " " " " 75 " es de 226

Una figura que tiene 58 palillos es la de 19 cuadrados.

La figura de 299 palillos no es posible crearla porque:

$299 = 3x+1$

$299-1 = 3x$

$\frac{298}{3} = x$

$99,\hat{3} = x$

Como el número obtenido de la resta no es divisible por 3, no es posible crear una figura exacta.

Ilustración 9: Continuación de la solución del alumno 3 de la actividad 3

Otra manera de pensar el problema es bajo una mirada funcional. En el último registro (Ilustración 10) puede observarse que una alumna apela a ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema),*** interpretando a la relación encontrada entre la posición y la cantidad de palillos como una función lineal. Si bien la interpretación es adecuada, tuvo dificultades al definir las variables relacionadas. Según su definición, en la posición 1 tiene una figura con 7 palillos en lugar de 4 fósforos. No advierte que si la variable independiente *x* representa el lugar que la figura ocupa, entonces su fórmula debería ser $f(x) = 4 + (x\text{-}1).3$. En esta resolución también se recurre a ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: algebraico.***

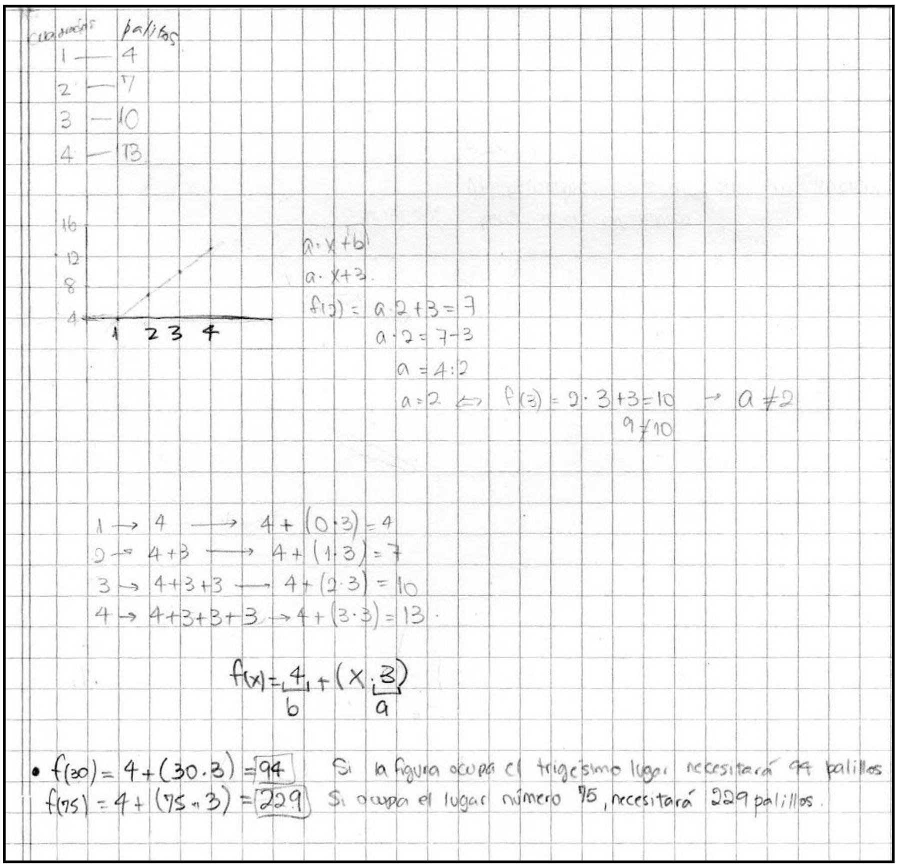


Ilustración 10: Solución del alumno 5 de la actividad 3

2.6. Conclusiones generales

En relación con las situaciones propuestas en el test, puede afirmarse que las mismas generaron una cierta resistencia a los estudiantes puesto que, si bien todas se basaban en temas abordados en años anteriores de escolaridad, en general no se encontraron respuestas de tipo rutinarias o algorítmicas; de esta manera podemos decir que las mismas parecen responder a un proceso de búsqueda y exploración, y no a un proceso mecanizado. En particular en la actividad 3 los alumnos realizaron resoluciones que involucraron un despliegue de diversas estrategias y formas de resolución, lo que evidencia que, si bien varios de ellos resolvieron satisfactoriamente la situación, no contaban con respuestas automatizadas ante la misma.

Muchas de las heurísticas identificadas como pertinentes y útiles en el análisis previo de los potenciales problemas no fueron utilizadas por los estudiantes. Por ejemplo, prácticamente ningún alumno consideró que para la segunda actividad resultaba útil la heurística ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico y/o algebraico.*** Por otro lado, en casi ninguna de las resoluciones fue utilizada la estrategia ***verificar usando casos particulares***, que en algunos casos habría ayudado a detectar errores en las resoluciones. Asimismo, pocos fueron los que apelaron a ***Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos*** y ***Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción)***.

La mayoría de los alumnos recurrió a ***Considerar casos particulares*** en las resoluciones, sin embargo pocos reconocieron las limitaciones de dicha estrategia para garantizar las respuestas en el problema 2. En varios casos se observó el uso de la heurística ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)***.

A partir de lo observado en el diagnóstico se plantea en el capítulo siguiente una propuesta didáctica que tiene como objetivo plantear la enseñanza de algunas de las heurísticas que fueron menos utilizadas por los estudiantes en la resolución del test tales como ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico, verbal o algebraico, verificar usando casos particulares, Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos*** y ***Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción)***. Además, se buscará fomentar la reflexión sobre los alcances y limitaciones de algunas de las estrategias que sí fueron usadas tales como ***Considerar casos particulares***. Cabe destacar que para el diseño de los potenciales problemas de la propuesta didáctica se han considerado las características de los problemas presentados en el diagnóstico, aunque teniendo en cuenta que los mismos deben ser lo suficientemente diferentes de manera de cuidar la no familiaridad necesaria para que el bloqueo inicial ocurra.

CAPÍTULO 3: PROPUESTA DE ENSEÑANZA

3.1 Introducción.

En este capítulo presentamos el diseño de una propuesta didáctica orientada a fomentar el aprendizaje de algunas de las heurísticas que no fueron utilizadas por los estudiantes del curso considerado frente a los problemas del diagnóstico o que, habiendo sido utilizadas, su uso no refleje un conocimiento acerca de las posibilidades y limitaciones de dichas estrategias en el proceso de resolución de problemas.

El capítulo inicia con el planteo del marco teórico a partir del cual se sustenta y fundamenta el diseño de la propuesta didáctica y finaliza con la presentación la propuesta, la cual asume el formato de un portfolio.

3.2. Consideraciones teóricas

La enseñanza de la Matemática a partir de la Resolución de Problemas (RP) ha tomado un auge muy importante en los últimos años, debido a que este tipo de quehacer fomenta el desarrollo del estudiante en las competencias matemáticas necesarias del ciudadano. Estas competencias refieren a la capacidad de hacer frente a problemas abiertos utilizando diversidad de estrategias que permitan explorar posibles soluciones.

En el Diseño Curricular se pone énfasis en propósitos que podrían considerarse afines a los intereses de la Resolución de Problemas (RP). Algunos de estos son:

- Fomentar el respeto por la diversidad de opiniones, así como una actitud abierta al cambio que permita elegir las mejores soluciones ante diferentes problemas matemáticos.
- Alentar a los alumnos para que valoren sus producciones matemáticas; realicen consultas; defiendan posturas; construyan hipótesis explicando construcciones matemáticas personales o ajenas.
- Evaluar los aprendizajes, vinculando los nuevos contenidos adquiridos con los anteriores (Diseño Curricular para la Educación Secundaria, Matemática, Ciclo Superior, Sexto año, p. 11).

De esta manera consideramos apropiado pensar para la Educación Secundaria propuestas de enseñanza que retomen estos intereses y favorezcan el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas.

Acordamos con Vilanova *et al,* (2001). cuando dice "*saber matemática es hacer matemática*" (p.3). Entendemos que esta postura lleva a comprometerse con una forma de enseñar Matemática a partir de fomentar en los estudiantes la búsqueda personal de posibles caminos de resolución, valorando tanto que resulten correctos como no y reflexionando sobre lo realizado con el fin de lograr autonomía, confianza y entusiasmo por aprender.

El docente hoy por hoy no puede seguir siendo un mero transmisor de conocimientos. Por el contrario debe ser un forjador de individuos capaces de integrarse en la sociedad a través de su capacidad de resolver problemas.

El desafío para todos los docentes que se inclinan por esta opción didáctica radica en acercarse a posibles respuestas a la pregunta ¿Cómo se enseña y se aprende a resolver problemas? En este capítulo intentamos ofrecer una posible respuesta a tan compleja pregunta. Presentamos una propuesta didáctica basada en la convicción de que para aprender a resolver problemas hay que enfrentarse a los problemas e intentar resolverlos. Así, consideramos que el aprendizaje de esta tarea no se promueve a través de clases de tipo expositivas en las que se explica a los alumnos cómo se resuelve un problema y presentando las heurísticas a modo de "recetas" para resolver problemas. Todo lo contario. Consideramos, tal como sostiene Rodríguez (2012), que el aprender a resolver problemas es una construcción personal, propia de cada sujeto, puesto que ante un mismo problema cada individuo toma caminos diferentes y apela a un conjunto de estrategias, conformado a partir de la propia experiencia en la tarea de resolver problemas. Es decir, consideramos que el aprender a resolver problemas no se alcanza ni a través de una explicación ni viendo a otro resolver problemas; solo se logra a partir de la propia experiencia y de la reflexión sobre lo realizado.

Vale aclarar que si bien consideramos que la tarea de resolución de problemas es personal y que la reflexión sobre la propia práctica es individual, también consideramos valioso el intercambio entre pares: el analizar qué estrategias usó un compañero y compararlas con las propias puede ser muy productivo en el aprendizaje de cómo resolver problemas. Puede decidirse tomar en cuenta ciertas estrategias usadas por otro resolutor, pero esta decisión es individual y fruto de la reflexión basada en la comparación de distintas formas de resolver. De esta manera, reconocemos la importancia de lo social, de compartir y conocer cómo otros resuelven para enriquecer lo que uno "trae".

El aprendizaje es un proceso dinámico donde los estudiantes construyen su conocimiento partiendo de sus conocimientos previos, de su propia práctica, corrigiendo errores, e intercambiando ideas. Esto supone un cambio de metodología en la enseñanza y por lo tanto también una postura diferente a una forma de mirar o evaluar logros y desaciertos. Aparece la idea de una evaluación alternativa, opuesta a la evaluación tradicional, un mecanismo activo donde siempre haya un feedback entre el docente y el alumno, entre cada alumnos y sus pares, etc. Ese proceso se va alimentando a través de las distintas tareas que va realizando el alumno, reconociendo sus aciertos, corrigiendo errores y reflexionando sobre su propia práctica.

Bajo esta perspectiva, entendemos que no basta con solo resolver para lograr aprendizajes acerca de cómo resolver problemas, es necesario realizar una reflexión acerca de las estrategias utilizadas y los procesos llevados a cabo, tanto de lo propio como de lo ajeno: si son adecuadas o no las estrategias usadas, cómo se puede mejorar y/o completar el proceso, qué errores se cometieron y cómo podrían superarse, qué estrategias son más óptimas que otras, si permiten llegar a la solución o no, cuáles son convenientes según el tipo de problema, etc. A partir de esta reflexión se genera un conocimiento de tipo metacognitivo acerca de la tarea de resolver problemas. Así, los estudiantes comienzan a ser conscientes de las distintas estrategias disponibles. Esa conciencia permite decidir cuáles son más convenientes o adecuadas según el problema o la respuesta requerida. Tal como sugiere González (1996), la dimensión metacognitiva es central en este aprendizaje y tiene que ver con la conciencia sobre algunas de las siguientes cuestiones:

- las fortalezas y debilidades como resolutor; por ejemplo, algún alumno al ver que un compañero resolvió usando símbolos, puede decir “no me sale resolverlo de esa manera o no entiendo cuándo usar letras”, “en general me va bien con los problemas en los que puedo hacer gráficos y esquemas”
- las estrategias disponibles y la utilidad o las limitaciones de las mismas: por ejemplo un estudiante podría advertir que “a veces hacer gráficos puede servir” o reconocer que “en algunas situaciones los ejemplos numéricos no alcanzan”.

Todas estas reflexiones dan cuenta de un conocimiento de tipo metacognitivo. Acordamos con Rodríguez (2012) en que para ser un buen resolutor es necesario

> … además de resolver problemas y utilizar heurísticas, que ellos (los estudiantes) conozcan cómo trabajan, controlen sus acciones y en función de los resultados que van obteniendo, ajusten, modifiquen, refuercen, etc., en definitiva autorregulen su proceder. Esto último se enmarca en tareas de reflexión metacognitiva que el estudiante debería realizar (p. 161).

Es central reconocer que este tipo de aprendizajes se logra a largo plazo y con un trabajo sostenido y sistemático en resolver problemas y reflexionar sobre los procesos. La propuesta didáctica que aquí presentamos no pretende abarcar todo este proceso, por el contrario, intenta mostrar un posible camino a seguir. Bajo ningún punto de vista consideramos que con esta propuesta se alcanzan de manera acabada los aprendizajes buscados. Sí estamos convencidos de que siguiendo de manera sostenida en el tiempo el camino iniciado con esta propuesta, los estudiantes pueden mejorar sus desempeños frente a la resolución de problemas.

La propuesta que presentamos adopta el formato de un *Portfolio*. Retomando lo planteado en el capítulo I acerca del uso didáctico del portfolio acordamos con los distintos autores mencionados (Rodríguez, 2012, Gregori, 1997, Prendes Espinoza y Sánchez Vera, 2008) que posicionarse en un enfoque de enseñanza que valora la construcción del conocimiento por parte de los alumnos debe llevar a pensar que los procesos de enseñanza y aprendizaje tradicionales no son los más adecuados. Por eso entendemos que el diseño de un portfolio para la presente propuesta didáctica resulta sumamente apropiado pues permite atender a las particularidades del enfoque de la Resolución de Problemas presentadas anteriormente. Tal como sostiene Prendes Espinoza, Sánchez Vera (2008):

El portafolio educativo como una metodología de enseñanza (…) implica algo más que la mera recogida de trabajos (…) implica una reflexión, una recogida de experiencias, que permite acercar su realidad a la persona destinataria del portafolio, permite analizar, valorar, revisar, evaluar,...

Un portafolio es un registro del aprendizaje dirigido al trabajo del alumno y a su reflexión sobre el propio desempeño. El intercambio constante y constructivo que genera esa práctica e implementación es una muestra fehaciente del progreso que ese alumno va realizando.

En el siguiente apartado presentamos el diseño del portfolio, que se sustenta en la postura descripta en los párrafos anteriores y que retoma los conceptos teóricos adoptados en el capítulo 2: la noción de problema para un sujeto, como una situación que provoca un bloqueo inicial y para la cual no se tienen respuestas mecanizadas (Colombano *et al*, 2009) , y la de Heurísticas, entendidas como "estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis, la representación y la transformación del problema que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a hacer progreso hacia su solución" (Verschaffel, 1999, p.217).

3.3. Diseño del portfolio

El portfolio que se presenta consiste de una colección de trabajos, donde cada uno incluye:

- uno o dos potenciales problemas para los estudiantes "destinatarios", cuya resolución implica el uso de algunas de las heurísticas identificadas en el diagnóstico como menos disponibles u observadas como disponibles pero con una carencia en la comprensión de sus alcances y limitaciones.

- una serie de actividades de reflexión sobre los procesos seguidos y que favorecen la comparación entre las distintas estrategias utilizadas.

Es un tipo de portfolio que permite al estudiante (y al docente) observar su propia evolución en el aprendizaje en cuanto a las estrategias heurísticas: qué estrategias utilizó inicialmente, qué estrategias incorporó de sus compañeros, qué aprendió acerca de la resolución de problemas, qué dificultades tiene, qué fortalezas, entre otras cuestiones.

Los distintos potenciales problemas fueron pensados como situaciones que involucran la observación, el análisis, la elaboración y validación de conjeturas, la investigación y la experimentación así como también el armado de un plan de trabajo para resolverlos. En su diseño se siguieron los mismos criterios para la elaboración de las situaciones del diagnóstico y, además, se buscaron características similares para los enunciados puesto que en el diagnóstico se observó que los mismos generaron incertidumbre y búsqueda auténtica (no respuestas mecanizadas), aspectos necesarios para que la situación constituya un verdadero problema. Es decir, se buscó que las resoluciones no se pudieran obtener de manera inmediata y en cambio se requiriera la elaboración de un método de resolución propio. A continuación se presentará el diseño del portfolio, presentando las consignas y enunciados de cada trabajo que conforma dicho portfolio, el análisis en términos de heurísticas útiles para la resolución de los potenciales problemas y la descripción de la intencionalidad didáctica de cada trabajo.

3.4. Presentación del portfolio

3.4.1. Propósitos y objetivos

En este portfolio se busca conformar un registro de los distintos adelantos en cuanto a la tarea de resolver problemas y al uso de heurísticas en dicha tarea. Tal como se comentó anteriormente el foco del proceso de aprendizaje está puesto en aquellas heurísticas que no han sido usadas por los estudiantes del curso considerado en la resolución de los problemas del diagnóstico. Es intención del portfolio que queden explicitadas las respuestas como así también la reflexión sobre los aciertos o dificultades y sobre los aportes de otros resolutores.

De esta manera los objetivos que se persiguen son:

- que los estudiantes adquieran estrategias heurísticas a partir de la resolución de diversos problemas y de la reflexión sobre el proceso.
- que los estudiantes, a partir de la comparación entre las propias resoluciones y las ajenas, identifiquen aportes de sus compañeros sobre formas de resolver problemas y uso de estrategias.
- que los estudiantes reflexionen sobre las propias resoluciones, las valoren e identifiquen en qué aspectos deben mejorarlas.

3.4.2. Estructura

Atendiendo a las consideraciones teóricas desarrolladas en el correspondiente apartado diseñamos el portfolio que aquí presentamos. El mismo consiste en el armado de una carpeta individual con trabajos prácticos conformados por potenciales problemas y por consignas cuyo propósito es favorecer una reflexión metacognitiva acerca de las estrategias utilizadas y las acciones implementadas para encarar la resolución de los problemas.

La dinámica de trabajo durante la implementación del portfolio se basa en una primera instancia de trabajo individual de cada estudiante con los potenciales problemas, planteada como tarea fuera de la clase. Tal como sostiene Rodríguez (2012) consideramos importante que el primer encuentro con el problema sea individual puesto que, si se omite dicha instancia, se corre el riesgo de que el propio pensamiento sea "invadido" por el del otro. Esto impediría, por un lado, la elaboración de la propia resolución y por otro, la percepción de las propias fortalezas y debilidades. Sin embargo esto no inhabilita el trabajo grupal, puesto que la interacción con otros resolutores y el compartir lo pensado puede ser fructífero en la generación de nuevas ideas y en la evolución individual. Por ello, se plantea una segunda instancia en la que se comparten las distintas resoluciones y estrategias utilizadas por distintos estudiantes. Durante la puesta en común, se analizan y comparan las distintas estrategias y resoluciones. El docente en este momento de intercambio no debe validar las respuestas ni emitir juicios acerca de las resoluciones propuestas solo debe oficiar de mediador en el intercambio y "provocador" de la reflexión sobre lo planteado y de la comparación (como proceso personal e individual de cada estudiante) entre lo compartido por otros y la producción propia. La intención es que luego de la puesta en común los estudiantes trabajen nuevamente de forma individual sobre las consignas y preguntas de reflexión que apuntan a valorar la producción propia y compararla con las ajenas, a fin de mejorar, completar y tomar aporte de otros para repensar la resolución dada inicialmente. Finalmente se espera que elaboren una sistematización sobre las estrategias utilizadas y una autoevaluación de las propias resoluciones.

Es también intención de la puesta en común que los estudiantes identifiquen las estrategias puestas en juego, tanto por ellos mismos como por sus compañeros. En este intento de identificación las distintas estrategias son nombradas con distintos calificativos o nombres. Dado que una misma heurística podría ser nombrada de diferentes formas por distintos estudiantes, después de la puesta en común el docente podría proponer consensuar formas de nombrar a las heurísticas. En esta instancia podría introducir los nombres de las heurísticas (según se conocen en la teoría de RP), no de manera arbitraria sino a partir de lo propuesto por los estudiantes y con el objetivo de poder manejar cierto vocabulario en común. Nuevamente, es importante aclarar que la inclusión de los nombres de las heurísticas no se piensa a modo de clase expositiva en la que el docente explica las estrategias y presenta sus nombres, si no que se plantea un intercambio entre estudiantes y docente, basado en lo propuesto a partir de las resoluciones compartidas y con el claro objetivo de manejar un vocabulario común que simplifique y facilite la comunicación.

Trabajo práctico Nº 1

Primera parte (individual - tarea fuera de clase)

Resolver los siguientes problemas:

1) ¿Es posible encontrar valores reales de "*a*" para qué $(0{,}5)^a > 256$? En caso afirmativo, indicar cuáles son los valores que verifican la condición dada y en caso negativo, explicar por qué no es posible.

2) ¿Qué valores reales deberá tomar "*n*" para que la proposición $n^2 + 1 \geq 3n - 1$ sea falsa?

Describí los pasos de resolución utilizados para cada problema e identifica las estrategias que utilizaste para avanzar en la resolución.

La próxima clase realizaremos una puesta en común en la que se compartirán las distintas resoluciones realizadas por ustedes.

Segunda parte (tarea en clase y luego de la puesta en común)

Ahora que compartimos las resoluciones y pudiste ver cómo otros compañeros han resuelto los problemas: ¿Considerás que resolviste satisfactoriamente cada problema? si encontrás que alguna (o ambas) de tus resoluciones no es satisfactoria o presenta errores, ¿qué aspectos podrías cambiar? ¿Por qué? ¿Considerás que la resolución de algún compañero puede aportarte a tu resolución para mejorarla? ¿Qué aportes te llevas del intercambio? Escribí una reflexión sobre estos aportes incluyendo las resoluciones y estrategias usadas por tus compañeros que considerás útiles para la resolución de este problema.

Un esquema posible para organizar la reflexión podría ser:

	Problema 1: ¿Es posible encontrar valores reales de "a" para que $(0{,}5)^a > 256$? En caso afirmativo, indicar cuáles son los valores que verifican la condición dada y en caso negativo, explicar por qué no es posible.	**Problema 2**: ¿Qué valores reales deberá tomar "n" para que la proposición $n^2 + 1 \geq 3n - 1$ sea falsa?
Reescribí tu resolución: ¿qué estrategias usaste?		
Elaborá una reflexión sobre tu resolución y sobre las estrategias usadas: si son adecuadas o no, si el proceso de resolución está completo o no y si te permite tener certezas sobre la respuesta, si podrías mejorar, completar o cambiar tu resolución y cómo.		
Realizá un resumen de las distintas estrategias usadas por tus compañeros en ambos problemas y de los aportes en la puesta en común.		

Análisis de los problemas en término de heurísticas

Problema 1:

Una manera de encarar la resolución sería ***Considerar casos particulares*** y darle valores a a para analizar si la desigualdad se cumple o no. Podría armarse una tabla con varios valores positivos y negativos; por ejemplo con valores enteros desde -10 a 10, podría llegarse a la conjetura de que para valores menores a $a = -8$ se verifica la desigualdad planteada. Considerando que únicamente con la tabla de valores no es posible comprobar la afirmación realizada, se podría ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)*** y ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico*** para así, apelando a una interpretación funcional de la desigualdad, decidir qué valores la verifican. De esta manera pueden observar en el gráfico de la función exponencial cuya expresión es $y = 0{,}5^a$ que a medida que se toman valores mayores a -8 la función decrece y sus imágenes resultan menores a 256 y afirmar, por ello, que los valores que verifican la desigualdad son los menores a -8.

También podría apelarse a la estrategia ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)*** planteando la resolución analítica de la inecuación $(0{,}5)^a > 256$.

Por último, podrían recurrir a ***verificar usando casos particulares*** a partir de seleccionar algunos valores pertenecientes al intervalo considerado en la respuesta para comprobar si los mismos cumplen con la condición.

Problema 2

Al igual que con el problema 1, una manera de encarar la resolución sería ***Considerar casos particulares***, dándole valores a n para analizar si la desigualdad se cumple o no. Podría armarse una tabla similar a la anterior, con valores enteros desde -10 a 10, pero en este caso solo tendrían valores para los cuales la proposición es verdadera. A partir de esta información, podría concluirse erróneamente que no es posible encontrar valores reales para los cuales la proposición resulta falsa. Por el contrario, si se analiza con mayor detenimiento, lo observado en la tabla podría llevar a proponer valores entre 1 y 2 puesto en dichos valores se verifica la desigualdad. Si se prueba con *n*=1,5 se encuentra que para dicho valor la desigualdad no se cumple, es decir, que $1{,}5^2 + 1 < 3 \cdot 1{,}5 - 1$. A partir de esto podría concluirse que los valores buscados son los pertenecientes al intervalo $(1;2)$, sin advertir que la sola verificación en dicho valor no alcanza para dar garantías sobre la conclusión obtenida.

Para complementar lo realizado anteriormente, se podría ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)*** al plantear la resolución de la inecuación cuadrática: $n^2 + 1 \geq 3n - 1$ y, a partir de obtener su conjunto solución, llegar a la conclusión de que la proposición planteada es falsa para los valores reales pertenecientes al intervalo $(1;2)$ .Otro uso de la misma estrategia podría ser interpretando a las expresiones involucradas como fórmulas de funciones a valores reales. Así se puede empezar por encontrar los valores para los cuales ambas funciones valen lo mismo, es decir, hallar las intersecciones entre los gráficos de ambas funciones. Para ello se plantea la ecuación cuadrática $n^2 + 1 \geq 3n - 1$, cuyo conjunto solución $S = \{1,2\}$ puede obtenerse aplicando la fórmula resolvente. Luego a partir de ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico*** se puede interpretar gráficamente la inecuación $n^2 + 1 \geq 3n - 1$ y determinar, a partir de conocer el conjunto solución de la misma, los valores para los cuales no se verifica dicha desigualdad. Es a partir de estos valores que se puede dar respuesta a la pregunta formulada en el problema. A su vez, se podría dentro de esta misma perspectiva, pero sin recurrir explícitamente a los gráficos, complementar el uso inicial de los ejemplos apelando a argumentos referidos a la continuidad de las funciones y al Corolario del Teorema de Bolzano.

Finalmente, se podría apelar a ***verificar usando casos particulares*** a partir de seleccionar algunos valores pertenecientes al intervalo considerado en la respuesta para comprobar si los mismos cumplen con la condición.

Intencionalidad didáctica del trabajo práctico

En este trabajo se busca problematizar el uso de la estrategia ***Considerar casos particulares*** pues imaginamos que para ambos problemas dicha estrategia sería uno de los primeros recursos utilizado por muchos de los estudiantes. En general, la exploración con valores numéricos suele ser un primer recurso para encarar la resolución de este tipo de problemas, como puede verse en Marino y Rodríguez (2008, 2009). Se busca que los estudiantes comiencen a advertir las posibilidades y las limitaciones del uso de ejemplos como insumo para elaborar la respuesta a un problema. En este caso, para el primer problema el uso de ejemplos numéricos presentados en una tabla que abarque valores enteros desde el -10 al 10 permitiría apreciar qué ocurre con la desigualdad planteada. Un estudiante podría elaborar su respuesta a partir de la observación de la información proporcionada por la tabla sin advertir que dichas evidencias resultan insuficientes para sustentar la afirmación de que es posible encontrar valores de *a* que verifican la desigualdad planteada y que los mismos son los números reales que pertenecen al intervalo $(-\infty,-8)$. De esta manera resulta interesante que el estudiante comience a advertir que el apelar a interpretar dicha desigualdad en el gráfico de una función a valores reales, cuya fórmula es la expresión exponencial presentada, puede complementar y reforzar la información brindada por la tabla y de esa manera tener mayores certezas acerca de su respuesta. Asimismo podría apelar a sus conocimientos sobre resolución de inecuaciones y también reforzar las evidencias para sostener su afirmación, es decir ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)***. De la misma manera puede realizarse un análisis para el segundo problema. La estrategia de tomar ejemplos numéricos permite tener una mirada sobre la relación entre las expresiones propuestas pero no garantiza la certeza de las afirmaciones elaboradas. Además, considerando que en general los valores que se toman son enteros esta estrategia podría invitar a elaborar conclusiones erróneas pues la desigualdad planteada solo es falsa para valores entre 1 y 2. Si en la tabla no se incluyen valores dentro del mencionado intervalo, el resolutor podría considerar que no es posible encontrar valores de n para que la proposición resulte falsa.

En ambos problemas resulta necesario discutir y reflexionar sobre los alcances y limitaciones del uso de la estrategia **"*considerar casos particulares*"** para obtener conclusiones.

Por otro lado, es interesante también diferenciar la mencionada estrategia de la de ***verificar usando casos particulares***. De esta manera se propicia una reflexión acerca de las estrategias basadas en lo numérico y cómo en muchos casos éstas deben ser complementadas con estrategias que impliquen recurrir a lo gráfico o a lo analítico. Esto último, además, implica el uso de una estrategia que resulta útil relacionada con recurrir a conocimientos previos referidos a temas que no necesariamente están involucrados explícitamente en el enunciado del problema. Así, es interesante que los estudiantes adviertan que una estrategia útil fue relacionar la desigualdad dada con sus conocimientos sobre funciones exponenciales o con la resolución de inecuaciones exponenciales de manera analítica, pueden ***Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)***.

Todas estas cuestiones deben ser tenidas en cuenta en la puesta en común cuando se compartan las distintas resoluciones realizadas. Si bien frente a ambos problemas podría ocurrir que se utilicen diferentes estrategias, es muy probable, tal como se afirmó anteriormente, que el uso de ejemplos aparezca en las resoluciones. El rol del docente no es valorar las resoluciones y estrategias presentadas sino provocar el análisis y la reflexión sobre las mismas. Así, se vuelve central preguntar acerca de las certezas de las respuestas dadas. Por ejemplo frente a resoluciones basadas en casos particulares el docente podría realizar preguntas del tipo: ¿Cómo podemos estar seguros de que la proposición es falsa para todos los valores reales entre 1 y 2? ¿No podría existir algún valor en este intervalo que no fue considerado entre los ejemplos dados y para el cual la proposición no es falsa? O frente al problema 1 también se puede cuestionar acerca de si no podría ser posible que exista algún valor menor que -8 para el cual no se verifique la desigualdad. Aquí se espera que los estudiantes adviertan las limitaciones del análisis de casos particulares y comiencen a buscar otras estrategias para complementar lo numérico. Así, si acaso algún estudiante recurrió a darle una interpretación funcional o analítica, se podría propiciar la comparación entre ambas estrategias en relación a los alcances de cada una.

Trabajo práctico N°2

Este segundo trabajo tiene el mismo diseño que el trabajo práctico N°1: dos etapas de trabajo, la primera individual, fuera de clase y de resolución del problema planteado y la segunda, de reflexión luego de una puesta en común grupal. El enunciado del problema con el que se trabaja es el siguiente:

Si aumento al doble el valor del lado de un cubo, ¿en cuánto aumentará su volumen?

El esquema para volcar las reflexiones sobre el problema tiene la misma estructura que la anterior:

	Si aumento al doble el valor del lado de un cubo, ¿en cuánto aumentará su volumen?
Reescribí tu resolución: ¿qué estrategias usaste?	
Elaborá una reflexión sobre tu resolución y sobre las estrategias usadas: si son adecuadas o no, si el proceso de resolución está completo o no y si te permite tener certezas sobre la respuesta, si podrías mejorar, completar o cambiar tu resolución y cómo.	
Realizá un resumen de las distintas estrategias usadas por tus compañeros para este problema y de los aportes de la puesta en común.	

Análisis de los problemas en término de heurísticas

Podrían decir sin explorar demasiado que el volumen también aumentará al doble. Podrían descartar esta hipótesis utilizando la estrategia "***verificar usando casos particulares*"**, por ejemplo si se tiene un cubo de 1 cm lado, su volumen será 1 cm^3, pero sí el lado vale 2 cm, su volumen será de 8 cm^3. De esta manera podrán descartar rápidamente su hipótesis.

Podrían apelar a ***analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción)*** y encontrar que al aumentar al doble el lado, el volumen queda multiplicado por 8.

Para plantear esta regularidad podrían ***utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal o algebraico*** y luego apelar a ***verificar usando casos particulares*** para reforzar la respuesta.

Intencionalidad didáctica del trabajo práctico 2

La propuesta de este trabajo práctico continua lo comenzado en el trabajo anterior. Invita a pensar qué ventajas y desventajas existen al utilizar las estrategias basadas en lo numérico. Es interesante reflexionar con los estudiantes que quizás al empezar con un valor no se pueda estimar la relación, pero al analizar otros ejemplos podrían observar que la relación que se cumple no es el doble. Frente a este hecho puede observarse que con el análisis de, incluso, un solo ejemplo basta para afirmar que la relación entre el volumen de un cubo no es proporcional al lado. Pero para percibir cuál es la relación que existe, un solo caso no alcanza. Cobra relevancia advertir que pueden recurrir a pensar en otra estrategia como por ejemplo plantear una tabla no como una lista de cálculos sino como una estrategia para observar la información que ella brinda para llegar a obtener una regularidad. Es decir en este problema se torna útil la estrategia ***analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción).*** De la mano con esta estrategia surge la necesidad de poder formular y representar de alguna manera la regularidad observada, en este caso, que al aumentar el lado de un cubo al doble, su volumen aumenta 8 veces. Así resulta conveniente reflexionar sobre las formas de representar dicha relación. Es importante desarrollar la conciencia sobre la utilidad de la estrategia ***utilizar un método de expresión o representación***

adecuado: verbal o algebraico, destacando las bondades de lo algebraico para expresarla de manera sintética y general. Nuevamente, aquí debe advertirse otra de las limitaciones de las estrategias numéricas: en este caso la imposibilidad de expresar de manera general la regularidad observada.

Para propiciar la reflexión el docente podría preguntar si el exhibir ejemplos o una tabla, si acaso organizaron los casos considerados de esa manera, alcanza para dar garantías de que la relación explicitada se verifica siempre (incluso en los casos no considerados en la tabla). ¿De qué forma puede garantizarse la generalidad de la relación entre lado y volumen? ¿Cómo podríamos expresar la relación?

Trabajo Práctico N°3

En este trabajo se propone un problema con el que se pretende retomar las estrategias utilizadas en los problemas anteriores. Se espera que las discusiones y los intercambios hayan permitido desarrollar cierta conciencia sobre las estrategias disponibles.

El modo de trabajo será, al igual que los anteriores, con una primera instancia individual, pero luego se propondrá un trabajo en parejas. Esta decisión responde al interés por generar un intercambio más personal y cercano con otro resolutor. En este caso, no se realizará puesta en común. La reflexión final será únicamente sobre el intercambio producido para la elaboración en conjunto de una resolución.

Primera parte (individual - tarea fuera de clase)

Resolver el siguiente problema:

Dada la función f y siendo $\boldsymbol{c}$ un número real, determinar, si es posible, todos los valores de c de manera que $f:\Re \rightarrow \Re \,/\, f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5x + c^2$ tenga dos raíces reales distintas.

Describí los pasos de resolución utilizados para el problema.

La próxima clase trabajarán en parejas a partir de las resoluciones que realizaron individualmente.

Segunda parte (en parejas y en clase)

Compartan con el compañero sus resoluciones individuales y elaboren en conjunto una única.

Identifiquen qué estrategias utilizaron y expliquen por qué las seleccionaron. ¿Consultaron los trabajos anteriores para elegir? ¿Les resultó útil consultar? ¿Por qué?

¿Utilizaron alguna estrategia que no hayan usado en los trabajos anteriores?

Al igual que en los trabajos anteriores, luego de la puesta en común vuelcan sus reflexiones sobre el problema:

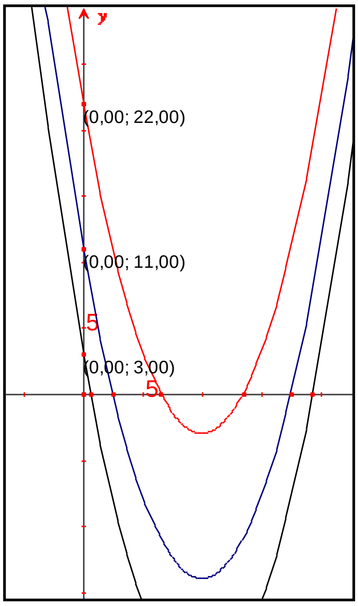
	Dada la función f y siendo $\boldsymbol{c}$ un número real, determinar, si es posible, todos los valores de c de manera que $f:\Re \to \Re / f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5x + c^2$ tenga dos raíces reales distintas.
Escribí tu resolución individual: ¿qué estrategias usaste?	
Escribí la resolución que elaboraron en conjunto con tu compañero. ¿Qué cambia respecto de la que habías planteado individualmente? Identifiquen qué otras estrategias utilizaron y expliquen por qué las seleccionaron. ¿Consultaron los trabajos anteriores para elegir? ¿Les resultó útil? ¿Por qué? ¿Utilizaron alguna estrategia que no hayan usado en los trabajos anteriores?	

Análisis de los problemas en término de heurísticas

Para resolver este problema se puede ***recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)*** al vincular la noción de raíces o ceros de la función con las intersecciones de su gráfico con el eje x. En este proceso se iguala a cero la función cuadrática $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{4}\mathrm{x}^2\text{-}5\mathrm{x} + \mathrm{c}^2$ y se analiza el discriminante de la ecuación cuadrática resultante. Así se obtiene la inecuación $25\text{-}4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathrm{c}^2 > 0$ cuya resolución resulta:

$-4 \cdot \frac{1}{4} \cdot c^2 > -25 \Rightarrow c^2 < 25 \Rightarrow |c| < 5 \Rightarrow S = (-5; 5).$

De esta manera se llega a la conclusión de que para que la función *f* tenga dos raíces reales distintas, el parámetro *c* debe tomar valores reales entre -5 y 5. Esta inecuación también podría resolverse apelando a un soporte gráfico. Haciendo uso de la estrategia ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico*** podría realizarse el gráfico de la función $f: R \to R \ / \ h(x) = c^2$ y determinar en este para qué intervalo del dominio se cumple que las imágenes son mayores a 0 y menores a 25.



Otra manera de resolverlo consistiría, apelando nuevamente a la estrategia "***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico***" (en este caso para la función *f)*, en interpretar que con a>0 las ramas de la parábola deben ir hacia arriba y, para que exista intersección con el eje x en dos puntos distintos, la ordenada del vértice debería ser negativa. Luego, a partir de los datos delos coeficientes de la expresión algebraica de *f* (coeficientes: principal, lineal e independiente) se puede calcular que la abscisa del vértice es

10. Considerando que la ordenada del vértice se obtiene al reemplazar la x por 10 en la función cuadrática, resulta $\frac{1}{4}10^2\text{-}5.10 + c^2$.

Retomando la conclusión anterior de que la ordenada del vértice debe ser negativa resulta $25\text{-}50 + c^2 > 0$, es decir $c^2 < 25$ o sea que la ordenada al origen debe ser positiva y oscilar entre 0 y 25, en consecuencia c pertenecería al intervalo $(-5;5)$.***Verificando con casos particulares,*** por ejemplo con $c = 4$, se puede observar quela ordenada al origen es 16 y que la función tiene 2 raíces reales distintas, como se ve en el gráfico.

Intencionalidad didáctica del trabajo práctico

En este trabajo se intenta que busquen entre sus saberes matemáticos algún elemento que los lleve a "***recurrir a la teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)",*** reconociendo la expresión como una expresión cuadrática, donde tienen que hallar el término independiente. En la segunda parte al trabajar en parejas van a aparecer algunos interrogantes. ¿Tu solución es la misma que la de tu compañero? ¿Tu mirada tiene el mismo enfoque? ¿Abarca todas las opciones? ¿La estrategia elegida se ha utilizado en otra actividad? ¿Se podría haber utilizado alguna estrategia anterior? Si un alumno eligió la estrategia ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: gráfico***", para poder encontrar el valor de "c" en función de los valores que otorga el coeficiente cuadrático y lineal. ¿Es esta la única estrategia? ¿Qué ventajas tiene? ¿Es completa la solución? En los trabajos anteriores ¿habrá una actividad que ayude a esta solución? ¿Por qué? ¿Se reflexionó sobre las respuestas? ¿Cómo podrían aseverar sus respuestas?

Trabajo Práctico N°4

Este cuarto trabajo tiene el mismo diseño que el trabajo práctico N°1: dos etapas de trabajo, la primera individual, fuera de clase y de resolución del problema planteado y la segunda, de reflexión luego de una puesta en común grupal. El enunciado del problema con el que se trabaja es el siguiente:

¿Qué porción del total representa cada parte de un segmento sabiendo que este se divide en 2 partes y una de ellas es las $\frac{3}{5}$ partes de la otra?

	¿Qué porción del total representa cada parte de un segmento sabiendo que este debe dividirse en 2 partes y una de ellas es las $\frac{3}{5}$ partes de la otra?
Escribí tu resolución individual: ¿qué estrategias usaste?	
Escribí la resolución que elaboraron en conjunto con tu compañero. ¿Qué cambia respecto de la que habías planteado individualmente? Identifiquen qué otras estrategias utilizaron y expliquen por qué las seleccionaron. ¿Consultaron los trabajos anteriores para elegir? ¿Les resultó útil? ¿Por qué? ¿Utilizaron alguna estrategia que no hayan usado en los trabajos anteriores?	

Análisis de los problemas en término de heurísticas

Una forma de resolver el problema podría ser "***Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos (tablas)"*** representando un segmento de longitud cualquiera y dividirlo en 2 partes de tal manera que una sea las $\frac{3}{5}$ partes de la otra. Realizando estas divisiones se puede visualizar que el segmento total queda dividido en 8 partes. Comparando la necesidad de representar dicha relación podría apelarse a ***Utilizar un método de expresión o representación adecuado: algebraico***, representando con x la longitud del primer segmento y con $\frac{3}{5}x$ la del segundo segmento. A partir de esto podría plantearse la suma de ambas longitudes para obtener la expresión que representa la longitud del segmento total: $x+\frac{3}{5}x=\frac{8}{5}x$. Luego puede concluirse que el segmento total queda dividido en 8 partes, donde una de las partes representa $\frac{3}{8}$ del segmento total y la otra, $\frac{5}{8}$ del segmento total.

Verificando con casos particulares, por ejemplo considerando un segmento de 1 cm, se puede plantear que $x+\frac{3}{5}x=1\Rightarrow\frac{8}{5}x=1\Rightarrow x=\frac{5}{8}$. De esta manera se observa que el segmento queda dividido en dos partes, de las cuales una representa $\frac{5}{8}$ del total y la otra, $\frac{3}{5}.\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ del total. Se observa, en este caso en particular, la conclusión obtenida anteriormente.

<u>Intencionalidad didáctica del trabajo práctico</u>

En este trabajo se intenta rescatar que la estrategia "***Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos (tablas)"*** puede representar una manera de esquematizar la situación y así iniciar un primer camino a la solución del problema, ¿alcanza con la esquematización para representar el problema? ¿Dicha representación alcanza para validar la respuesta? Se espera con estas preguntas provocar la reflexión sobre cómo representar las relaciones obtenidas a partir de realizar el esquema. Se espera que surja que, al igual que lo ocurrido con el problema del trabajo 2, lo numérico no alcanza para representar la situación y ofrecer una respuesta de carácter general. Si el estudiante se encuentra muy bloqueado podría preguntársele ¿Encontrás alguna similitud entre esta actividad y alguna otra realizada en trabajos anteriores? en los trabajos anteriores, ¿cómo representaron relaciones entre los datos y lo que no se conoce (incógnitas)? Quizás de esa manera podrán utilizar un lenguaje apropiado que los lleve a "***Utilizar un método de expresión adecuado: el algebraico"***.

Trabajo Práctico N°5

Este último trabajo se propone propiciar una instancia de reflexión metacognitiva final. Tal como se mencionó anteriormente, es parte de la modalidad del portfolio incluir un trabajo final en el que se realice una mirada sobre lo hecho en los diferentes trabajos. La modalidad de este trabajo será individual, con preguntas y consignas de reflexión metacognitiva para resolver fuera de la clase.

Para responder a las siguientes preguntas y consignas revisar todos los trabajos realizados y tenerlos a disposición para consultarlos: 1. Revisá los problemas resueltos y las tablas en las que volcaste tus conclusiones luego de los intercambios y respondé: ¿Qué conclusiones te llevás acerca de las estrategias vinculadas al uso de ejemplos numéricos en la resolución de los problemas? Algunas sugerencias para pensar: ¿siempre son útiles? ¿cuántos ejemplos se deben tomar? ¿Qué consejos podrías escribir para otro resolutor acerca de cuándo recurrir a los ejemplos? 2. En varios de los problemas se usaron estrategias vinculadas a las formas de representar datos, relaciones, conclusiones, etc. vinculadas al problema: ¿Qué conclusiones y aprendizajes te llevás luego de atravesar por los distintos trabajos de este portfolio? 3. A lo largo de los trabajos y los intercambios con tus compañeros, ¿considerás que aprendiste nuevas estrategias que usaron otros compañeros? ¿cuáles? ¿para qué problemas las usaste? ¿por qué las consideraste útiles?

4. Mencioná otros aprendizajes que hayas alcanzado durante este portfolio y consideres relevantes para la tarea de resolver problemas.

Luego de cumplimentar este último trabajo, los estudiantes entregan al docente el portfolio completo.

CAPITULO 4: CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo se presentó un diagnóstico y un instrumento de enseñanza diseñados en el marco de la Resolución de Problemas. En esta línea teórica el objetivo central es que los estudiantes se conviertan en buenos resolutores de problemas matemáticos, adquiriendo variedad de estrategias heurísticas y desarrollando la capacidad metacognitiva.

Entendemos que los objetivos didácticos para el área de Matemática en la escuela secundaria, según se establece en el Diseño Curricular para la Provincia de Buenos Aires, se ensamblan con lo planteado en este trabajo. En general, se considera que en este Diseño Curricular el enfoque de la resolución de problemas se encuentra vinculado al enfoque de la Teoría de Situaciones Didáctica. Consideramos que una no es excluyente de la otra, pues ambas teorías valoran a la resolución de problemas como una actividad central en los procesos de enseñanza y aprendizaje y aunque se diferencian en el enfoque teórico en que se enmarcan, cada una con sus particularidades ofrece aportes y brinda herramientas para mejorar los aprendizajes de la Matemática en el nivel. Si bien en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas interesa, a partir de la resolución de problemas, abordar la enseñanza y el aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos consideramos totalmente compatible complementar dicho trabajo con una propuesta de enseñanza desde la Resolución de Problemas (RP) donde el interés se encuentra en el desarrollo de estrategias heurísticas. Creemos que ambos enfoques se complementan y articulan para ofrecer una formación matemática más integral para nuestros estudiantes. Por este motivo entendemos que la propuesta aquí planteada puede convivir y articularse con los lineamientos que emanan de los Diseños Curriculares.

Pretender que un estudiante pueda trabajar a partir de lo que sabe, es decir de sus conocimientos previos, tendrá que ver con un compromiso docente con la elaboración de un tipo de problemas que persiga un crecimiento cognitivo y que permita a los estudiantes corregir errores, superar obstáculos y encontrar estrategias útiles que lo lleven a mejorar su capacidad de resolver problemas matemáticos.

El modo de trabajo presentado para el sexto año de la escuela secundaria da un pie de partida para iniciar al estudiantado en un modo de estudio o trabajo, capacitándolo para enfrentarse a reflexionar continuamente sobre sus resultados; pero también desde el punto de vista docente, implica un pensar diferente, dar un problema para que un alumno resuelva, no es un tema menor; sino por el contrario implica que ese problema no sea una simplemente una aplicación de lo aprendido, sino que lo lleve a ir monitoreando frecuentemente qué está haciendo, qué está aprendiendo o no, como va progresando, que recursos necesita, etc.

Considerando que aprender a resolver problemas y desarrollar la capacidad metacognitiva requiere un trabajo sostenido a largo plazo, consideramos que se podría pensar en extender esta propuesta a lo largo de todos los años del nivel secundario. Esto implicaría hacer un análisis exhaustivo pero más que interesante para que los estudiantes puedan alcanzar las competencias matemáticas inapelables a su edad.

El portfolio es un instrumento valioso como muestra de registro del aprendizaje de cada estudiante, también como propuesta para profundizar el seguimiento continuo de los alcances y las dificultades que pudieran tener los estudiantes al resolver problemas. Dado el interés que actualmente tiene la inclusión de las TICs en los procesos de enseñanza y aprendizaje podría pensarse en un portfolio digital implementado a través de un aula virtual para, de esa manera, acercarnos aún más a un estudiantado cada vez más digital. Por otro lado, la inclusión de distintos software matemáticos como recurso para el aprendizaje y entorno para la resolución de problemas podría habilitar el desarrollo de otras estrategias heurísticas que no necesariamente surgirían en entornos de lápiz y papel.

Creemos que a partir de este trabajo se abren distintas líneas de trabajo en relación con varios asuntos. Por un lado, la exploración de otros instrumentos tales como diarios y rúbricas para el desarrollo de la capacidad de resolver problemas y para fomentar la dimensión metacognitiva en el aprendizaje de la Matemática. Por otro, la inclusión de las TICs como recurso que apuntale los procesos de enseñanza y aprendizaje, ofreciendo entornos que enriquezcan el despliegue de diversas estrategias. Y por último, la articulación de los distintos aportes y herramientas conceptuales de las distintas líneas de Didáctica de la Matemática para realizar propuestas que tiendan a una formación más integral de nuestros estudiantes y que permitan entender y atender mejor las dificultades en el aprendizaje de esta disciplina.

Para finalizar, entendemos que todo lo planteado en el párrafo anterior va en la dirección de ofrecer a nuestros estudiantes un encuentro distinto con la Matemática, que permita forjar una imagen distinta de esta disciplina y que la puedan vivenciar, no como inaccesible o para unos pocos sino como el producto de procesos sociales y como un saber accesible, creativo y relevante desde el punto de vista de las personas.

BIBLIOGRAFÍA

Alagia, H., Bressan, A., & y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Alonso García, V., González Carmona, A., & Sáenz Barrio, O. (1988). Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el ciclo medio de la EGB. *Enseñanza de las ciencias- nº 6*, 251-264.

Anijovich, R., & Malbergier, M. y. (2004). *Una introducción a la Enseñanza para la Diversidad*. Buenos Aires: Fondo de cultura económica de Argentina S.A.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Red de revistas científicas de américa latina y el caribe. España y Portugal*, 37-74.

C.Eloy, A. V. (13,14,15 de Septiembre de 2010). *Competencias Básicas. El desarrollo de la creatividad en la Educación Matemática*. Recuperado el 18 de Febrero de 2013, de www.chubut.edu.ar: http://www.chubut.edu.ar/descargas/secundaria/congreso/COMPETENCIASBASICAS/R0854b_Arteaga.pdf

Codina, A. y. (2001). *Hacia una introducción basada en la resolución de problemas:los términos problemas, solución y resolución.* 125-134: Granada.

Colombano, V., Zuvialde, D., Marino, T., & Real, M. (2009). *El problema de diseñar problemas.* Mar del Plata: Comunicación presentada en la XXXII Reunión de Matemática.

Chacón, M., Colombano, V., A, F., Zuvialde, D., Marino, T., Real, M., y otros. (2012). *Identificación y enseñanza de heurísticas.* Los Polvorines- Buenos Aires: Universidad Nacional General Sarmiento.

Chacón, M., Farías S, G. V., & y Poco, A. (2008). *Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas.* Buenos Aires: UNGS.

Charnay, R. (1998). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. P. Saiz, *Didáctica de matemáticas* (págs. 51-63). Buenos Aires: Paidos.

Dueñas, P. X. (1997). *Una visión de la didáctica de las matemáticas desde Francia. Algunos conceptos y métodos.* Bogotá: Una empresa docente.

Educación, D. G. (2011). Diseño Curricular para la Educación Secundaria. Matemática Ciclo Superior. 6º año. Buenos Aires, Argentina.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las Matemáticas: una perspectiva filosófica. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, 1-16.

González, F. (1996). *Acerca de la metacognición.* Honduras.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké 6*, 59-87.

González, F. (1999). Los nuevos roles del profesor de matemática. (págs. 1-27). República Dominicana: Relme 13.

González, F. (2005). *Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos.* Universidad Nacional de San Luis.

Guzmán, M. (2007). Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la ciencia y la cultura. *Revista Iberoamericana de Educación. Nº043*, 19-58.

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2003). *Changing teachers beliefs about students heuristics in problem solving.* Italia: 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.

López Sepúlveda, A., & Medina García, C. y. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática.Volumen 21. Nº2*, 79-115.

López, J. G. (1 de Febrero de 2006). Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos. Valencia, Carabobo, Venezuela.

Mántica, A., Nitti, L., & Scaglia, S. (. (2006). *La Matemática. Aportes para su enseñanza.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Marino, T., & Rodriguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísiticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre universitario. *Paradigma*, 1-21.

Martínez Pérez, M., Da Valle, N., Zolkower, B., & y Bressan, A. (2002). Los contextos "realistas" en la Resolución de Problemas de Matemática: una experiencia para capacitadores, docentes y alumnos. *Paradigma*, 59-94.

Nieto Said, J. H. (2004). *Matemáticos, Resolución de Problemas.* Maracaibo.

Pérez, C. R. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.vol 2, num 2-3*, 31-45.

Pifarre, M. y. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO. Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias. Nº19*, 297-308.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Prendes Espinoza, M. P., & Sanchez Vera, M. d. (Marzo de 2008). *pixel-Bit.Revista de Medios y Educación.* Recuperado el 7 de marzo de 2014, de www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n32/2.pdf

Rabino, A. (2012). Enseñar matemática a través de problemas...pero ¿Cómo? *Novedades educativas nº 261*, 66-71.

Rivera, A. C. (2001). *Hacia una Iinstrucción Basada en la Resolución de Problemas: los términos Problemas, Solución y Resolución.* Granada: Universidad de Granada.

Rizo Cabrera Celia, C. P. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 31-45.

Rodriguez, M. (2006). Diseño y análisis de un portfolio en un curso preuniversitario de matemática. *Yupana*, 57-69.

Rodriguez, M. P. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Rodriguez, T. M. (2008). *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos: análisis de un caso.* Santa Rosa. La Pampa.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sepúlveda López, A., Medina García, C., & Sepúlveda Jáuregui, D. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 79-115.

Sigarreta, J., Rodriguez, J., & Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 53-65.

Trigo, L. S. (2008). *La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica.* Colombia.

Vilanova, S., María, R., Guillermo, V., María, O., Susana, V., Perla, M., y otros. (2001). La Educación Matemática.El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*.

BIOGRAFÍA DEL AUTOR:

Castro Ana María Patricia, profesora de Matemática nacida el 28 de febrero de 1966 en José C. Paz, provincia de Buenos Aires.

Obtiene el título de Perito Mercantil en 1983 en el Instituto Secundario Cristo Rey de José C. Paz.

Al año siguiente, en 1984 se recibe de profesora de Inglés en el Instituto Cambridge e inicia el Profesorado de Matemática y Física en el Instituto Superior de Formación Docente Nº 34 de la localidad de El Palomar, provincia de Buenos Aires. Egresa de Profesora de Matemática en el año 1988, dejando incompleto el profesorado de Física.

Ese mismo año comienza a trabajar como Ayudante de Laboratorio en el Instituto General José de San Martín ubicado en la localidad de José C. Paz, lugar que abrió sus puertas para el inicio de la profesión docente.

En el año 2006 ingresa a UTN Facultad Regional Pacheco para cursar la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática.

Desde ese entonces ha participado en distintos cursos dictados de actualización profesional (La desafiante clase de geometría en el plano y en el espacio, CAREM, 2009; Patrulla de Rescate. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba, Ibero-Cabri 2008; Curso de capacitación sobre Geometría Dinámica con el software Cabri, 2008, entre otros).

Se inicia en investigación educativa en el año 2006 como ayudante en Red Académica Internacional de Investigación y Enseñanza de la Geometría Dinámica, a cargo de UTN Regional Pacheco y en el año 2009 participa en Investigación sobre la reformulación de la enseñanza de conceptos de Matemática en carreras de Ingeniería utilizando geometría Dinámica otorgado por UNGS y UTN.

En el año 2014 inicia la capacitación dirigida a maestras en el Programa de Apoyo a la política de mejoramiento de la equidad educativa.

Hasta la fecha trabaja como profesora de matemática en los niveles medio y superior.