UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Facultad Regional General Pacheco

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Tesina para optar al título de Licenciada en Enseñanza de la Matemática

Título: Errores en Álgebra Elemental y Argumentación en Matemática: Una Propuesta de Enseñanza en el Nivel Secundario

Autor: Profesora María Teresa Brizzi

Director: Dr. Alberto Formica

Co-Director: Lic. Tamara Marino

Año 2014

Universidad Tecnológica Nacional

F.R.G.P.

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Tesina para optar al título de Licenciada en Enseñanza de la Matemática

Título*: **Errores en Álgebra elemental y Argumentación en Matemática: Una Propuesta de Enseñanza en el nivel Secundario.***

Autor: Prof. María Teresa Brizzi

Obtención de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Director: Dr. Alberto Formica

2014

LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Errores en Álgebra elemental y argumentación en Matemática: Una propuesta de Enseñanza en el nivel Secundario

María Teresa Brizzi____

Director: Alberto Formica ____

TRIBUNAL

Integrante 1: ____

Integrante 2: ____

Integrante 3: ____

Lectura de la tesis: Diciembre, 2014

PLANEAMIENTO Y RESUMEN DE LA TESIS

La realización de este trabajo surgió, a partir de la necesidad como docente del área de Matemática de escuela media, de tomar conocimiento de los errores que presentan los alumnos de un sexto año en los temas vinculados con el Álgebra y con la argumentación, y reflexionar sobre cuáles son los más relevantes, atendiendo a un diagnóstico realizado, con el cual pudimos diseñar una propuesta didáctica que promueve distintas actividades, que ayudarán a los alumnos a disminuir los errores a partir de resoluciones que impliquen análisis, justificaciones, verificaciones y argumentaciones de sus producciones.

AGRADECIMIENTOS

Llegado este momento de finalizar con un trabajo que ha sido enriquecedor, arduo, en el que uno deposita todo lo vivido, estudiado, compartido; experimentado, es fundamental agradecer a todos los que formaron parte de este proyecto.

En primera instancia mi infinito agradecimiento a mi director de tesis, Alberto, no sólo por su acompañamiento que fue incansable, comprometido, totalmente necesario, sino por su maravillosa entrega como ser humano, que valoro enormemente, y fue el impulso imprescindible para lograr realizar este trabajo.

A mi co-directora de tesis Tamara por su apoyo y colaboración.

A mi familia que me sostiene todos los días, que amo por sobre todas las cosas y son el motor de mi vida: mi esposo Omar, mis hijas: Daniela y Fernanda.

A mis amigos que me acompañan en el camino de la vida y siempre me apoyan en mis proyectos de superación.

A Ana, una gran compañera y amiga, con la cual he compartido largas horas de estudio y ha sido de gran aliento en momentos difíciles.

Y por último a mis alumnos que me recuerdan todos los días que no hubo **errores** en la elección de mi profesión, porque disfruto, hace más de 25 años, de esta labor a pesar de las **dificultades** y adversidades por las que he debido atravesar en este largo tiempo.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la Educación Matemática, el estudio de los errores es un tema de constante actualidad y relevancia porque, no sólo tiene importancia desde un punto de vista teórico, sino que también incide en el trabajo en el aula. En este sentido, puede utilizarse como herramienta para introducir mejoras en el proceso educativo, permitiendo el diseño de estrategias de enseñanza que tiendan a minimizar, en los estudiantes, las posibilidades de cometer errores en sus producciones y concepciones.

El tratamiento de los "errores matemáticos" y, en particular, el análisis de sus características están presentes en cada instante en la actividad del docente de Matemática. A partir de esta premisa, el objetivo que se persigue en el presente trabajo, es analizar los errores cometidos por estudiantes de Matemática de la escuela secundaria así como las dificultades que presentan, sobre todo en actividades relacionadas con **el Álgebra elemental** y con **cuestiones vinculadas a la argumentación**. Por otro lado, y a partir de este análisis, se pretende el **diseño de una propuesta de enseñanza** que contemple las dificultades y errores observados y se oriente a mejorar los desempeños de los estudiantes frente a actividades que involucren los temas mencionados.

El estudio se enmarca dentro de la Educación Matemática y se lo puede asociar al Enfoque Cognitivista, en el que se considera al conocimiento del individuo a partir de una mirada constructivista. El estudio que realizaremos se desarrollará en dos etapas:

- Una primera en la que se hará un diagnóstico de los diferentes tipos de errores cometidos por los estudiantes, así como de las dificultades que presentan, en temas vinculados al Álgebra elemental, en actividades que contemplen a la argumentación entre sus objetivos. Este trabajo de campo se llevará a cabo en un curso de 6º año en el área de Matemática de la escuela secundaria y el análisis de los errores se hará a partir de las clasificaciones establecidas por varios autores, entre ellos Astolfi (1999) y Pochulu (2006).

- Para la segunda etapa nos planteamos el diseño y fundamentación de una secuencia didáctica que atienda, desde la enseñanza, a los principales errores y dificultades observados en el diagnóstico. Para eso, propondremos una serie de ejercicios que consideramos como una forma de "modelo" de actividades para abordar, ya sea desde el aula con las contribuciones del docente, o como actividades para desarrollar exclusivamente por los alumnos, individual o grupalmente, e incluso para ser resueltas de forma domiciliaria. Este esquema de actividades que se proponen apuntan a generar un tipo de trabajo en la clase de Matemática que se complementará con otras más elaboradas para cada año del ciclo superior.

En resumen, en este trabajo nos hemos planteado como objetivos centrales los siguientes:

o Caracterizar los errores que cometen los alumnos de Matemática en actividades que involucren al Álgebra y la argumentación.

o Diseñar una propuesta de enseñanza que, atendiendo a las dificultades y errores observados, se oriente a mejorar los desempeños de los estudiantes frente a actividades que involucren las cuestiones mencionadas en el punto anterior.

Cuestiones metodológicas

En relación con las cuestiones metodológicas consideradas, podemos señalar que el trabajo realizado en esta tesina es de corte cualitativo y consistió en hacer un relevamiento de algunos errores observables en estudiantes del último año de una escuela secundaria en relación a temas como el Álgebra elemental y la argumentación en Matemática. Para ello se diseñó y fundamentó, en términos de la bibliografía que se detallará en el encuadre teórico, un diagnóstico consistente en tres actividades que fue implementado, en dos jornadas diferentes, en el curso elegido para la prueba. Se analizaron las respuestas obtenidas en el diagnóstico, y en función de las mismas y de las consideraciones teóricas observadas en la bibliografía, hemos diseñado y fundamentado una secuencia de ejercicios o actividades que consideramos como una propuesta de enseñanza para llevar a cabo, ya sea en el último año de la escuela secundaria o a lo largo del Ciclo Superior de la misma, de acuerdo a las decisiones que tome el docente o la institución en la que éste se desempeñe. Esta propuesta cuenta también con sugerencias metodológicas para su implementación y las motivaciones con que fueron pensadas cada una de las actividades.

CAPÍTULO 2

PLANTEO DEL PROBLEMA DE ESTUDIO

Como señalamos, nos hemos propuesto, en nuestro proyecto, el diseño y fundamentación de una propuesta didáctica que atienda, desde la enseñanza, a los principales errores y dificultades observados en los estudiantes del último año de la escuela secundaria. No obstante, las actividades que presentamos en nuestra propuesta están pensadas para ser implementadas no sólo en el último año, sino también en los años previos. Esto lo hemos determinado así con la intención de lograr una consolidación del aprendizaje que permita egresar de la escuela media un estudiante que haya encontrado, a lo largo de sus últimos años de estudio secundario, un acercamiento al razonamiento y a la forma de reflexionar frente a los posibles errores que cometa en sus resoluciones.

Para tener un conocimiento más cercano acerca de cuáles son los errores que nos interesan destacar, planteamos un trabajo de campo, que consistió en un diagnóstico en el que se presentaban actividades/ejercicios diseñados especialmente para observar aquellos asociados al estudio que nos proponemos.

Si bien entendemos que los estudiantes no están muy habituados a resolver actividades en las que necesariamente deban argumentar como parte de su respuesta, sabemos que la argumentación, en tanto explicación o justificación de un procedimiento o acción, es una tarea que va más allá de la Matemática, y atraviesa a todas las áreas del quehacer cotidiano y, en particular, del estudio en cualquiera de las disciplinas involucradas en la educación secundaria. Es por eso que, sabiendo que este objetivo del diagnóstico presentaría varias dificultades a los alumnos y que se observaría una gran variedad de errores en las respuestas, nos interesó, igualmente, poder tener una referencia cierta de cuál es la situación del grupo en el que se llevaría a cabo la experiencia.

Se pensaron para el trabajo de campo actividades vinculadas con el Álgebra, en las que los alumnos debieran poner en juego distintas estrategias de resolución y en las que fuese necesario justificar, argumentar y/o explicar las resoluciones producidas.

2.1. Algunas concepciones sobre el error en la Matemática escolar.

Al momento de pensar las actividades, y considerando las posibles producciones de los estudiantes al resolverlas, tuvimos en cuenta algunas de las concepciones del **error** en la Matemática considerada por distintos autores y halladas en distintos trabajos que los mismos han publicado.

Charnay, al respecto señala que es importante considerar al error

> … no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos (citado por Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2004, p.23)

Por su lado, Godino, Batanero y Font (2003, p. 69) expresan: "Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución Matemática escolar"

También, Del Puerto y Minnaard (2004) afirman: “El error es una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas”

Para Socas (1997) “el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción”. Concluye diciendo: “Todo error es el comienzo de un buen aprendizaje”.

Brousseau (1983) utiliza el concepto de obstáculo epistemológico, refiriéndose a un conocimiento previo que le impide o le dificulta la adquisición de uno nuevo. En este sentido, señala que lo que es funcional en una situación no lo es en otro , por lo que sostiene que : “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado”

Como puede observarse, en todas estas apreciaciones que acabamos de presentar, encontramos una mirada del error como punto de partida para reflexionar sobre lo realizado en la resolución, sobre las estrategias puestas en juego y, a partir de allí, construir un nuevo conocimiento. Adhiriendo a lo planteado por estos autores, es que nos hemos inspirado en estudiar qué y cómo hacer algo que pueda contribuir a mejorar el aprendizaje de la Matemática en la escuela y lograr que los estudiantes y docentes puedan reconocer a los errores no sólo como un elemento negativo, sino como un motor que moviliza la reflexión y, a partir de ello, mejorar el rendimiento al realizar distintas actividades que involucren a la Matemática.

2.2. Algunas apreciaciones sobre nuestra propuesta

El análisis de las resoluciones que los estudiantes hicieron de las actividades planteadas en el diagnóstico, y que presentaremos en un próximo apartado, nos ha permitido diseñar la propuesta didáctica antes mencionada. En esta propuesta intentaremos reflejar actividades que persiguen el objetivo de superar algunas de las dificultades que presentan los alumnos en los temas citados.

Llegado el momento del diseño de esta propuesta, se nos presentaron algunos interrogantes en torno a la misma. Algunos de ellos fueron:

- ¿qué tipos de actividades debemos contemplar?
- ¿cómo conviene elaborar un "repertorio" de las mismas para atender a los distintos errores que se observan en los alumnos?
- ¿cuál es el mejor momento para comenzar a implementarlas?
- ¿planteamos actividades para utilizar sólo con estudiantes del último año de la escuela secundaria?

A partir de estas inquietudes, hemos considerado apropiado proponer una guía o serie de actividades que pueda ser utilizada en los cursos de Matemática del ciclo superior, es decir, en los últimos tres años de la escuela secundaria, para trabajar durante un período considerable y que el proyecto tenga continuidad, atendiendo al Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires.

Al respecto, la Ley Provincial de Educación N°13688 (2007) en sus páginas expresa, para la asignatura Matemática y su enseñanza en el Ciclo Superior de la Escuela Secundaria que:

> El Ciclo Superior de la Escuela Secundaria representa para los jóvenes la oportunidad de profundizar contenidos matemáticos anteriores, analizarlos desde el punto de vista

> formal de la matemática como ciencia, al mismo tiempo que se abre un espacio de construcción de nuevos conceptos. En este contexto, el desarrollo de la materia en el 6º año debe aportar niveles crecientes de formalización y generalización.

En las Orientaciones Didácticas de la Ley se considera la Resolución de problemas y la Formalización, detallando en un ítem la importancia del Clima de la clase y tratamiento del Error. Esto aparece expresado en los siguientes términos:

> La superación de errores se logrará si los alumnos toman conciencia acerca de los mismos y se hacen cargo de su reparación en niveles crecientes de autonomía. Dar la respuesta correcta no significa enmendar un error, más aún deberá estimularse al estudiante para que elabore estrategias de control que le permitan decidir sobre la corrección de sus producciones.

En este sentido, la guía de actividades que presentaremos cuenta con ejercitación que podría ser utilizada por los docentes a cargo de cursos en esos niveles o, únicamente en el último año si esta fuera la decisión del docente usuario de esta guía. La serie propuesta consiste en 8 ejercicios o problemas que, a nuestro entender, pueden funcionar como "modelo" de actividades que atiendan a la problemática que nos interesa abordar. De este modo, pensamos que a partir de este conjunto de ejercicios se podrían elaborar otros, de características similares (y no idénticos) para ser trabajados en distintos cursos del mismo año y, a su vez, en distintos años del ciclo superior.

Entendemos que estos temas que mencionamos son lo suficientemente abarcativos de la formación matemática en la escuela secundaria y, además, están presentes en los Contenidos Curriculares. Por otro lado, entendemos que la argumentación es un eje transversal a todas las disciplinas escolares y forma parte de la formación integral y el quehacer cultural de los estudiantes.

CAPÍTULO 3

ERRORES EN MATEMÁTICA: ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO

3.1. Estado del Arte

Desde el Cognitivismo se sostiene que, si bien los saberes previos de los estudiantes resultan solidarios con los nuevos conocimientos, muchas veces representan un obstáculo para la adquisición de éstos por parte del alumno. En este sentido, los errores resultan una manifestación de las dificultades y obstáculos presentes en el proceso de aprendizaje de la Matemática, y es por ello que resulta importante su hallazgo y análisis por parte de los docentes e investigadores. Entendemos que la realización de un análisis como el que nos proponemos hacer resulta significativa a la luz del diseño de futuras estrategias didácticas que persigan mejoras en la enseñanza de la Matemática, a partir del conocimiento de los errores y los obstáculos que éstos generen en el aprendizaje.

En la actualidad, y desde hace muchos años, en el ámbito de la Educación Matemática se desarrollan distintas investigaciones en relación con los “errores matemáticos” observados en los procesos de aprendizaje de la Matemática en distintos niveles de escolaridad.

Espinosa (2000) señala que las dificultades que los alumnos tienen en Matemática están vinculadas, entre otras cosas, a los errores que cometen en su trabajo en esta disciplina. Desde este punto de vista, apunta que las estrategias que necesita emplear un docente para utilizar los errores de los alumnos como fuente de aprendizaje, y posterior superación, dependen del tipo de error que manifieste el alumno. En este sentido, resulta fundamental conocer la naturaleza de los errores, y esto es lo que justifica su clasificación en distintas tipologías.

Si particularizamos en los errores relacionados con el Álgebra elemental y la argumentación, resulta importante señalar que son muchos los aspectos vinculados a los mismos, dada la profunda incidencia que, tanto el Álgebra como la argumentación tienen en las diferentes áreas de la Matemática escolar. Entre los aspectos que, a nuestro entender, resultan de interés para el estudio de estos errores podemos señalar, por ejemplo,

- operatoria y uso de símbolos y variables**,**
- manejo de propiedades**,**
- uso de recursos de argumentación y lógica matemática
- procesos metacognitivos**.**

En la literatura sobre el tema, se observan diferentes clasificaciones de los errores en función de las observaciones realizadas sobre distintas actividades propuestas a estudiantes.

Al respecto, Ursini Trigueros (2005) abordan el estudio de las problemáticas en Álgebra en torno a los distintos usos de la variable: *como incógnita*, *como número generalizado* y en su *relación funcional*, y destacan las dificultades que presentan los estudiantes para familiarizarse con ellos. Algunos autores se refieren al trabajo con estos modos de interpretar a los “literales” en una expresión algebraica como el *modelo 3UV*, por referirse a tres formas particulares de “ver” a una variable. El tratamiento de variable, no es rígido, se puede aplicar:

- en primer caso a una *incógnita*, presentada en una ecuación, como un *valor desconocido*, que se puede determinar resolviendo la misma y verificándola;

- en segundo caso a un *número generalizado* que representa una regularidad o un patrón y, por último,
- un tercer caso, considerando a la variable en *relación funcional*, caso que se da cuando se involucran *dos magnitudes o cantidades* vinculadas mediante una función, siendo en este caso, la variable independiente la que se considera como la *variable* indicada.

Este modelo aportó una nueva mirada para abordar el estudio de las variables en el Álgebra elemental, así como implementar estrategias didácticas para la comprensión del trabajo con las mismas por parte de los estudiantes.

En virtud de las dificultades planteadas por los autores mencionados, los mismos señalan que los estudiantes no logran desarrollar un manejo flexible de estos usos de la variable, lo cual los conduce a cometer distintos errores al resolver actividades en contextos algebraicos.

Otro autor que trata sobre los "símbolos" y la dificultad de poder trabajar con ellos es Arcavi (1994) que estudia y analiza el desarrollo y el uso del "sentido simbólico". Afirma que en la resolución de problemas algebraicos deben evitarse manipulaciones automáticas de símbolos, que darán lugar al error y que, para promover el desarrollo del sentido de los símbolos en los estudiantes, se deben presentar situaciones para utilizar su potencial, abrir cuestiones para la reflexión y discusión, habilitar un espacio en el aula para la conversación, estimular ideas acerca de los símbolos y no apresurarse para dar por cerrado un contenido o una idea.

Según Arcavi "los símbolos pueden desempeñar roles distintos en distintos contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias" y recomienda considerar los "distintos roles que pueden desempeñar las variables y los parámetros, y los distintos tiempos de sustitución". La idea de "sentido de los símbolos" ó "sentido simbólico" abre varias cuestiones que resultan importantes e interesantes para la reflexión, pero que no forman parte de nuestro objetivo para este trabajo.

Por su parte, Socas (1997) describe al error como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno. En relación con actividades que involucran al Álgebra señala algunas dificultades y errores cometidos por estudiantes de Matemática que están asociados, entre otras cosas, a:

- la complejidad de los objetos del Álgebra que operan en sentidos semántico y sintáctico,
- los procesos de pensamiento que surgen de la naturaleza lógica del Álgebra,
- los procesos de enseñanza, y
- las cuestiones afectivas y emocionales de los alumnos hacia el Álgebra.

También Booth (1984) se refiere a los errores en Matemática y describe algunos atribuibles, entre otras cosas, a:

- la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras,
- el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra,
- el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento.

En lo que respecta a los errores relacionados con la argumentación, justificación y/o razonamiento matemático, Esteley-Villareal, (1990, 1992, 1996) realizan también una "categorización" de errores, entre los que figuran aquellos que surgen:

- al operar con números reales en cálculos, planteos y resolución de ecuaciones,

- por el no empleo o uso parcial de la información,
- por la no verificación de resultados parciales o totales y
- por una deducción incorrecta de la información.

Nos parece importante destacar la clasificación de los errores en Matemática propuesta por Astolfi (1999) que considera, entre otros, a los errores:

- debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas,
- que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas,
- que son resultado de las concepciones alternativas de los alumnos,
- que están ligados a operaciones intelectuales y
- causados por la complejidad del contenido.

Pochulu (2005), es un autor que ha realizado trabajos de cierta actualidad en los que ha dirigido la atención a estudiar los “errores” en las producciones matemáticas que los alumnos realizan para sus clases. En sus publicaciones manifiesta que éstos son detectados, en forma reiterada, en los distintos contenidos abordados, y que no se producen por casualidad, sino que tienen su origen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Puntualiza que los errores se deben a distintas razones como, por ejemplo:

- al lenguaje matemático,
- a dificultades para obtener información espacial,
- a inferencias o asociaciones incorrectas,

- a la recuperación de un esquema previo,
- a cálculos incorrectos o accidentales,
- a deficiencias en la construcción de conocimientos previos,
- a la ausencia de conocimientos previos.

Sessa (2005), en su libro "Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas", manifiesta lo complejo de la introducción del Álgebra en la escuela secundaria, que redunda luego en los errores percibidos en las clases diarias de Matemática. La búsqueda de un camino que permita avanzar a los alumnos para que aprendan Álgebra es una de las tareas que la autora se propone. Ella hace su aporte diferenciando el uso de la variable en sus tres expresiones (modelo 3 UV), haciendo hincapié en el tipo de actividades (las más ricas desde el punto de vista didáctico) que se deben fomentar para aprender Álgebra. Se puede considerar que el comienzo de este trabajo puede realizarse siguiendo algunas de las siguientes alternativas:

- que cuando la actividad consista en resolver una ecuación, en la consigna debe definirse claramente el conjunto numérico en el que se considera a la incógnita (el "dominio" de validez de la ecuación)
- cuando se propone un problema que involucre la resolución de algunas ecuaciones para llegar a su solución, sería deseable que exista una real necesidad de plantearlas y resolverlas, es decir, que no sea "forzado" el trabajo con las ecuaciones y que, además, no haya formas "más económicas" de resolución,
- que la resolución de una actividad proponga que el alumno explore en busca de fórmulas relacionadas con la misma,

- que se trabaje la generalización como de expresión unificada de una regularidad,
- que se propongan actividades donde esté presente la idea de 2 variables o magnitudes vinculadas por una dependencia entre las dos, como para que se observe “el modelo funcional” de la variable.

Brousseau y Davis (1986) afirman, citados por Del Puerto Minnarrd en *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas:*

> Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera.

En relación con el aprendizaje, Brousseau (1986) se basa en la idea de que el alumno aprende adaptándose al medio, como todos nosotros hacemos en nuestra vida y esto, necesariamente, implica rupturas, nuevos posicionamientos, cambio de lenguajes, cambio de concepciones y de sistemas cognitivos. Vamos aprendiendo en cada nueva situación, en cada “ruptura” del conocimiento establecido.

Entendemos que es una utopía pensar que los errores van a desaparecer totalmente, y no es un objetivo de este trabajo pretenderlo. No obstante, debemos conocerlos y aprovecharlos con el fin de generar una instancia útil para adquirir un nuevo y mejor conocimiento.

En general, uno de los objetivos de las investigaciones desarrolladas en torno al análisis de errores es explorar sus potencialidades y, también, realizar acciones que apunten a la mejora en los aprendizajes a través de la superación de los mismos.

Creemos que es importante destacar, al respecto, que la historia nos permite observar que la propia evolución de la ciencia ha estado acompañada de errores y que su desarrollo natural, más la revisión y el trabajo de los investigadores, ha permitido superar algunos de esos errores, construyéndose así, nuevos conocimientos.

3.2. Como marco teórico

Como marco teórico hemos utilizado aquellos trabajos que se refieren a los errores en Matemática de manera general, entre los que se incluyen autores que hacen referencia a los aspectos en los que nos hemos centrado en nuestro trabajo, que son los errores relacionados con el Álgebra elemental y, también, errores vinculados con la Argumentación en Matemática. En lo que concierne al Álgebra elemental, nos referimos particularmente a errores que se alinean con el mal uso de propiedades o reglas, a los vinculados a algunos procesos metacognitivos y a las dificultades asociadas al uso de las variables o "literales". Por otro lado, en cuanto a los errores en argumentación, nos interesa analizar aquellos que se vinculan a la falta de justificación en las resoluciones de las distintas actividades, o las dificultades que manifiestan a la hora de poder dar cuenta de los porqué de cada paso y de las explicaciones o razones que establecen las vinculaciones que sus procesos de resolución tienen con "la teoría" matemática que conocen o han aprendido hasta el momento. Nos interesa, además, observar los errores que se generan a partir de las dificultades (sobre todo de interpretación) que generan actividades en las que se requiera la decisión sobre la verdad o falsedad de una afirmación. En este aspecto, el tipo de afirmaciones que consideramos para trabajar son aquellas que requieren del uso de cuantificadores, ya sean de tipo "universal" o "existencial", y el tipo de respuesta que se espera frente a una de estas actividades. Consideramos los errores que puedan observarse, por ejemplo, vinculados al "uso de recursos de argumentación y lógica matemática" tal como lo refiere Espinosa (2000). En este sentido, entendemos que, por parte de los alumnos y frente a una actividad, se dan argumentos "cuando se trata de convencer a otro del valor de verdad de una implicación o una aseveración y se dan razones del porqué de un cierto hecho, resultado o aseveración" (Falsetti et al. 2009). En línea con lo expresado, hemos utilizado para nuestro estudio producciones de Soccas (1997), Espinosa (2000), Ursini y Trigueros (2005) así como también clasificaciones de errores realizadas por Esteley-Villareal, (1990, 1992, 1996), Astolfi (1999) y Pochulu (2005) como marco teórico para el diseño, fundamentación y análisis (a priori o posteriori) de las actividades y respuestas, ya sean del diagnóstico como de la propuesta de enseñanza. También consideramos los trabajos de Falsetti et al (2009) y Barreiro et al (2009) en relación a cuestiones vinculadas con la argumentación.

CAPÍTULO 4

DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE TRABAJO

El trabajo de campo que aquí se presenta se ha desarrollado en el Instituto Evangélico Americano (IEA), escuela perteneciente a la Iglesia Evangélica Luterana Unida y que está ubicada en la localidad de José C. Paz, provincia de Buenos Aires. Dicho trabajo consistió de una prueba diagnóstica que abarca una variedad de ejercicios que presentan distintos aspectos de los temas elegidos para nuestro trabajo (Álgebra elemental y argumentación) y que propician variados espacios para que los estudiantes puedan desenvolverse utilizando diferentes herramientas, ya sea de cálculo como de razonamiento y que, a nuestro entender, plantean también distintos "lugares comunes" en los que los estudiantes suelen manifestar dificultades o complicaciones. En la actualidad, la mencionada Escuela tiene Nivel Inicial, Nivel EPB, Nivel Secundario y Nivel Superior, todos incorporados a la Dirección Provincial de Educación de Gestión Privada perteneciente a la Dirección de Educación y Cultura de la Provincia de Buenos Aires.

El grupo elegido para realizar el trabajo de campo corresponde a un curso de sexto año de la modalidad Economía y Gestión de las Organizaciones, sección B del turno mañana. Algunas características del grupo son las siguientes:

- Son un total de 30 alumnos, 14 varones y 16 mujeres.
- Los alumnos pertenecen a un contexto social de clase media y media baja, con posibilidades económicas distintas

- Presenta homogeneidad a nivel académico y casi todos los estudiantes demuestran interés en aprender y superarse a la vez que se muestran receptivos a los desafíos.

Los contenidos del espacio curricular de Matemática para el sexto año de la escuela secundaria abarcan temas relacionados con Geometría y Álgebra, Números y operaciones, Álgebra y Funciones, Probabilidad y Estadística.

Algunas de las expectativas de logros planteadas para este nivel son:

1) Identificar, definir, graficar, describir e interpretar distintos tipos de funciones asociándolas a situaciones numéricas, experimentales o geométricas, reconociendo que un mismo tipo de función puede servir de modelo a una gran variedad de problemas.

2) Utilizar funciones, ecuaciones, e inecuaciones para resolver situaciones problemáticas, seleccionando los modelos y las estrategias de resolución en función de la situación planteada.

3) Incorporar al lenguaje y argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática numérica, algebraica, gráfica, y geométrica empleando correctamente el lenguaje simbólico.

4) Utilizar las formas del pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones relativas a la resolución de problemas.

5) Valorar la matemática como instrumento o herramienta en la resolución cuantitativa de la situación concreta y real (empleando operaciones y ecuaciones de la complejidad de los alumnos)

CAPÍTULO 5

ACERCA DEL TRABAJO DE CAMPO

5.1. Descripción del trabajo a realizar

Como señalamos, el trabajo de campo consistió en la realización de un diagnóstico, que constituye la primera etapa de nuestra propuesta.

Presentamos en esta sección, un detalle de lo que conformó esta primera etapa de trabajo.

El objetivo que se persigue en esta primera etapa es analizar los errores que presentan los estudiantes de Matemática del último año de la escuela secundaria en la resolución de las actividades propuestas, así como las dificultades que se observan, sobre todo, en las actividades relacionadas con el Álgebra elemental, el uso de los símbolos y con cuestiones vinculadas a la argumentación.

Para recabar esta información se llevó a cabo, a modo de un trabajo de campo, el diseño e implementación de un diagnóstico que contara con algunas actividades en las que puedan manifestarse esos errores. Éstas debían ser resueltas por los alumnos y debían permitirnos observar, analizar y recolectar datos que aporten resultados que nos ayuden a visualizar el tipo de errores a contemplar.

Como ya mencionamos en el apartado anterior, este diagnóstico se implementó en un grupo de alumnos de 6º año de la escuela secundaria. El grupo estaba conformado por jóvenes de entre 17 y 18 años que constituyeron la primera promoción de la nueva secundaria de 6 años creada a partir de la Ley Provincial de Educación Secundaria Obligatoria. El curso se conformaba de 30 alumnos muy participativos en las clases y que fueron invitados especialmente para participar de esta experiencia, los cuales luego de ser informados del objetivo de ésta, respondieron positivamente a nuestra invitación.

Pensando en las características del grupo, en un primer momento del trabajo se planteó la necesidad de hacer una selección de actividades que resulten atractivas, no sólo para la resolución por parte de los estudiantes, sino para el objetivo que nos propusimos con este diagnóstico. Para ello, se diseñó e implementó un instrumento de evaluación que consistió de varios ejercicios o problemas que requieren del Álgebra para su resolución e implican también el desarrollo de distintos tipos de argumentaciones para validar las respuestas dadas a cada actividad. Junto con la resolución de estas actividades por parte de los estudiantes, se previó un espacio de tiempo en la clase destinado a hacer una puesta en común en el aula para discutir sobre las distintas resoluciones que se han realizado y, eventualmente, sobre los posibles errores que se pueden haber cometido, y contar con las explicaciones que los propios alumnos proporcionen en relación con cada aspecto.

Por otro lado, a partir de las resoluciones escritas y las explicaciones recogidas en la puesta en común se prevé la realización de un análisis de los distintos errores observados en las producciones de los alumnos, en términos de las distintas clasificaciones de los errores que hemos mencionado anteriormente (en el apartado correspondiente al Estado del Arte) o de otros aspectos que resulten relevantes y se consideren oportunos reportar. Esto nos permitirá elaborar, en la segunda etapa del trabajo, una secuencia didáctica que nos ayude a erradicar o por lo menos disminuir la cantidad de errores en la resolución de actividades en las que se recurra al Álgebra en el sentido que, como ya hemos descripto, nos interesa considerar.

Es importante destacar que, al momento de la implementación del diagnóstico, los alumnos cuentan con los conocimientos necesarios para abordar y encarar la resolución de las actividades, tanto en lo que se refiere a contenidos como a habilidades, algoritmos, procedimientos, etc., dado que se han trabajado tanto en el mismo año lectivo como en años anteriores. Como una característica particular, intentamos que tanto la presentación o la manera de plantear las actividades (incluyendo la redacción de las consignas) sean diferentes de la que habitualmente puedan haber desarrollado o resuelto a lo largo de las clases recibidas. Esto nos proporcionaría información sobre aquello errores que puedan ser debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas, tal como lo señala Astolfi (2009).

Luego de un amplio análisis de distintas actividades que hemos pensado para esta experiencia, se fueron descartando algunas que considerábamos que podrían hacer evidente en las resoluciones otros errores no vinculados con nuestro trabajo. Dentro del grupo de las que entendimos que podrían formar parte del diagnóstico, se fueron realizando distintas reformulaciones de cada una de ellas hasta definir la selección de 3 actividades que fueron las que conformaron el diagnóstico, teniendo en cuenta que una finalidad de éste era observar en qué modo los alumnos presentan errores vinculados con el uso de los símbolos, las generalizaciones en el Álgebra y las argumentaciones de las resoluciones, como para determinar el tipo de actividades que debiéramos considerar para la elaboración de nuestra propuesta didáctica. En todo este proceso hemos tenido en cuenta la premisa que ya hemos destacado y que se refiere a que en todas las áreas de estudio fundamentar una respuesta, analizar las propias resoluciones y elaboraciones y argumentar cada una de ellas es de central importancia, porque es una manera de justificar lo hecho o lo dicho. La comunicación en forma oral o escrita, ya sea en una puesta en común, o en la elaboración y presentación de las producciones de los estudiantes contribuye a la validación de las soluciones a las que se han arribado. Es por ello que consideramos valioso el hecho de que los alumnos deben habituarse a considerar la argumentación como una herramienta imprescindible para su formación como ciudadanos y no sólo como un aspecto aislado en su etapa como parte del sistema escolar.

En el próximo apartado estaremos presentando las actividades que se van a proponer, acompañadas de un breve análisis que plantea el tipo de situaciones que con ellas se pretende trabajar.

5.2. Las actividades del diagnóstico y su implementación

Días antes de realizar este trabajo se conversó con los alumnos del grupo acerca del proyecto en el que estábamos comprometidos y, se les comunicó que necesitaríamos de su colaboración, para lo que les propondríamos resolver algunas actividades de Matemática con el fin ver el trabajo de los alumnos en un 6º año en torno a ciertas cuestiones que nos interesaba particularmente indagar. Se plantearon las formas de trabajo con la que nos manejaríamos aunque lo que no se explicitó era nuestro objetivo de caracterizar los errores hallados en la resolución de las actividades que ellos resolvieran con el fin de no generar expectativas que pudieran condicionar su modo de trabajo y la presentación de las producciones surgidas del mismo.

Se llevó a cabo este diagnóstico de la siguiente manera: la **Actividad 1** y la **Actividad 2** fueron presentadas en un primer encuentro y para su resolución se dispuso de un tiempo estipulado en 1 hora 45 minutos para la resolución de las 2 Actividades, reservando los últimos 15 minutos de la clase para la puesta en común sobre lo trabajado.

En el primer encuentro, al presentar en el aula este trabajo, se les comunicó a los alumnos el desarrollo de la jornada, explicitando las intenciones del mismo y el modo en que se esperaba que resuelvan las actividades. Además, se les entregó a cada alumno, junto con las actividades y en forma escrita (fotocopias), las condiciones y criterios para realizarlas.

Una vez entregadas las fotocopias a los alumnos, algunos trabajaron solos y otros en pareja mientras las docentes observaban como se desempeñaban y la interacción entre distintos compañeros viendo, además, cómo consultaban sus dudas entre ellos, a la vez que ellas respondían a distintas inquietudes que fueran surgiendo en el momento. Completado el tiempo estipulado para la realización del diagnóstico, se recogieron las producciones escritas, se hizo una rápida lectura de alguna de ellas, para tener un registro de lo sucedido y se hizo la puesta en común, dejando un espacio importante para que los mismos estudiantes explicaran porque resolvieron las actividades de la manera en que lo hicieron. Las docentes han tomado nota de lo sucedido en varios momentos de esta experiencia, actuando como observadoras durante el tiempo de realización de la misma.

Al plantearnos el diseño de la jornada en la que se realizaría esta experiencia, hemos decidido grabar la puesta en común, para enriquecer las respuestas escritas por lo que, de hecho, se han realizado grabaciones en ambos encuentros. De la puesta en común han surgido expresiones orales ricas en torno a la resolución de las actividades, que nos pareció interesante rescatar con las propias voces de lo experimentado frente al desafío de la propuesta. Debido a que la grabación se generó con muchos defectos de sonido, no fue presentada junto con este trabajo, pero está a disposición del lector si acaso la requiriese.

Parte de lo obtenido en estas grabaciones y que nos resultó significativo se transcribió en forma escrita en distintos apartados de la tesina, junto con observaciones que las docentes hayan tomado en el mismo momento de la realización de la experiencia.

El texto que se les entregó a los estudiantes para comenzar a trabajar se les presentó impreso a cada uno en una misma hoja donde figuraban las consignas y el modo de trabajo esperado, y el contenido de la misma fue el siguiente:

Actividad 1:

Compara, para los distintos valores reales de *a*, las expresiones:

$$a^2 - 1 \quad \text{y} \quad 1 - a$$

Actividad 2:

¿Qué opción elegirías como truco para realizar con tus amigos y asegurarte el éxito frente a ellos? Justifica tu respuesta.

a) Pensá un número, duplicalo, sumale 8 y quedate con la mitad del resultado obtenido hasta ahora. Por último, restá el número que pensaste… Seguro que obtuviste 4 como resultado.

b) Pensá un número y elevalo al cuadrado. Al resultado restale el triple del número pensado y por último, sumá 2. Como resultado, obtuviste 0

- Puedes trabajar en forma individual o con tu compañero.
- Lee atentamente cada actividad.
- Puedes utilizar calculadora
- Los planteos, desarrollos y cálculos auxiliares debes entregarlos junto a la solución.
- **Justifica y argumenta** los pasos que realizas en cada actividad.
- También debes entregar aquellos intentos que no han llegado a dar respuesta a la actividad
- Recuadra e indica los resultados obtenidos
- Se hará una puesta en común de lo realizado para expresar lo sentido y vivido durante esta experiencia.

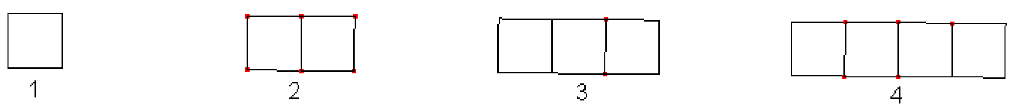
A la semana del primer encuentro con los alumnos se llevó a cabo, en una segunda jornada, la realización de la Actividad 3.

La dinámica del trabajo planteada para esta jornada fue la misma que en la primera, es decir, se les dio la actividad a los alumnos en una fotocopia junto a los criterios para realizarlas y el tiempo de resolución fue de 1hora reloj, dejando los últimos 10 minutos de la clase para la puesta en común.

El texto que se les entregó a los estudiantes fue, únicamente, el enunciado de la actividad, dado que las explicaciones sobre el modo de desarrollar el trabajo era el mismo que en la jornada anterior y los estudiantes lo tenían presente.

Actividad 3:

Se construye una sucesión de figuras con palillos, como la siguiente:



- ¿Cuántos palillos se necesitan para construir la figura que ocupa el trigésimo lugar? ¿Y la que ocupa el lugar número 75?
- ¿Hay alguna figura que tenga 58 palillos? ¿Y 299 palillos? ¿Por qué?

En el próximo apartado presentaremos un análisis de las resoluciones de los estudiantes y algunas evidencias de sus producciones.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DEL DIAGNÓSTICO

6.1. Análisis de la Actividad 1

Presentamos a continuación un análisis a priori de la Actividad 1 en términos de posibles formas de abordaje y, también posibles errores asociados a ella.

La primera de las actividades seleccionadas, tiene como objetivo la comparación de expresiones algebraicas en el campo de los números reales. Para ello, las cuestiones involucradas en la resolución deben contemplar el comportamiento de ambas expresiones a lo largo de todo el conjunto numérico IR y compararlas.

Para recordar el enunciado, presentamos a continuación la consigna de dicha actividad:

Actividad 1:

Compara, para los distintos valores reales de *a*, las expresiones:

$$a^2 - 1 \quad \textbf{y} \quad 1 - a$$

Comenzamos el análisis presentando una posible forma de resolver esta actividad, a modo de poder hacer explícito el potencial de la misma en el contexto de nuestros intereses.

Pensamos que una posible forma de abordar el problema por parte de los alumnos sería que éstos comiencen buscando valores para *a* que hagan 0 a ambas expresiones o que también comparen las expresiones evaluando cada una en distintos valores a la espera de que en alguno de ellos ambas tengan resultados coincidentes o, tal vez, viendo con cuáles el resultado de una es o no mayor que el de la otra. Estas formas de resolución claramente conllevan errores en la concepción o interpretación de la consigna, dado que, por ejemplo, que ambas asuman el valor cero es sólo **una** de las posibilidades de que ambas sean iguales, pero ¿por qué, entonces, no se contempla la situación de igualar, por ejemplo, ambas expresiones a 5? En este caso, también son iguales las expresiones, pero no forma parte de las posibilidades consideradas por los estudiantes que sólo las hayan igualado a cero. Concretamente, si acaso quisieran ver cuándo coinciden ambas, lo que debieran plantear es directamente, la igualdad entre ambas y NO cada una por separado igualadas a cero o a otro cualquier valor.

Por otro lado, el procedimiento planteado en esta situación, sólo nos permitiría ver el caso en que las expresiones coincidan en sus valores, pero no permite ver cuándo una resulta ser mayor o menor que la otra, y éstas son también dos posibilidades que debieran tenerse en cuenta al interpretar correctamente la acción de "Comparar" que se pretende desde el enunciado. Es decir que, si acaso este fuese el proceder elegido, la actividad quedaría inconclusa o incompleta. En cualquier caso, de acuerdo a la clasificación que Booth (1984) hace de los errores, los alumnos estarían incurriendo en errores *debidos al objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en Álgebra* y otros debidos *al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento*. También, los errores observados en este tipo de resolución, en términos de lo expresado por Astolfi (1999) podrían estar *debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas* o por *una mala interpretación de las expectativas*.

Otra alternativa que desarrollen los estudiantes podría ser, antes que nada, verificar los resultados que ambas expresiones toman con distintos valores de *a*, sin saber, tal vez, qué hacer con ello si acaso no le dieran iguales (a cero o a otro valor). Pasada esta instancia probatoria con valores arbitrarios (que muy probablemente sean números naturales), es posible que recurran a igualar las dos expresiones. Con esto tendríamos lo siguiente:

Se igualan las expresiones quedando, entonces

$$a^2 - 1 = 1 - a$$

De lo que resulta la ecuación:

$$a^2 + a - 2 = 0$$

Se obtiene así una ecuación de 2º grado, cuyas soluciones son:

$$a = -2\,; \quad a = 1$$

Lo que es importante destacar aquí, es que en estos dos valores (los **únicos** dos valores) las expresiones toman **el mismo resultado**, pero esto no dice nada respecto de cuándo una de las expresiones resulta mayor o menor que la otra que, como señalamos, también forma parte de la "comparación" que propone la actividad. Para ver esto último, lo que debiera plantearse es, por ejemplo, la inecuación:

$$a^2 - 1 > 1 - a$$

o lo que es igual,

$$a^2 + a - 2 > 0 \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta las raíces halladas de la ecuación planteada anteriormente y que las expresiones cuadráticas pueden expresarse de manera factorizada a partir de sus raíces, la inecuación (1) se transforma en

$$(a+2).(a-1) > 0 \qquad (2)$$

Es importante destacar que hallar el conjunto solución de esta inecuación nos permite también conocer el conjunto solución de la inecuación "complementaria"

$$(a+2).(a-1) < 0$$

con lo que, finalmente, habremos visto el comportamiento de ambas expresiones a lo largo de toda la recta real y podremos dar, entonces, el resultado de la comparación entre ellas.

Para resolver la inecuación (2) pueden recurrirse a varios métodos entre los cuales podemos señalar el procedimiento “algebraico” o, también, dar la solución desde un abordaje de tipo “funcional” recurriendo, en este caso, al soporte que dan los gráficos de dos funciones: una lineal y otra cuadrática. Cabe destacar que si bien estos procedimientos no hayan sido considerados por los estudiantes, ellos disponen de todas las herramientas necesarias para su resolución, con lo que, finalmente, la mayor “dificultad” que plantea la actividad está en la formulación e interpretación de la consigna.

El modo algebraico para resolver la inecuación podría ser el que considera los casos necesarios para que un producto sea positivo. A modo de hacer visibles las dificultades que este procedimiento conlleva, mostramos a continuación los pasos que serían necesarios para resolver la inecuación de este modo.

$$(a+2).(a-1)>0 \Rightarrow [\, a+2<0 \wedge a-1<0 \,] \ \text{ v } \ [\, a+2>0 \wedge a-1>0 \,]$$

$$a<-2 \wedge a<1 \Rightarrow a<-2 \ \vee a>-2 \wedge \ a>1 \Rightarrow a>1$$

$$a \in (-\infty,-2) \vee \mathrm{a} \in (1,\infty)$$

$$\text{Entonces } a^2-1 \ > 1-a \ \text{ si } \mathrm{a} \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$$

$$a^2-1 \ < 1-a \ \text{ si } \ a \in (-2,1)$$

con lo que, habiendo observado que $a^2-1=1-a$ para $a=-2$ y $a=1$ tenemos todas las comparaciones posibles ya resueltas.

Con respecto al otro posible método de resolución que hemos propuesto, se pensó también en funciones, considerando a como la variable independiente. De este modo tendremos, entonces, una función lineal y una función cuadrática para establecer comparaciones entre ellas. Las funciones son *f* y *g* definidas como:

f: IR $\rightarrow$ IR y *g*: IR $\rightarrow$ IR dadas por las expresiones:

$$f(x) = x^2 - 1$$

y la otra:

$$g(x) = 1 - x$$

Una característica que entendemos que resulta interesante destacar es que ésta es una forma de resolución que no interpretábamos, a priori, que pudieran realizar los estudiantes. Uno de los motivos para que pensemos en esto es que las expresiones están haciendo referencia a una "variable" que no es usual para ellos, que habitualmente se enfrentan a funciones expresadas únicamente en términos de la variable *x* (y no *a* como en nuestro caso). Entendemos que esta dificultad en poder interpretar el problema de un modo "funcional" sólo por el uso de un "nombre" no habitual para una variable podría ocasionar lo que Booth (1984) describe como *errores atribuibles a la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras*.

Para resolver la actividad utilizando este enfoque funcional, una de las situaciones que debemos resolver será determinar el conjunto solución de la inecuación

$$f(x) > g(x)$$

dado que, en realidad, lo que debemos estudiar son las tres situaciones

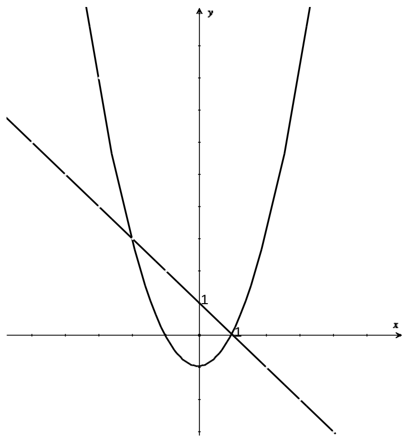
$$f(x) > g(x); \qquad f(x) < g(x) \qquad \text{y} \qquad f(x) = g(x)$$

En cualquiera de estos casos, puede recurrirse al gráfico de ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados, y observar que conociendo el resultado de la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

que determina los puntos de “contacto” o intersección entre las curvas que definen los gráficos de ambas funciones. Como puede observarse, en este abordaje del problema, las principales dificultades consisten en identificar a cada expresión con una función y luego compararlas en los distintos intervalos que se generan a partir de las soluciones de la ecuación anterior.

El gráfico de ambas funciones, realizado con el graficador de un software de Matemática de uso escolar es el siguiente:



Tal como ya habíamos planteado anteriormente, los puntos de intersección entre ambas curvas se dan para los valores $x = -2$ y $x = 1$. A partir de esto, y la lectura del gráfico se observa que la función lineal es menor que la función cuadrática en $(-\infty,-2)$, luego, en el intervalo (-2, 1) es mayor la función lineal y, finalmente, en $(1, +\infty)$ nuevamente es menor la función lineal que la función cuadrática. En este modo de resolución, estamos justificando en forma gráfica todo lo expresado en forma simbólica.

A modo de análisis posterior a la realización del diagnóstico y atendiendo en este caso a la primera actividad, nos parece interesante señalar que al realizar la puesta en común algunos alumnos expresaron oralmente que esta actividad no les resultó sencilla dado que, en general, varios de ellos señalaron que no comprendieron la consigna. Al respecto, y tal como lo señalamos en líneas anteriores al presentar los posibles modos de resolución, de acuerdo a lo que dice Astolfi, algunos de los errores que observamos se producen porque los alumnos no comprenden las instrucciones dadas. No visibilizaron al símbolo a como una variable y tampoco pensaron en la totalidad del campo numérico real para dar la respuesta.

6.1.1. Respuestas de los estudiantes a la Actividad 1

Para ilustrar los resultados obtenidos, presentamos las respuestas de algunos estudiantes a las actividades del Diagnóstico. En este apartado, las correspondientes a la primera de las actividades. Para identificarlos, llamaremos a cada alumno o dúo que realizó las actividades con una letra mayúscula. Se eligieron sólo tres respuestas de todas las obtenidas (que llamamos RESPUESTA 1, 2 ó 3 según corresponda), porque son las que consideramos que presentan de manera más manifiesta los errores que nos interesa analizar.

ACTIVIDAD 1 – RESPUESTA 1

Para esta respuesta presentamos el caso del dúo de alumnos que llamamos A, que hicieron lo siguiente:

Comenzaron igualando ambas expresiones a cero definiendo así dos ecuaciones individuales y las resolvieron, concluyendo que la solución del sistema formado por ambas es $a = 1$ (por ser el valor que resuelve a cada una de ellas). Luego, igualaron las dos expresiones, sin justificar porqué, definiendo así la ecuación

$$a^2 - 1 = 1 - a$$

A continuación, evaluaron las expresiones en $a = 1$ y concluyen, recuadrando, 0 = 0, dando así por terminada la respuesta.

Observando la respuesta de los estudiantes vemos que sólo encontraron un valor común ($a = 1$) en el que ambas expresiones toman el mismo valor, que en este caso es 0. Tal como lo expresamos en nuestro análisis a priori de las actividades, incurrieron en uno de los casos esperados como resolución, que consiste en igualar cada expresión a un mismo número (a cero en este caso).

Aquí la respuesta dada por este dúo de alumnos la presentamos en la siguiente figura, que muestra explícitamente la situación descripta. Cabe señalar que también se repitió en otros casos una resolución parecida.

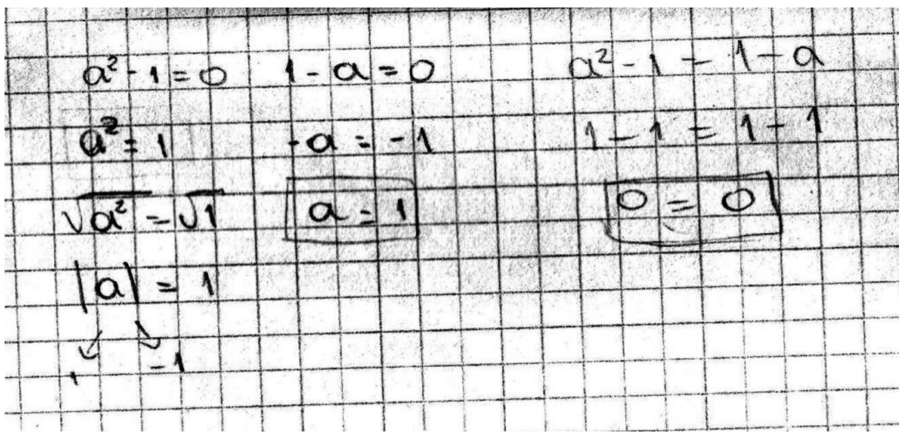


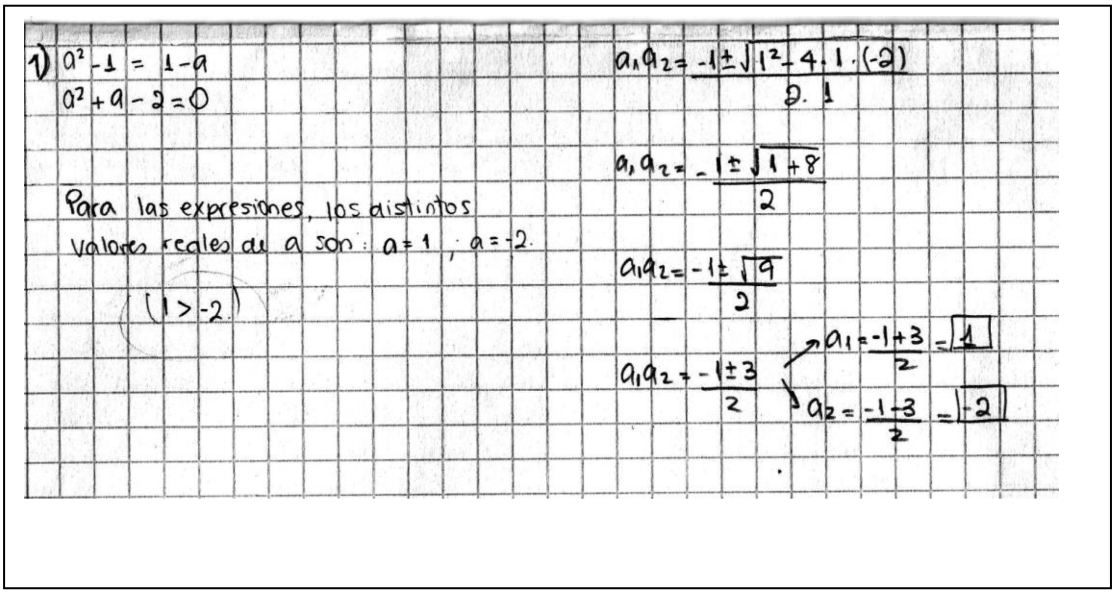
Figura 1. Resolución de A para la Activdad 1

Respecto de esta resolución, podría decirse que el desarrollo de la respuesta fue escaso, y entendemos que hubo varias cuestiones que los llevaron a no resolver la actividad correctamente: por un lado, podría afirmarse que no interpretaron el enunciado, y que posiblemente la palabra “comparar” les dificultó la respuesta. En este sentido, habitualmente los estudiantes se enfrentan a situaciones en las comparan números pero no expresiones algebraicas. Además, pareciera que “comparar” sólo significa “igualar” dado que ni en esta ni en ninguna otra respuesta se observa reflexión de los alumnos en torno a pensar en una desigualdad también se asocia a una comparación. En definitiva, podría afirmarse que los alumnos sólo consideraron la necesidad de plantear ecuaciones individuales para hallar valores comunes que ambas verificaran y, posiblemente, esto se debe a que en la ejercitación que cotidianamente realizan no se proponen actividades donde deban analizar, justificar y argumentar. En tal sentido, adherimos a lo que expresa Pochulu (2006) al afirmar que los estudiantes “están acostumbrados a desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas”

ACTIVIDAD 1 – RESPUESTA 2

Para ilustrar esta respuesta, proponemos el trabajo presentado por el alumno B, que iguala las expresiones, obteniendo una ecuación de 2º grado. Halla las soluciones de la ecuación aplicando correctamente la fórmula resolvente para ecuaciones de este tipo y luego, con los valores que halló como solución, $a = 1$ y $a = -2$, expresa una desigualdad $(1 > -2)$ sin ninguna aclaración ni justificación acerca de lo que con ello quiere resaltar.

La resolución que presentó el alumno B es la que presentamos en la siguiente figura.



1) $a^2 - 1 = 1 - a$

$a^2 + a - 2 = 0$

Para las expresiones, los distintos valores reales de a son: $a = 1$; $a = -2$.

$(1 > -2)$

$a_1 a_2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 . 1 . (-2)}}{2 . 1}$

$a_1 a_2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$

$a_1 a_2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$

$a_1 a_2 = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$a_1 = \dfrac{-1+3}{2} = \boxed{1}$

$a_2 = \dfrac{-1-3}{2} = \boxed{-2}$

Algunas cosas que pueden observarse en esta resolución son las siguientes: por un lado, no hubo ningún análisis de los resultados obtenidos y, por otro, no se observa ninguna relación entre lo trabajado (planteo y resolución de la ecuación), con lo expresado de manera coloquial a modo de conclusión. Con respecto a esto último, se reitera la dificultad para comprender la consigna, a partir de la lectura que se hace de su conclusión, en la que intenta dar la respuesta en los mismos términos del enunciado, al hacer referencia a la expresión "*los distintos valores reales de a*". No entiende que con esa expresión se hace referencia al universal de los números reales, y sólo atiende a sus dos soluciones de la ecuación como los "distintos" valores. A diferencia de otras producciones, este alumno reconoce que *a* es una variable, y aquí la trata como tal, pues la considera como incógnita de la ecuación que plantea. Al igual que en casi la totalidad de las respuestas que hemos recibido, en esta también se observa ausencia de justificación de lo realizado.

Como síntesis para el análisis hecho sobre esta respuesta, podríamos decir que en la resolución propuesta por el alumno B pueden advertirse algunos de los errores descriptos por los autores citados en el estado del arte presentado en esta tesina. Efectivamente, según nuestra interpretación, pueden observarse, tal como lo describe Socas (1999) algunos errores que tienen su origen en *la complejidad de los* objetos *y de los procesos de pensamiento algebraico*. También, en coincidencia con la clasificación planteada por Pochulu y Vargas (2006), pueden apreciarse que algunos de los errores (sobre todo aquellos que relacionamos con las dificultades de interpretación de la consigna) son *debidos al lenguaje matemático*.

ACTIVIDAD 1 – RESPUESTA 3

Como tercera respuesta a la Actividad 1, seleccionamos la del alumno que designamos como C. Este alumno reduce su a una expresión en lenguaje coloquial, en la que deja expresado todo lo que considera necesario para dar su respuesta. En la próxima figura presentamos textualmente su respuesta:

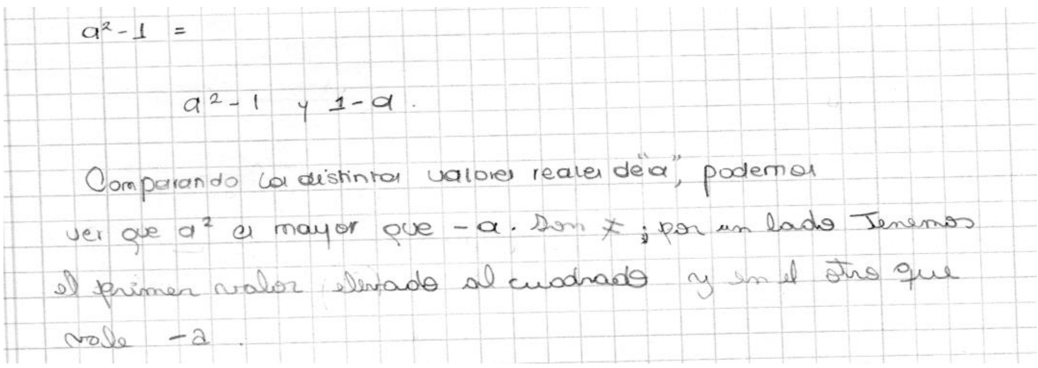


Figura 3. Resolución de Actividad 1 hecha por alumno C

De la lectura de este fragmento, surge un concepto o idea que pareciera estar presente en la **creencia** de los alumnos, y es que “un número elevado al cuadrado siempre es mayor que él mismo”, la cual es una condición que sí se cumple en los números naturales (en realidad con los reales) **mayores que uno**. Esta afirmación, que los estudiantes generalmente consideran válida sobre los números naturales, como lo señalamos en nuestra enunciación previa, forman parte de un conjunto de saberes previos cuyo alcance quieren hacer extensiva a todos los números reales, sin reflexionar sobre el hecho de que si esta generalización es válida o no.

Otro error en esta respuesta de los alumnos es que al visualizar un signo “menos” delante del parámetro suelen dar por sentado que esa expresión (como en nuestro caso “$-a$”) representa un número negativo. En este punto nos parece importante notar que, esta concepción que el estudiante tiene sobre la relación entre “el cuadrado” y el “opuesto” de un número es lo que ha precipitado el cierre de la respuesta al problema planteado. En definitiva, puede observarse que la consigna no fue interpretada correctamente, que se justifica por “suposiciones” y, además, que no hay ninguna evidencia de que se haya hecho una comparación, como se pedía, desde el análisis de las expresiones algebraicas.

Sintetizando el análisis de la respuesta del alumno C, podemos observar que en la misma se aprecian, como señala Socas (1999) que explicitan errores que pueden deberse a la *complejidad de los objetos del Álgebra* para los estudiantes o, como define Pochulu (2006), aquellos que son debidos a *la recuperación de un esquema previo*.

Resumiendo todo lo señalado a lo largo de la descripción y análisis de las tres respuestas seleccionadas para la Actividad 1, pueden observarse algunas consideraciones que son compartidas con otras respuestas, algunas de las cuales han surgido de la puesta en común que se realizó entre los alumnos y docentes al finalizar las actividades.

Al respecto, de la puesta en común hemos podido concluir, entre otras cosas que, de acuerdo a lo que han expresado los propios alumnos, algunos elementos que nos parecen importante destacar es que, entre los errores que se han observado figuran algunos asociados a las dificultades que puedan haber provenido del propio enunciado de la consigna y otros que provienen de la resolución en sí misma.

Por un lado puede mencionarse que la letra "*a*" usada para definir las expresiones que debían compararse pareció ser un factor que influyó negativamente en la resolución de la actividad, pues no es la más habitual dado que usualmente son las letras *x* ó *y* las más utilizadas para definir una expresión algebraica. Frente a esto pareciera que algunos estudiantes se desconcertaron y no pudieron resolver la actividad. Este hecho pudo haber influido para que los alumnos no hayan recurrido a un abordaje de la respuesta desde una mirada funcional, precisamente porque el uso de la letra ***a*** como variable en las expresiones de la consigna hizo que no vincularan a éstas con funciones numéricas pues, como ya hemos comentado, los estudiantes en su mayoría están habituados a usar como variable de una función a la letra *x*. En línea con lo mencionado, adherimos a Booth (1984) en esta circunstancia, considerando que varios de los errores pueden ser debidos a "*la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras*".

Por otro lado, la ausencia de un análisis comparativo de las expresiones dadas también hace que se cometan algunos errores y, sobre todo, que éstos se expresen en una conclusión incorrecta. De hecho, no podemos dejar de señalar que ninguna de las respuestas observadas en las producciones de todos los alumnos que participaron de la experiencia alcanzó un nivel de corrección adecuado. No se observó un análisis completo que contemple la comparación de las expresiones en el campo de los números reales. Aunque no se han mostrado en la selección de respuestas que hicimos para este trabajo, muchos estudiantes han "probado" con con algunos números, sustituyéndolos en la variable, y han buscado casos particulares, sin explicitar porqué eligieron esos números para hacer las evaluaciones ni qué significado le daban a los resultados obtenidos. En definitiva, y como una característica que se puede generalizar a todas las resoluciones, la justificación y argumentación estuvo ausente en cada una de las respuestas. Como una conclusión sobre esta actividad podemos señalar entonces que, en su mayoría, los alumnos presentan dificultades para familiarizarse con los distintos usos de la variable y no logran desarrollar un manejo flexible de ellos"

6.2. Análisis de la Actividad 2.

En este apartado estaremos presentando las respuestas seleccionadas para la Actividad 2 correspondientes a tres alumnos.

Esta actividad se presenta en forma lúdica a partir de un "desafío" o "acertijo" en el cual se debe elegir una de las opciones, no como una "adivinanza", sino que implica un análisis de los enunciados dados en lenguaje coloquial, para tomar la decisión de cuál de ellas garantizará el éxito en la realización del truco. Se espera que los alumnos piensen en distintas estrategias, para resolver la actividad, que involucra la necesidad de "construir" una expresión algebraica a partir de datos brindados en forma coloquial y, además, la resolución de ecuaciones cuyo conjunto solución podría ser todo el conjunto de los números reales.

Actividad 2:

¿Qué opción elegirías como truco para realizar con tus amigos y asegurarte el éxito frente a ellos? Justifica tu respuesta.

a) Pensá un número, duplícalo, sumale 8 y quedate con la mitad del resultado obtenido hasta ahora. Por último, restá el número que pensaste… Seguro que obtuviste 4 como resultado.

b) Pensá un número y elevalo al cuadrado. Al resultado restale el triple del número pensado y por último, sumá 2. Como resultado, obtuviste 0

Un primer acercamiento a la resolución es que prueben con números naturales para cada opción, lo que implica que realicen cálculos elementales para poder decidir sobre la opción conveniente. Para ello, podrán elegirse distintos números para la opción a) y resolver los cálculos propuestos en el relato, con los que siempre obtendrán 4 como resultado, cualesquiera sean los números “con los que se pruebe”. Esta situación dará la pauta de que ésta es la opción exitosa, pues cuando prueban con la segunda opción, la planteada en el ítem b), sólo se obtendrá cero en dos únicos casos.

La consigna pretende que el alumno relacione al número que se nombra en los enunciados con una variable numérica, y que lo plantee como incógnita de una ecuación. Una vez hecho esto, se deberá analizar el tipo de ecuación que resulta, para elegir la opción más conveniente de acuerdo a su conjunto solución, de modo de poder, luego, justificar la decisión.

En la primera situación, planteada en la consigna a), resulta adecuada la siguiente expresión, de acuerdo a lo que se describe en el enunciado:

$$(x.2+8):2-x=4$$

La ecuación planteada resulta una ecuación lineal cuyo conjunto solución admite infinitas soluciones. Tener esta característica significa, en ecuaciones de este estilo, que **cualquier número real** será solución de la misma, lo cual, en términos del problema planteado, significa que **con cualquier número que se elija** el truco será exitoso.

En la segunda situación, la del ítem b), la expresión que resulta del planteo es una ecuación de segundo grado que, más concretamente, es la siguiente:

$$x^2-3x+2=0$$

Las soluciones de esta ecuación son, únicamente, los números

$$x_1=1 \quad y \quad x_2=2$$

con lo cual, en esta segunda opción se aseguraría el *éxito* en el truco, solo si se elige alguno de estos valores para llevar a cabo la experiencia descripta en la actividad.

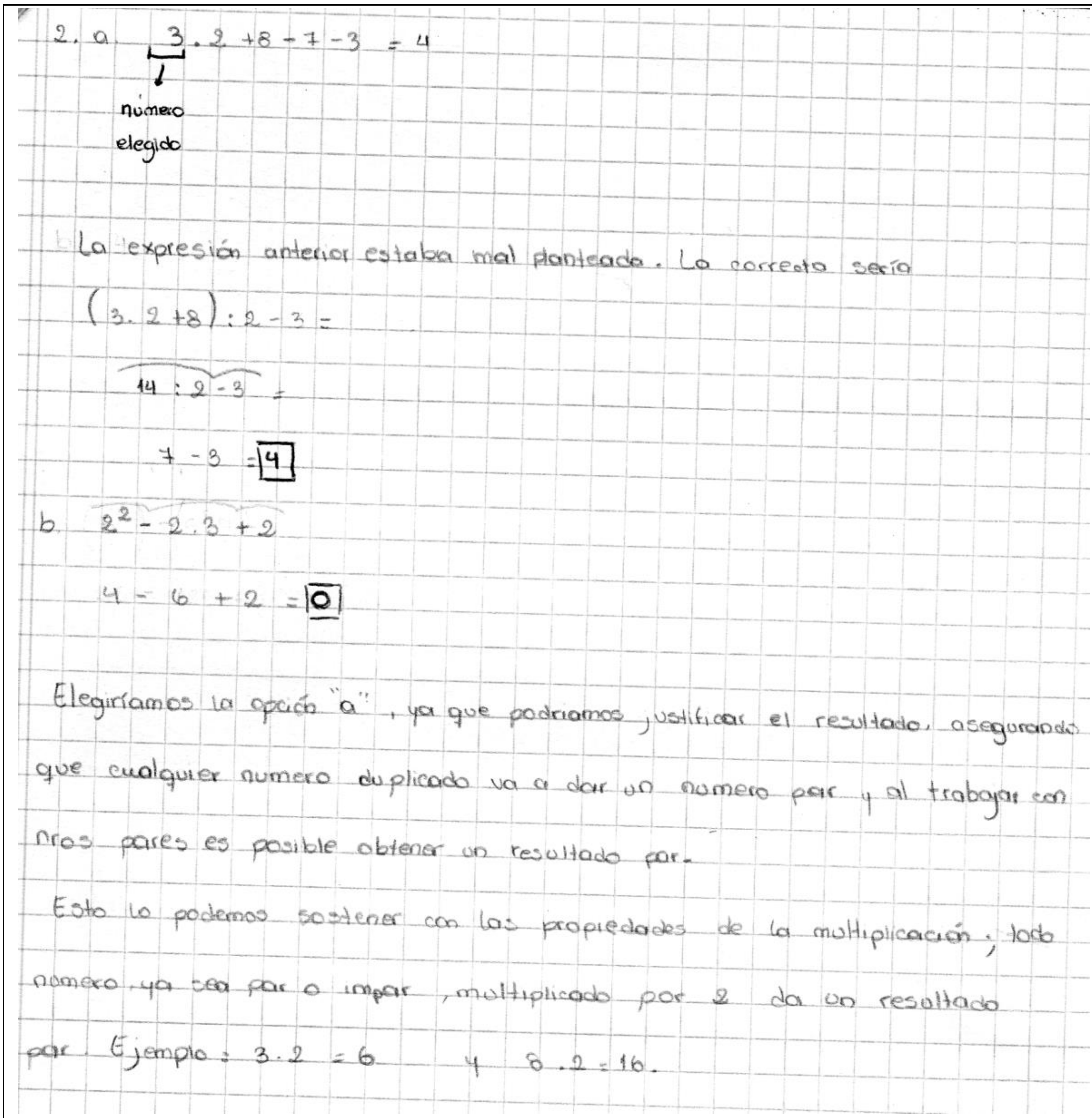
Entendemos que, si bien podría abordarse el problema desde otros puntos de vista, el que hemos descripto y que involucra ecuaciones elementales y el análisis de su conjunto solución, podría ser el que está más al alcance de los estudiantes de nuestro grupo. Por otro lado, también es cierto que es la forma de poder arribar a una respuesta desde un *método exhaustivo* de exploración de posibilidades, dado que la *universalidad* o no que expresa el conjunto solución es un elemento definitorio para tomar la decisión pedida en la consigna.

6.2.1. Respuestas de los estudiantes a la Actividad 2

De un modo similar a lo que lo hicimos con la Actividad 1, aunque tal vez no tan detallado por compartir las características principales y el estilo, presentamos un breve análisis de lo observado en las producciones de los alumnos al resolver esta actividad, hecho desde el punto de vista de los errores y ajustándonos a algunos de los modelos expresados en el estado del arte descripto en este trabajo. Presentamos también tres respuestas, que asociamos a los alumnos que llamamos D, E y F.

ACTIVIDAD 2 – RESPUESTA 1

Al respecto, presentamos lo realizado por el alumno D. Éste, para la primera opción, elige un número (en este caso el número 3) con el que, realizando los cálculos pedidos en el procedimiento del truco obtiene como resultado al número cuatro 4. Para la segunda opción realiza los cálculos propuestos en b) pero, ahora, elige el número 2 para realizar el procedimiento, con el que obtiene cero como resultado, a partir de lo cual responde que la 1º opción es la exitosa. Para ilustrar nuestro comentario, en la siguiente figura, presentamos textualmente la respuesta de este alumno, a partir de la copia escaneada de su resolución.



2. a $\underbrace{3}_{\text{número elegido}} . 2 + 8 - 7 - 3 = 4$

b La expresión anterior estaba mal planteada. Lo correcto sería

$(3 . 2 + 8) : 2 - 3 =$

$\overbrace{14 : 2} - 3 =$

$7 - 3 = \boxed{4}$

b. $\overbrace{2^2} - \overbrace{2 . 3} + 2$

$4 - 6 + 2 = \boxed{0}$

Elegiríamos la opción "a", ya que podríamos justificar el resultado, asegurando que cualquier numero duplicado va a dar un numero par y al trabajar con nros pares es posible obtener un resultado par.

Esto lo podemos sostener con las propiedades de la multiplicación, todo número, ya sea par o impar, multiplicado por 2 da un resultado par. Ejemplo: 3 . 2 = 6 y 8 . 2 = 16.

Figura 4. Respuestas a la Actividad 2 del alumno D

En esta resolución, no se observa un trabajo analítico, no se simboliza la situación, sólo se trabaja con dos ejemplos y ambos en el conjunto de los naturales. Lo expresado por el alumno no justifica el resultado del problema y se basa en un principio, que si bien es válido (multiplicar por dos a un número par o impar genera un número par) no resulta apropiado para establecer una justificación para esta situación. Lo que da es una argumentación que finalmente es errónea en este contexto y no observa que para una afirmación general como la realizada en la consigna no resulta suficiente dar uno o dos ejemplos para justificarla. Por otro lado, hace referencia al resultado del procedimiento como “un resultado par” en general, cuando sólo es esperable que se expida únicamente por el número cuatro para tener éxito con el truco. Sobre el procedimiento planteado en b) no hace ninguna referencia más que efectuar un reemplazo de la variable por un valor determinado.

Encontramos aquí, entre otros, errores asociados a la mala interpretación de la consigna, así como los que tienen que ver con la *complejidad de los objetos del Álgebra* y a *la recuperación de un esquema previo* tal como plantean Socas (1999) y Pochulu (2006), o con *el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en Algebra* (Booth, 1984).

ACTIVIDAD 2 – RESPUESTA 2

Para ilustrar esta respuesta, presentamos la que planteara el alumno E, quien elige dos números naturales para probar la opción 1, hace los cálculos e incluso con el primer número que elige no obtiene cuatro como resultado porque opera incorrectamente. Para la segunda opción también elige dos números con los que realizar el procedimiento y solo con uno de ellos obtiene cero como resultado.

Antes de continuar con la descripción de esta respuesta, veamos, en el siguiente gráfico, la copia textual de su presentación.

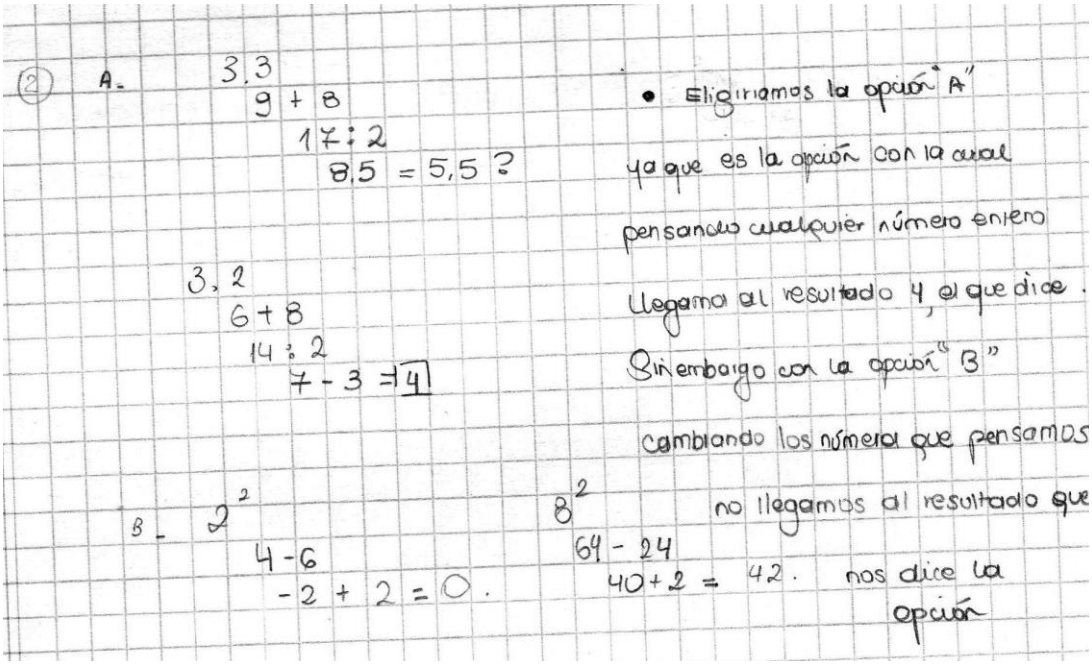


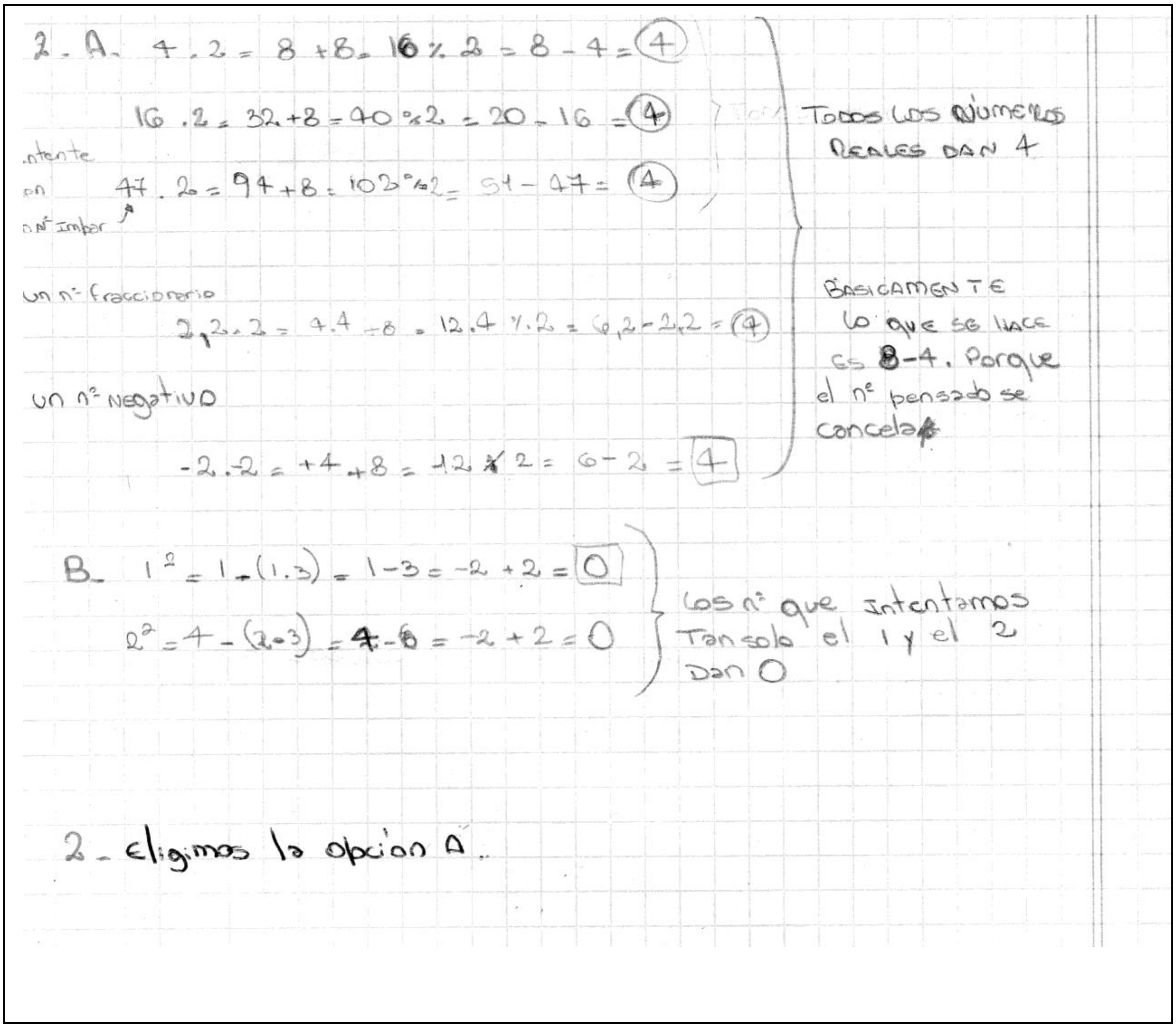
Figura 5. Respuestas a la Actividad 2 del alumno E

A pesar de que el propio alumno manifiesta una duda en una de las verificaciones realizadas para la primera opción (en la que comete error en el cálculo y obtiene 5,5 por resultado) señala que es la opción correcta, por lo que suponemos que tal vez haya verificado con otros números aunque no los haya explicitado en la respuesta entregada. Nuevamente, observamos que los estudiantes no tienen en cuenta que no es suficiente "dar ejemplos que satisfagan una afirmación" para sostener la validez de la misma.

Con respecto a la segunda opción, en la que elige sólo dos valores, con uno de ellos no arriba a la respuesta prometida en el enunciado de la actividad. Solo encuentra un valor que resuelve la ecuación planteada, pero al observar que con uno de los números no se verifica, descarta este procedimiento como exitoso. Si bien en este caso lo realizado está dentro de lo correcto, entendemos, por comparar esta respuesta con la dada para la primera opción, que sólo la deduce correctamente por una cuestión “azarosa” y no por conocer las reglas de argumentación válidas para este tipo de situaciones. De todos modos concluye que elige la opción 1, sin fundamento ni argumentación en su decisión.

ACTIVIDAD 2 – RESPUESTA 3

En este caso, como ejemplo seleccionamos la respuesta dada por el alumno que llamaremos F. La respuesta de este alumno es la que figura en el siguiente gráfico.



2. A. 4 . 2 = 8 + 8 = 16 % 2 = 8 - 4 = 4

16 . 2 = 32 + 8 = 40 % 2 = 20 - 16 = 4

intente con un nº impar

47 . 2 = 94 + 8 = 102 % 2 = 51 - 47 = 4

un nº fraccionario

2,2 . 2 = 4,4 + 8 = 12,4 % 2 = 6,2 - 2,2 = 4

un nº negativo

-2 . -2 = +4 + 8 = 12 % 2 = 6 - 2 = 4

Todos los números reales dan 4

Basicamente lo que se hace es 8-4. Porque el nº pensado se cancela

B. 1² = 1 - (1.3) = 1 - 3 = -2 + 2 = 0

2² = 4 - (2.3) = 4 - 6 = -2 + 2 = 0

Los nº que intentamos tan solo el 1 y el 2 dan 0

2. Eligimos la opción A.

Como puede observarse, este alumno prueba con varios números en la primera opción, enteros y racionales, y obtiene cuatro como resultado en cada caso, es decir que lo que observa es que el truco funciona para los números elegidos. Luego prueba con números en la segunda opción, y verifica sólo con los valores 1 y 2 que el procedimiento da como resultado cero. Elige la opción primera como exitosa y la justificación, que no puede considerarse correcta, la hace en lenguaje coloquial diciendo que "básicamente lo que se hace es 8 – 4, por que el número pensado se cancela". En este caso, es curioso señalar que su argumento no está muy alejado de lo que efectivamente se hace en el primer truco, pues en realidad, la operación termina resultando ser (luego de hacer algunos sencillos cálculos en la expresión que se desprende del planteo):

$$x + 4 - x$$

cuyo resultado se reduce, claramente a cuatro.

Puede considerarse que la actividad se resolvió, pero en parte, pues la justificación es a partir de la evaluación en casos particulares, por lo que es insuficiente y es incorrecta la expresión coloquial que plantea. Si acaso se hubiera recurrido a una expresión simbólica que indique lo que se propone desde "las sentencias" dadas para el truco, se mostraría que la primera opción siempre será exitosa para todo número, pues si se expresara de esa manera es una ecuación de primer grado con infinitas soluciones y la segunda una ecuación de 2º grado con 2 soluciones.

Como caso notable, nos parece interesante destacar que este alumno descarta la opción dos como la correcta pese a que con los únicos dos ejemplos que presentó arribó al resultado anunciado (aunque no haya observado que esos **son los únicos** valores con los que se llega a dicho resultado).

Si bien no es un error de los que nos interesa particularmente destacar, este alumno comete un error muy evidente (y muy usual entre los estudiantes) que es el de usar el símbolo “=” de una manera incorrecta y que podría decirse “abusiva” en el sentido de no asignarle el significado que efectivamente tiene, pues comienza una expresión y, luego de resolverla, la iguala a la expresión que corresponde a un próximo paso, adicionando otros números o símbolos no explicitados en lo que realizó previamente. A modo de ejemplo, copiamos a continuación una línea que ejemplifica lo dicho, y se observa en la presentación del alumno:

$$4 . 2 = 8 + 8 = 16 : 2 = 8 – 4 = 4.$$

En la puesta en común los alumnos mencionaron que no se les ocurrió en ningún momento expresar en lenguaje simbólico las sentencias planteadas en los trucos y que creían suficiente para la respuesta tomar ejemplos y verificar con ellos si se arriban o no a los resultados anunciados.

Es importante destacar que los estudiantes manifestaron entender la consigna, pero que sólo al interactuar con los docentes han podido observar la insuficiencia de sus argumentos. Al respecto, pensamos que la actividad les resultó atractiva y desafiante por la accesibilidad a la lectura y, sobre todo, por la “complejidad” que requiere su respuesta, cosa que recién han advertido en la puesta en común.

Luego de observar todas las resoluciones de esta actividad, hemos podido hallar errores que se manifiestan en gran parte de las producciones, y que ya hemos señalado en la descripción que hemos hecho de las tres respuestas seleccionadas. A modo de resumen, estos errores que se reproducen en casi todos los estudiantes pueden sintetizarse en varios de los que ya mencionan los autores citados anteriormente como, por ejemplo, los que se relacionan con *el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en Álgebra*, y aquellos *debidos al lenguaje matemático*, producidos por una traducción incorrecta de hechos descriptos en un lenguaje natural a otro más formal.

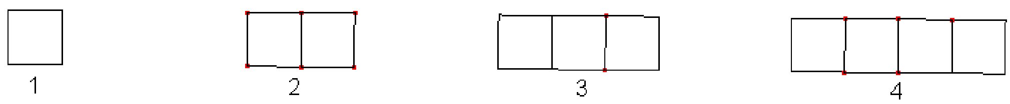
6.3. Análisis de la Actividad 3.

Como hemos señalado anteriormente, la resolución de la Actividad 3 se desarrolló en un segundo encuentro realizado una semana después del primero.

En este apartado estaremos describiendo los resultados obtenidos como respuesta a la Actividad 3, cuyo enunciado es el siguiente:

Actividad 3:

Se construye una sucesión de figuras con palillos, como la siguiente:



- ¿Cuántos palillos se necesitan para construir la figura que ocupa el trigésimo lugar? ¿Y la que ocupa el lugar número 75?
- ¿Hay alguna figura que tenga 58 palillos? ¿Y 299 palillos? ¿Por qué?

La actividad es muy productiva pues invita a los alumnos a formalizar un enunciado dado en lenguaje natural a través de la creación de fórmulas y utilización de las mismas, ya sea en "procesos directos como inversos", involucra también el concepto de sucesión numérica, a partir de que una secuencia finita dada puede completarse "adicionando palillos" en los primeros términos. Esto último es importante destacar que no parece representar la opción "más económica" de resolución cuando se pide, por ejemplo, el término trigésimo o el septuagésimo quinto, a partir de lo cual se promueve hallar una expresión que represente al término general. En este caso, la variable representa un parámetro que permita calcular cualquier término de la sucesión y, a su vez, conociendo un cierto número de palillos determinar a que número de término corresponde. En este caso, esa expresión del término general hallada, se la utiliza como parte de una ecuación, a partir de lo cual, en la misma actividad se trabaja la variable en forma de parámetro, en forma de incógnita y en relación funcional, con lo que se refleja el modelo 3UV del que habla Ursini en su análisis del uso de la variable.

Consideramos ésta como una actividad potente de las que debemos disponer en la práctica de la enseñanza para hacer que los alumnos se conviertan en usuarios competentes del Álgebra, capaces de interpretar la variable de varias maneras diferentes, independientemente del problema que deban resolver.

Como para ilustrar algunas de las cuestiones mencionadas y que se involucran en esta actividad, que permite utilizar distintas estrategias de resolución, mostraremos una manera posible de resolverla.

En principio, se pueden ir sumando palitos como primer camino en la búsqueda de la resolución de la misma o también completar con dibujos para armar más cuadrados,

Al contar los palillos que conforman cada figura, se podría construir una tabla de valores como la que se muestra a continuación, vinculando el lugar que ocupa la figura en la secuencia con la cantidad de palillos necesarios para armarla, haciendo explícita una relación de dependencia entre ambos números.

Lugar	**Cantidad de palillos**
1	4
2	4+3
3	4+3+3
4	4+3+3+3
-----	--------
30	4+3.29

Contar con esta tabla permitirá notar que existe una regularidad que puede ser generalizada a través de una expresión algebraica, vinculando el lugar con la cantidad de palillos que existe entre ambos conjuntos, estableciendo así una relación funcional. La variable independiente será la que indique el lugar que ocupa la figura, y la dependiente la cantidad de palillos que se necesitan.

La expresión obtenida puede expresarse de alguna de las siguientes maneras:

$$y = 4 + 3.(x - 1) \quad \text{o} \quad y = 3.x + 1$$

En esta fórmula, reemplazando la variable independiente por el número correspondiente al lugar elegido, en nuestro caso el lugar 30, se obtiene como respuesta que 91 palillos son los necesarios y que, en el lugar 75 se obtendrá, haciendo las mismas operaciones, que el número necesario de palillos es 226.

Para responder la última pregunta, debemos considerar que la variable independiente es la incógnita de una ecuación, que queda determinada reemplazando la variable *y* por el número de palillos dados. En el primer caso, para 58 palillos, se tiene $y = 58$, con lo que la ecuación que resulta es:

$$58 = 3.x + 1$$

y por lo tanto , el lugar que ocupa la figura es el número 19, pues la solución de la ecuación anterior es $x = 19$.

Para la segunda situación, correspondiente a 299 palillos, la ecuación que queda planteada es:

$$3.x + 1 = 299$$

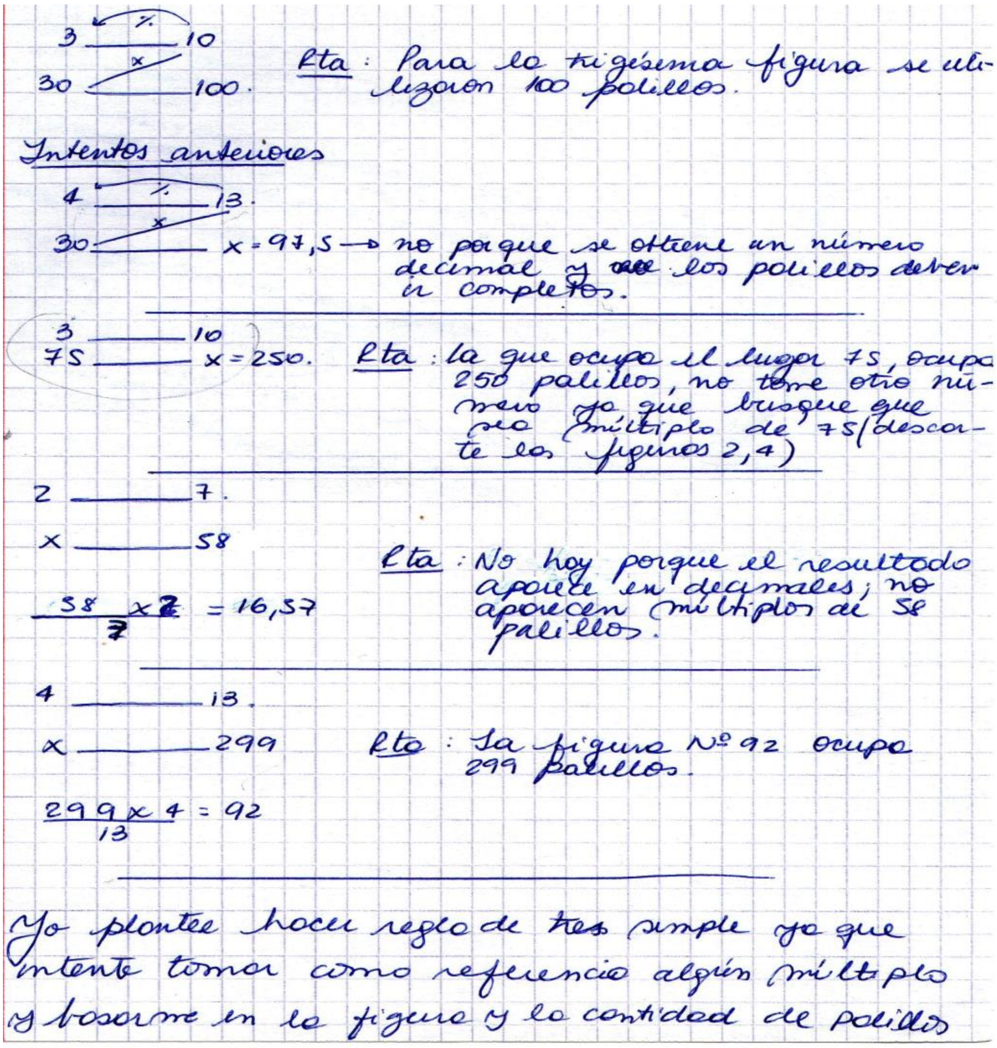
Esta ecuación tiene como solución al número $x = \frac{288}{3}$, que representa a un número racional y, como queremos calcular el lugar que corresponde a un número de palillos, que es un número natural resulta que la ecuación "no tiene solución" en el conjunto de los números naturales, lo que hace que la situación planteada no corresponda a un "caso posible". De este modo, concluimos que no hay ningún lugar que se corresponda con la cantidad de 299 palillos.

Presentamos a continuación las respuestas seleccionadas para esta actividad, que corresponden a tres alumnos, que llamaremos G, H y M.

6.3.1. Respuestas de los estudiantes a la Actividad 3

ACTIVIDAD 3 – RESPUESTA 1

La respuesta que dio el alumno G a esta actividad es la que mostramos en la siguiente figura:



3 ——— 10
30 ——— 100.

Rta: Para la trigésima figura se utilizaron 100 palillos.

Intentos anteriores

4 ——— 13.
30 ——— x = 97,5 → no porque se obtiene un número decimal y los palillos deben ir completos.

3 ——— 10
75 ——— x = 250.

Rta: la que ocupa el lugar 75, ocupa 250 palillos, no tome otro número ya que busque que sea múltiplo de 75 (descarte las figuras 2,4)

2 ——— 7.
x ——— 58

$\frac{58 \times 2}{7} = 16,57$

Rta: No hay porque el resultado aparece en decimales; no aparecen múltiplos de 58 palillos.

4 ——— 13.
x ——— 299

Rta: La figura Nº 92 ocupa 299 palillos.

$\frac{299 \times 4}{13} = 92$

Yo plantee hacer regla de tres simple ya que intente tomar como referencia algún múltiplo y basarme en la figura y la cantidad de palillos

Figura 7. Respuestas a la Actividad 3 del alumno G

En este caso, observamos que el alumno comenzó planteando una relación de proporcionalidad a partir de la regla de tres simple para concluir que, si en el lugar 3 hay 10 palillos, entonces en el lugar 30 hay 100. En este alumno no observa, por lo menos en un primer intento, un afianzamiento de los saberes previos, relacionados con, por ejemplo, “función de proporcionalidad” y “función lineal”. Continuando con el abordaje con el que inició la resolución, el estudiante realizó otras proporciones con las que no logró arribar a una respuesta adecuada pues como resultados obtuvo valores numéricos que pertenecen al conjunto de los racionales y no son admitidos por el contexto del problema planteado, en el que las respuestas deben ser, indefectiblemente, números naturales.

Si se lee con atención lo hecho en la resolución presentada por este alumno, no se observa ninguna respuesta certera, dado que en todas recurre a la regla de tres simple para resolver el problema, que como dijimos, no es apropiada dado que el modelo planteado en esta actividad no es de proporcionalidad.

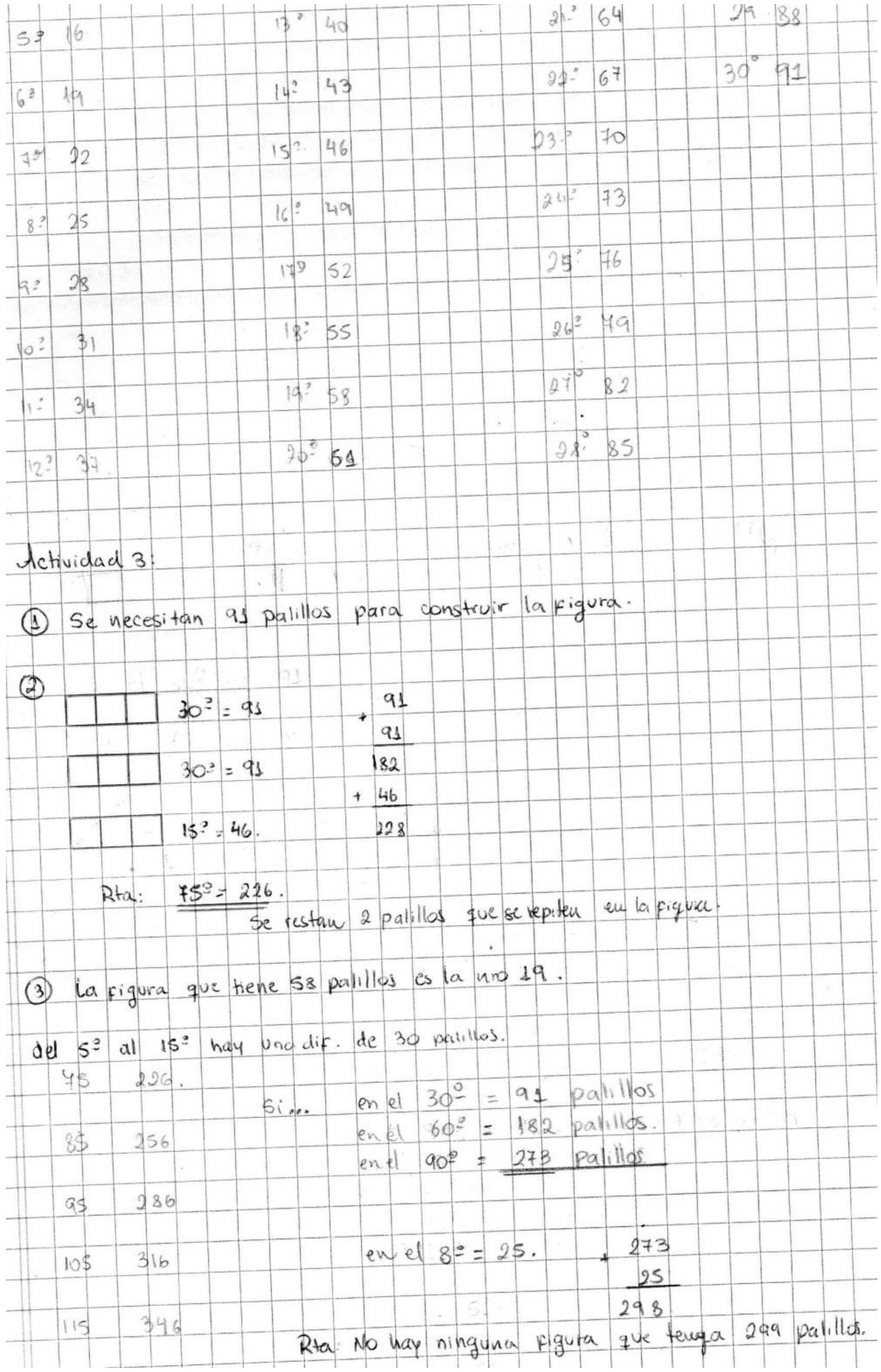
En el caso de esta actividad observamos como errores, entre otros, a los que señala Esteley-Villareal, (1990, 1992, 1996) cuando categoriza los errores y declara que uno de ellos es *la no verificación de resultados parciales o totales*. También podemos ubicarnos en el error que Booth (1984) asocia al *uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento*.

ACTIVIDAD 3 – RESPUESTA 2

Esta respuesta corresponde a una dupla de compañeros, que denominaremos H.

En este caso, los alumnos logran, a partir de la realización de cálculos numéricos, llegar a obtener las respuestas a cada una de las consignas. Para ello, plantea las posibilidades que se dan para distintos términos, construyendo una tabla para hallar la cantidad de palillos en el lugar 30, lo cual hizo correctamente, y luego utilizó este cálculo para deducir lo que ocurre en el lugar número 75. Aunque respondieron todas las preguntas en forma correcta, no lograron (en realidad, no les resultó necesario) formalizar el procedimiento que generaliza la situación del problema.

La respuesta que presentaron es la siguiente:



5º 16 | 13º 40 | 21º 64 | 29 88
6º 19 | 14º 43 | 22º 67 | 30º 91
7º 22 | 15º 46 | 23º 70
8º 25 | 16º 49 | 24º 73
9º 28 | 17º 52 | 25º 76
10º 31 | 18º 55 | 26º 79
11º 34 | 19º 58 | 27º 82
12º 37 | 20º 61 | 28º 85

Actividad 3:

① Se necesitan 91 palillos para construir la figura.

② 30º = 91 ; 30º = 91 ; 15º = 46.

91 + 91 = 182 ; 182 + 46 = 228

Rta: 75º = 226.
Se restan 2 palillos que se repiten en la figura.

③ La figura que tiene 58 palillos es la nro 19.

del 5º al 15º hay una dif. de 30 palillos.

75 226. ; 85 256 ; 95 286 ; 105 316 ; 115 346

Si... en el 30º = 91 palillos
en el 60º = 182 palillos.
en el 90º = 273 palillos

en el 8º = 25. 273 + 25 = 298

Rta: No hay ninguna figura que tenga 299 palillos.

Figura 8. Respuestas a la Actividad 3 del alumno H

Cabe destacar que, si bien uno de nuestros objetivos es mostrar algunos errores presentes en actividades que surjan del Álgebra elemental, este par de alumnos que llamamos H, han podido resolver la actividad sin necesidad de recurrir a la formulación de expresiones simbólicas ni a la generalización de casos, por lo que lo que nos pareció importante destacar con esta actividad es que el tipo de consignas que propusimos para el diagnóstico eran factibles para este grupo de alumnos en el que desarrollamos la experiencia. No obstante, observamos que la formalización simbólica y la generalización es uno de los objetivos que perseguíamos con estas actividades.

ACTIVIDAD 3 – RESPUESTA 3

Esta respuesta es la que corresponde al alumno M que inició su trabajo construyendo una tabla, calculando la cantidad de palillos. Realizó una gráfica de la situación en la que no se observa relación con la tabla. Luego dedujo una fórmula para calcular la cantidad de palillos, que si bien no es incorrecta, tiene la particularidad de relacionar con el lugar 0 (es decir $x = 0$ en la expresión que construye) con la primera figura de la secuencia dada. La fórmula que construye es la que establece la relación entre el orden de la figura dada y la cantidad de palillos que requiere para ese lugar dada por la expresión:

$$y = 4 + x.3$$

Como señalamos, en esta fórmula, es para $x = 0$ que se obtiene el resultado $y = 4$ y no para $x = 1$. Este “desfasaje” que plantea la fórmula, genera en el alumno una dificultad adicional, que no le permite dar correctamente las respuestas dado que, con la fórmula propuesta se tiene que, para el cuarto lugar le daría que necesita 4 + 4.3 = 16 palillos, lo cual es incorrecto pues el resultado que corresponde a esta situación es 13.

La respuesta del alumno M es la siguiente:

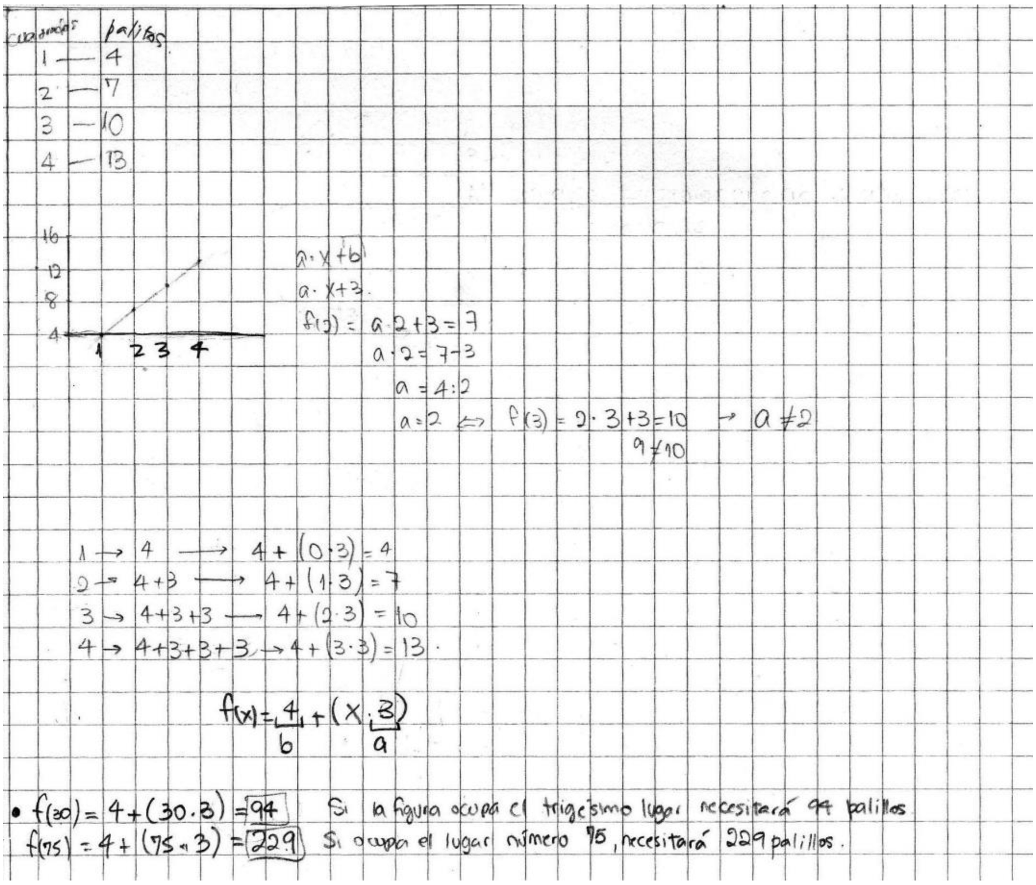


Figura 9. Respuestas a la Actividad 3 del alumno M

Una observación interesante como parte de nuestro análisis sobre este alumno en particular, es que uno de los errores observados (no sólo en M sino en muchos otros) es el que tiene que ver con *no verificación de resultados parciales o totales* en una resolución, tal como lo expresan Esteley y Villarreal (1996) en su categorización de los errores que se relacionan con la justificación o razonamiento matemático.

Esta actividad, que fue la tercera para los alumnos, es la que despertó el mayor interés.

Como la consigna se presenta en lenguaje coloquial y gráfico, da lugar a la participación de todos los alumnos, aún los que tienen poca empatía con la materia. La posibilidad de poder iniciar la resolución con dibujos, con sumas, con distintas estrategias dio pié a que los estudiantes pudieran sortear algunas dificultades y que una gran parte de ellos lograra resolver la actividad exitosamente.

En la puesta en común, los estudiantes mencionaron que la actividad les resultó interesante y que se sintieron más confiados para enfrentar la resolución. Incluso los que no lograron la formalización de la situación en un formato simbólico, han podido manifestarlo en forma oral, refiriendo que no suponían que hacerlo era parte de lo solicitado en la actividad.

A modo de ejemplo, y como una cita de lo expresado en esta puesta en común, algunos explicaron en lenguaje coloquial, que: "en el primer cuadrado se contabilizan los 4 lados y luego, para seguir completando, sólo se cuentan 3 palillos más para cada cuadrado que se forma".

Al analizar en su conjunto el trabajo de campo, se evidenció una diferencia que se produjo entre el primer encuentro, en el cual se resolvieron las Actividades 1 y 2, y el segundo, dónde se trabajó únicamente con la Actividad 3. La diferencia consistió en que el grupo se distendió más y pudieron estar más cómodos pues era su segunda experiencia, hubo más producción e incluso participaron mucho más en la puesta en común.

A partir de lo obtenido en el trabajo de campo, se comenzó a elaborar una guía de actividades que nos ayude a superar algunos de los errores mencionados a lo largo de toda nuestra presentación. El trabajo sobre esta guía es lo que desarrollaremos en el siguiente capítulo de esta tesina.

CAPÍTULO 7

DISEÑO Y FUNDAMENTACIÓN DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

A partir de las conclusiones a las que se arribó con el análisis del diagnóstico, nos hemos propuesto, como una segunda etapa para el desarrollo de esta tesina, el diseño y elaboración de una propuesta didáctica para la enseñanza de temas vinculados con el Álgebra elemental y con cuestiones de argumentación, en la que se contemplaron las distintas ocasiones en las que han manifestado los errores más frecuentes en las producciones de los estudiantes. Para ello hemos pensado un conjunto de actividades que involucren el Álgebra en las cuales los símbolos adquieren diferentes significados en cada caso y en las que sea necesario generalizar distintas situaciones y, además, requieran que la argumentación sea parte central de la resolución de la actividad. Para ello hemos pensado que en la propuesta se deben abordar, desde distintos puntos de vista, aquellos temas que han dado lugar a los errores más significativos observados en el diagnóstico. En este sentido, el diseño de actividades que pensamos para las clases de Matemática contempla ejercitación que podrá desarrollarse no sólo en el aula sino que también prevé trabajo de carácter domiciliario. Estas actividades sólo son un modelo de las que, entendemos, podrían ser efectivas para el objetivo que con ellas se persigue y, aunque se las observen en algunos textos o material específico para las clases de Matemática, nos pareció interesante poder reconocer el tipo de trabajo que cada una de ellas conlleva y sugerirlas como una ejercitación adecuada para contemplar el manejo de los errores desde la enseñanza.

En la propuesta que hacemos se explicitará y describirá el tratamiento que se sugiere para el tema seleccionado, haciendo las anticipaciones de los distintos errores que intentan atenderse y que podrían presentarse en cada actividad, así como las recomendaciones didácticas para la gestión de la clase y las intervenciones del docente. Junto con ello, plantearemos una fundamentación, que se realizará a partir de los distintos elementos teóricos que hemos tenido en cuenta en la bibliografía señalada en el estado del arte de este trabajo.

7.1. Actividades para la Propuesta Didáctica. Algunas consideraciones generales

Teniendo presente las ideas planteadas anteriormente, se pensó en preparar un abanico de actividades de acuerdo a las demandas emergentes de forma que, en unas la variable aparezca como incógnita, en otras como parámetro y también en relación funcional, es decir, intentamos que se reconozca en ellas el modelo 3UV. Además, pretendemos que la fundamentación y la validación se observen en las actividades con una presencia preponderante, teniendo en cuenta que todo esté en relación con las competencias deseables a desarrollar en los alumnos. El trabajo que mencionamos ha sido plasmado en 8 actividades que permiten caracterizar la práctica matemática que consideramos pertinente promover en las aulas. La selección de estas actividades la hemos hecho a partir de los resultados obtenidos en las resoluciones que los alumnos han realizado y a partir de considerar los errores que presentan cuando se enfrentan a las actividades vinculadas al Álgebra elemental, el uso de los símbolos, la ausencia de fundamentación y argumentación en la resolución de las mismas, teniendo en cuenta también que, habitualmente, los estudiantes no verifican los resultados hallados. Se promueve entonces, en este repertorio de actividades, la elaboración y comparación de distintos procedimientos, desde consignas que dan lugar a que los alumnos analicen, reflexionen, decidan, resuelvan y comuniquen los resultados en forma escrita y oral (si acaso se trabaja con ellas a través de puestas en común en el aula). También se espera que verifiquen y argumenten, con lo que, en definitiva, se intenta que los alumnos lleven adelante distintas prácticas, propias del trabajo matemático, con lo que entendemos que se podría minimizar la observación de ciertos errores comunes en su práctica cotidiana.

En las primeras actividades se contempló, esencialmente: el uso del símbolo como parámetro, la observación de patrones y sus regularidades, el uso de cuantificadores y su interpretación, la reflexión acerca de la necesidad de la verificación y justificación de la respuesta. A partir de ellas, se pretende que los alumnos desarrollen habilidades que les permitan resolver la actividad de trabajo analizando lo que representa el símbolo en cada caso que se lo utilice, que no limite la respuesta sólo a una lista de ejemplos, que se analice todo el campo de los conjuntos numéricos vinculados al contexto de la consigna, que se tengan en cuenta los cuantificadores y que se recurra para la argumentación a distintos recursos como, por ejemplo, gráficas que justifiquen la respuesta.

En otras, se priorizó el uso del símbolo como variable independiente a partir de una relación funcional, considerando que en una gran variedad de situaciones problemáticas se reconoce el vínculo entre dos magnitudes o conjuntos que admiten una modelización matemática expresada de manera simbólica. Además, pensamos en otras actividades en las que el uso de la variable se manifieste en su condición de incógnita de una ecuación, al reconocer la necesidad de obtener determinados valores de la variable independiente cuando ésta está sujeta a los condicionamientos del problema de contexto.

Como manifiesta Ruano (2003) generlmente los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y de su proceso de resolución. Por eso convenimos en plantear actividades que aporten significativament al trabajo de los estudiantes hábitos en torno al análisis y reflexión sobre las distintas etapas de la resolución de una tarea, así como sobre la necesidad de la justificación y argumentación de lo realizado, intentando que el alumno participe activamente en la superación de sus errores a partir de su involucramiento en la comprensión conceptual del objeto matemático.

7.2. Actividades para la propuesta didáctica

En este apartado presentaremos las distintas actividades que hemos planteado para la propuesta de enseñanza que hemos descripto. Se trata de ocho ejercicios en los que nos hemos enfocado en hacer explícitas cada una de las intenciones que señalamos anteriormente.

En cada una de las actividades, haremos un breve análisis de la misma en el que, a veces haremos una descripción de las cuestiones involucradas en la misma a partir de la presentación de algún modo de resolución posible, en el que se puedan observar los distintos tipos de errores en los que los estudiantes puedan incurrir o, en ocasiones, anticipamos las posibles resoluciones que realizarían los alumnos.

Actividad A)

Decidir si la desigualdad: $m^2 > m$ *se verifica para todos los números reales. Justificar la decisión tomada.*

Lo relevante de esta actividad está planteado en términos del uso del cuantificador **para todos**, lo que implica el análisis de **todo el campo de los números reales** para decidir sobre la validez de esta desigualdad.

Es posible que frente a esta consigna los estudiantes comiencen evaluando cada miembro de la desigualdad en distintos valores numéricos, para verificar si en ellos la misma es o no válida. Ante esta situación, imaginamos que la evaluación que haga estará centrada en los números naturales, más precisamente, esperamos que elijan $m = 1$, $m = 0$ ó $m = 2$ en la mayoría de los casos, aunque algunos tal vez contemplen la alternativa de evaluar en algún número entero negativo. Por otro lado, y tal como hemos mostrado en las respuestas al diagnóstico, también esperamos que la actividad la resuelvan, pensando que "el cuadrado de un número **siempre** es mayor que el propio número", con lo que agotan allí todo tipo de trabajo. Si este fuera el caso, se debe tener previsto, por parte del docente, una intervención que puede ser directamente con el alumno que haya dado esta respuesta o globalmente en una puesta en común si acaso lo considerara más conveniente.

En principio, entonces, podríamos esperar que algo de lo que presentamos a continuación surja en las producciones de los alumnos en torno a esta actividad.

Planteamos a continuación una posible situación de puesta en común si acaso los estudiantes sostuvieran que los cuadrados de números reales siempre superan al los propios números.

En primer lugar, podría mostrarse, por ejemplo, que esta afirmación se verifica, para los números reales mayores que 1, pensando en algunos ejemplos:

$$7^2 > 7; \qquad\qquad 20^2 > 20$$

Luego, puede mostrarse que también se verifica para todos los números reales negativos, aunque esto no haya surgido espontáneamente de parte de los estudiantes:

$$(-11)^2 > -11 \qquad (-1)^2 > -1$$

¿Qué sucede si elijo $m = 0$? En este caso la desigualdad sería

$$0 > 0$$

La cual es una afirmación **Falsa**, con lo que hemos encontrado un valor para el que la desigualdad no se verifica, dando así un contraejemplo a lo que se sostenía acerca de la relación entre los cuadrados de los números y los propios números. Lo mismo podría ocurrir si se elige $m = 1$, con lo que quedaría $1 > 1$ que, obviamente, también es una afirmación **lsa.**

Llegado a este punto, es importante señalar que ya no es necesario ningún trabajo más para tomar la decisión pedida: la respuesta a la actividad sería: esa afirmación no es válida para todos los números reales porque, por ejemplo, para $m = 0$ no se verifica.

No obstante, como una información adicional y constructiva, también podría mostrarse que en el intervalo [0,1] la desigualdad <u>no se cumple</u>. Para ello, puede recurrirse al ejemplo

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$$

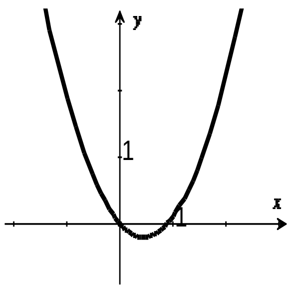
Mostrando así, que también puede recurrirse, si acaso fuese necesario, a números que no sean enteros para hacer alguna verificación.

Nos parece importante señalar que **en este caso** sólo es necesario, para determinar su falsedad **dar un contraejemplo** con el que se vea no es verdadera para todos los números reales.

Otro posible abordaje, por parte de los alumnos, sería el de considerar a la variable "como incógnita" y, en ese caso, queda planteada la necesidad de hallar el conjunto solución de la inecuación $m^2 - m > 0$, y observar que el mismo no es el conjunto IR. Si este fuera el camino elegido para llegar a la respuesta, se obtendrá que el conjunto solución de la mencionada inecuación es S = IR− [0;1] con lo que se concluye que la inecuación $m^2 > m$ se verifica únicamente para todo número que pertenezca al conjunto IR-[0;1] y, por lo tanto, no se verifica para todos los números reales.

Si ninguna de las resoluciones hubiese contemplado el uso de la variable *m* en relación funcional, podría recurrirse a mostrar la gráfica de la función f: $\mathbf{IR} \Rightarrow \mathbf{IR}$ definida mediante la expresión $f(x)=x^2-x$, en la que consideramos un "cambio de variable" al proponer $m = x$. Si esta es la situación, debemos observar que lo que necesitamos para responder a la actividad planteada es conocer el conjunto de positividad de esta función.

El gráfico aproximado de la función es el que se observa a continuación,



y a partir del cual puede concluirse la falsedad de la afirmación de la consigna, viendo que el conjunto imagen **no está contenido** en el intervalo $(0; +\infty) = IR^+$.

En relación con los posibles errores que podrían observarse en la resolución de esta consigna, Espinosa (2000) sostiene:

> Los errores que cometen los estudiantes es debido al uso de recursos de argumentación y lógica matemática, basándose en los saberes de las propiedades que se cumplen en el conjunto de los números naturales y no así en el campo de los números reales.

Al trabajar la expresión como inecuación y considerar a la variable como una incógnita, se tiene como obstáculo la complejidad propia de los métodos de resolución de una desigualdad, lo cual, en términos de lo expresado por Socas(1997) queda resumido en "la complejidad de los objetos del álgebra que operan en sentidos semántico y sintáctico"

También nos parece apropiado para esta situación la mirada de Esteley-Villarreal (1996), que consideran que *"*la no verificación de resultados parciales o totales" puede constituirse en un agente propicio para que la actividad no haya sido resuelta correctamente.

Al momento de seleccionar la actividad para esta propuesta, hemos tenido en cuenta o que el diseño curricular de Matemática vigente en la Provincia de Buenos Aires expresa en sus páginas que "dar la respuesta correcta no significa enmendar un error, más aún deberá estimularse al estudiante para que elabore estrategias de control que le permitan decidir sobre la corrección de sus producciones"

Actividad B *Decidir si son verdaderas o falsas para cualquier número real las siguientes afirmaciones. Justificar* *i) Existen pares de números reales para los cuales el cuadrado de su suma coincide con la suma de sus cuadrados.*

ii)	*El cubo de la diferencia de 2 números es igual a la diferencia de los cubos de dichos números.*

Comenzamos viendo una posible resolución de la afirmación *i*)

Al respecto, la respuesta es que esta afirmación es VERDADERA.

Como la afirmación es una proposición formulada a partir del cuantificador *existencial*, y es verdadera, para justificarlo **sólo hace falta dar un ejemplo que muestre exactamente lo que la afirmación propone**. En este caso, se debe mostrar que **hay algunos números reales** que satisfacen la igualdad entre el cuadrado de su suma y la suma de sus cuadrados.

Por ejemplo: pueden tomarse $x = 3$ e $y = 0$, y observar que: $(x + y)^2 = (3 + 0)^2 = 3^2 = 9$ y,

$x^2 + y^2 = 3^2 + 0^2 = 9$, con lo que x e y resultan ser números reales que verifican $(x + y)^2 = x^2 + y^2$.

Otra forma de explorar una respuesta, es ver si existen valores de x e y para los cuales se verifique la igualdad

$$x^2 + 2x.y + y^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

(dado que el primer miembro es el resultado de efectuar el cálculo del cuadrado de un binomio, y el segundo es con lo que se quiere **comparar** a este cuadrado).

Luego, ver que la afirmación es verdadera implica analizar si la ecuación (1) admite o no soluciones. Pero

$$x^2 + 2x.y + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x.y = 0,$$

lo cual ocurre si asignamos el valor 0 a alguna de las variables. Entonces, dado que la ecuación (1) tiene solución, la afirmación es verdadera, porque tomando cualquier par de valores de los cuales uno sea 0 será suficiente para ejemplificarlo: por ejemplo, los que se han tomado antes

¿Cuáles podrían ser los errores que se cometen en la resolución de este ejercicio?

No reconocer que en proposiciones que tienen "este formato" (enunciado a partir del cuantificador existencial), la veracidad de la afirmación se demuestra dando un ejemplo que satisfaga lo planteado. En este sentido, los alumnos podrían decir que es Falsa porque en realidad lo que vale es $(x + y)^2 = x^2 + 2x.y + y^2$, sin notar que esto es lo que se verifica SIEMPRE, para todo par de valores de x e y, lo cual no invalida que ALGUNOS números reales, como los del ejemplo, SÍ puedan cumplir la igualdad propuesta en la proposición.

Otro error que podría presentarse es que los alumnos expresen que la afirmación es falsa porque, recurriendo a una serie de ejemplos, que no contemplen al 0 como uno de los valores, siempre le da distinto el resultado de $(x + y)^2$ del resultado de calcular $x^2 + y^2$. El error que se comete en este caso podría asociarse a una mala interpretación de la actividad: si la afirmación es falsa es porque NINGÚN par de números reales verifica la igualdad. Esta afirmación, de tipo universal, NO puede demostrarse dando ejemplos o contraejemplos: requieren de una "demostración" más formal.

Veamos ahora un análisis similar, aunque más abreviado por compartir el estilo de la respuesta dada al primer ítem, cómo podría resolverse la segunda parte de esta misma actividad, que expresa la decisión acerca de la veracidad de la siguiente afirmación:

ii) El cubo de la diferencia de 2 números es igual a la diferencia de los cubos de dichos números.

¿Esta afirmación es Verdadera o Falsa?

Sabemos que cuando desarrollamos el cubo de la diferencia entre 2 números a y b resulta:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3$$

Luego, la afirmación planteada se traduce en ver si es válida, para todos los números reales, la igualdad:

$$a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3 = a^3 - b^3$$

a partir de la cual, operando se llega a la necesidad de analizar la ecuación

$$-ab^2 + a^2b = 0$$

De donde se desprende que los valores que la resuelven deben satisfacer algunas de las siguientes condiciones:

$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0 \quad \text{o} \; a = b$$

Análogamente al ejercicio B) i), aquí también existen pares de números reales para los cuales la afirmación es VERDADERA. Como ejemplos de ellos pueden darse algunos de los siguientes pares de números

$$a = 3 \text{ y } b = 0, \qquad a = 0 \text{ y } b = 0$$

Como resumen, entonces, podemos decir que al encontrar un ejemplo que verifica la condiciones de afirmar que la proposición es VERDADERA.

¿Cuáles podrían ser los errores que se cometen en la resolución de este ejercicio?

Una posibilidad se podría dar, entonces, si se piensa expresión extendida del cubo de un binomio. Efectivamente, los errores que se pueden presentar se dan a partir de la internalización de la idea de que “el cubo de un binomio es un cuatrinomio cubo perfecto” y no **un binomio** como el que se plantea en el enunciado de la consigna, lo que sin un análisis sobre todo el conjunto de los números reales, nos haría pensar, erróneamente, en la falsedad de esta afirmación.

También es posible que los estudiantes no encuentren, individualmente, algunos de estos valores que hacen verdadera a la afirmación. Esto daría lugar a una intervención del docente, quien podrá atender personalmente la inquietud del alumno que presenta este inconveniente o abordar el tratamiento desde una puesta en común.

Consideramos que los estudiantes poseen escasos recursos para enfrentarse al uso del lenguaje coloquial usado en esta actividad, en la que se requiere de una correcta interpretación de lo relacionado con el uso de cuantificadores, a veces de manera implícita, en afirmaciones que recurren a expresiones como, por ejemplo: para todos, para cualquier valor, existe un valor, siempre, para algún valor.

Actividad C)
Compara las expresiones $\frac{1}{p}$ *y* p *para los distintos valores reales no nulos de p.*

Se pretende que se analicen ambas expresiones sobre todo el campo de los números reales, es decir, considerar qué ocurre para los distintos valores que puede tomar el parámetro, pues la conclusión general de la actividad dependerá del tipo de número que se designe con la letra *p*.

Cuando se utiliza el término "comparar", debe analizarse cuando es menor, cuando mayor y cuando es igual.

Para resolver esta actividad, pueden pensarse la respuesta a partir de la resolución de una inecuación, como puede ser

$$\frac{1}{p} - p < 0$$

A partir de la cual obtendremos también información sobre las otras situaciones posibles que son:

$$\frac{1}{p} - p = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{p} - p > 0$$

Pensando en la primera de ellas, se resuelve analíticamente, obteniendo que el conjunto solución es $S = (-1,0) \cup (1,+\infty)$

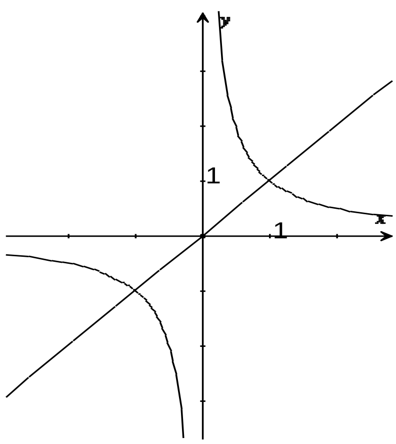
A partir de lo cual se desprende que la igualdad $\frac{1}{p} = p$ será para $p = -1$ y $p = 1$, y la otra desigualdad se verificará en el conjunto complementario a la unión de los anteriores.

Otra alternativa para la resolución de esta actividad, que involucra otras prácticas y que no es la que se espera que surja espontáneamente de los alumnos, es considerando a *p* como variable independiente de dos funciones, lo que renombrando a *p* como *x* resultan las funciones que tienen expresiones

$f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x$, consideradas ambas en el dominio $\mathrm{IR} - \{0\}$.

Se representan gráficamente ambas funciones en el mismo par de ejes cartesianos para su comparación y se observa, en el gráfico de ambas curvas, el comportamiento de las dos en cuanto a cuándo son iguales y cuándo una es mayor o menor que la otra.

La representación gráfica de ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas es, aproximadamente, la siguiente:



¿Cuáles son los errores posibles que pueden presentarse cuando los estudiantes resuelvan esta actividad?

Comparar, es analizar si las expresiones están vinculadas no sólo como desigualdades, sino también como igualdades. No se puede dar una conclusión general sin analizar los distintos valores que puede tomar p en relación a cada expresión.

Puede pasar que se cometa el error de considerar el "aspecto" del parámetro, pues se puede llevar por la "apariencia" de los símbolos, considerando que la variable p tiene "aspecto" de número entero positivo con lo que, al verlo como un número positivo, tal vez decida no analizar el conjunto de los números negativos

Otro de los errores posibles es no tener en cuenta el campo completo de los números reales y, por lo tanto, no considerar los números entre 0 y 1. Del mismo modo, puede presentarse el caso de que los alumnos, cuando se presentan fracciones y literales con numerador 1, creen que éstas, no importa cual sea el número que pueda tomar el denominador, siempre son menores que los números enteros, es decir, tal vez caigan en la idea errónea de que "una fracción es menor que un entero".

Como ya lo señalamos, también puede ocurrir que al no nombrar explícitamente a las funciones numéricas ni presentarse el parámetro con la letra x, no se recurra a graficar, que es otra manera de resolver la actividad

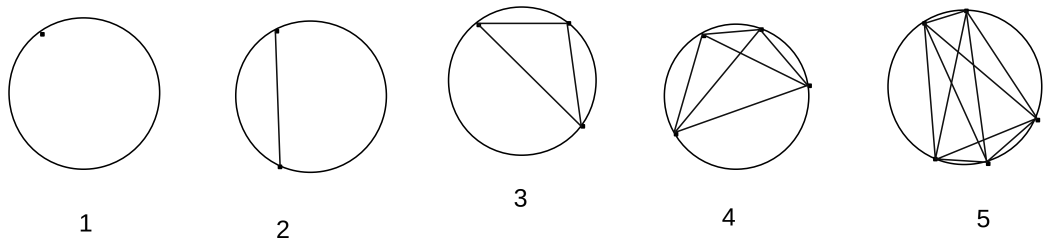
El docente intervendrá para mostrar las distintas alternativas para resolver la actividad.

Entre los errores que consideramos como posibles de que se presenten, consideramos que algunos de ellos están asociados a la complejidad del *lenguaje matemático*, como señala

Pochulu (2006), otros surgidos por *la no verificación de resultados parciales o totales*, o también, *por el no empleo o uso parcial de la información* (Esteley-Villarreal, 1996)

Actividad D)

Observa la secuencia y cuenta la cantidad de cuerdas que se pueden trazar de acuerdo a la cantidad de puntos.



i) Halla la cantidad de cuerdas si los puntos sobre la circunferencia son: 6, 10, 25.

ii) ¿Pueden contarse 1101 cuerdas? Si es positiva la respuesta, ¿con cuántos puntos?

Frente a esta actividad, creemos que los alumnos dibujarán varias circunferencias y contarán las cuerdas, haciéndoseles dificultoso cuando la cantidad de puntos aumenta considerablemente. Escribirán los resultados, formando una sucesión:

0 1 3 6 10 15 …

De esta manera estarán, entonces, vinculando 2 variables: la cantidad de puntos y la cantidad de cuerdas. A partir de esta relación, tal vez construyan una tabla de valores, pero cuando la cantidad de puntos aumenta y se hace engorroso contar las cuerdas, deberán encontrar una manera de poder hallar el número de cuerdas, sea cuál fuera la cantidad de puntos.

Una posible tabla que recoja la información puede ser la siguiente:

Cantidad de ptos.	1	2	3	4	5	6
Cantidad de cuerdas	0	1	3	6	10	15

Para los valores: 10 y 25 se tratará de hallar la generalización, en términos de un número natural arbitrario *n*.

De este modo, si tengo un número *n* de puntos, entonces, serán *n.(n-1)* las cuerdas que se formen, pues cada punto se vincula con los demás para formar una cuerda, pero éstas no deben contarse 2 veces cada una, sino una sola vez, con lo que el término general se calcula mediante la expresión

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

A partir de este cálculo puede verse, entonces, que para 10 puntos serían 45 cuerdas, y para 25 son 300.

A la pregunta que hace referencia a si pueden contarse 1101 cuerdas, debemos responder que no, pues para ello se resuelve la ecuación

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1101$$

que es un ecuación de 2ºgrado, que no tiene soluciones enteras.

Como otra forma de resolverse la actividad, puede considerarse una combinación de n puntos tomados de a 2, la cual se expresa mediante el número

$$C_n 2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} \ ,$$

por lo que si son 5 los puntos dados da como resultado 10 cuerdas y para 7 da 21.

¿Cuáles podrían ser los errores posibles de resolución por parte de los alumnos?

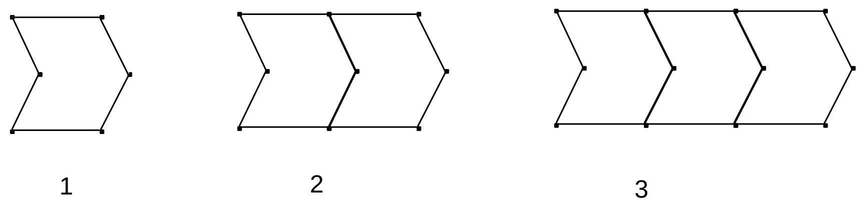
Podría ocurrir que no se lograra hallar la fórmula o regla de asignación. Por otro lado, también habiéndola hallado, podrían no saber aplicarla para calcular la cantidad de cuerdas. Confundir las variables, número de cuerdas con número de puntos puede ser otro error posible.

En la pregunta si se pueden contar 1101 cuerdas, si es que se halló la fórmula, debe resolverse una ecuación de 2ºgrado, la que puede traducirse al lenguaje coloquial como "la mitad del producto de 2 números consecutivos es igual a 1101". En este caso, se debe tener en cuenta que las respuestas deben ser números naturales, pues se trata de hallar una cantidad de puntos, con lo que la no verificación del tipo de resultados obtenidos puede generar un error en la adecuación de la respuesta. En este sentido, un error muy común es que no se verifiquen los resultados hallados o se realice la validación de lo hecho.

Lo que puede resultar complicado para los alumnos es expresar en forma simbólica la expresión que resuelve a la actividad, lo que entendemos que es una dificultad que puede ocasionar errores que, en términos de lo que manifiesta Socas (1999) se relacionan con *la complejidad de los objetos y de los procesos de pensamiento algebraico*.

Actividad E)

Dada la figura 1, formada por 6 palillos, se construye una sucesión de la siguiente manera:



i) Calcula la cantidad de palillos que se necesitan para construir la figura que ocupa el lugar 7, el lugar 11 y el 38.

ii) ¿Es posible que se cuenten 223 palillos? Si la respuesta es afirmativa ¿en qué lugar?

En el primer lugar cuento 6 palillos, en el segundo 10 y en el tercero 14. A partir de esta información, podría construirse una tabla en la que se expresen estas relaciones y, de manera inductiva, proyectar los resultados esperados para otros lugares, tal como mostramos a continuación:

Lugar	1	2	3	4	5
Nºde palillos	6	6+4=10	6+4+4=14	6+4+4+4=18	6+4+4+4+4=22

Desde lo observado en esta tabla, puede sugerirse que la cantidad de palillos se calcula como una sucesión, definida como una progresión aritmética, donde el primer término es a_1= 6 y, el término general puede expresarse como es a_n= 6+ 4.(n-1), siendo n el valor que representa el lugar de cada una de las figuras de la secuencia. Por lo tanto, para el lugar 7 se necesitan, entonces, 30 palillos, para el lugar 11 son requeridos 46 palillos y 154 palillos son los utilizados para el lugar 38. Además, en ningún caso se cuentan 223 palillos, pues la ecuación 6+ 4.(n-1) = 223 no da solución entera positiva, que es lo que corresponde de acuerdo al contexto de la situación

La relación entre la posición de la figura y la cantidad de palillos puede expresarse, también, como la función de dominio y codominio en los números naturales, definida por f(n) = 4.n + 2, siendo n el lugar y f(n) la cantidad de palillos.

Como puede observarse, esta actividad tiene gran analogía con una de las planteadas en el diagnóstico, y la hemos considerado pues, tal como lo señalamos en el apartado correspondiente al análisis del diagnóstico, este tipo de actividades tienen especial atractivo para los alumnos, lo cual no le genera inhibiciones a la hora de resolverlas, y les representa un desafío que los motiva a hallar la respuesta pedida. Además, entendemos que con la guía del docente en una puesta en común, puede llegarse a una formulación simbólica de la situación a partir del recurso del lenguaje natural. De acuerdo al momento que el docente lo decida, podrá utilizar este tipo de ejercicios como una introducción al trabajo algebraico y al uso de las variables, no de una "manera caprichosa" sino como una necesidad propia de la situación que se intenta resolver.

Actividad F)

Una empresa ofrece a sus empleados 2 opciones para pagar los salarios:

***Opción 1** : $2400 mensuales más 30% por todas sus ventas del mes.*

***Opción 2** : $4000 mensuales más 5% por todas sus ventas del mes.*

i) Calcula ambos salarios si las ventas mensuales han sido de:$5000, $10000 y $20000? Si gana mensualmente $9300. ¿Cuáles serían los montos de las ventas en cada caso?

ii) ¿En qué caso con las 2 opciones percibe el mismo salario?

Con respecto a esta actividad, plantearemos algunas de las cosas que nos parecen más significativas para su consideración, en relación con nuestro interés en los errores.

A modo de presentación de la respuesta, podemos decir que, **en apariencia**, la opción 2 parece ser la más conveniente por considerar una suma mayor como monto fijo. No obstante, sabemos que hay un momento (en este caso un monto de venta) a partir del cual será más conveniente la opción 1, pues su tasa de variación (pendiente) es mayor.

Los estudiantes podrían comenzar la resolución probando con distintos valores en las ventas:

- si las ventas son nulas, por supuesto me conviene la opción 2
- si las ventas alcanzan los $5000, con la 1 el salario será $3900 y con la 2 $4250, me conviene la opción 2.

- Si las ventas alcanzan los \$10000, con la 1 el salario será \$5400 y con la 2 \$4500, me conviene la opción 1.

- Si las ventas alcanzan los \$20000, con la opción 1 el salario será \$8400 y con la opción 2 \$5000, conviene la opción 1.

Es decir que hasta un cierto valor de ventas resulta más conveniente la opción 2, pero superado ese monto la acertada es la opción 1. Es importante encontrar ese valor en el que ambas opciones coinciden, pues será allí donde se revierta la situación entre ambas opciones. El valor que referimos es el monto de venta para el cual lo percibido como sueldo con ambas opciones coincide.

Dadas las características de cada una de las opciones de cobro, cada una de ellas podrá modelizarse a través de una función lineal dado que la tasa de variación en cada una es constante (en una, la variación es de un 5% y en la otra es del 30%). Es Por ello que se puede pensar en funciones lineales, donde la variable dependiente es el salario y la independiente es el monto de las ventas que se producen en el mes.

Las expresiones que definen a cada una de las opciones están dadas por las funciones O_1 y O_2, definidas en dominios y codominios adecuados al contexto, y que obedecen a las siguientes fórmulas:

$$O_1(x) = 2400+0,3.x \qquad\qquad O_2(x) = 4000+0,05.x$$

Para determinar cuál es el monto de las ventas si se sabe que percibe un sueldo de \$9300, deberán plantearse y resolverse dos ecuaciones lineales y comparar sus resultados. Las ecuaciones son las siguientes:

$$2400+0,3.x=9300 \qquad y \qquad 4000+0,05.x=9300$$

Las soluciones de cada una, respectivamente son:

$$x = \$23000 \qquad y \qquad x=\$106000$$

con lo que esos valores son los que corresponden a las respuestas pedidas.

En relación con el segundo ítem de la consigna, la respuesta estará definida por el punto de intersección de las gráficas de las funciones que hemos definido, es decir que para dar est respuesta, deberemos plantear la ecuación:

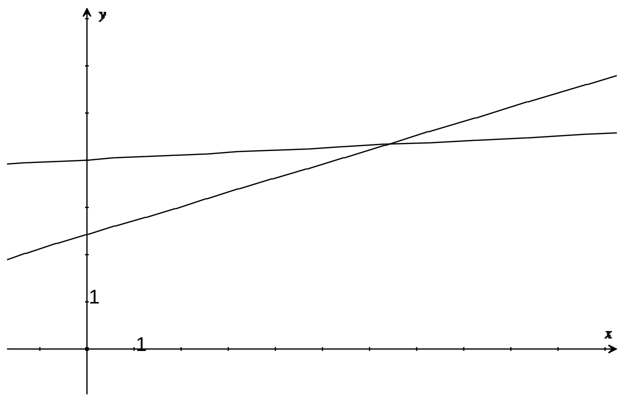
$$O_1(x) = O_2(x)$$

Es decir:

$$2400+0,30.x = 4000+0,05.x$$

Cuya solución es x= $6400, que representa el valor correspondiente a la suma vendida para que ambas opciones coincidan.

La representación gráfica muestra que las rectas se cortan en el punto cuyos salarios serán iguales. En la misma estamos utilizando una escala que se corresponde con la relación $1 \cong \$1000$



En el Eje x representamos el monto de las ventas en pesos y en el Eje y el sueldo también medido en pesos.

Un posible error, si se piensa rápidamente la actividad, es definir a la opción 2 como la mejor por considerar únicamente el mayor monto fijo, lo cual puede crear una falsa apreciación.

Otro posible error que pueden cometer los alumnos es confundir los valores de las ganancias con los valores del salario.

Podría suceder que sólo se encontraran valores distintos de salarios probando y explorando con algunos valores de ventas, pero no se hallara de este modo el punto de intersección a partir del cual cambia la situación. Quizás se construya una tabla con distintos valores de ventas y los salarios a percibir.

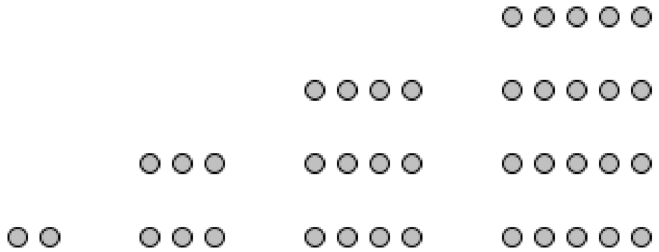
Por otro lado, tampoco puede garantizarse que se vincule el enunciado a funciones lineales y se piense en un gráfico cartesiano. La expresión de una situación problemática en términos de variables y funciones puede no aparecer.

Esta actividad nos resultó particularmente atractiva para incluir en esta guía de enseñanza porque destacamos en ella la característica de ser una situación real y posible de atender en alguna circunstancia de la vida y, además invita a la reflexión y análisis del tipo de resultados obtenidos de acuerdo al tipo de productos que se vende. Será entonces una variable más a tener en cuenta, para completar el análisis de la actividad, dado que al no hacerse referencia desde el enunciado al tipo de comercio que se habla, la situación elegida podría ser factible si se vendieran electrodomésticos, por ejemplo, y tal vez no en una librería.

Actividad G)

Los números rectangulares u oblongos, son aquellos que pueden ser representados por puntos en un rectángulo cuya base es una unidad mayor que la altura. *i) Calcula el número rectangular que ocupa el lugar 5, 10 ,17 y el 100.* *ii) ¿Los números 221 y 870 son números rectangulares?*

A modo de ejemplo, mostramos los siguientes números rectangulares a partir de los dibujos que con ellos se definen.



1 2 3 4

Esta actividad fue elegida por que los estudiantes conocen la regularidad que se encuentra en las relaciones numéricas interesantes, como la de los números cuadrados y los números triangulares, y les resulta atractiva. Esta es otra más, que presentamos, la de los números rectangulares u “oblongos”.

Asimismo otra característica de este tipo de actividades, como la Actividad E, es que invita a resolverla con “escasos” saberes previos y todos los alumnos pueden comenzar a pensar las soluciones, por lo cual el análisis es análogo a la de esa actividad.

A continuación mostraremos algunos caminos posibles de resolverla:

i) Podemos contar los puntos, para el lugar 1 es 2, para el lugar 2 es 6, para el 3 es 12.

También se podría construir una tabla con el lugar y el número rectangular correspondiente

Lugar	Numero rectangular
1	2
2	6
3	12
4	20
----	----

Por lo expresado en la consigna, en cada rectángulo el número de puntos de la base es el número consecutivo de puntos de la altura. En forma simbólica puede expresar la base como “***a***+1” y la altura como “***a”,*** por lo cual el número rectangular es el producto de ambas expresiones: Lo que nos informa entonces que los números rectangulares son números pares, pues se obtiene del producto de un número par por otro que es impar.

$$(\boldsymbol{a}+1).\boldsymbol{a}= \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}$$

Como resultado de la multiplicación se obtiene la expresión simbólica $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}$

Esta expresión obtenida simbólicamente puede escribirse en lenguaje coloquial de la siguiente manera "un número oblongo" puede expresarse como "la suma del cuadrado de un número mas dicho número".

Para responde a la consigna, para el lugar 5 el número oblongo es 30, para el 10 es 110, para 17 es 306 y para 100 es 10100. Éste último demanda haber encontrado alguna formalización, como las presentadas para calcular el número solicitado en la consigna.

ii) Para responder si 221 y 870 son números rectangulares, resolveremos las ecuaciones correspondientes

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}=221 \text{ y } \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a} = 870$$

las cuales , al resolverlas podemos afirmar que el número 221 no es número rectangular, pues la ecuación no admite en el conjunto de números naturales ; pero además habíamos enunciado que los números rectangulares son números pares y 221 no lo es. Y en el segundo caso 870 es número rectangular y la ecuación tiene una solución admisible $a = 29$. El número rectangular está formado por la base que corresponde a 30 puntos y la altura 29 puntos.

En esta actividad, como mostramos, es posible abordarla de distintas maneras, creemos que algunos estudiantes comenzarán por explorar con los dibujos de los puntos y buscando los números rectangulares con cálculos, así obtendrán los primeros números.

Los errores posibles de hallar frente a esta actividad es no poder hallar la expresión simbólica de los números rectangulares. Es decir la generalización a través de un parámetro. El docente acompañará guiándolos para que puedan lograr formalizar la situación planteada, individualmente, o en una puesta en común de la resolución de la actividad..

Actividad H)

Compara el área de un rectángulo con el área del rectángulo que se obtiene al aumentar un lado en un 20 % y al disminuir el otro en un 20 %. Justifica tu respuesta.

Esta otra actividad, así como otras de las que hemos propuesto, apela a recursos geométricos, ya sea en su formulación como en su resolución.

Pensamos que una de las primeras respuestas que pueden dar los alumnos es que las áreas de ambos rectángulos son iguales pues en el segundo se disminuye y se amplían los lados en una misma proporción. Esta respuesta apresurada no permite hacer un análisis más reflexivo de la actividad, apelando a la simbolización del problema y a una justificación adecuada en términos numéricos.

Como una forma de comenzar con la resolución de la actividad, se calculará el área del rectángulo 1, para luego calcular la del segundo y establecer la comparación entre ambas.

1 2

Si en el rectángulo 1 llamamos x a su base y a su altura la llamamos y, resulta que su área es

$$A_1 = x.y.$$

Con estas definiciones de los lados del primero de los rectángulos, resulta que el segundo de los rectángulos tiene como lados, la base (que puede ser la que se aumenta) que tiene un valor dado por

$$x + 0{,}2.x = 1{,}2.x$$

y su altura (que será, entonces, la que disminuye) medirá

$$y - 0{,}2.y = 0{,}8.y$$

con lo que el área de este segundo rectángulo será, entonces,

$$A_2 = (1{,}2.x).(0{,}8.y)$$

Es decir:

$$A_2 = 0{,}96.x.y$$

De donde puede observarse que el área del segundo rectángulo, $A_2 = 0{,}96.x.y$ es menor que la del primero, $A_1 = x.y$. Además, puede determinarse en qué porcentaje se redujo el área del segundo rectángulo: su área es un 4% más chica que la del primero de ellos.

Los errores posibles al resolver esta actividad están asociados a que, en primer lugar, podría ocurrir que no visibilicen que pueden comparar ambas áreas sin tener explícitamente los datos correspondientes a las medidas de la base y de la altura del rectángulo inicial. Otro de los errores que pueden surgir en esta resolución podría ser por recurrir únicamente a rectángulos con medidas especialmente definidas a través de ejemplos, y extender la validez de las observaciones que puedan realizar en cada caso, sin lograr una adecuada justificación a partir del planteo de una situación general. Una de las características que hizo que esta actividad fuese elegida para formar parte de esta secuencia, fue que la misma no forma parte de los elencos de actividades que habitualmente resuelven los estudiantes en el nivel secundario y, además, demanda especialmente trabajar y analizar expresiones generales.

Para la selección de las actividades que formaron parte de la propuesta de enseñanza, tuvimos en cuenta que presentara una variedad de alternativas de trabajo que aporte hábitos y comportamientos frente a determinadas situaciones que les represente un desafío que, ante todo, lo vean como de posible abordaje por parte de ellos. Por otro lado, pretendemos también que a través del desempeño que cada una demande, logren un acercamiento al Álgebra en particular y a la Matemática escolar en general de forma de que logren sentirse posibles resolutores de los ejercicios que se les presenten, sin sentir la presión de considerar como censurable el hecho de que se comentan errores a lo largo del trabajo realizado. Esperamos que a partir de una práctica sostenida en este tipo de situaciones los estudiantes logren autonomía en su trabajo y reflexión autocrítica de su producción.

En las actividades elegidas se opta por un trabajo más enriquecedor que consiste en reflexionar críticamente sobre las propias producciones.

CAPÍTULO 8

CONSIDERACIONES FINALES

En las clases diarias de Matemática, los docentes registramos las dificultades que surgen frente a algunos contenidos, los inconvenientes (errores) que se presentan como emergentes del fracaso en el aprendizaje del Álgebra por parte de los estudiantes, y es habitual admitir la inquietud, el replanteo y reflexión acerca de nuestras propias prácticas profesionales.

El uso excesivo de los símbolos y el lenguaje propio de la Matemática, en muchas ocasiones dificultan u obturan el trabajo en el aula, y es por ello que se necesita de actividades que logren un acercamiento mayor de los alumnos a esta disciplina. Para ello nos pareció esencial reflexionar acerca de cuáles son las acciones que se debieran a llevar a cabo para mejorar el aprendizaje de nuestros alumnos, entendiendo que éste representa nuestro objetivo fundamental como docentes.

El error es un componente clave para el progreso del conocimiento, que debemos tener siempre presente, pues es una herramienta de relevamiento del estado de saberes de nuestros estudiantes, que nos provee una rica información, a la hora de revisar nuestras prácticas de enseñanza , con el fin de lograr así los distintos aprendizajes.

Hablar de mejorar el aprendizaje es ocuparnos en Matemática, de reducir la cantidad de errores como fuente de saberes no aprendidos, de resolver actividades pudiendo trabajar con los símbolos, comparar, analizar, justificar y argumentar, que los estudiantes logren expresar los distintos aspectos puestos en juego en la resolución de cada actividad.

Creemos que esta acotada guía de actividades nos aportará herramientas para lograr disminuir los errores que presentan los estudiantes en los temas mencionados.

Las expectativas de nosotros, los docentes, frente a la enseñanza y al aprendizaje son pretenciosas, pues decidimos elegir un trabajo más enriquecedor para nuestros alumnos que se apoya en la reflexión crítica de cada estudiante frente a sus propias producciones.

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, A. (1994). *El Sentido de los Símbolos :Generación de Intuiciones en la matemática Formal.* Israel: Instituto Weizmann de Ciencias.

García Suarez J. (2010). *Análisis de Errores y Dificultades en la Resolución de Tareas Algebraicas por Alumnos de Primer Ingreso en Nivel Licenciatura.* Granada: Universidad de Granada.

Astolfi J. (1999). *El error, un medio para enseñar.* Sevilla: Diada Editora.

Booth. (1984). *Algebra children's strategies and errors.*

Del Puerto S., M. c. (2004). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas.* Buenos Aires: Revista Iberoamericana de Educación.

Espinosa, F. (1996): *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos, en Investigación en Matemática Educativa*. F. ESPINOSA (ed.). Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, pp. 245-264.

Esteley, Villarreal. (1996). Análisis y categorización de errores en Matemática. *Revista de Educación Matemática .Volumen 11*, 16-35.

Falsetti M., L. J. (2011). Acciones de Validación: Un estudio de caso en Escuela Media. *I Congreso Internacional de Las Ciencias Y La Matemática,IIEncuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática,* (pág. 8). Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires.Tandil.

Pochulu M. (2005). Análisis y Categorización de Errores en el Aprendizaje de la Matemática en Alumnos que ingresan a la Universidad. *Revista Iberoamericana de Educación-OEI.*

Rico L. (1995). *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticasi.* Bogotá. Colombia: Universidad de los Andes.

Ruano Raquel, Socas Martín,Palarea Mercedes. (2003). *Análisis y Clasificación de Errores cometidos por Alumnos de secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra.* Tenerife: Universidad de la Laguna.

Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.* Tenerife: Universidad de la Laguna.

Ursini, Escareño,Montes y Trigueros. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa.* Trillas. México.

Abrate R., Pochulu M., Vargas J. (2006). *Errores y Dificultadesen Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* . Villa María: Universidad Nacional de Villa María .

Engler A., Gregorini M, Müller Daniela., (2002). *Errores en el Aprendizaje de la Matemática.* Santa Fé: Universidad Nacional del Litoral.

Alagia, H., Bressan, A., & y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Ley de Educación Provincial nº13688. (2007). Dirección General de Cultura y Educación

Mántica, A., Nitti, L., & Scaglia, S. (. (2006). *La Matemática. Aportes para su enseñanza.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Sessa, C. (2005). *Introducción al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA COMO SOPORTE DE LECTURA

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal

Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro,Rico Luis. (1998). Educación de Matemática. Errores y Dificultades de los Estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. Bogotá: Universidad de los Andes

Riviére A. (1990). *Problemas y Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva cognitiva.* En Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar (págs. 155-182). Madrid: Capítulo 9. Alianza.

Parra C., Saiz I. (1994). *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

Carrión Miranda V. (2007). *Análisis de Errores de Estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales*. Union. Revista Iberonoamericana de Educación Matemática nº11.

Astorga Morales A,. (2007). *Errores de los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático a nivel secundario*. ITCR. V Congreso sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. Costa Rica.