Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional General Pacheco

Mosaicos

Habilidades básicas desarrolladas a partir del estudio geométrico

de los Mosaicos

Tesina para la carrera de
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
UTN

Tesista: Miryam J. Mazzitelli
Profesora de nivel Medio y Superior en la especialidad de Matemáticas

Directora: Dra. Mabel Rodríguez

19 de diciembre de 2015

Mosaicos

Habilidades básicas desarrolladas a partir del estudio geométrico

de los Mosaicos

Tesista:.Prof. Miryam J. Mazzitelli Directora: Dra. Mabel A. Rodríguez

RESUMEN

En este trabajo focalizamos en habilidades básicas específicas de la geometría que propicia, en estudiantes de nivel medio, una secuencia sobre el estudio de mosaicos geométricos. Podremos advertir la riqueza del trabajo geométrico sobre un contenido cotidiano que puede llegar a ser una herramienta para el avance en la comprensión matemática. Las habilidades desarrolladas en el trabajo geométrico (Bressan, 2013), como la de visualización, de dibujo o construcción, de comunicación, lógicas y de aplicación, pueden ser puestas en juego a raíz del trabajo con actividades que inviten a su uso. El estímulo es, en primera instancia, puramente visual, pero a través de diversas situaciones se va desplazando hacia el uso de otras habilidades que no son plenamente estimuladas fuera del aula. Cada alumno aplicará la que considere más pertinente en la resolución de las actividades de la secuencia que están planteadas como desafíos a la intuición y luego a la razón.

Veremos a lo largo de la tesis las habilidades básicas (Hoffer, 1991 y Bressan, 2013) puestas en juego por un grupo de estudiantes de nivel medio y su avance en la comprensión geométrica (Van Hiele, 1957).

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis Santaló

quien me trasmitió

el ver, mirar y sentir la geometría

y a la Dra. Mabel A. Rodríguez

por su confianza

e invaluable dedicación y consejo.

DEDICATORIAS

A Javier, Cinthia

y también a Leticia

...siempre se está a tiempo.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Los contenidos matemáticos son un patrimonio cultural y todos los ciudadanos tienen derecho a conocerlos. Son resultado del pensamiento de la humanidad y como tal deberían transmitirse para enriquecer la cultura. No basta conocer sólo resultados o conceptos, sino que la matemática conlleva una forma de pensar y desarrollar capacidades específicas que, ubicados en el rol docente, deberíamos transmitir a nuestros alumnos.

Según Polya (citado en Hiatt, 1979) la matemática es a la vez, un método de investigación y un cuerpo organizado de conocimientos y considera al método de investigación como la savia de la matemática. El mismo autor señala que instruir en matemática no es un asunto de sólo comprometer los resultados a la mente, sino es para enseñar a participar en el proceso que hace posible la creación del conocimiento. Afirma: "El conocimiento es un proceso, no un producto." (Hiatt, 1979, p.141), y en este proceso se desarrollan capacidades, habilidades, entre otros.

Esta investigación describe habilidades básicas que se desarrollan a partir del trabajo con una secuencia sobre el estudio de los mosaicos o teselados geométricos. Adaptamos la tabla de habilidades básicas desarrollada por Hoffer (1981) con nociones de habilidades visuales de Bressan (2013). A partir de ella hemos asociado habilidades geométricas con los niveles de comprensión de la geometría desarrollados por Van Hiele (1957, citado por Jaime y Fortuny, 1991).

Conociendo que en la sociedad actual predomina lo visual, la imagen está al orden del día. Ésta asociada a un dibujo es la puerta de entrada a la geometría. Según Alsina (1995) la geometría va asociada con el arte de saber mirar y ver y "las imágenes más bellas y armoniosas tienen un fuerte ingrediente geométrico" (p.60). La propuesta del trabajo de mosaicos tuvo su inspiración en la valoración de volver a ver y mirar la obra de la naturaleza y del hombre en especial. El saber ver y el saber interpretar no son sinónimos ni tampoco son instantáneos, y debe haber un proceso de aprendizaje para tales habilidades.

Siendo un contenido al alcance de todos, la geometría se puede matematizar desde el arte, la biología, la arquitectura y así involucrar a todos en un trabajo geométrico desde los intereses particulares. Ubicados en el aula, es posible comenzar desde los niveles más bajos de comprensión para ir creciendo en contenidos y habilidades en forma democrática, donde cada alumno es actor fundamental del proceso de aprendizaje. Esta perspectiva parte de lo concreto y desde allí se inicia un camino intencionado que eleve el pensamiento en cualquier nivel de la escolaridad. La intencionalidad mencionada significa que este proceso no se da sólo, se debe provocar y para esto el papel del docente es clave. Es él quien se encarga de diseñar las actividades, organizarlas en forma de secuencias o proyectos con una intencionalidad didáctica y nivel de profundización cada vez mayor, para que el alumno pueda experimentar el quehacer y pensar matemático ante una situación y desarrollar capacidades o habilidades que le son propias, valiosas y no se dan siempre fuera del colegio.

En este trabajo, entre las habilidades geométricas que manejaremos la visualización es la preponderante ya que el tema referido a mosaicos la estimula continuamente desde el reconocimiento, análisis, organización, deducción y el rigor. Según Itzcovich (2005) se debe enseñar a ver, pero el "ver está condicionado con el conocer" (p.19). Conocer no es lo mismo que saber. Conocer no permite re-utilizar un concepto para la resolución de una situación, y el saber sí. Buscar que el alumno sepa los contenidos estará siempre presente. Este trabajo inspira el *ver y mirar*, para esto se les han mostrado a los alumnos los más bellos mosaicos realizados por la humanidad, como los de La Alhambra en Granada o los dibujos de Escher, como así también los presentes en la naturaleza y en los revestimientos que nos rodean.

Sadovsky (2005) señala que es importante que el docente crea en las posibilidades de sus alumnos y, conociendo sus saberes, determinar por "donde comenzar". La secuencia que aquí se analiza es un posible lugar por donde comenzar el estudio de la geometría.

Los resultados muestran la riqueza del trabajo geométrico que se puede desarrollar a través del estudio de los Mosaicos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO

Enseñar y aprender geometría no son cuestiones estáticas sino que evolucionan de la mano del avance de los investigadores del campo de la Educación Matemática quienes proponen teorías que, más allá de sus matices, tienen un eje común: el alumno es el protagonista de la clase de matemática.

Expresado de un modo muy general, podríamos decir que las escuelas de Educación Matemática que ponen el foco en la organización de la clase, comparten en alguna medida que debe darse momentos de acción, reflexión, comunicación para que a partir de esta última instancia el profesor pueda dar estatus a los saberes. La presencia de estos momentos diferencian las propuestas que estos enfoques sostienen de los modelos clásicos de enseñanza que comienzan por presentar saberes de un modo acabado, sin que previamente el estudiante haya tenido oportunidad de tener un acercamiento y familiarizarse con su uso, utilidades, etc.

Presentamos en este capítulo primeramente el Estado del Arte que hemos organizado del siguiente modo:

1.1. La Geometría en el nivel secundario

1.2. Sobre teselados y mosaicos

1.3. Sobre habilidades y comprensión

Hacia el final del capítulo establecemos el Marco Teórico de la investigación.

1.1. La Geometría en el nivel secundario

"Es más fácil educar la memoria que la razón y también es más fácil justificar hechos por testimonios ajenos de prestigio, que por razonamientos propios."

Dr. Luis Santaló, 1980, p. 24

La geometría es una de las ramas de la matemática que más utiliza el hombre en las situaciones diarias, ya que es la única que se refiere al espacio físico (Guasco y Crespo Crespo, 1996). Pero aún más, enseñar geometría en los tiempos actuales, donde las tecnologías han abierto una ventana a lo visual y lo virtual, exige una atención inmediata (Bressan, 2013). Necesidad y desafío se conjugan en esta área de la matemática que fue relegada por mucho tiempo.

Podemos preguntarnos "¿Por qué y para qué la Geometría en el aula? Alsina, Fortuny y Pérez (1997, citado en García Peña, Escudero. 2008) responden:

- Para *conocer* una rama de las Matemáticas más instructivas
- Para *cultivar* la inteligencia
- Para *desarrollar* estrategias de pensamiento
- Para *descubrir* las propias posibilidades creativas
- Para *aprender* una materia interesante y útil
- Para *fomentar* una sensibilidad hacia lo bello
- Para *trabajar* Matemáticas experimentalmente
- Para *agudizar* la visión del mundo que nos rodea
- Para *gozar* de sus aplicaciones prácticas
- Para *disfrutar* aprendiendo y enseñando" (p. 31)

Las fases de la luna, los pasos de una danza, las conjugaciones verbales, los algoritmos de las operaciones, las sinfonías, etc. son muestras de las regularidades que están en nuestro entorno. Éstas y los patrones geométricos son pocos utilizados en el aula ya que todavía en la enseñanza de la geometría sigue predominando una presentación de este campo a partir de un cúmulo de nombres y fórmulas.

La historia de la matemática entre los siglos XVII y gran parte del XX muestra un proceso de des-visualización y des-espacialización del estudio geométrico pues la visualización y la espacialización fueron considerados como obstáculos para su avance (Marmolejo Avenia, 2012). Esto ocurrió en el campo de la matemática científica, sin embargo desde hace un tiempo ha renacido el interés por estos procesos para la enseñanza de la matemática en general y de la geometría en particular.

Según Bressan, Bogisic y Crego (2013) enseñar geometría:

- Es un medio para mejorar la percepción espacial y visualización.
- Utiliza lenguaje cotidiano y tiene aplicaciones en la vida real.
- Se integra con varias ramas del conocimiento, como aplicaciones a temas de matemática básicas y en biología, arquitectura, etc. y de preparación para cursos superiores
- Tiene un valor estético y cultural.

Según Santaló (1997) es común creer que para estudiar una ciencia hay que empezar por el principio y por esto la enseñanza de la geometría en la secundaria siempre comenzó con los postulados de Euclides, cuando en realidad los fundamentos son la parte más complicada, pensada por especialistas del área y se lleva a cabo en etapas posteriores a otras manipulaciones de objetos que, muchas veces están en construcción por muchos años.

No existe un aprendizaje lineal de los conceptos de ningún tipo, y tampoco de los geométricos. Un niño pequeño puede jugar con cuerpos o con simetrías, describir trayectos y armar rompecabezas con piezas poligonales aunque formalmente esté lejos de conocer sus definiciones y volverá a ellos, desde otras perspectivas, en la enseñanza más avanzada. Tampoco es necesario intentar agotar todos los contenidos de un concepto, éstos se deben integrar y profundizar en un estudio con mayor conceptualización.

La diferencia del estudio de la geometría respecto a otras áreas de la matemática "radica en la omnipresente e inevitable dialéctica entre la conceptualización y visualización" (Bressan, 2013, p. 116). Con esta perspectiva, experimentación y demostración van siempre de la mano. La visualización corresponde al saber ver el espacio con el motor de la intuición y el análisis de un concepto debe realizarse con la leyes de la deducción lógica para que se pueda comunicar por medio de enunciados (Alsina, 1995).

Itzcovich (2005) expresa que saber hacer geometría es "inferir, a partir de datos y con el apoyo de las propiedades, relaciones que no están explicitadas y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación" (p.12).

Gran parte de los trabajos de investigación actuales sobre la enseñanza de la geometría se refieren a la innovación sobre el estudio de la misma con el uso de la tecnología, la necesidad de la creación de nuevos materiales y la capacitación para los docentes. Estos tres ejes son pilares de una evolución sustentable a futuro de la enseñanza de la geometría.

En trabajos de investigación específicos sobre mosaicos, como los de Fasello, Teresa, Osio, Elsa (2011); Muñoz Santoja, Hans Martín, y Fernández (2011) y Uribe Garzón, Cárdenas Forero, Becerra Martínez (2014), entre otros, se consideran los siguientes puntos referidos a la enseñanza de la Geometría:

- **La necesidad de desarrollar contenidos aritméticos y algebraicos deja siempre relegada la geometría para el final de los cursos del nivel secundario.**

Aunque los documentos curriculares no norman la secuencia de contenidos, y suelen dar libertad para distintas organizaciones, es usual que la forma en la que aparecen mencionados en dichos documentos funcione como sugerencia/norma de orden y organización. De este modo, Geometría, Medida, Probabilidad y Estadística suelen figurar al final de las presentaciones y ese lugar es trasladado sin mediar otra decisión, a los programas de los cursos de nivel secundario, lo mismo que se encuentra en la mayoría de los libros de textos utilizados en las aulas.

Desde el nivel primario se pone de manifiesto en docentes la emergencia y necesidad de que los alumnos manejen cálculo, lo que hace que se priorice la enseñanza de la aritmética antes de los conceptos geométricos (Fasello, Osio, 2011). Podemos advertir que los niños se enfrentan más a menudo con problemas geométricos y del espacio que con problemas aritméticos (Uribe Garzón. 2014). A pesar de que los niños ingresan a la escolaridad con muchas nociones intuitivas del espacio las cuales los ayudan a resolver problemas diarios, los maestros en lugar de aprovechar y ampliar esas nociones privilegian la aritmética (aunque hay que aclarar que los problemas espaciales no necesariamente son geométricos).

- **La importancia de desarrollar materiales innovadores para incorporar más geometría en el aula.**

Los futuros docentes se sienten entusiasmados por los nuevos materiales y a la vez plantean la necesidad de mayor práctica y re-pensar el aplicar nuevas situaciones didácticas en el aula de la escolaridad primaria. Tienen la convicción de que su entusiasmo también puede replicarse en los alumnos (Fasello et al. 2011).

- **La necesidad de incorporar más contenidos geométricos en la formación docente.**

Los propios docentes afirman la necesidad de conocer más del tema ya que queda desdibujado en su formación docente y al completarse la necesidad de que el alumno calcule bien, se deja de lado siempre el estudio de las figuras y cuerpos (Fasello et al. 2011).

- **La aplicación de programas como el Geogebra que permite agilizar y motivar al alumnado.**

El documento de la Nueva Escuela Secundaria de la C.A.B.A. (NES) reconoce que los alumnos son nativos digitales, ya que crecieron rodeados de nuevas tecnologías y tienen desarrolladas habilidades para enfocarse en multitareas así como aprender mediante tutoriales. El aplicar Geogebra, u otros software de geometría dinámica, les otorga un ambiente beneficioso para revisar, explorar, indagar y re-pensar las tareas. De este modo, los alumnos cambian su situación común del aula, podrían ensayar sin temor a equivocarse y ser nativos digitales es un beneficio en este caso pues podrían adaptarse fácilmente a las reglas del aprender con las nuevas tecnologías.

- **Incorporar el juego en la clase**

En los documentos curriculares de la Ciudad de Buenos Aires se refieren a la importancia de la incorporación del juego en las clases. Sin embargo, se refieren a juegos que fomenten la exploración, la observación, reflexión y anticipación como fuente de aprendizaje. Con esta perspectiva, la exploración será punto de partida en juegos que involucran geometría, y la manipulación de cuerpos y figuras, el recorrido del aula, etc., harán que los alumnos se pongan en contacto con las propiedades y detecten regularidades de los contenidos matemáticos subyacentes.

- **Cambiar el papel del docente**

La geometría que se intenta implementar desde los documentos curriculares implica diseñar etapas de trabajo con un docente que cambia de actitud pasando de explicar, en una clase netamente expositiva, a ser un orientador del aprendizaje y observador del trabajo de los estudiantes.

- **Valorar las obras artísticas y su relación con la geometría**.

Varias investigaciones reflexionan sobre las expresiones artísticas y creativas de diferentes personas y culturas que, a partir del cubrimiento de planos, permiten acceder por esta vía al estudio de los polígonos regulares e irregulares que lo posibilitan. Esto permite una relación entre la matemática y el entorno sociocultural que permite favorecer el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Herrera, Montes, Cruz, Vargas, 2010).

Entre los artistas destacados en este sentido, podemos referirnos a los de La Alhambra y considerar, en particular, los diseños de Maurits Escher.

- **Inspirar y fomentar la creatividad**

Varios trabajos, entre ellos el de Herrera y otros (2010) muestran cómo se fomentaron expresiones artísticas y creativas a partir del estudio de las nociones geométricas que se encuentran en los mosaicos, que permiten diferenciar propiedades de los polígonos a partir de las cuales es factible modificar baldosas asegurando que éstas sigan cubriendo el plano.

Muchos de los aportes de investigaciones referidas a la enseñanza de la geometría focalizan en la necesidad de ofrecer problemas a los estudiantes. El término *problema* en Educación Matemática admite diversidad de acepciones. En documentos curriculares se expresa que los problemas son motivadores pero por sí mismos no son un motor para el desarrollo de un tema. La idea es invitar a resolver, a participar, a provocar un desequilibrio entre lo que sabe el alumno y lo que necesita para avanzar. Debería ser una actividad lo suficientemente interesante pero que no esté muy lejos de sus posibilidades y tampoco insulsa o sin sentido. Se pretende desafiar al alumno, o sea proponerle un trabajo que provoque cierta situación conflictiva pero que pueda buscar una posible solución, que lo lleven a pensar, a explorar a conjeturar. No debe ser muy fácil ni tampoco imposible. Estas características de los problemas geométricos apropiados para la clase de matemática se sintetizan como: que presenta cierto nivel de dificultad, resulta novedoso y exige utilizar contenidos previos y tomar decisiones (Doc. Curricular. N°3. 2001).

Por su parte, Sessa (1998, citada en Itzcovich, 2005) indica lo que considera que debe tener un problema geométrico:

- "Para resolverlo se deben poner en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras – dibujos.
- En la resolución del problema, los dibujos no permiten arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema – es decir la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de la respuesta- no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras, producen nuevo conocimiento acerca de los mismos." (p.13).

Los intercambios de ideas, la posibilidad de dar a conocer un modo particular u original de resolver una cuestión frente a otros compañeros, las instancias de discusión, de defensa de una posición, la oportunidad de contradecir a otro compañero, serán condiciones relevantes para la apropiación de nuevos conocimientos. Es tarea del docente generar espacios de reflexión para permitir la circulación del conocimiento en el aula.

Es un desafío para el docente detectar el punto ideal de aprendizaje y ajustarlo continuamente al grupo y sus avances. Para ello se necesita un docente con una sensibilidad especial, dispuesto a escuchar a sus estudiantes, que sea orientador en el proceso y no sólo un expositor de contenidos.

Nuestro compromiso es educar para este mundo en estos tiempos, y por lo tanto la enseñanza de la matemática debe adecuarse a las necesidades actuales. Un alumno debe comprender los fenómenos que lo rodean y debe saber trabajar en equipo. Según el documento curricular de la

Ciudad de Buenos Aires (NES) es importante desarrollar en los estudiantes las habilidades de aprender a aprender a través del desarrollo autónomo y el pensamiento crítico.

Un problema que se puede ser interesante para todos los alumnos ya que es parte de su vida cotidiana y tiene muchas aristas de estudio, es la indagación sobre mosaicos geométricos. Además, cumple con las pautas que indicamos al principio de este capítulo. Dedicamos la siguiente sección a algunos puntos clave referidos a este recurso.

1.2. Sobre teselados y mosaicos

"La Alhambra de Granada es la fuente de inspiración
más fértil de todas de las que he bebido"
M. C. Escher

Desde que el hombre ha comenzado a construir se ha preocupado por unir materiales para teselar lo más eficientemente posible las superficies. Todavía podemos apreciar restos de estos trabajos, como las calzadas romanas y obras artísticas.


Ilustración 1-0-1

De a poco las piezas utilizadas fueron siendo unidas con mayor precisión, siguiendo un diseño artístico y repitiendo un diseño base. Así los artistas empezaron a investigar y diseñar formas que cubrieran el plano de forma armoniosa. También podemos apreciarlos en nuestras ciudades y en los adoquinados de nuestras calles (Muñoz Santoja, 2011).


Ilustración 1-0-2

Presentamos en la siguiente sección información referida a obras de artistas árabes que realizaron en España.

Los Mosaicos de La Alhambra: una síntesis histórica


Ilustración 1-0-3

La Alhambra es una ciudad andaluza situada en Granada, España. Está compuesta por jardines, palacios y fortaleza que acogía una ciudadela dentro de la misma ciudad Granada. Este complejo albergaba al monarca y su corte del Reino Nazarí de Granada. Su belleza, como otras obras árabes, es debida no sólo a su localización, el punto más elevado de la ciudad, sino también la combinación con el paisaje al cual se integra. Se tiene constancia de que esta construcción data del siglo IX. Se convirtió el castillo con el recinto amurallado como una fortaleza que el siglo XIII fue habitado por el monarca Mohamed ben Al-Hamar (Mohamed I, 1238-1273). A Yúsuf (1333-1353) y Mohamed V (1353-1391) les debemos las mayores construcciones que llegaron hasta la actualidad. Desde la época de los Reyes Católicos hasta el siglo XVIII, fueron demolidos y construidos diversos castillos para el rey de turno y abandonados luego, hasta que recién en el siglo XIX se consideró su restauración y conservación.

Debemos a la cultura árabe avances en lo geométrico, aritmético y astronómico. Ellos tradujeron lo geometría griega y la dieron a conocer en toda Europa.

El Islam halló en la matemática la forma de expresar su idiosincrasia. ¿Por qué semejante creación hispano-musulmana? La razón es de carácter religioso. El Corán no permite la representación icónica de Alá, y además se identifica con la singularidad. Ningún punto es singular o más importante que otro. Su religión les impedía dibujar figuras de personas o animales así que fueron los mayores creadores de exquisitos mosaicos geométricos.

Los artesanos no conocían de teoremas pero igualmente conocían los grupos de figuras con las que podían rellenar el plano. Esos grupos eran 17, todos éstos representados en las paredes de La Alhambra. Este efecto lo lograron con el uso de la simetría y el recubrimiento regular y de manera armoniosa. Así, no sólo utilizaron geometría, sino también conceptos de geometría dinámica basada en la composición de movimientos.

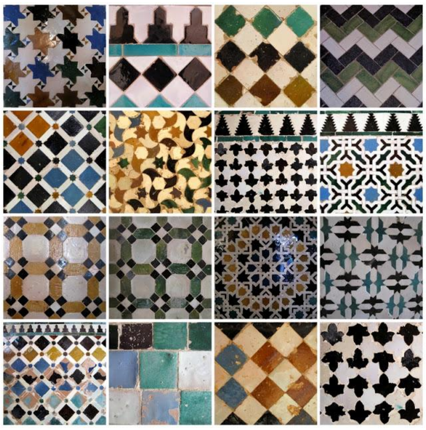


Ilustración 1-0-4

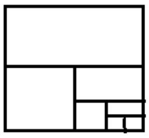
Los artistas árabes también conocían los conceptos de la divina proporción, proporción áurea, formas cristalográficas, entre otros conceptos de la matemática.

Sabían que tres polígonos regulares cubren el plano: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Pero también podremos descubrir otras teselas, ya no polígonos regulares, construidas a partir de transformaciones de esos polígonos regulares y de otros, construidas no con esa finalidad, sino sólo para realizar una obra que agradara a Dios.

Se puede definir el concepto de *mosaico* a partir de la noción de grafo. Un grafo que se extiende a todo el plano, se llama un *mosaico* (a veces también un teselado), si se cumplen las condiciones siguientes:

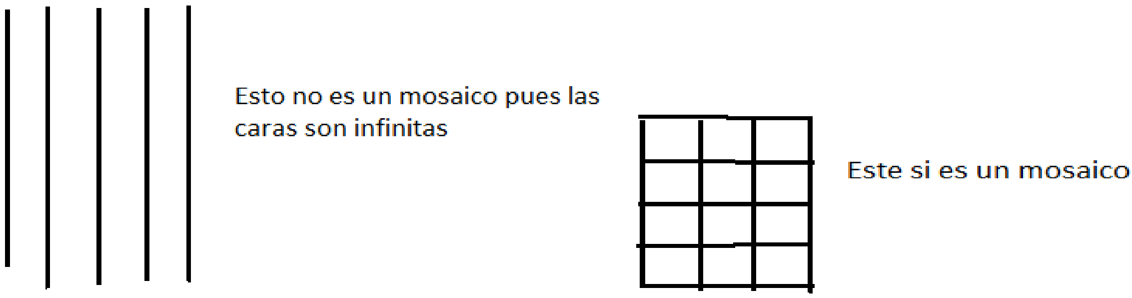
a) Todo punto del plano, que no pertenezca a una arista o sea un vértice, pertenece a una y a una sola cara. Las aristas pertenecen a las dos caras que limitan y los vértices a todas las caras que en ellos concurren;

b) Las caras son acotadas, superior e inferiormente, es decir, existen constantes positivas A, E, tales que el diámetro D de cualquier cara cumple A>D>E,



Las caras no pueden ser infinitamente pequeñas, ni infinitamente grandes.

c) En todo vértice concurren por lo menos 3 aristas y 3 caras.



Otra forma muy interesante de considerar este tema es la desarrollada por Bressan (2013) en su trabajo sobre mosaicos y naturaleza. Considera el mosaico como la figura con la cual es posible recubrir el plano utilizando siempre la misma figura (mosaicos regulares). En su texto incluye una demostración de que los únicos polígonos regulares que cubren el plano son el triángulo, el cuadrado y el hexágono.

Entre los artistas plásticos se destacan los dibujos del pintor holandés Maurits Escher, quien tras una visita a la ciudad de La Alhambra quedó fascinado por la obra de los musulmanes y copió muchos motivos en su obra. Con el tiempo se convirtió en un maestro del ensamble de teselas jugando con la simetría y asimetría de las formas.

Aquí podemos apreciar una obra de M. Escher una de sus obras denominada Mundos Entrelazados, donde podemos observar cómo comienza jugando con un embaldosado regular en dos dimensiones para lograr una partición en 3D.

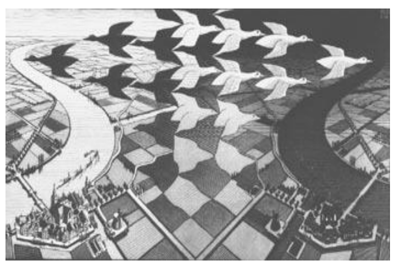


Ilustración 1-0-5

En esta otra obra denominada Metamorfosis se observa cómo integra los mosaicos regulares y los transforma en teselas originales.

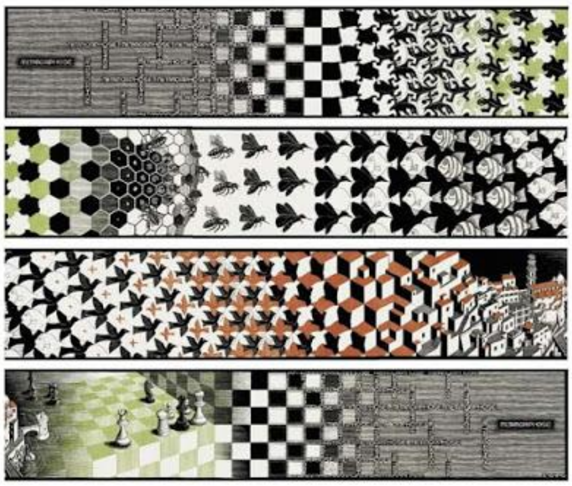


Ilustración 1-0-6

1.3.Sobre habilidades y comprensión

"Conviene que todos los ciudadanos entren en contacto con la verdadera matemática, que es método, arte y ciencia, muy distinta de la calculatoria, que es técnica y rutina."

Dr. Luis A. Santaló

1.3.1. Habilidades

Empezamos indagando sobre el concepto de habilidad.

Según el diccionario de la Real Academia el concepto de *habilidad* proviene del término latino *habilitas* y hace referencia a la maña, el talento, la pericia o la aptitud para desarrollar alguna tarea. La persona hábil logra realizar algo con éxito gracias a su destreza.

Pero nos preguntamos qué son las habilidades básicas en matemática.

Se pueden determinar dos modos de concebir la habilidades matemáticas: como hábito culminado o como acción creadora en constante perfeccionamiento (Ferrer Vicente 2000, citado en Rodríguez, 2013). En variados textos se presenta la noción de habilidades utilizando términos como capacidades, competencias, habilidades, talento o destrezas, sin grandes precisiones y sin haber definido dichos términos previamente. En general lo que las conceptualizaciones comparten es que se debe realizar una actividad matemática en forma adecuada.

Delgado Rubí (1997, citado en Rodríguez, 2013) propone tres características de las habilidades matemáticas generales. Éstas deben ser:

- Inherentes al trabajo matemático o sea ser propias de la labor matemática.
- Generales para que pueda trabajar en el estudio de la matemática, y estar presentes en distintos niveles de escolaridad y
- que no se pueda prescindir de ella en la formación académica.

Así pues si un alumno no puede resolver una actividad matemática en la que es imprescindible una habilidad es que no la posee o su desarrollo no es aún suficiente. Pero el planteo recíproco no permite asegurar el desarrollo de la habilidad. Es decir, si un alumno resuelve correctamente una actividad no podemos suponer que disponga de la habilidad matemática correspondiente. El resolver una situación correctamente es sólo una condición necesaria, pero no alcanza.

Según Rodríguez (2013) se debe distinguir la habilidades sujetas a contenidos y habilidades generales, y termina definiendo "que una habilidad es un desempeño deliberado, no casual, adecuadamente realizado que permite resolver correctamente un acierta problemática planteada".

Ahora bien, cuando un sujeto resuelve una actividad, aplica un cierto procedimiento pero no tiene control de sus decisiones y acciones está trabajando en un plano heurístico, exploratorio.

Es clave en el desarrollo de habilidades hacer consciente el uso del conocimiento matemático para resolver tareas. Para esto puede ser posible que el docente propicie una reflexión meta cognitiva de manera que los alumnos puedan controlar sus decisiones, e implementar alguna evaluación que sirva para obtener datos sobre las medidas ejercidas por los alumnos. Esto conlleva destinar tiempo y además, como una misma habilidad debería poder trabajarse en distintos contenidos, es clave sostener su intención de enseñarla a lo largo de distintos cursos.

1.3.2. Habilidades propias del estudio de la geometría

Se creía que la geometría era la parte más atractiva del estudio de la matemática, ya que las imágenes invitaban al desarrollo de ideas y relaciones entre las propiedades que se notaban evidentes al construir figuras. Nada de esto resultó pues los alumnos no veían lo que queríamos que vean, no razonaban en el orden que era necesario no lográndose que disfruten de su estudio. En definitiva se llegó a la creencia que "cada uno ve lo que puede" y que esto tiene que ver con el bagaje de experiencias vividas.

Según Duval (2001) debemos tomar en cuenta los procesos cognitivos que subyacen en la enseñanza de la geometría que son los siguientes: proceso de visualización, de construcción y el razonamiento. La visualización puede ser engañosa o imposible pero sirve como un recurso intuitivo para demostrar, y la demostración dependerá del corpus de proposiciones (definiciones, teoremas, axiomas, etc.) que se tiene disponible. Los tres procesos recién mencionados están íntimamente ligados y su sinergia es necesaria para decir que se logra la competencia geométrica. Pero estos procesos tienen que ver con habilidades de los sujetos y entonces es razonable indagar si pueden estimularse o perfeccionarse estas habilidades geométricas y qué abarca específicamente este concepto.

Bressan (2013) considera que el desarrollo el estudio de la geometría comprende las siguientes habilidades: visuales, de dibujo y construcción, de comunicación, de razonamiento lógico/pensamiento y de aplicación o transferencia.

Describimos a continuación cada uno de los grupos de habilidades.

Habilidades visuales

Esta habilidad tiene que ver con la capacidad de obtener información a partir de que el estudiante observa de objetos reales o representaciones.

Aquí se puede diferenciar dos tipos de habilidades visuales:

a) Las relacionadas con la percepción de representaciones visuales externas. Éstas implican leer, comprender representaciones visuales además de gráficos y diagramas.

b) Las concernientes al procesamiento de imágenes mentales. Tienen que ver con la posibilidad de manipular imágenes mentales y transformar en conceptos o en otra clase de información.

Según Bressan (2013) hay siete habilidades que están relacionadas con la visualización. Éstas son, en una breve síntesis:

✓ *Coordinación viso-motora*

Es considerada la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.

✓ *Percepción figura-fondo*

Es aquella habilidad de identificar una figura (el foco) en un dibujo más amplio (fondo).

✓ *Constancia perceptual o constancia forma, tamaño y posición*

Es la habilidad de reconocer que un objeto posee cualidades invariantes a pesar de que su imagen cambia al mirarlo desde otra posición.

✓ *Percepción de la posición en el espacio*

Es la destreza de relacionar un objeto o imagen visual con el mismo observador.

✓ *Percepción de relaciones espaciales entre objetos*

Es la pericia de ver dos o más objetos simultáneamente en relación con el observador y entre sí.

✓ *Discriminación visual*

Es la habilidad de diferenciar y hallar similitudes entre imágenes, objetos entre sí.

✓ *Memoria visual*

Es la habilidad de recordar con exactitud las características de un objeto no presente y relacionarlo con objetos presentes o no.

Habilidades de dibujo y construcción

Se refiere a la habilidad para interpretar las ideas y representarlas a través de dibujos y esquemas. Está ligada al uso de representaciones externas que son, en matemática, obviamente los símbolos, trazos, construcciones, etc. que se asocian con la idea de un concepto. Sirven para poner en evidencia conceptos o imágenes internas y son medio para el estudio de las propiedades a nivel intuitivo.

Habilidades de comunicación

Se refieren a la capacidad para emplear adecuadamente el lenguaje de la geometría. Se deben construir lazos entre el lenguaje natural y los símbolos facilitando la interpretación entre diferentes representaciones. Además es sabido que el escribir ayuda a refinar y profundizar la comprensión en general y la matemática en particular.

Habilidades de razonamiento lógico/pensamiento

Comprende la capacidad de construir argumentos que siguen las reglas de la lógica formal y se utilizan para reconocer la validez de lo que se afirma.

Algunas de las habilidades lógicas que se pueden desarrollar en geometría son: abstraer conceptos u relaciones, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, desarrollar esquemas deductivos elementales, entre otros.

Recordemos que las dos formas de pensamiento consideradas entre dentro del pensamiento lógico son la inducción y la deducción.

Además hay habilidades de creación y de aplicación o transferencia, siendo ejemplos de la primera, el crear, inventar imaginar explorar y descubrir conceptos y relaciones. Y de la segunda, por ejemplo trasladar una estructura de un dominio de conocimiento a otro distinto en principio.

<u>Habilidades de aplicación o transferencia</u>

Esta habilidad es la que se considera necesaria para interpretar y analizar conceptos de la matemática para analizar el mundo que nos rodea. Esta habilidad denominada también de modelización es la prioritaria y en ella se relacionan las anteriores.

Hoffer (1981), por su parte, organizó en cinco grandes grupos las habilidades que desarrolla el estudio de la geometría. Las resume en visuales, de lenguaje, de dibujo, lógicas y para modelar. Como puede verse hay correspondencia entre la organización de Hoffer y de Bressan.

1.3.3. Niveles de comprensión en geometría

Como hemos señalado, nos interesa indagar en la comprensión geométrica y su vínculo con el desarrollo de habilidades. Por esta razón debemos tener precisiones teóricas respecto de la comprensión en geometría.

En el aprendizaje de la geometría hay dos momentos bien marcados, el inicial donde prima la intuición, de naturaleza mayormente visual y el segundo que se hace de manera reflexiva, lógica y que es de naturaleza verbal. El primer momento tiene un carácter más subjetivo y el segundo más objetivo y analítico. La comprensión geométrica solo se alcanza si se logra avanzar hacia el segundo momento. Cabe señalar, a modo de ejemplo, que la visualización corresponde a saber ver el espacio con la intuición como motor, pero no se lograría comprensión si no se avanza en el análisis regido por leyes de la deducción lógica. Los resultados se tienen que poder expresar y comunicar, no basta “verlos”. El sentido de la vista no es absolutamente fiel a las formas de las imágenes. Muchos factores influyen en la percepción de las imágenes. La percepción visual, como el lenguaje, puede ser aprendida y exige el uso de ciertas habilidades para saber ver y saber interpretar. Lo mismo que la representación gráfica, que es un medio para comunicar resultados, expresar nuestras ideas, que también puede ser aprendida. Así pues la comunicación gráfica también es una habilidad para ejercitar. La comprensión se alcanzará en base al manejo del razonamiento, cuestión clave para la claridad y rigor de la ciencia.

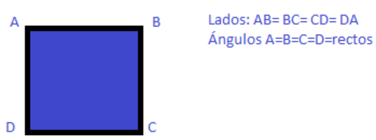
El matrimonio Van Hiele (1957, citado en Gutiérrez, Jaime y Fortuny 1991) propuso específicamente para geometría una teoría de niveles de conocimiento y de fases de comprensión que permiten organizar la enseñanza y reconocer aprendizaje y comprensión alcanzada por los estudiantes. Estos niveles y fases son secuenciales y progresivos. Así que se va de lo mínimo, basando en observar una figura, hasta la mayor complejidad expresada en la demostración lógica pasando por estadíos progresivos que no son posibles de saltear.

El modelo de Van Hiele propone cinco niveles de comprensión

Nivel 0 “Visualización”: El nivel 0 implica que el alumno ve una figura en su totalidad, como un todo global. Por ejemplo ante una actividad de determinar cuáles de una colección de figuras dadas es un cuadrado, es capaz de detectar cuál es el cuadrilátero pero no detecta partes y menos propiedades.

El siguiente nivel es *descriptivo*, donde ya podemos distinguir ciertas propiedades de la figura.

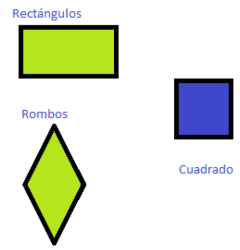
Nivel 1: “Análisis”: Las personas pueden analizar partes y propiedades particulares de la figura.



En el nivel 1, ante la misma actividad recién mencionada, un sujeto reconoce el cuadrado, puede reconocer sus partes, identifica propiedades de los lados y ángulos.

El siguiente nivel es el de *deducción informal* donde las propiedades se organizan lógicamente, donde cada una sigue o se deduce de otra anterior.

Nivel 2 "Deducción informal": Las personas determinan las figuras por sus propiedades. En el nivel 2, un sujeto puede clasificar y ordenar cuadriláteros. Podrá clasificar entre paralelogramos y no paralelogramos, e incluir el cuadrado dentro de los paralelogramos, ya que es rectángulo y rombo a la vez, por ejemplo.



Luego llegará el nivel de *deducción formal* que la mayoría de los alumnos no alcanza naturalmente.

Nivel 3 "Deducción formal": Las personas pueden desarrollar secuencias de proposiciones para logra deducir una propiedad de otra. En este nivel, y siguiendo el ejemplo, el alumno puede deducir a partir de cadenas lógicas y reglas aceptadas en la matemática que una determinada figura resultará ser un cuadrado. Para ello se manejará trascendiendo la observación del dibujo y más cercano a un nivel de abstracción mucho mayor.

Finalmente llegamos al último nivel.

Nivel 4 "Rigor": los sujetos están capacitados para analizar con rigor de varios sistemas deductivos.

Es muy difícil que alumnos de nivel medio arriben a este nivel, pues requiere de la deducción de propiedades a partir de sistemas axiomáticos y conocimiento de otras geometrías.

Estudios de Van Hiele y de psicólogos soviéticos han demostrado que no depende de la edad la posibilidad del pasaje de un nivel a otro ya que debe haber una invitación de variadas experiencias que estimulen el avance. Y esta invitación es la que puede hacer un docente a través de contenidos y los métodos de enseñanza.

No se pasa de un nivel a otro abruptamente. Existen algunos elementos propios de un nivel superior que se usan en el nivel anterior en forma incipiente. El alumno no es consciente de esto ni los pone en práctica de forma explícita. Sin embargo, pero estos elementos serán explícitas en el nivel siguiente.

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

Tabla 1: Estructura recursiva de los Niveles de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990)

El lenguaje también en más específico en cada nivel. En el trabajo de Jaime y Gutiérrez (1990) se puede observar la diferencia en la palabra *demostrar* (actividad típica de la matemática) en cada nivel. Donde en el nivel 1 carece de sentido, en el nivel 2 es sólo una comprobación de afirmaciones, y en el nivel 3 ya se aproxima un poco más ya que aparecen cadenas lógicas pero con argumentaciones aun informales. Recién en el nivel 4 logra todo el significado ya que constituyen demostraciones con los requisitos usuales de rigor.

Van Hiele propone fases de un pasaje a otro del nivel de conocimiento. Éstas son:

<u>Fase 1: Discernimiento/Información</u>

Se le ofrecen al alumnado situaciones de aprendizaje brindando el lenguaje y las observaciones pertinentes.

<u>Fase 2: Orientación dirigida</u>

El docente ofrece una secuencia graduada de actividades. La ejecución y la reflexión tienen como intención favorecer el pasaje de un nivel al siguiente.

Fase 3: Explicitación

Al realizar sus experiencias, el alumnado realiza explicaciones y comentarios sobre sus propias conclusiones.

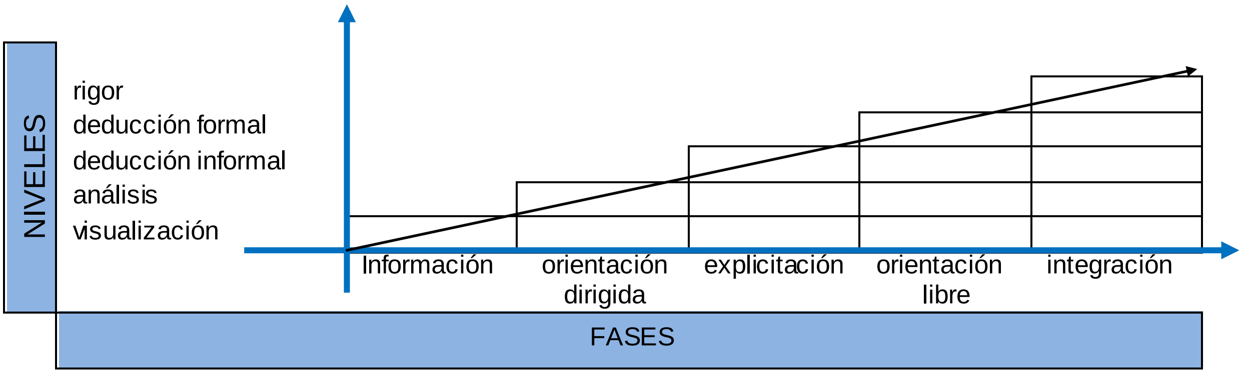
Fase 4: Orientación libre

Con los conocimientos adquiridos resuelven otras situaciones distintas pero con estructura parecida.

Fase 5: Integración

Las relaciones y objetos se acoplarán al sistema mental de conocimientos.

Recién cuando un sujeto alcanza la fase 5 recién se considera que ha alcanzado un nuevo nivel de pensamiento y el alumno está preparado para repetir las fases en el siguiente nivel.



Este modelo tiene algunas particularidades importantes que indicamos a continuación:

1. *Secuencialidad en la adquisición de los niveles*: sigue un orden que no es posible alterar.

2. *Especificidad del lenguaje*: en cada nivel el lenguaje se va mejorando y completando.

3. *Globalidad y localidad*: investigaciones revelan que el nivel de razonamiento es local o sea que se razona en un nivel un concepto y no tiene por qué ser el mismo en otros conceptos.

4. *Intrínseco y extrínseco*: los objetos de un nivel se convierten en objetos de estudio en el otro ya que en el primero sólo se perciben formas hasta que en niveles más avanzados ya se analizan sus propiedades.

5. *Instrucción*: no se avanza de un nivel a otro sin una intencionalidad o experiencias personales. No tienen que ver con un aspecto biológico, ni con la edad.

6. *Emparejamiento:* si un estudiante se encuentra en un nivel de comprensión y el docente da una instrucción en un nivel superior, seguramente no se logren los resultados deseados.

Los alumnos irían adquiriendo este tipo de pensamiento gradualmente, según Van Hiele, ellos afirman que no se debe al crecimiento o desarrollo natural, sino de la instrucción internacionalizada.

El uso de mosaicos o rompecabezas es muy utilizado para el pasaje intencionado de un nivel a otro. Primero con una etapa de "*feel and find the shape*" que estimula el sentir y encontrar la figura para completar un rompecabezas. Se va incorporando el lenguaje que sea necesario, sin definiciones formales, pero lo necesario para contar cómo se monta el rompecabezas. Gradualmente el rompecabezas aumenta de piezas y de situaciones que empujan a describir lados y ángulos de polígonos sin medir, sólo por comparación. Sigue la complejización y así, por ejemplo, se tendrá que comparar áreas sin medir ni calcular. Pistas, preguntas, situaciones provocadas por el docente proponen actividades donde el alumno necesitará aplicar el lenguaje cada vez más especializado y realizará gradualmente conexiones lógicas que verbalizará en el momento adecuado. Este tipo de trabajo da la oportunidad de explorar y abre a conexiones entre aritmética y álgebra.

Aquí el rol del docente es fundamental porque pregunta, dirige el sentido de la clase, orienta, explicita objetivos e integra todo lo aprendido.

El docente planea las preguntas, dirige la atención de los alumnos sobre las características de las figuras, introduce lenguaje, involucra a los alumnos en debates estimula las explicaciones de los problemas. Al integrar los alumnos pueden ver y comprender el trabajo de los otros y de sus propias creaciones.

TABLE 1
Basic Skills in Geometry

LEVEL / SKILL	I Recognition	II Analysis	III Ordering	IV Deduction	V Rigor
VISUAL	Recognizes different figures from a picture. Recognizes information labeled on a figure.	Notices properties of a figure. Identifies a figure as part of a larger figure.	Recognizes interrelationships between different types of figures. Recognizes common properties of different types of figures.	Uses information about a figure to deduce more information.	Recognizes unjustified assumptions made by using figures. Conceives of related figures in various deductive systems.
VERBAL	Associates the correct name with a given figure. Interprets sentences that describe figures.	Describes accurately various properties of a figure.	Defines words accurately and concisely. Formulates sentences showing interrelationships between figures.	Understands the distinctions among definitions, postulates, and theorems. Recognizes what is given in a problem and what is required to find or do.	Formulates extensions of known results. Describes various deductive systems.
DRAW-ING	Makes sketches of figures accurately labeling given parts.	Translates given verbal information into a picture. Uses given properties of figures to draw or construct the figures.	Given certain figures, is able to construct other figures related to the given ones.	Recognizes when and how to use auxiliary elements in a figure. Deduces from given information how to draw or construct a specific figure.	Understands the limitations and capabilities of various drawing tools. Pictorially represents nonstandard concepts in various deductive systems.
LOGICAL	Realizes there are differences and similarities among figures. Understands conservation of the shape of figures in various positions.	Understands that figures can be classified into different types. Realizes that properties can be used to distinguish figures.	Understands qualities of a good definition. Uses properties of figures to determine if one class of figures is contained in another class.	Uses rules of logic to develop proofs. Is able to deduce consequences from given information.	Understands the limitations and capabilities of assumptions or postulates. Knows when a system of postulates is independent, consistent, and categorical.
APPLIED	Identifies geometric shapes in physical objects.	Recognizes geometric properties of physical objects. Represents physical phenomena on paper or in a model.	Understands the concept of a mathematical model that represents relationships between objects.	Is able to deduce properties of objects from given or obtained information. Is able to solve problems that relate objects.	Uses mathematical models to represent abstract systems. Develops mathematical models to describe physical, social, and natural phenomena.

Tabla 2

Imagen de Geometry is more than Proof. The Mathematics Teacher, 74(1), p.1

1.3.4. Vínculo entre habilidades geométricas y comprensión

Hoffer (1981) asoció el estado específico de cada habilidad con el nivel de comprensión geométrica desarrollado por Van Hiele. El cuadro N°1 que sigue, que es el original de la revista The Mathematics Teacher, muestra la habilidad y el nivel de comprensión correspondiente a cada actividad. El cuadro N°2 es la traducción extraído del trabajo de Galindo (1996). Hay que considerar que la palabra “figura” se entiende como la idea geométrica, o un dibujo, incluso un símbolo.

		Nivel				
		I	II	III	IV	V
		Reconocimiento	**Análisis**	**Ordenamiento**	**Deducción**	**Rigor**
HABILIDAD	**VISUAL**	Reconocer diferentes figuras en un dibujo. Reconocer información contenida en una figura.	Notar las propiedades de una figura. Identificar una figura como parte de una mayor.	Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos	Utilizar información de otra figura para deducir más información.	Reconocer supuestos injustificados hechos al usar figuras. Concebir figuras relacionadas en varios sistemas deductivos.
	VERBAL	Asociar el nombre correcto con una figura dada. Interpretar frases que describen figuras.	Describir adecuadamente varias propiedades de una figura.	Definir palabras adecuada y concisamente. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.	Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas. Reconocer qué información da un problema y qué información hay que hallar.	Formular extensiones de resultados conocidos. Describir varios sistemas deductivos.
	PARA DIBUJAR	Hacer dibujos de figuras, nombrando adecuadamente las partes.	Traducir información verbal dada en un dibujo. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla.	Dada cierta figura construir otras relacionadas con la primera.	Reconocer cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura. Deducir de información dada cómo dibujar una figura específica.	Comprender las limitaciones y capacidades de varios elementos de dibujo. Representar gráficamente conceptos no estándar en varios sistemas deductivos.
	LÓGICA	Darse cuenta de que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la conservación de las figuras en distintas posiciones.	Comprender que las figuras pueden clasificarse en diferentes tipos. Notar que las propiedades sirven para distinguir las figuras.	Comprender las cualidades de una buena definición. Usar las propiedades para determinar si una clase de figura está contenida en otra.	Utilizar las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. Poder deducir consecuencias de la información dada.	Comprender las capacidades y limitaciones de supuestos y postulados. Saber cuándo un sistema de postulados es independiente, consistente y categórico.
	PARA MODELAR	Identificar formas geométricas en objetos físicos.	Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos. Representar fenómenos en un modelo.	Comprender el concepto de un modelo matemático que representa relaciones entre objetos.	Poder deducir propiedades de objetos de información dada. Poder resolver problemas relacionados con objetos.	Usar modelos matemáticos para representar sistemas abstractos. Desarrollar modelos matemáticos para describir fenómenos físicos, sociales y naturales.

Cuadro N° 2: Tabla de habilidades de Hoffer (1981) (Traducida en el trabajo de Galindo 1996)

1.4. Marco teórico

Consideramos como marco teórico para este trabajo, la noción de mosaicos de Bressan, junto con los conceptos de habilidades geométricas y su vínculo con la comprensión de Van Hiele expresadas en el Estado del Arte.

Para este trabajo, proponemos indicadores del grado de desarrollo de las habilidades en vínculo con la comprensión que toman como punto de partida lo expuesto y que presentamos a continuación.

Adaptamos la tabla de Hoffer (1981) para relacionar cada habilidad con el nivel de comprensión de los estudiantes.

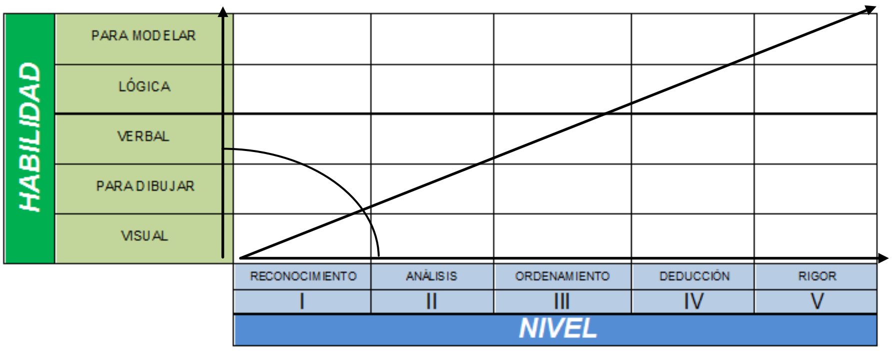


Gráfico 1

La flecha indica que se espera como la meta de logro final, conjuntamente con el desarrollo más específico de cada habilidad, aumentar el nivel de comprensión de los alumnos.

La curva muestra la región en la que se espera que se halle el grupo y de dónde debería comenzar el trabajo de estudio, iniciando desde los primeros niveles de comprensión. Se debería disponer de una secuencia en la que los alumnos inicien con actividades desde el escalón más bajo (reconocimiento-visual) y gradualmente superen los niveles de comprensión, desplegando todas las habilidades presentes en diferentes categorías.

Como ya hemos mencionado, Van Hiele sostiene que cada nivel de comprensión va asociado a diferentes fases (ver 1.3.3)

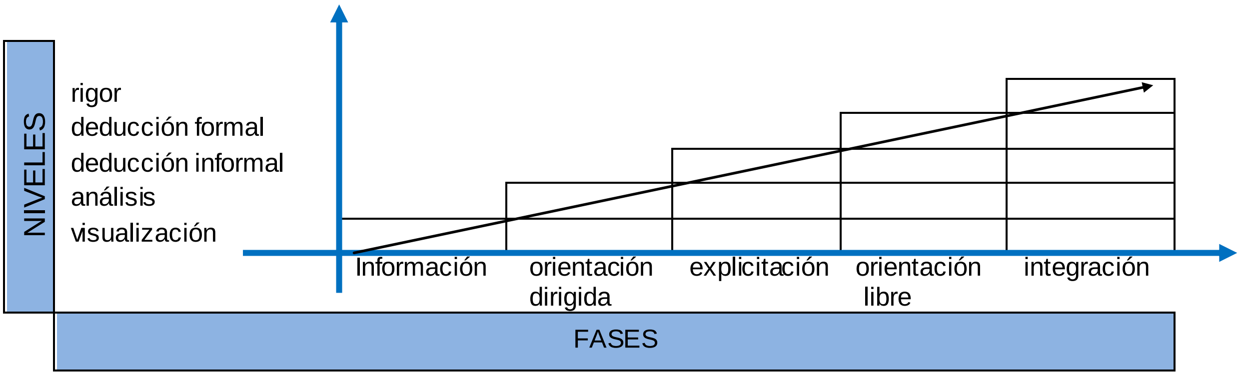


Gráfico 2

Cada habilidad tiene una especificidad en cada fase. Así que utilizaremos para los análisis que realizamos en este trabajo, una adaptación de la tabla de Hoffer (1981) presentada en el Estado del Arte que incluye habilidades visuales y de dibujo descriptas por Bressan (2013) que entendemos que enriquecen y completan los indicadores. Recordemos que al referirnos a una secuencia que estudia los mosaicos geométricos, la visualización será una de las habilidades con mayor predominio. Esa adaptación se plasma en la siguiente tabla de indicadores.

1.4.1 .Indicadores de desarrollo de habilidades en relación con niveles de comprensión

Para cada una de las habilidades, presentamos los indicadores que utilizaremos a la hora de evaluar el desarrollo de las mismas en relación con los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes.

HABILIDAD VISUAL				
Nivel				
I	**II**	**III**	**IV**	**V**
Reconocimiento	**Análisis**	**Ordenamiento**	**Deducción**	**Rigor**
1.Reconoce diferentes figuras en un dibujo. 2.Reconoce información contenida en una figura.	1.Nota las propiedades de una figura. 2.Identifica una figura como parte de una mayor. 3.Completa figuras 4.Reconoce figuras congruentes. 5.Identifica patrones 6.Invierte figura y fondo en un dibujo dado. 7.Distingue figuras 8.Arma rompecabezas	1.Reconoce interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. 2.Reconoce las propiedades comunes de diferentes tipos de figuras. 3.Distingue semejanzas y diferencias entre objetos dados. 4.Modifica posiciones de figuras y analiza invariabilidad de su tamaño y de su forma. 5.Descubre figura dentro de una figura compuesta o entre figuras sobrepuestas 6.Completa un patrón geométrico. 7.Ubica figuras según un modelo visto previamente 8.Combina figuras para obtener modelos	Utiliza información de otra figura para deducir más información.	Reconoce supuestos injustificados hechos al usar figuras. .

HABILIDAD PARA DIBUJAR				
Nivel				
I	**II**	**III**	**IV**	**V**
Reconocimiento	**Análisis**	**Ordenamiento**	**Deducción**	**Rigor**
Hace dibujos de figuras, nombrando adecuadamente las partes	1.Traduce información verbal dada en un dibujo 2.Utiliza las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla 3.Es capaz de recortar una figura igual (más chica o más grande) que la que se presenta	1.Dada cierta figura es capaz de construir otras relacionadas con la primera 2.Confecciona patrones. 3.Puede armar todas las figuras posibles dado un conjunto de polígonos.	1.Reconoce cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura 2.Deduce información dada cómo dibujar una figura específica	Comprende las limitaciones y capacidades de varios elementos de dibujo.

HABILIDAD VERBAL				
I	**II**	**III**	**IV**	**V**
Reconocimiento	**Análisis**	**Ordenamiento**	**Deducción**	**Rigor**
1.Asocia el nombre correcto con una figura dada. 2.Interpreta frases que describen figuras.	Describe adecuadamente varias propiedades de una figura.	1.Define palabras adecuada y concisamente. 2.Formula frases que muestren relaciones entre figuras.	1.Comprende las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas. 2.Reconoce qué información da un problema y qué información hay que hallar.	1.Formula extensiones de resultados conocidos.

HABILIDAD LÓGICA				
I	II	III	IV	V
Reconocimiento	**Análisis**	**Ordenamiento**	**Deducción**	**Rigor**
1.Es capaz de darse cuenta de que hay diferencias y similitudes entre figuras. 2.Comprende la conservación de las figuras en distintas posiciones.	1.Comprende que las figuras pueden clasificarse en diferentes tipos. 2.Nota que las propiedades sirven para distinguir las figuras.	1.Comprende las cualidades de una buena definición. 2.Usa las propiedades para determinar si una clase de figura está contenida en otra.	1.Utiliza las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. 2.Puede deducir consecuencias de la información dada.	Comprende las capacidades y limitaciones de supuestos y postulados.

HABILIDAD PARA MODELAR				
I	II	III	IV	V
Reconocimiento	**Análisis**	**Ordenamiento**	**Deducción**	**Rigor**
Identifica formas geométricas en objetos físicos.	1.Reconoce propiedades geométricas de objetos físicos. 2.Representa fenómenos en un modelo.	Comprende el concepto de un modelo matemático que representa relaciones entre objetos.	1.Puede deducir propiedades de objetos de información dada. 2.Resuelve problemas relacionados con objetos.	1.Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstractos. 2.Desarrolla modelos matemáticos para describir fenómenos físicos, sociales y naturales.

De aquí en adelante, cuando necesitemos analizar tanto la secuencia como las respuestas de los estudiantes, utilizamos las siguientes claves para indicar el tipo de habilidad y el momento en el que la pone en juego en términos de los niveles de comprensión que entendemos que debe tener para responder cada una de las actividades.

HABILIDADES	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

La interpretación de las claves es la siguiente:

Si una actividad pone en evidencia la *habilidad lógica* en el nivel de *deducción* utilizaremos la clave **LO-DE** (remitirse a la tabla de indicadores), que implica:

HABILIDADES	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

HABILIDAD LÓGICA				
I	II	III	IV	V
			Deducción	
			1. Utiliza las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. 2. Puede deducir consecuencias de la información dada.	

En el detalle del análisis de la secuencia además indicamos con la numeración correspondiente o sea si una actividad involucra “deducir consecuencias de una información dada”, la clave será **LO-DE$_{(2)}$**, para referirnos al segundo indicador de la celda respectiva.

CAPITULO 2. PLANTEO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ELEMENTOS METODOLOGICOS

2.1. Precisiones metodológicas sobre el problema de investigación

Como hemos señalado en la Introducción, nos preocupa el nivel de comprensión y desarrollo de habilidades geométricas que alcanzan estudiantes de nivel secundario de Capital Federal. Para favorecer este desarrollo, el Estado del Arte ha puesto de manifiesto la posible pertinencia de trabajar con situaciones con mosaicos y teselados.

A partir de establecer el Marco Teórico para la investigación hemos ajustado las preguntas iniciales así como los objetivos pudiendo, entonces, formular con precisión el problema de investigación. A continuación indicamos las preguntas, los objetivos y la metodología adoptada que nos ha permitido alcanzar los objetivos.

2.1.1. Preguntas de la investigación

En esta investigación nos propusimos describir habilidades básicas que los estudiantes ponen en juego al realizar un secuencia sobre el estudio de los mosaicos o teselados geométricos así como su grado de comprensión alcanzado.

Las preguntas que nos permiten establecer el problema de investigación son:

-¿Qué habilidades básicas (Hoffer, 1981) manifiestan los estudiantes al trabajar con una secuencia con mosaicos?

-¿Cuáles son las características principales de las actividades que propician la puesta en práctica de habilidades?

- ¿Existe alguna habilidad más utilizada que otras ante una determinada tarea?

- ¿Es posible reconocer evolución en los estudiantes en sus niveles de comprensión geométrica?

2.1.2. Contexto de investigación

Se trabaja en un primer año de bachillerato con orientación contable del instituto privado parroquial de Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Ntra. Sra. de la Salette, sito en el barrio de L. M Saavedra en una materia con modalidad de taller extra-programático denominada Nuevas Tecnologías aplicadas a la matemática. Las clases se ubican en los días jueves y viernes, razón por la cual la inasistencia es muy fuerte en esos días. El curso cuenta con un total de 22 alumnos de 13 a 14 años. Se dispone de 40 minutos semanales de la sala de informática. Se dispone de una secuencia sobre el estudio de mosaicos que fue utilizada parcialmente en diferentes cursos e instituciones. Partes de esta secuencia suele implementarse en talleres extra-programáticos en esta institución.

Para este contexto, se plantean los siguientes objetivos.

El general es: *estudiar habilidades y comprensión geométrica de estudiantes al trabajar con una secuencia didáctica sobre mosaicos.*

Los objetivos específicos son:

- Describir habilidades puestas en juego por estudiantes ante una secuencia didáctica sobre mosaicos.
- Describir los niveles de comprensión de Van Hiele alcanzados por estudiantes.

Respecto de las dos preguntas anteriores ¿cuáles son las características principales de las actividades que propician la puesta en práctica de habilidades? Y si existe alguna habilidad más utilizada que otras ante una determinada tarea, no hemos podido encarar sistemáticamente esta indagación, y por eso no plasmamos objetivos. En parte, las razones han sido las siguientes. En el caso de las características de las actividades, simplemente dejamos planteadas algunas a modo de supuesto para, en otra investigación, ahondar en esa dirección debido a que no hemos podido disponer de más tiempo de clases para indagar con otras secuencias. Sin embargo, reconocimos esa pregunta como una de nuestro interés. En el otro caso, referido a las habilidades que tienen más presencia en los estudiantes, tenemos respuestas sujetas a los casos que analizamos y, como se verá, no tiene pretensión de generalización.

2.1.3. Metodología

Hemos considerado como punto de partida una secuencia sobre mosaicos que plantea la búsqueda de patrones geométricos y el estudio de las figuras planas a partir de la observación y construcción de mosaicos. Para ella, realizamos un análisis a priori que nos permita anticipar el desarrollo de habilidades y comprensión esperadas para su resolución.

Aplicamos dicha secuencia al grupo completo. Durante esa implementación, exploramos la actividad que realizan los estudiantes ante las actividades para reconocer el desarrollo de las habilidades determinadas por Hoffer (1981) y los niveles de comprensión (Van Hiele, 1999) que ponen de manifiesto. Debido a que el curso es extra-curricular, ha habido ausencias de estudiantes que no permiten tener completa su producción. Por esta razón, el estudio referido al desarrollo de habilidades y comprensión la hemos realizado en tres estudiantes del curso quienes realizaron completa la secuencia, presentaron la totalidad de los trabajos con claridad y pusieron de manifiesto distintos tipos de producción.

La recopilación de los datos contempló la recolección de todos los trabajos, fotografías y cuaderno de campo del curso completo (Anexo).

Esta investigación es del tipo cualitativo (Sabino, 2010) ya que analiza respuestas de estudiantes ante ciertas actividades con el objetivo de aportar mayor claridad y comprensión sobre las características que fomentan el desarrollo de habilidades y comprensión en geometría. Además es un trabajo de tipo exploratorio pues no contamos con conocimiento de este grupo de estudiantes que nos permita haber planteado hipótesis a corroborar.

2.2. Descripción de la secuencia

La propuesta está diseñada para trabajar, mayoritariamente, en pequeños grupos seleccionados por los mismos estudiantes. También hay momentos de trabajo individual y en parejas según la actividad a realizar.

La secuencia está pensada para clases de 40 minutos, con un recreo en el medio. La disposición de las clases es la siguiente.

Jueves	Viernes
11:40 a 12:20	
Recreo	
12:30 a 13:10	12:30 a 13:10

La secuencia propone las siguientes orientaciones para el docente.

<u>Orientaciones para el docente:</u> los grupos y/o los integrantes puedan requerir orientación al docente. Si fuera éste el caso, él guiará con preguntas, evitando dar información ni sobre el camino para resolver ni sobre la respuesta. Se pretende que sus intervenciones permitan a los estudiantes acercarse hacia el fin esperado y que favorezcan la discusión interna de los grupos. Se propone que todas las respuestas queden plasmadas por escrito de modo de ejercitar el uso de los lenguajes y la explicitación de procedimientos y conclusiones.

El docente al final de cada clase hace una breve síntesis de lo ocurrido hasta el momento. Debido a que las clases siempre están interrumpidas por un recreo, hace lo mismo al retomar la siguiente hora. Esa síntesis sólo debe ser una descripción de lo que están haciendo en cada grupo y los objetivos y alcances de la siguiente hora.

Al final de la clase del día el docente intentará favorecer la integración de los saberes que circulan en el aula. Es este intercambio el docente es un mediador, un orientador para seleccionar los contenidos y conocimientos que deben ser resultado de la clase. Estimula la verbalización con el uso del vocabulario común e invita a la expresión de los resultados en un lenguaje más cercano a lo simbólico cuando sea propicio.

Cada clase de la secuencia tiene la siguiente estructura y el docente debe respetar estos momentos:

-Comunicar la actividad del día.

-Invitar a la conformación de los grupos (mover escritorios y sillas para que trabajen enfrentados dos a dos) y no perder tiempo.

-Repartir el material

-Estimular y guiar el arranque de la lectura y pasos a seguir a equipos que más estímulo necesitan.

-Motivar a los grupos más rezagados-Orientar y no contestar directamente las preguntas. En el feed-back con los grupos el docente no debe enseñar, sino orientar con preguntas el razonamiento propio del equipo.

La secuencia está compuesta por cinco trabajos prácticos divididos en clases de 40 minutos. El docente debe asignar el material por hora de clase para que los estudiantes no se adelanten con el afán de terminar todo y leer las actividades posteriores. Se les entrega una hoja idéntica a cada estudiante para que todos puedan leer y escribir sus respuestas. Cuando el trabajo sea grupal, los estudiantes deberán unificar la entrega en sólo una hoja con los resultados acordados por todos los miembros del equipo, que será la entregada al docente con los respectivos nombres. La intención es que todos tengan la actividad en sus carpetas y una de ellas, la final, con las conclusiones parciales.

En cada cuadro se indica el número de clase y metodología propuesta.

TRABAJO PRÁCTICO N° 1			
N° de clase	**Minutos /clase**	**Metodología**	**Actividad principal**
Clase N°1	80	parejas	Acercamiento lúdico/ construcción
Clase N°2	40	individual	Reconocimiento, copia y primer análisis de teselas
Clase N°3	80	grupal	Construcción de un mosaico con piezas pre-seleccionadas

TRABAJO PRÁCTICO N° 2			
N° de clase	**Minutos /clase**	**Metodología**	**Actividad principal**
Clase N°4	40	grupal	Análisis de teselas para La construcción de mosaicos regulares
Clase N°5	40	grupal	Estudio de polígonos regulares
Clase N°6	80	grupal	Cálculo de ángulos interiores de los polígonos regulares
Clase N°7	40	grupal	Validación de la elección del cuadrado, triángulo equilátero y hexágono regular para la construcción de mosaicos regulares.

TRABAJO PRÁCTICO N°3			
N° de clase	**Minutos/clase**	**Metodología**	**Actividad principal**
Clase N°8	40	parejas	Mosaicos semi-regulares

TRABAJO PRÁCTICO N° 4			
N° de clase	**Minutos/clase**	**Metodología**	**Actividad principal**
Clase N°9	40	individual	Mosaicos nazaríes

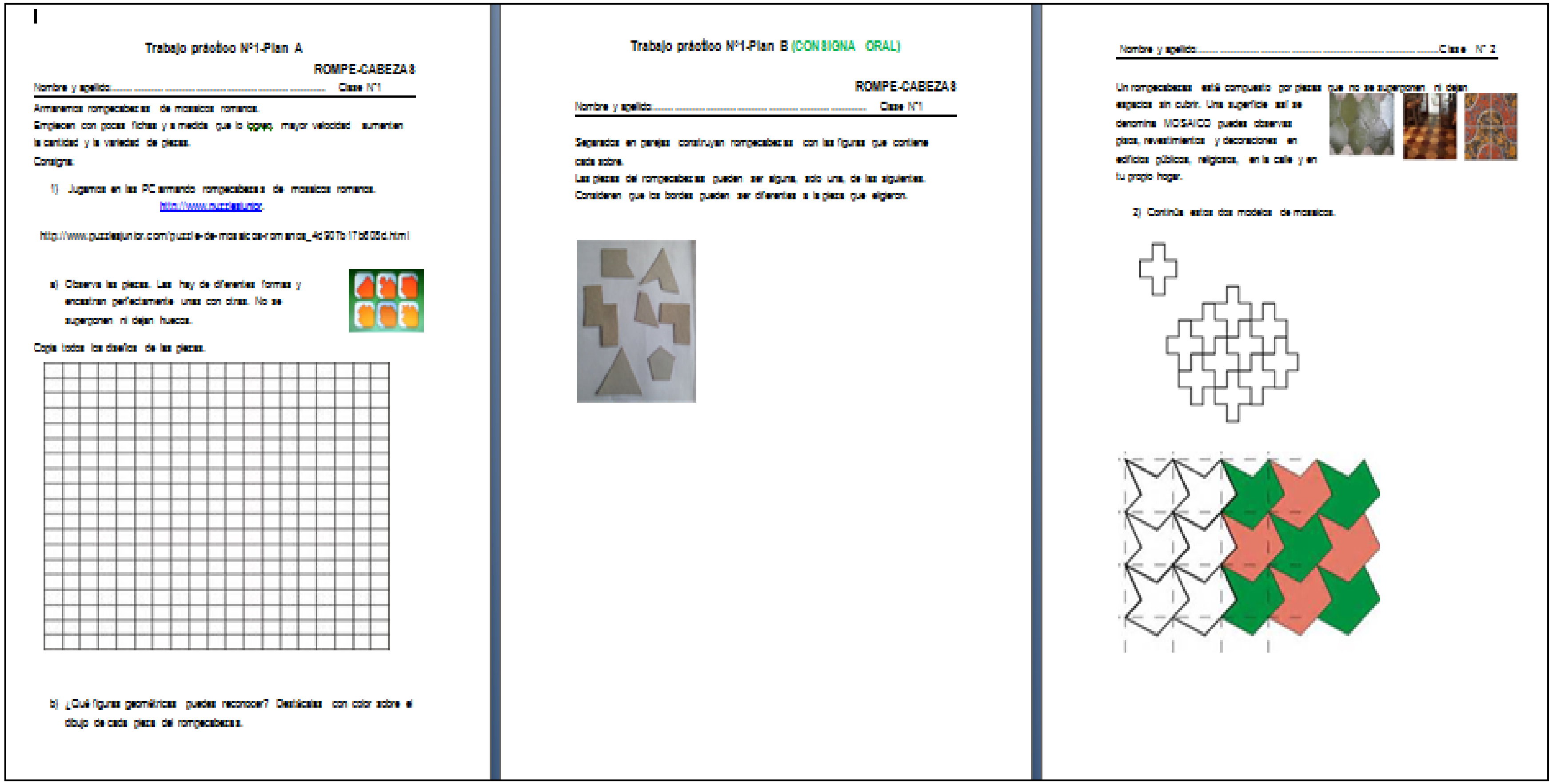
TRABAJO PRÁCTICO N° 5			
N° de clase	**Minutos/clase**	**Metodología**	**Actividad principal**
Clase N° 10	80	parejas	La obra del dibujante M. Esher y creación de mosaicos originales

A continuación presentamos las consignas de la secuencia en una disposición que pretende que se entienda la idea global de la secuencia. El detalle en tamaño más grande de cada trabajo práctico se encuentra en el anexo de Trabajos Prácticos y se retoma al momento del análisis.

<u>Consignas de la secuencia</u>

<u>La totalidad de los trabajos prácticos podrán observarse en detalle en el ANEXO N°1</u>

Trabajo práctico N°1



Trabajo práctico N°1-Plan A

ROMPE-CABEZAS

Nombre y apellido.. Clase N°1

Armaremos rompecabezas de mosaicos romanos.

Empiecen con pocas fichas y a medida que lo logren, mayor velocidad aumenten la cantidad y la variedad de piezas.

Consigna.

1) Jugamos en las PC armando rompecabezas de mosaicos romanos.

http://www.puzzlesjunior.

http://www.puzzlesjunior.com/puzzle-de-mosaicos-romanos_4d907b17b808d.html

a) Observa las piezas. Las hay de diferentes formas y encastran perfectamente unas con otras. No se superponen ni dejan huecos.

Copia todos los diseños de las piezas.

b) ¿Qué figuras geométricas puedes reconocer? Destácalas con color sobre el dibujo de cada pieza del rompecabezas.

Trabajo práctico N°1-Plan B (CONSIGNA ORAL)

ROMPE-CABEZAS

Nombre y apellido.. Clase N°1

Separados en parejas construyan rompecabezas con las figuras que contiene cada sobre.

Las piezas del rompecabezas pueden ser alguna, solo una, de las siguientes.

Consideren que los bordes pueden ser diferentes a la pieza que eligieron.

Nombre y apellido..Clase N° 2

Un rompecabezas está compuesto por piezas que no se superponen ni dejan espacios sin cubrir. Una superficie así se denomina MOSAICO puedes observar pisos, revestimientos y decoraciones en edificios públicos, religiosos, en la calle y en tu propio hogar.

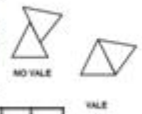
2) Continúa estos dos modelos de mosaicos.

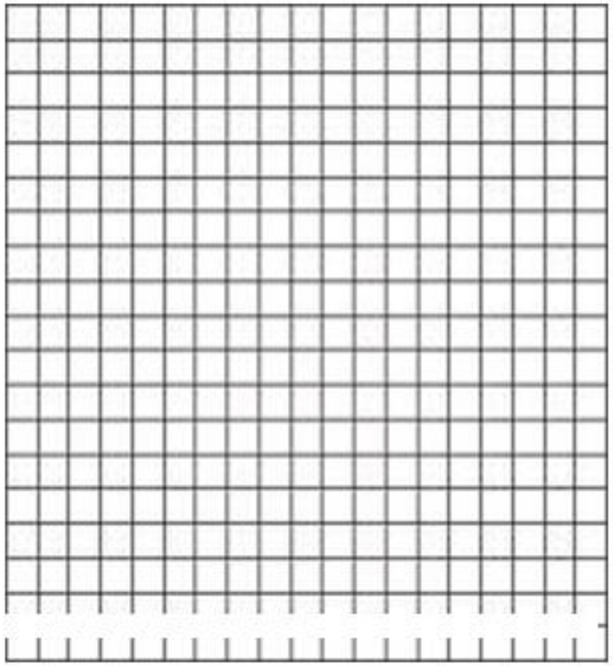
Continuación del Trabajo práctico N°1 y Trabajo práctico N°2

Nombre y apellido:..Clase N° 3

1) Prueba qué figuras (del sobre.) te permiten realizar un mosaico y cuáles no. En caso afirmativo muestra el recubrimiento.

OBSERVACIÓN
Para cumplir con estas condiciones, las baldosas deben ser de tal forma que encajen perfectamente unas con otras. El criterio que se tendrá en cuenta es que los lados de los polígonos deben coincidir completamente.





Trabajo práctico N°2

MOSAICOS

Nombre y apellido:.. Clase N°4

Objetivo:
Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

Observen las figuras del sobre n°1 ¿qué características presentan las figuras del sobre?
1) ....

Las figuras del sobre se denominan polígonos regulares. Con sus palabras ¿Pueden caracterizarlos?
....

2) Para esto tomen las figuras del sobre n° 1 y exploren cuáles de ellas le permiten diseñar las piezas de un rompecabezas o mosaico.
Elijan una por vez y úsenla de molde para dibujar cada diseño en una hoja lisa.

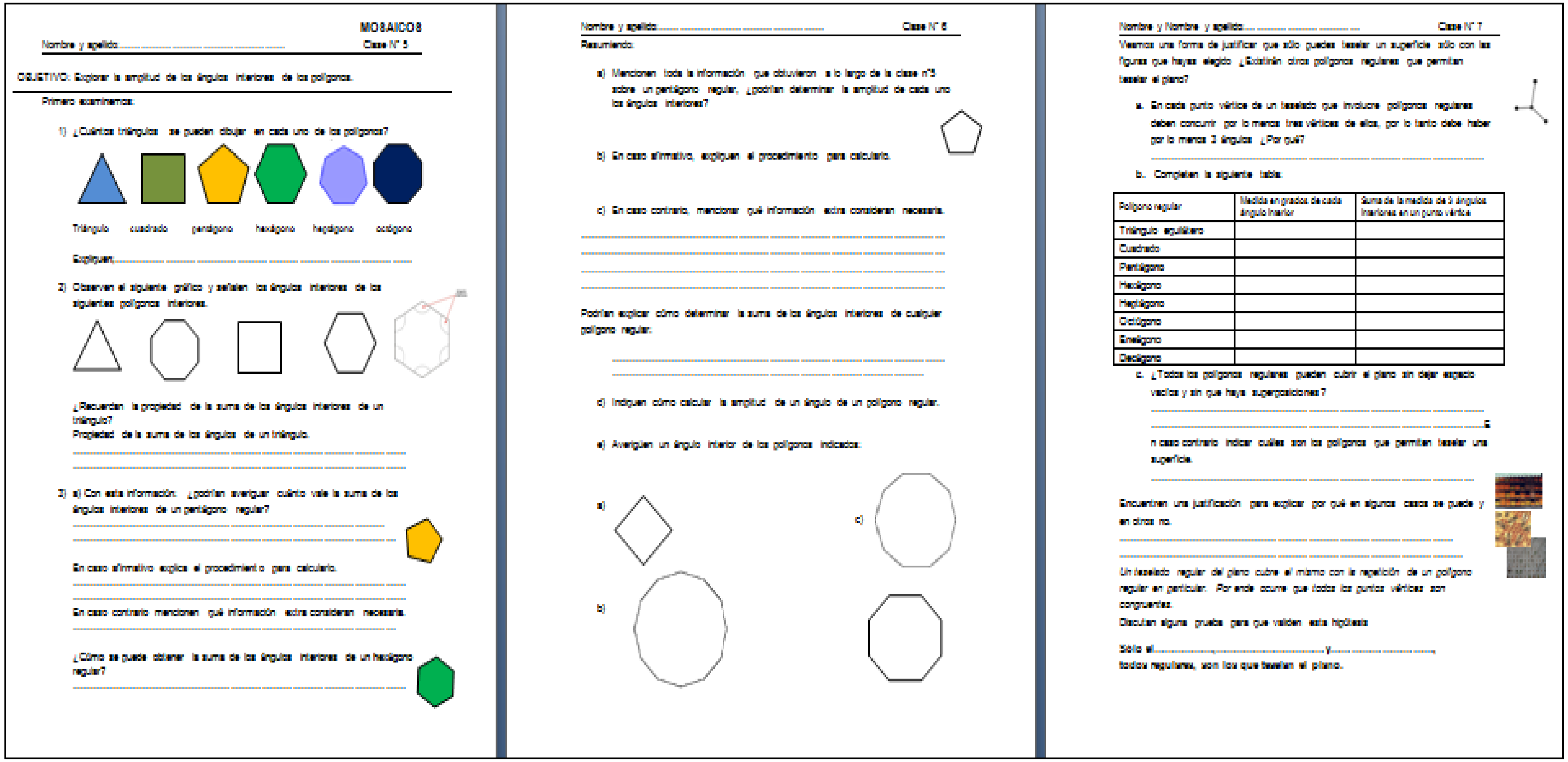
3) ¿Cuáles les permitieron realizar el mosaico? ¿Cuál es la característica o propiedad que estarían cumpliendo dichos polígonos?
....

4) Realicen el punto 2) con las figuras del sobre n° 2.

5) Analicen con sus compañeros ¿cuáles son las propiedades de estos polígonos que permiten realizar un mosaico?
....

6) ¿Por qué determinadas figuras permiten diseñar un mosaico?
Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.
....

Trabajo práctico N°2



MOSAICOS

Nombre y apellido.. Clase N° 5

OBJETIVO: Explorar la amplitud de los ángulos interiores de los polígonos.

Primero examinemos:

1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos?

Triángulo cuadrado pentágono hexágono heptágono octógono

Explíquen,...

2) Observen el siguiente gráfico y señalen los ángulos interiores de los siguientes polígonos interiores.

¿Recuerdan la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo?

Propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo.

3) a) Con esta información. ¿podrían averiguar cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un pentágono regular?

En caso afirmativo explíca el procedimiento para calcularlo.

En caso contrario mencionen qué información extra consideran necesaria.

¿Cómo se puede obtener la suma de los ángulos interiores de un hexágono regular?

Nombre y apellido.. Clase N° 6

Resumiendo:

a) Mencionen toda la información que obtuvieron a lo largo de la clase n°3 sobre un pentágono regular, ¿podrían determinar la amplitud de cada uno los ángulos interiores?

b) En caso afirmativo, expliquen el procedimiento para calcularlo.

c) En caso contrario, mencionar qué información extra consideran necesaria.

Podrían explicar cómo determinar la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono regular.

c) Indiquen cómo calcular la amplitud de un ángulo de un polígono regular.

e) Averigüen un ángulo interior de los polígonos indicados.

a) b) c)

Nombre y Nombre y apellido.................................... Clase N° 7

Veamos una forma de justificar que sólo puedes teselar un superficie sólo con las figuras que hayas elegido ¿Existirán otros polígonos regulares que permitan teselar el plano?

a. En cada punto vértice de un teselado que involucre polígonos regulares deben concurrir por lo menos tres vértices de ellos, por lo tanto debe haber por lo menos 3 ángulos ¿Por qué?

b. Completen la siguiente tabla.

Polígono regular	Medida en grados de cada ángulo interior	Suma de la medida de 3 ángulos interiores en un punto vértice
Triángulo equilátero		
Cuadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Octógono		
Eneágono		
Decágono		

c. ¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que haya superposiciones?

E

n caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie.

Encuentren una justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.

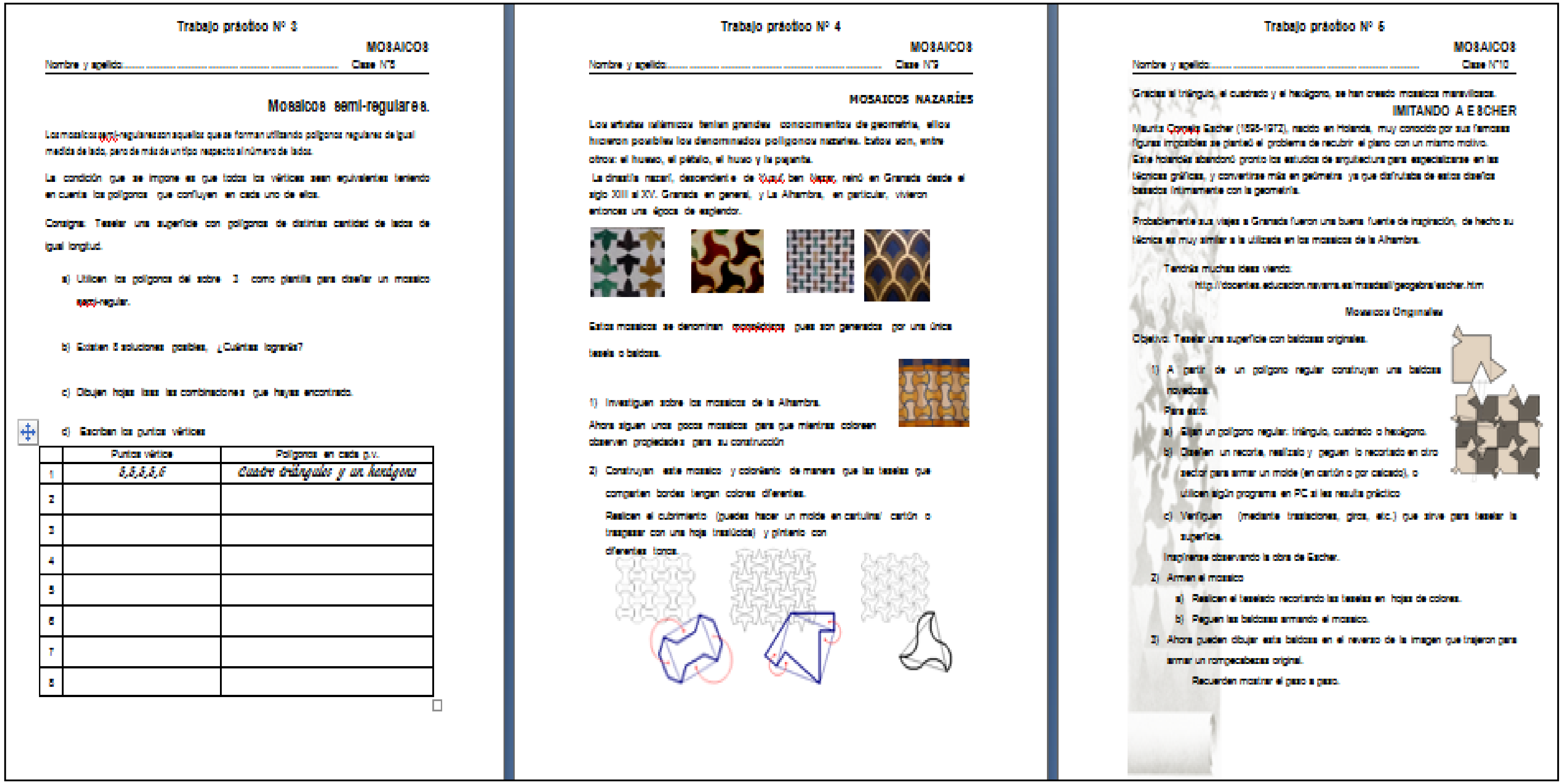
Un teselado regular del plano cubre el mismo con la repetición de un polígono regular en particular. Por ende ocurre que todos los puntos vértices son congruentes.

Discutan alguna prueba para que validen esta hipótesis

Sólo el......................,..................................y......................,

todos regulares, son los que teselan el plano.

Trabajo práctico N° 3, 4 y 5



Trabajo práctico Nº 3

MOSAICOS

Nombre y apellido.. Clase N°8

Mosaicos semi-regulares.

Los mosaicos semi-regulares son aquellos que se forman utilizando polígonos regulares de igual medida de lado, pero de más de un tipo respecto al número de lados.

La condición que se impone es que todos los vértices sean equivalentes teniendo en cuenta los polígonos que confluyen en cada uno de ellos.

Consigna: Teselar una superficie con polígonos de distintas cantidad de lados de igual longitud.

a) Utilicen los polígonos del sobre 3 como plantilla para diseñar un mosaico semi-regular.

b) Existen 8 soluciones posibles, ¿Cuántas lograrás?

c) Dibujen hojas lisas las combinaciones que hayas encontrado.

d) Escriban los puntos vértices

	Puntos vértice	Polígonos en cada p.v.
1	3,3,3,3,6	Cuatro triángulos y un hexágono
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Trabajo práctico Nº 4

MOSAICOS

Nombre y apellido.. Clase N°9

MOSAICOS NAZARÍES

Los artistas islámicos tenían grandes conocimientos de geometría, ellos hicieron posibles los denominados polígonos nazaríes. Estos son, entre otros: el hueso, el pétalo, el huso y la pajarita.

La dinastía nazarí, descendiente de Yusuf ben Nasr, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. Granada en general, y La Alhambra, en particular, vivieron entonces una época de esplendor.

Estos mosaicos se denominan monoédricos pues son generados por una única tesela o baldosa.

1) Investiguen sobre los mosaicos de la Alhambra.

Ahora siguen unos pocos mosaicos para que mientras coloreen observen propiedades para su construcción

2) Construyan este mosaico y coloréenlo de manera que las teselas que compartan bordes tengan colores diferentes.

Realicen el cubrimiento (puedes hacer un molde en cartulina/ cartón o traspasar con una hoja traslúcida) y píntenlo con diferentes tonos.

Trabajo práctico Nº 5

MOSAICOS

Nombre y apellido.. Clase N°10

Gracias al triángulo, el cuadrado y el hexágono, se han creado mosaicos maravillosos.

IMITANDO A ESCHER

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), nacido en Holanda, muy conocido por sus famosas figuras imposibles se planteó el problema de recubrir el plano con un mismo motivo. Este holandés abandonó pronto los estudios de arquitectura para especializarse en las técnicas gráficas, y convertirse más en geómetra ya que disfrutaba de estos diseños basados íntimamente con la geometría.

Probablemente sus viajes a Granada fueron una buena fuente de inspiración, de hecho su técnica es muy similar a la utilizada en los mosaicos de la Alhambra.

Tendrás muchas ideas viendo:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm

Mosaicos Originales

Objetivo: Teselar una superficie con baldosas originales.

1) A partir de un polígono regular construyan una baldosa novedosa.

Para esto:

a) Elijan un polígono regular: triángulo, cuadrado o hexágono.

b) Diseñen un recorte, realícelo y peguen lo recortado en otro sector para armar un molde (en cartón o por calcado), o utilicen algún programa en PC si les resulta práctico

c) Verifiquen (mediante traslaciones, giros, etc.) que sirve para teselar la superficie.

Inspírense observando la obra de Escher.

2) Armen el mosaico

a) Realicen el teselado recortando las teselas en hojas de colores.

b) Peguen las baldosas armando el mosaico.

3) Ahora pueden dibujar esta baldosa en el reverso de la imagen que trajeron para armar un rompecabezas original.

Recuerden mostrar el paso a paso.

2.3. Análisis a priori de la secuencia

Atendiendo a los lineamientos generales referidos al trabajo en geometría, revisamos la secuencia y consideramos que atiende a:

- Que los problemas pudieran ser resueltos de diversas maneras, o sea, gráfica, analítica, con las diferentes habilidades de cada nivel.
- Que estimule el uso de diferentes lenguajes, verbal, grafico, simbólico.
- Que las consignas y procedimientos estén adaptados al nivel de los alumnos.
- Que proponga que los alumnos definan y expliciten procedimientos
- Que las explicaciones solicitadas consideren el nivel más bajo de comprensión de los alumnos.
- Que la secuencia empiece desde lo pragmático y avance hacia lo abstracto y finaliza en el proceso inverso, desde lo abstracto hacia lo pragmático
- Que las actividades soliciten argumentar sus decisiones y respuestas
- Que los temas estén relacionados y se conecten entre sí
- Que sea un tema de interés para los alumnos.
- Que se presenten situaciones que permitan valorar el uso de la matemática en situaciones cotidianas, así como también un acercamiento al arte y observación del entorno y la naturaleza. Que se puedan resaltar las condiciones estéticas y de economía de la matemática.
- Que se involucren todos los alumnos desde su nivel de comprensión y habilidades y se valoren todos los aportes, estimulando la autoestima y evitando el rechazo o miedo a equivocarse.
- Que se utilicen materiales manipulativos e informáticos.

- Que el tiempo sea razonable para llegar hasta el final de la secuencia
- Que se consideren momentos de trabajo individualizado en parejas y en equipos.

Por ejemplo dadas la siguiente consigna :"*Indiquen cómo calcular la amplitud de un ángulo de un polígono regular"* los alumnos pueden mostrar posibles procedimientos partir de gráficos, contando con sus palabras o a través de un incipiente lenguaje simbólico.
O bien, ante la consigna "*averigüen un ángulo interior de los polígonos indicados*", los alumnos podrán resolverlo utilizando todos los medios a su alcance, algunos gráficos, otros teóricos, o por ejemplo, utilizando la definición de polígonos regulares a su alcance.

Y también, ante la consigna "*¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que haya superposiciones? En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie. Encuentren una justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.*" se espera todo tipo de explicación ya sea gráfica, simbólica o bien redacciones sobre las argumentaciones de todos los integrantes del grupo de trabajo.

Estas actividades sirven sólo de muestra que evidencia lo anteriormente mencionado.
También hemos revisado que la secuencia explicite el rol del docente y, a partir de las pautas establecidas para él, entendemos que atiende a:

- hacer una presentación adecuada y organizada enfatizando los contenidos clave y el objetivo de cada clase.
- contestar preguntas provocar otras, resolver conflictos y ayudar a llegar al consenso.
- Facilitar la incorporación de todos los alumnos para que trabajen en equipo favoreciendo la comunicación.
- Llamar la atención a los puntos clave.

- observar el progreso cognitivo de cada alumno, estimulando la participación de todos.

A continuación presentamos el análisis de la secuencia en términos del marco teórico para conocer el potencial en cuanto a habilidades que los estudiantes podrían poner en juego y describir posibles avances en la compresión geométrica. Aquí utilizamos los indicadores que fueron desarrollados y la codificación propuestos en el Marco Teórico.

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

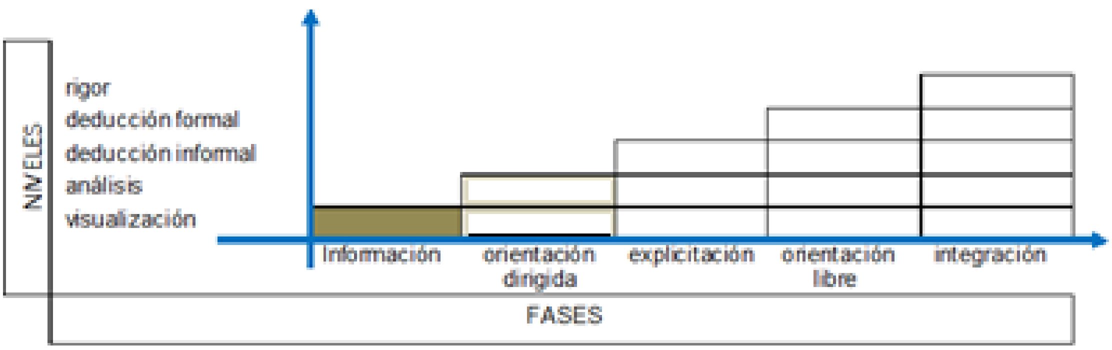
CONSIGNA DE LA SECUENCIA –CLASE N° 1	INDICADOR
Armaremos rompecabezas de mosaicos romanos. Empiecen con pocas fichas y a medida que logren mayor velocidad aumenten la cantidad y la variedad de piezas. Consigna: 1) Jugamos en las PC armando rompecabezas de mosaicos romanos. http://www.puzzlesjunior. http://www.puzzlesjunior.com/puzzle-de-mosaicos-romanos_4d907b17b608d.html a) Observa las piezas. Las hay de diferentes formas y encastran perfectamente unas con otras. No se superponen ni dejan huecos. Copia todos los diseños de las piezas. b) ¿Qué figuras geométricas puedes reconocer? Destácalas con color sobre el dibujo de cada pieza del rompecabezas.	VI-RE$_{(1)}$ VI-AN$_{(2,3,7,8)}$

Materiales: PC

En esta fase todos los alumnos pueden hacer las actividades con distinta habilidad visual.

HABILIDADES						
	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

En este momento la consigna propone una actividad que se ubica en las fases de información.

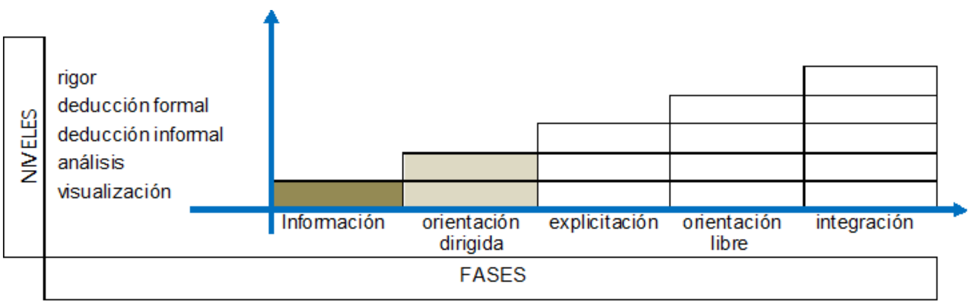


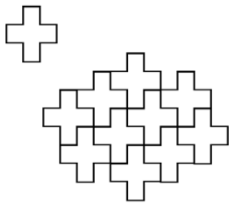
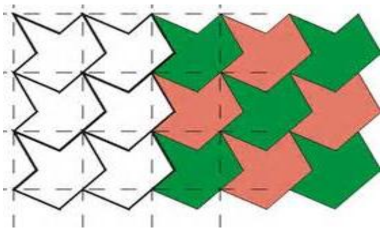
CONSIGNAS DE LA SECUENCIA CLASE N° 1/2	INDICADORES
Separados en parejas construyan rompecabezas con las figuras que contiene cada sobre. Las piezas del rompecabezas pueden ser alguna, solo una, de las siguientes. Consideren que los bordes pueden ser diferentes a la pieza que eligieron.	VI-RE$_{(1,2)}$ VI-AN$_{(8)}$ VI-OR$_{(2,4,6)}$ DI-RE DI-AN$_{(2)}$ DI-OR$_{(2,3)}$

Materiales: Moldes de teselas a utilizar con una lámina tamaño A4

Se sigue con un trabajo donde ya se permite trabajo con otras habilidades.

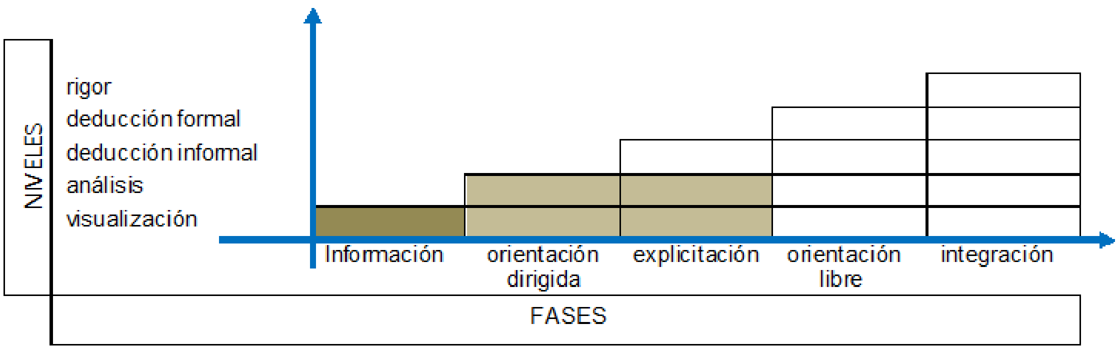
HABILIDADES	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				



CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 2	INDICADOR
Un rompecabezas está compuesto por piezas que no se superponen ni dejan espacios sin cubrir. Una superficie así se denomina MOSAICO puedes observas pisos, revestimientos y decoraciones en edificios públicos, religiosos, en la calle y en tu propio hogar. 1) Continúa estos dos modelos de mosaicos.  	VI-OR$_{(4,6,7)}$ DI-AN$_{(3)}$ DI-OR$_{(2)}$ DI-DE$_{(1)}$

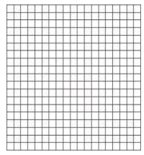
HABILIDADES						
	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

Se va incorporando actividades de las siguientes fases.



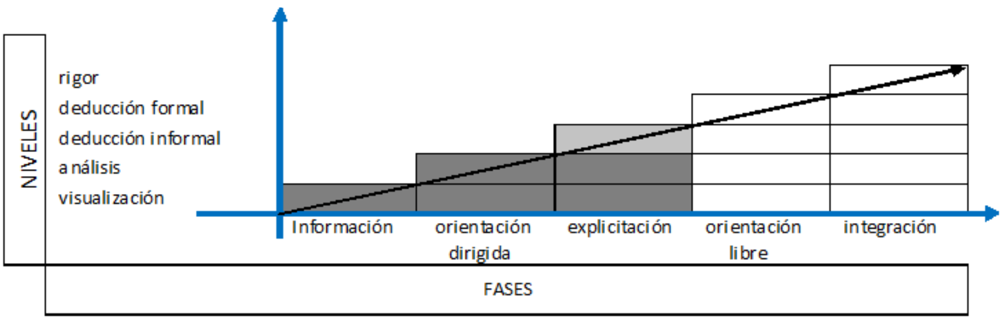
CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 3		INDICADOR
1) Prueba qué figuras (del sobre) te permiten realizar un mosaico y cuáles no. En caso afirmativo muestra el recubrimiento. OBSERVACIÓN Para cumplir con estas condiciones, las baldosas deben ser de tal forma que encajen perfectamente unas con otras. El criterio que se tendrá en cuenta es que los lados de los polígonos deben coincidir completamente.	 VALE	VI-RE (1) VI-AN(2,5,8) VI-OR(4,6,8) DI-AN(3) DI-OR(3) VE-RE(1) VE-AN LO-RE(1,2) LO-AN(1)

Materiales: Moldes de teselas y hoja con cuadrícula



HABILIDADES	RECONOCIMIENTO I	ANÁLISIS II	ORDENAMIENTO III	DEDUCCIÓN IV	RIGOR V
PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
	NIVEL DE COMPRENSIÓN				

Gradualmente se va aumentando el nivel de comprensión en las habilidades puestas en juego y avanzando lentamente en las fases.

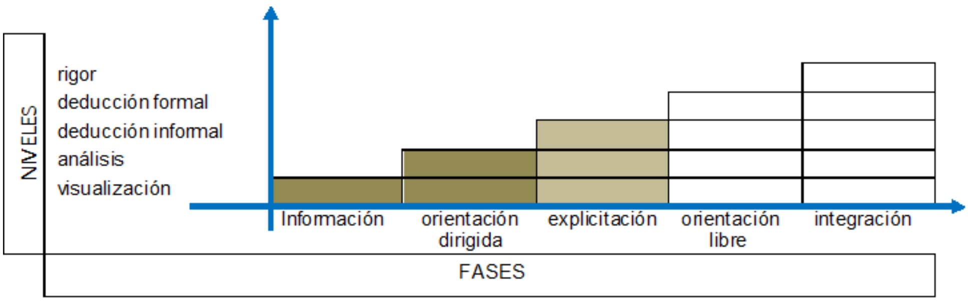


TRABAJO PRÁCTICO N°2

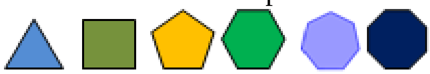
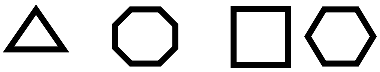
CONSIGNA DE LA SECUENCIA -CLASE N°4	INDICADOR
Objetivo: Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico. Observen las figuras del sobre n°1. ¿Qué características presentan las figuras del sobre? Las figuras del sobre se denominan **polígonos regulares** Con sus palabras ¿Pueden caracterizarlos?	VI-RE(1,2) VI-AN(1) VI-OR(1,2,3)
1) Para esto tomen las figuras del sobre n° **1** y exploren cuáles de ellas te permiten d rompecabezas o mosaico. Elijan una por vez y úsenla de molde para dibujar cada diseño en una hoja lisa.	DI-RE
2) ¿Cuáles les permitieron realizar el mosaico? ¿Cuál es la característica o propiedad que estarían cumpliendo dichos polígonos?	VE-RE(1,2) VE-AN VE-OR(2)
3) Realicen el punto 2) con las figuras del sobre n° **2.**	
4) Analicen con sus compañeros ¿Cuáles son las propiedades de estos polígonos que permiten realizar un mosaico?	LO-RE(1,2) LO-AN(1,2) LO-OR(2)
5) ¿Por qué determinadas figuras permiten diseñar un mosaico? Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.	

Materiales: Teselas con forma de polígonos regulares.

HABILIDADES						
	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				



<table>
<tr><th>CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 5</th><th>INDICADOR</th></tr>
<tr><td>
Objetivo: Exploraremos la amplitud de los ángulos de los polígonos.

Primero examinen:
1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si desde un vértice o desde un punto interior del polígono.

2) Observen el siguiente gráfico y señalen los ángulos interiores de los siguientes polígonos interiores.


¿Recuerdan la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo?
Propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo.

3) a) Con esta información: ¿podrían averiguar cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un pentágono regular?
En caso afirmativo explica el procedimiento para calcularlo.
En caso contrario mencionen qué información extra consideran necesaria.

¿Cómo se puede obtener la suma de los ángulos interiores de un hexágono regular?
</td><td>
VI-RE$_{(1,2)}$
VI-AN($_{1,2,5)}$
VI-OR$_{(5,8)}$
VI-DE
VI-RI

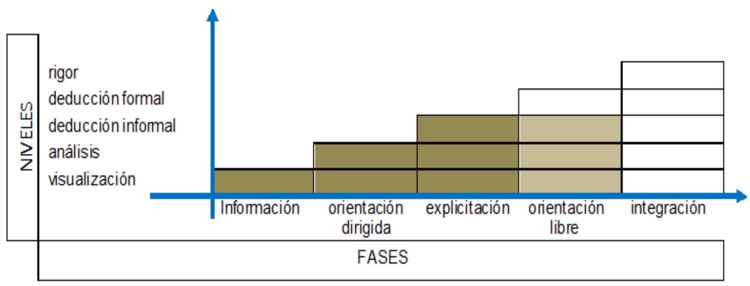
DI-AN$_{(2)}$
DI-DE$_{(1)}$
DI-RI

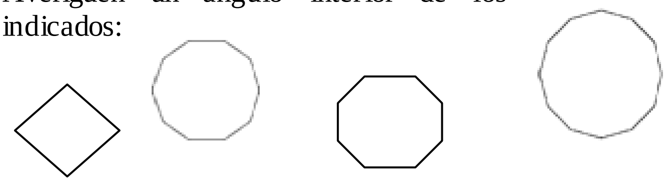
VE-RE$_{(1,2)}$
VE-AN
VE-OR$_{(1,2)}$
VE-DE$_{(2)}$
LO-AN$_{(2)}$

MO-AN$_{(1)}$
</td></tr>
</table>

HABILIDADES					
PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
	RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
	I	II	III	IV	V
	NIVEL DE COMPRENSIÓN				

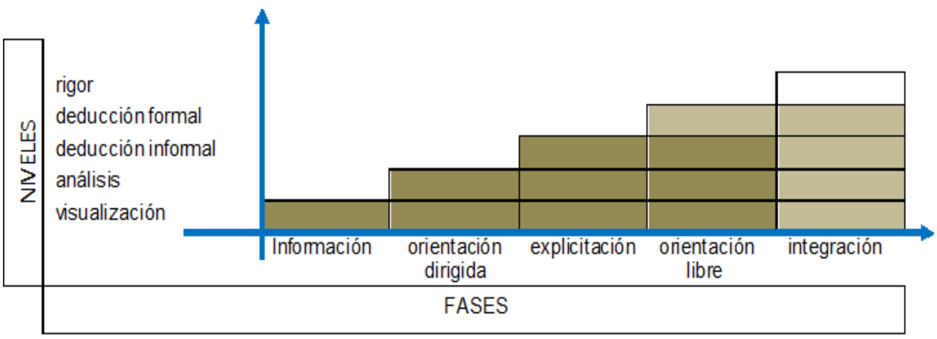
Las actividades propuestas tienen la intención de avanzar en las fases.



CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 6	INDICADOR
Resumiendo:  a) Mencionen toda la información que obtuvieron a lo largo de la clase n°5 sobre un pentágono regular, ahora ¿podrían determinar la amplitud de **cada uno los ángulos interiores**? En caso afirmativo, expliquen el procedimiento para calcularlo. En caso contrario, mencionar qué información extra consideran necesaria. b) Podrían explicar cómo determinar la **suma de los ángulos interiores** de cualquier polígono regular: c) Indiquen cómo calcular la amplitud de **un ángulo** de un polígono regular. d) Averigüen un ángulo interior de los polígonos indicados: 	VE-DE (2) VE-RI MO-RE MO-AN(2) MO-OR MO-RI

La actividades han puesto en juego todas las habilidades, sólo falta las de nivel más abstracto.

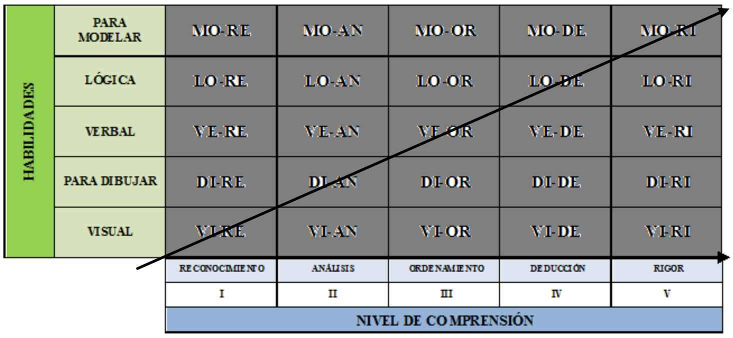
HABILIDADES						
	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

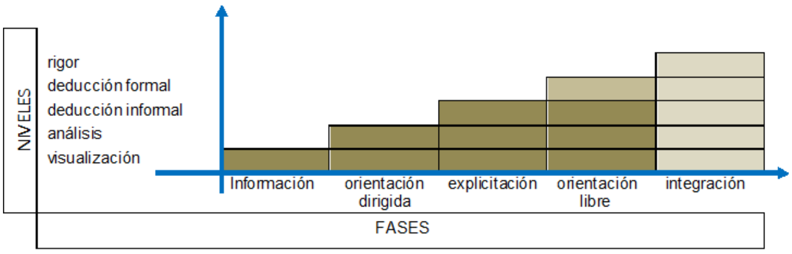


<table>
<tr><th>CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 7</th><th>INDICADOR</th></tr>
<tr><td>
Veamos una forma de justificar que sólo puedes teselar un superficie sólo con las figuras que hayas elegido ¿Existirán otros polígonos regulares que permitan teselar el plano?
a. En cada punto vértice de un teselado que involucre polígonos regulares deben concurrir por lo menos una cierta cantidad de vértices ¿Cuántos ángulos, al menos, concurren en un punto vértice?…………….……
b. Completen la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>Polígono regular</td><td>Medida en grados de cada ángulo interior</td><td>Suma de la medida de 3 ángulos interiores en un punto vértice</td></tr>
<tr><td>Triángulo e.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cuadrado</td><td></td><td></td></tr>
</table>
c. ¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que haya superposiciones?
En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie.
Encuentren una justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.
Un teselado regular del plano cubre el mismo con la repetición de un polígono regular en particular. Por ende ocurre que todos los puntos vértices son congruentes.
Discutan alguna prueba para que validen esta hipótesis
Sólo el………………, ……………………y…………..……………..…, todos regulares, son los que teselan el plano.
</td><td>
LO-RE(1)
LO-AN(1,2)
LO-OR(2)
LO-DE(1,2)
LO-RI

MO-AN(2)
MO-DE(1)
MO-OR
MO-RI(2)
</td></tr>
</table>

En este punto se espera poner en evidencia la mayor parte de las habilidades ya de lógica y de modelar.





TRABAJO PRÁCTICO N° 3

<table>
<tr><th>CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 8</th><th>INDICADOR</th></tr>
<tr><td>
Mosaicos semi-regulares.
Los mosaicos semi-regulares son aquellos que se forman utilizando polígonos regulares de igual medida de lado, pero de más de un tipo respecto al número de lados.
La condición que se impone es que todos los vértices sean equivalentes teniendo en cuenta los polígonos que confluyen en cada uno de ellos.

Consigna: Teselar una superficie con polígonos de distintas cantidad de lados de igual longitud.
a) Utilicen los polígonos del sobre 3 como plantilla para diseñar un mosaico semi-regular.
b) Existen 8 soluciones posibles, ¿Cuántas lograrás?
c) Dibujen hojas lisas las combinaciones que hayas encontrado.
d) Escriban los puntos vértices
<table>
<tr><th></th><th>Puntos vértice</th><th>Polígonos en cada p.v.</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3,3,3,3,6</td><td>Cuatro triángulos y un hexágono</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
VI-OR$_{(1,6,8)}$

DI-AN$_{(1,3)}$
DI-OR$_{(2,3)}$

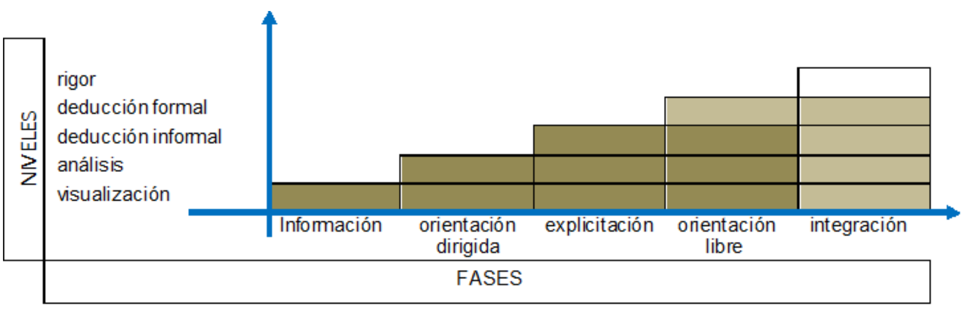
VE-RE$_{(1)}$

LO-RE$_{(1)}$
LO-AN$_{(2)}$
LO-DE$_{(2)}$

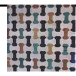
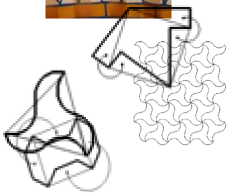
MO-AN$_{(1)}$
</td></tr>
</table>

Esta actividad aspira ser una aplicación de una colección variada de habilidades.

HABILIDADES	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

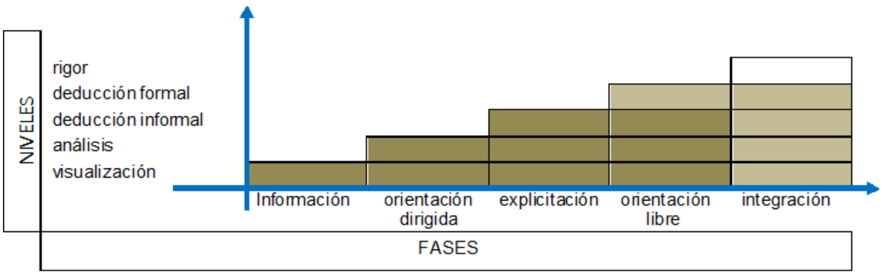


TRABAJO PRÁCTICO N°4

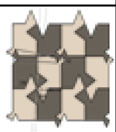
CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 9	INDICADOR
Mosaicos Nazaríes  Los artistas islámicos tenían grandes conocimientos de geometría, ellos hicieron posibles los denominados polígonos nazaríes. Estos son, entre otros: el hueso, el pétalo, el huso y la pajarita. Estos mosaicos se denominan monoédricos pues son generados por una única tesela o baldosa.  1) Investiguen sobre los mosaicos de la Alhambra. Ahora siguen unos pocos mosaicos para que mientras coloreen observen propiedades para su construcción  2) Construyan este mosaico y coloréanlo de manera que las teselas que comparten bordes tengan colores diferentes. Realicen el cubrimiento (puedes hacer un molde en cartulina/ cartón o traspasar con una hoja traslúcida) y píntenlo con diferentes tonos.	VI-AN$_{(8)}$ VI-OR$_{(6,7)}$ DI-RE DI-AN$_{(3)}$ DI-OR$_{(3)}$ LO-RE$_{(1)}$

Este trabajo tiene la intención de proponer la copia de trabajos en base a lo aprendido.

HABILIDADES						
	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

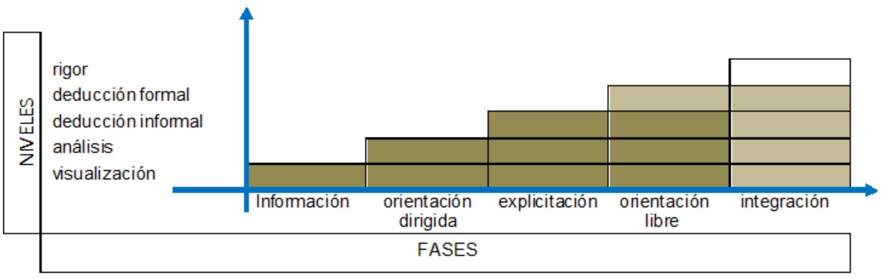


TRABAJO PRÁCTICO N° 5

CONSIGNA DE LA SECUENCIA- CLASE N° 10	INDICADOR
Gracias al triángulo, el cuadrado y el hexágono, se han creado mosaicos maravillosos.  **IMITANDO A ESCHER** **Mosaicos Originales** Objetivo: Teselar una superficie con baldosas originales. 1) A partir de un polígono regular construyan una baldosa novedosa. Para esto: a) Elijan un polígono regular: triángulo, cuadrado o hexágono. b) Diseñen un recorte, realízalo y peguen lo recortado en otro sector para armar un molde (en cartón o por calcado), o utilicen algún programa en PC si les resulta práctico c) Verifiquen (mediante traslaciones, giros, etc.) que sirve para teselar la superficie. Inspírense observando la obra de Escher. 2) Armen el mosaico a) Realicen el teselado recortando las teselas en hojas de colores. b) Peguen las baldosas armando el mosaico. 3) Ahora pueden dibujar esta baldosa en el reverso de la imagen que trajeron para armar un rompecabezas original. Recuerden mostrar el paso a paso.	VI-RE VI-AN VI-OR VI-DE DI-RE DI-AN DI-OR DI-DE LO-RE LO-NA LO-OR LO-DE

La intención de esta secuencia es la de estimular la integración y aplicación de lo experimentado provocando la creación de diseños

HABILIDADES						
	PARA MODELAR	MO-RE	MO-AN	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				



2.4. Implementación de la secuencia

Implementamos la secuencia en el grupo completo de primer año del nivel medio, con un total de 22 alumnos. Esta secuencia no fue su primer acercamiento geométrico, ya que habían utilizado figuras planas para otro trabajo con el tangram que sumó un análisis aritmético y fue aplicado fundamentalmente al uso de proporciones con números racionales.

La secuencia de actividades se realizó en el mes de agosto de 2015 justo al empezar las clases luego del receso invernal. Se implementó durante 5 semanas considerando que la guía de trabajos involucraba diez clases con algunas de 2 horas de 40 minutos. Se organizaron grupos de 4 estudiantes para prevenir la situación de ausencias y, llegado el caso que faltaran, intentar que los grupos siguieran con al menos dos integrantes. El uso de la sala de informática una vez por semana se vio imposibilitada por diversos talleres que en la rama técnica en el colegio se implementan (Orientación Técnicos en computación) y la ausencia de los alumnos en los dos últimos días de la semana complicó un poco la continuidad del trabajo.

Se confeccionó el cuaderno de notas cuya transcripción o sea copia del original con fotos del curso puede verse en el ANEXO N° 2. En él hemos volcado información verbal no escrita que recabamos para describir situaciones que no quedaron plasmadas en papel. En particular se verá su utilidad en los análisis de los datos recabados para evaluar la habilidad verbal y conocer cuánta información requieren para escribir y completar los trabajos.

El estudio sobre las habilidades y comprensión alcanzada lo realizamos en los tres estudiantes que: realizaron la secuencia completa, tuvieron participación activa, sus escritos fueran claros y sus producciones mostraron diferentes tipos de desarrollo.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

3.1.Selección de la muestra

Se han seleccionado tres alumnos que han cumplido con todos los trabajos en forma individual y grupal sin inasistencias en este período, han trabajado con prolijidad y orden, independientemente de si sus resoluciones fueron o no correctas. Esto nos permite disponer de datos para estudiar sus niveles de comprensión y desarrollo de habilidades, tal como hemos propuesto.

Se ha recolectado todo el material en donde estos alumnos han participado, ya sea individualmente o conformando un equipo. Presentamos el análisis de los datos de los tres estudiantes.

3.2.Análisis de los datos

Se analizan, clase por clase, los resultados de los trabajos de los alumnos y se compara con lo previsto en el análisis de la secuencia.

Esta secuencia le plantea al alumno trabajar fundamentalmente la habilidad visual para luego dejar paso a las otras con el objetivo de estimular la habilidad para modelar que es la esperada en el trabajo matemático.

En la primera parte mostramos un cuadro comparativo entre los tres alumnos, con observaciones parciales y referencias al cuaderno de notas para así al final presentar una mirada global de los resultados y se atender a las preguntas y objetivos de la tesis.

ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N°1				
CLASE N° 1				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-RE$_{(1)}$ VI-AN$_{(2,3,7,8)}$				

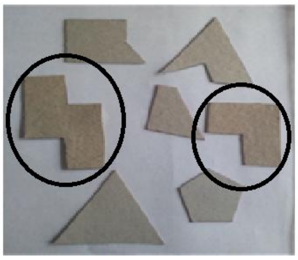
ALUMNO A		ALUMNO B		ALUMNO C	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad Visual					
✓		✓		✓	

Se inició con el juego de mosaicos romanos en las PC de la sala de informática donde se trabajó en parejas o en tríos. La mayoría participó logrando diferentes niveles de resolución. La conexión a internet no resultó la adecuada.

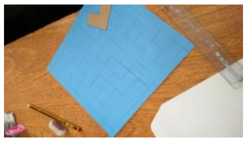
ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N° 1				
CLASE N°1/2				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-RE$_{(1,2)}$ VI-AN$_{(8)}$ VI-OR$_{(2,4,6)}$	DI-RE DI-AN$_{(2)}$ DI-OR$_{(2,3)}$			

ALUMNO A		ALUMNO B		ALUMNO C	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad Visual					
✓		✓		✓	
Habilidad para Dibujar					
✓		✓		✓	

Se hizo una introducción de qué es un rompecabezas y su nombre Mosaico o teselado y que las piezas se suelen llamar teselas. Se mostraron imágenes de diferentes tipos de mosaicos. Ver ANEXO N° 4 (Imágenes 1, 2, 3, 4 y 5).



El material brindado fueron las fotocopias de imágenes de trabajos del artista holandés Escher y teselas de cartón para que eligieran un modelo para recortar la figura. Al finalizar guardaban las piezas en un sobre y otro grupo debería reconstruir pegando en una hoja el rompecabezas.



En la selección de teselas para la construcción de rompecabezas todas las parejas eligieron dos tipos de fichas. Al consultarles por qué no eligieron otras, dijeron que seleccionaron las parecidas a cuadrados. Supongo que por los ángulos rectos será más fácil para recortar.

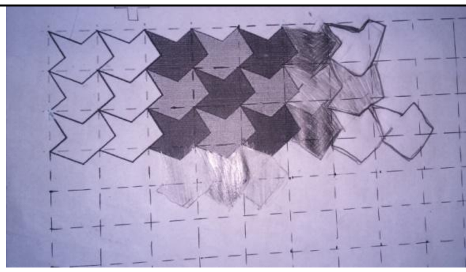
No utilizaron, <u>ni probaron</u> con otras posibles.

Al consultar -*¿Por qué eligieron esa tesela?* los alumnos respondieron -*Porque es como cuadrada.* (Más datos en el diario de Notas)

.

ANALISIS DEL TRABAJO PRACTICO N°1				
CLASE N° 2				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-OR $_{(4,6,7)}$	DI-AN$_{(3)}$ DI-OR$_{(2)}$			

ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad Visual					
✓		✓		✓	
Habilidad para Dibujar					
✓		✓		✓	

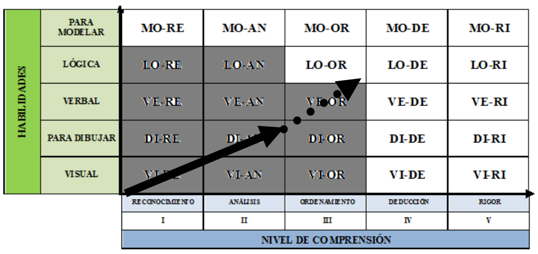


No había suficientes reglas para dibujar así que empezaron a utilizar tarjetas o cualquier otro material que sirviera para hacer trazos rectos y se auxiliaron con las líneas de puntos.

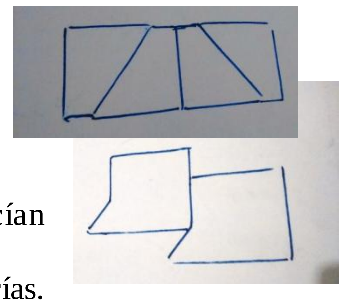
Preguntaron cuántas teselas dibujar y en qué sentido. Afirmaron que resultó una actividad muy difícil. Necesitaron continua aprobación ya que algunos no dibujan muy bien y notaban que sus gráficos no quedaban "lindos".

ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N°1				
CLASE N° 3				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-RE$_{(1)}$ VI-AN$_{(2,5,8)}$ VI-OR$_{(4,6,8)}$	DI-NA$_{(3)}$ DI-OR$_{(3)}$	VE-RE $_{(1)}$ VE-AN	LO-RE$_{(1,2)}$ LO-AN$_{(1)}$	

ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad Visual					
✓		✓		✓	
Habilidad para Dibujar					
✓		✓		✓	
Habilidad Verbal					
	✓		✓		✓
Habilidad Lógica					
✓	AN$_{(1)}$	✓		✓	AN$_{(1)}$

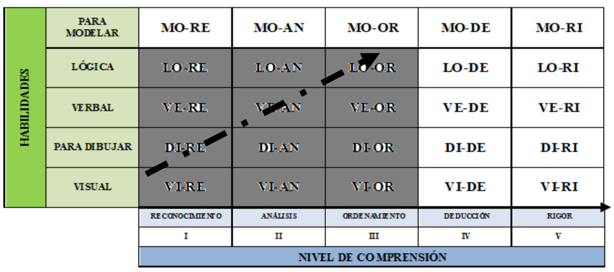


Nuevamente debían probar cuáles eran las teselas con las que podrían armar un revestimiento. Probaron con dos o tres repeticiones, descartando o aprobando la tesela, rápidamente. Rotaron, trasladaron, sin nombrar los movimientos. Ellos decían solo *mover* sin distinguir tipos de movimientos, incluso simetrías. No realizaron un trabajo exhaustivo. (Ver ANEXO N° 3)



ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N° 2				
CLASE N° 4				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-RE$_{(1,2)}$ VI-AN$_{(1)}$ VI-OR$_{(1,2,3)}$	DI-RE	VE-RE$_{(1,2)}$ VE-AN VE-OR$_{(2)}$	LO-RE$_{(1,2)}$ LO-AN$_{(1,2)}$ LO-OR$_{(2)}$	

ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad visual					
✓	RE(1)	✓	AN (1) OR(1,2,3)	✓	RE(1) OR(2,3)
Habilidad para dibujar					
✓		✓		✓	
Habilidad verbal					
✓		✓	AN	✓	RE(1) AN
Habilidad lógica					
✓		✓	AN(1,2)	✓	



En esta actividad se vieron reflejadas todas las habilidades pero no en todas sus fases.

El alumno B evidenció más dificultades para la fase del análisis y el ordenamiento. La falta de vocabulario y la débil redacción hacen que escriban sólo oraciones con sujetos (sin predicado) o con oraciones incompletas.

ALUMNO A

Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

1) Observen las figuras del sobre ~~regla~~ n°1 y determinen si tienen alguna característica en común.

-Lados, ANGULOS, POLÍGONOS

Las figuras del sobre se denominan **polígonos** regulares ¿Puedes caracterizarlos, con sus palabras?

Una figura que tiene lados y ángulos iguales

...en con sus compañeros si depende de la lo... amplitud de los ángulos.

La amplitud de los ángulos

ALUMNO B

Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

1) Observen las figuras del sobre ~~regla~~ n°1 y determinen si tienen alguna característica en común.

característica - Lados, vértices, ángulos,

Las figuras del sobre se denominan **polígonos** regulares ¿Puedes caracterizarlos, con sus palabras?

triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, nonágono, decágono.

6) ¿Por qué sólo determinadas figuras permiten diseñar un mosaico? Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.

Porque depende de sus ángulos

ALUMNO C

Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

1) Observen las figuras del sobre ~~regla~~ n°1 y determinen si tienen alguna característica en común.

todos tienen lados y vertices

Las figuras del sobre se denominan **polígonos** regulares ¿Puedes caracterizarlos, con sus palabras?

Poli = mucho
gnos = ángulos

5) Analicen con sus compañeros si depende de la longitud de los lados de las figuras o de la amplitud de los ángulos.

Los angules

6) ¿Por qué sólo determinadas figuras permiten diseñar un mosaico? Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.

Depende de los lados y los vertices (angulos), no dependen del tamaño.

No resultó fácil la lectura y comprensión de las consignas. Entre la primera y la segunda no hallaban diferencias.

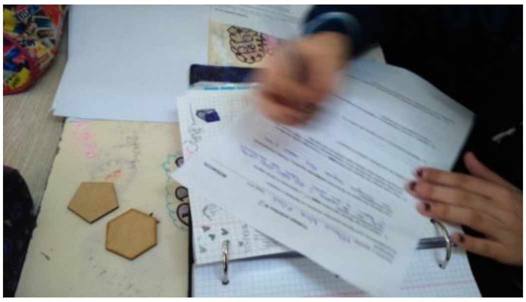
Tuve que orientar la observación de las piezas. Necesitaron muchísimo vocabulario, se habló de lados, ángulos, de figuras regulares, etc. Pidieron el nombre exacto de cada figura.

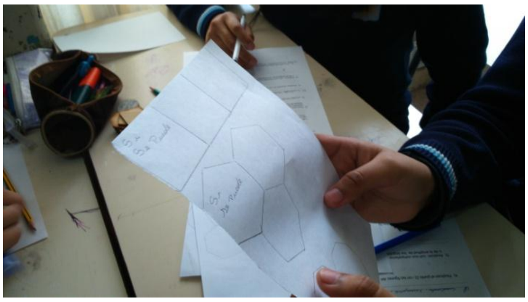
Alumnos: -*¿Cómo se llaman esta figura de cinco lados? ¿Y la de ocho era octágono?*

Docente: -*No se hagan problema para recordar todos los nombres observen las propiedades de las figuras.*

Por suerte en los grupos siempre aparecía algún alumno que recordaba conceptos de la escuela primaria y propiedades de las figuras que estimulaba a los demás.

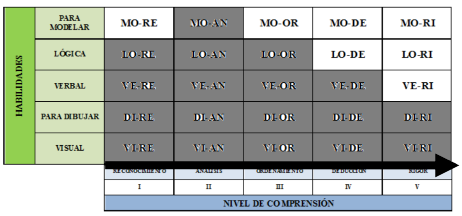
Se dieron cuenta que sólo tres son las posibles. Probaron muy rápidamente con las figuras más grandes, y enseguida entendieron que se debía los ángulos y no por la longitud de los lados.





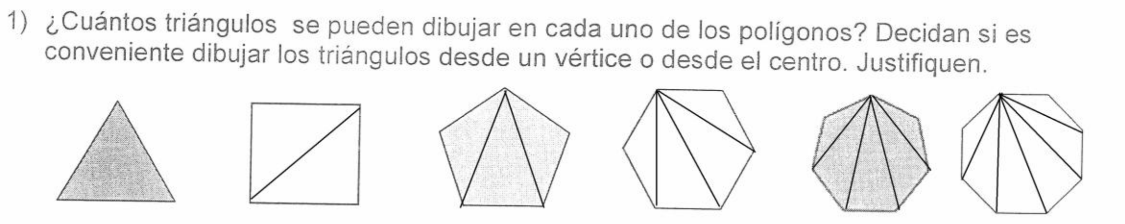
ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N° 2				
CLASE N° 5				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-RE(1,2) VI-AN(1,2,5) VI-OR(5,8) VI-DE VI-RI	DI-AN(2) DI-DE(1) DI-RI	VE-RE(1,2) VE-AN VE-OR(1,2) VE-DE(2)	LO-AN(2)	MO-AN

ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad visual					
✓		✓	AN(5) OR8)	✓	
Habilidad para dibujar					
✓		✓		✓	
Habilidad verbal					
✓		✓		✓	
Habilidad lógica					
✓		✓		✓	
Habilidad para modelar					
✓		✓		✓	

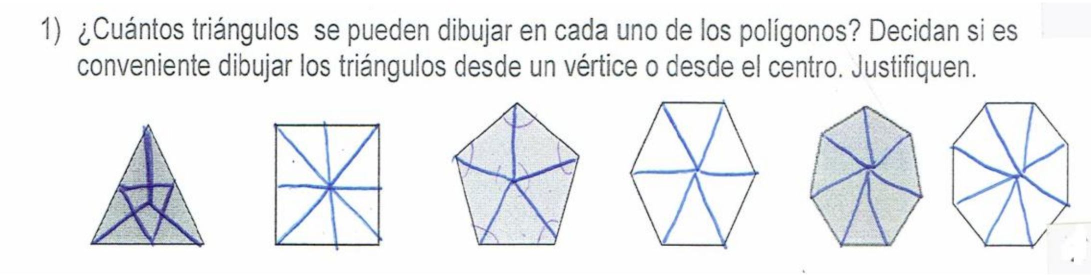


El alumno B todavía con algunas dificultades en la visualización ya que sigue evidenciando el no desarrollo en del análisis y organización como habilidad visual pero sí lo ha demostrado en las otras habilidades. Pueden observarse diferentes desarrollos.

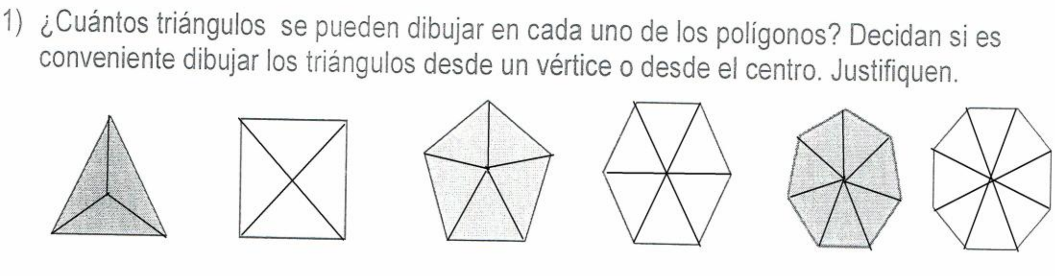
ALUMNO A


1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si es conveniente dibujar los triángulos desde un vértice o desde el centro. Justifiquen.

ALUMNO B


1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si es conveniente dibujar los triángulos desde un vértice o desde el centro. Justifiquen.

ALUMNO C


1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si es conveniente dibujar los triángulos desde un vértice o desde el centro. Justifiquen.

Todos logran la resolución de la actividad y corrigen errores como en el caso del alumno B. Logran determinar que existe una regularidad, que no pueden expresar algebraicamente, pero la comunican coloquialmente (ver ANEXO N° 3).

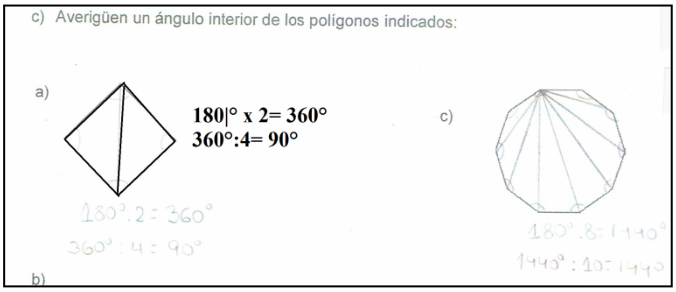
A pesar de los errores logran comprender que existe una camino para averiguar los ángulos interiores de un polígono regular esto se evidencia en las siguientes actividades.

ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N°2				
CLASE N° 6				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
		VE-DE (2) VE-RI		MO-RE MO-AN(2) MO-OR MO-RI

ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad verbal					
✓	RI	✓	RI		✓
Habilidad para Modelar					
✓	AN(2) RI		✓		✓

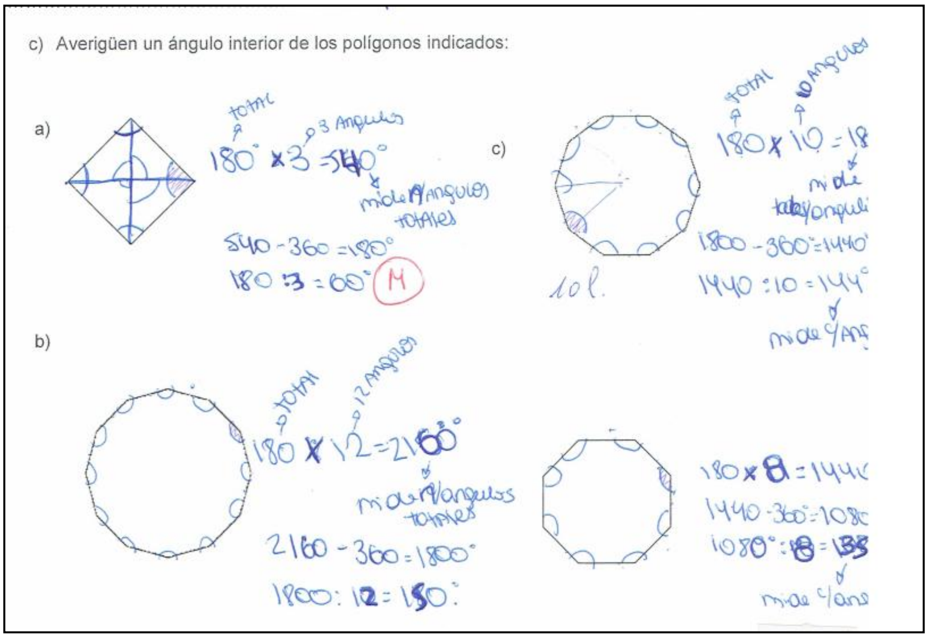
Todos logran la resolución siguiendo las conclusiones del trabajo anterior, aunque algunos con más dificultades que otros ya por ejemplo el alumno B en un momento confunde procedimientos.

ALUMNO A



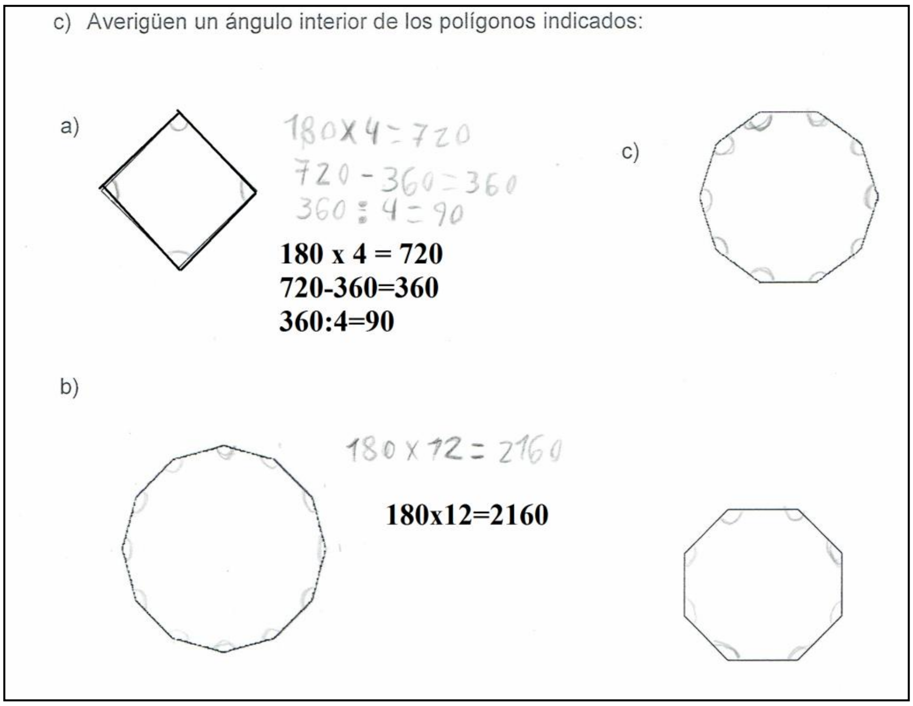
ALUMNO B

Cometió el primer error al querer imitar el trabajo de otro equipo, pero al respetar sus propias conclusiones realizó los demás ejercicios correctamente.



El alumno C trabajó con mayor dificultad y no terminó de realizar esta actividad a tiempo.

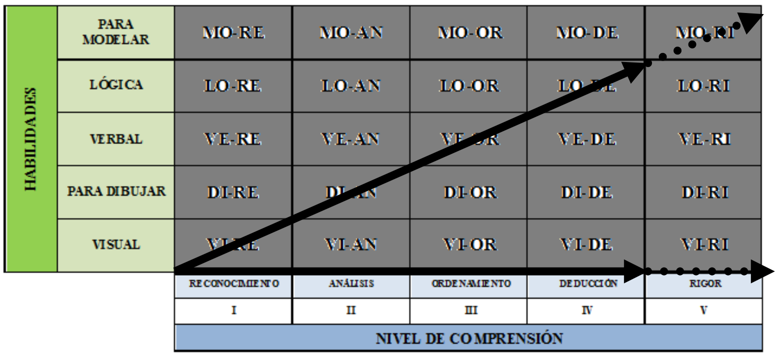
ALUMNO C



Ningún alumno logró escribir una “fórmula”, aunque todos pudieron resolver sus actividades correctamente (salvo errores de cálculo).

ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N°2				
CLASE N° 7				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
			LO-RE$_{(1)}$ LO-AN$_{(1,2)}$ LO-OR$_{(2)}$ LO-DE$_{(1,2)}$ LO-RI	MO-AN$_{(2)}$ MO-DE$_{(1)}$ MO-OR MO-RI$_{(2)}$

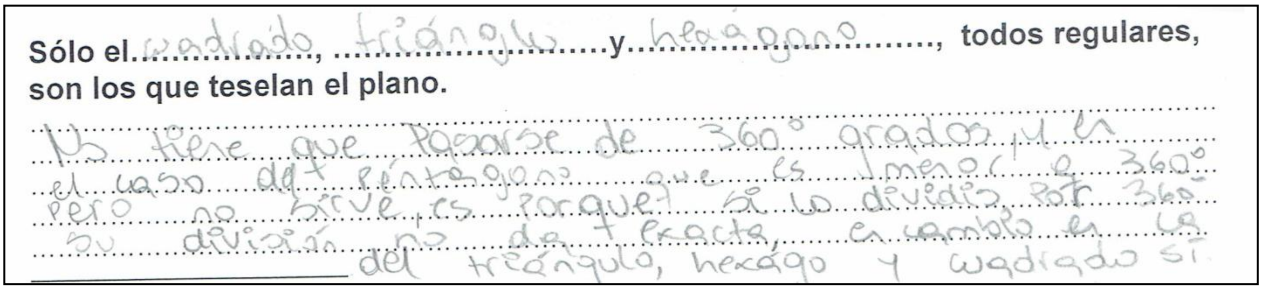
ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad Lógica					
✓	RI	✓	RI	✓	RI
Habilidad para Modelar					
✓	OR RI$_{(2)}$	✓	AN$_{(2)}$ RI$_{(2)}$	✓	AN$_{(2)}$ RI$_{(2)}$



Observación parcial: se observa el logro del desarrollo de todas las habilidades en las fases esperadas, pero no en todos los alumnos al mismo tiempo.

Se puede apreciar en el alumno B mayor habilidad en las fases I, II y III, pero en pocas ocasiones ha logrado el rigor en sus producciones.

En los tres alumnos se denota la falta de habilidades en el nivel V, ya que de por sí la actividad era sólo una presentación y un empuje para las mismas.


Sólo el cuadrado, triángulo y hexágono, todos regulares, son los que teselan el plano.
No tiene que pasarse de 360° grados y en el caso del pentágono que es menor a 360° pero no sirve, es porque si lo dividís por 360° su división no da exacta, en cambio en la del triángulo, hexágo y cuadrado sí.

Dice el alumno:

"No tiene que pasarse de 360° grados y en el caso del pentágono que es menor que 360°pero no sirve, es porque si se lo divide por 360° la división no da exacta, en cambio en el triángulo, hexágono y cuadrado sí."

No logra escribir en otro lenguaje más que el coloquial. La precisión y economía del lenguaje matemático aun les resulta complejo.

Hasta aquí la secuencia invita a la superación de los niveles de comprensión y desarrollo de habilidades. Los trabajos siguientes son una recreación o práctica guiada de lo aprendido para profundizar e integrar habilidades.

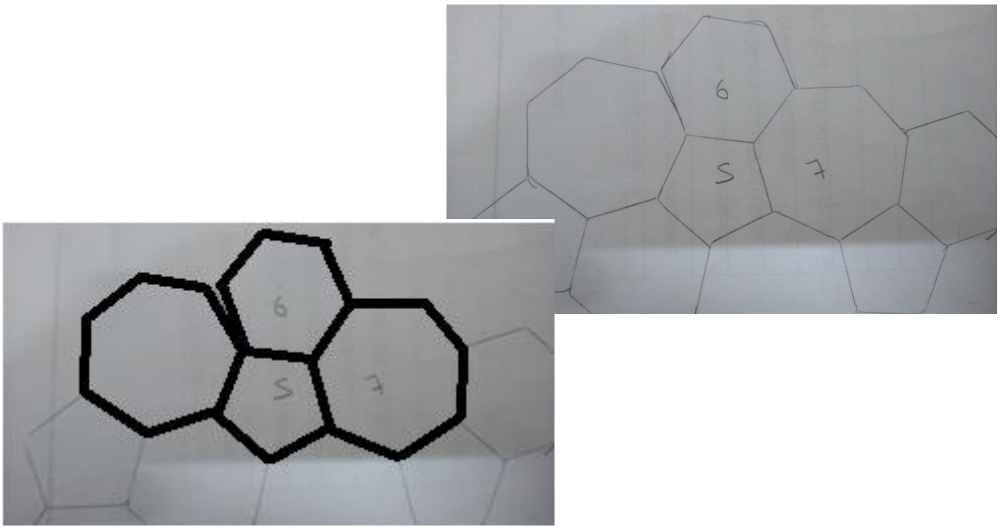
El trabajo práctico N° 3 se muestra la posibilidad de mosaicos semi-regulares, o sea combinaciones de polígonos regulares de iguales longitudes de sus lados.

ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N° 3				
CLASE N° 8				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-OR$_{(1,6,8)}$	DI-AN$_{(1,3)}$ DI-OR$_{(2,3)}$	VE-RE$_{(1)}$	LO-RE$_{(1)}$ LO-AN$_{(2)}$ LO-DE$_{(2)}$	MO-AN$_{(1)}$

ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad visual					
✓		✓		✓	
Habilidad para dibujar					
✓		✓		✓	
Habilidad verbal					
✓		✓		✓	
Habilidad lógica					
✓		✓		✓	
Habilidad para modelar					
	✓		✓		✓

HABILIDADES						
	PARA MODELAR	MO-RE	~~MO-AN~~	MO-OR	MO-DE	MO-RI
	LÓGICA	LO-RE	LO-AN	LO-OR	LO-DE	LO-RI
	VERBAL	VE-RE	VE-AN	VE-OR	VE-DE	VE-RI
	PARA DIBUJAR	DI-RE	DI-AN	DI-OR	DI-DE	DI-RI
	VISUAL	VI-RE	VI-AN	VI-OR	VI-DE	VI-RI
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORDENAMIENTO	DEDUCCIÓN	RIGOR
		I	II	III	IV	V
		NIVEL DE COMPRENSIÓN				

Esta actividad ha evidenciado la mayoría de las habilidades. La habilidad de modelar no se ha puesto de manifiesto en ninguno de los tres alumnos. Sólo comprueban afirmaciones (ver Marco Teórico.3.3, pág. 25). Esta actividad resultó empírica y no provocó la necesidad del paso riguroso. Utilizaron procedimientos para el cálculo de los ángulos pero no se arribó a un resultado general.



No se lograron los ocho modelos en forma acertada.

d) Escriban los puntos vértices

	Puntos vértice	Polígonos en cada p.v.
1	3,3,3,3,6	Cuatro triángulos y un hexágono
2	5,6,7	pentagono, hexagono, heptagono ×
3	4,6,12	cuadrado, hexágono, dodecágono.
4	3,3,3,4,4	2 cuadrados, 3 triángulos.
5	8,4,3,4	triangulo, 2 cuadrado, octógono ×
6		
7		
8		

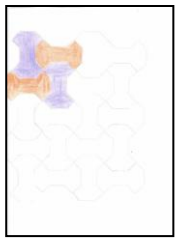
ALUMNO B

En los trabajos prácticos siguientes (4 y 5) se aplica e integra lo aprendido hasta el momento. Aunque es al margen de la cuestión matemática resaltamos valorar las obras de la humanidad como con los mosaicos nazaríes y la apreciación del arte con la recreación de mosaicos inspirándonos en la obra de Maurits Escher.

ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N° 4				
CLASE N° 9				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-AN$_{(8)}$ VI-OR$_{(6,7)}$	DI-RE DI-AN$_{(3)}$ DI-OR$_{(3)}$		LO-RE$_{(1)}$	

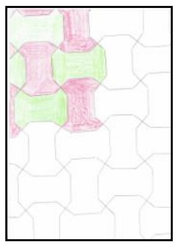
ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ	LOGRÓ	NO LOGRÓ
Habilidad visual					
✓		✓		✓	
Habilidad para dibujar					
✓		✓		✓	
Habilidad lógica					
✓		✓		✓	

De las tres figuras prefirieron el hueso.



El alumno A copió el diseño del hueso en una hoja transparente y luego volcó un grupo de imágenes para comprobar que encastraban perfectamente y completó toda la hoja con las piezas.

El alumno B, realizó el dibujo sobre la hoja directamente y fue copiando con regla y pintando, en un tamaño mayor que los demás. Y el alumno C tras varios intentos de que su gráfico fuera viable para hacer el mosaico, logra dibujarlo.



Todos eligieron la misma pieza que resultara fácil de copiar y de repetir ya que las otras les resultaron complejas por los pocos materiales que hay en la clase y la falta de seguridad.

ANÁLISIS DEL TRABAJO PRÁCTICO N°5				
CLASE N° 10				
INDICADORES				
H. Visual	H. para Dibujar	H. Verbal	H. Lógica	H. para Modelar
VI-RE VI-AN VI-OR VI-DE	DI-RE DI-AN DI-OR DI-DE		LO-RE LO-NA LO-OR LO-DE	

ALUMNO A		**ALUMNO B**		**ALUMNO C**	
LOGRO	NO LOGRO	LOGRO	NO LOGRO	LOGRO	NO LOGRO
Habilidad visual					
✓		✓		✓	
Habilidad para dibujar					
✓		✓		✓	
Habilidad lógica					
✓		✓		✓	

Aquí el procedimiento fue inverso a todo lo que se planteó en la secuencia. Primero tuvieron que "pensar" qué tesela querían diseñar a partir de los tres polígonos regulares.

Debían construir verificando que sus ángulos pudieran completar en forma exacta un punto vértice, y luego recortar y armar el mosaico.

Esta actividad fue un aplicación de todo lo aprendido y surgieron muchas más cuestiones, de las cuales algunas se pudieron resolver otras quedaron para más adelante.

Por ejemplo el alumno A, diseñó una tesela a partir del hexágono regular y de ahí resultaron varias cuestiones sobre cómo construir polígonos regulares y en especial el hexágono.

Resultaron diversos diseños, la mayoría optó por el cuadrado, ya que era una versión más segura. Además se controló el trabajo en el equipo para que terminaran en el tiempo pretendido (80 min). Ver las producciones de los tres alumnos en el ANEXO N° 3)

3.3. Análisis de los resultados por alumno

Podemos observar una tabla por alumno con el cálculo de porcentaje de logros de cada habilidad según la cantidad e nuestros indicadores.

ALUMNO A										
HABILIDADES	PARA MODELAR						5	5	50
	LÓGICA						17	2	89
	VERBAL						9	3	75
	PARA DIBUJAR						19	0	100
	VISUAL						23	1	96
		RE	AN	OR	DE	RI	LOGRÓ	NO LOGRÓ	% DE LOGROS
		I	II	III	IV	V			
		NIVEL DE COMPRENSIÓN							

El alumno A ha logrado más del 50 % de todas las habilidades propuestas.

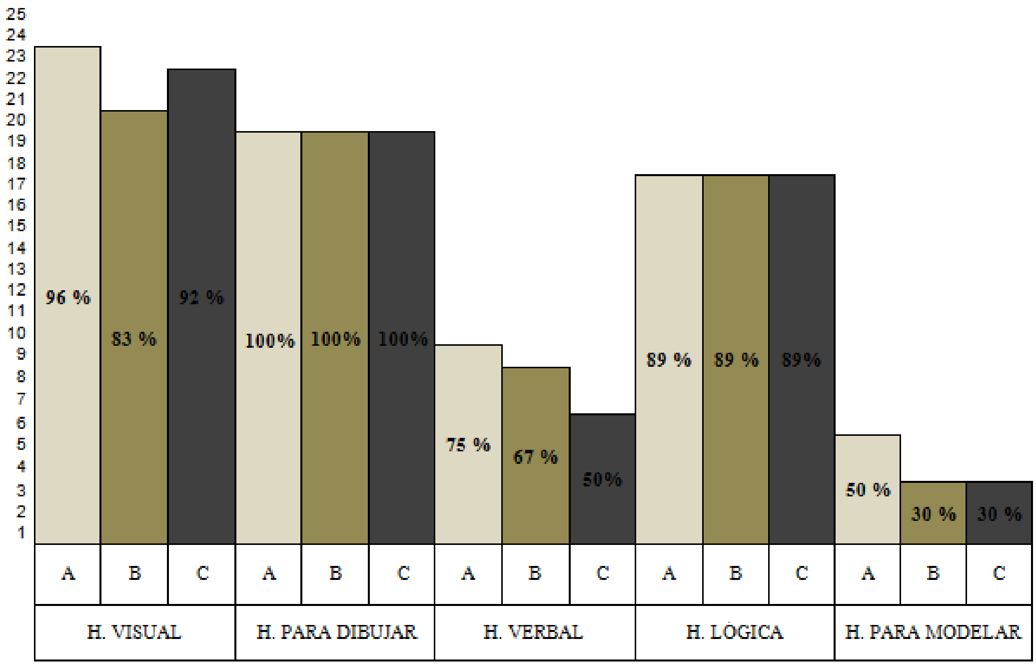
ALUMNO B										
HABILIDADES	PARA MODELAR						3	7	30
	LÓGICA						17	2	89
	VERBAL						8	4	67
	PARA DIBUJAR						19	0	100
	VISUAL						20	4	83
		RE	AN	OR	DE	RI	LOGRÓ	NO LOGRÓ	% DE LOGROS
		I	II	III	IV	V			
		NIVEL DE COMPRENSIÓN							

El alumno B ha tenido dificultades en las habilidades de visualización en un inicio, pero se observa mayores dificultades en las habilidades verbales y de modelar.

ALUMNO C									
HABILIDADES	PARA MODELAR						3	7	30
	LÓGICA						17	2	89
	VERBAL						6	6	50
	PARA DIBUJAR						19	0	100
	VISUAL						22	2	92
		RE	AN	OR	DE	RI	LOGRÓ	NO LOGRÓ	% DE LOGROS
		I	II	III	IV	V			
		NIVEL DE COMPRENSIÓN							

El alumno C ha tenido inconvenientes en su habilidad verbal y de modelar igual que el alumno B.

Ahora comparando los tres alumnos que hemos tomado de muestra podemos confirmar que la secuencia estimula fundamentalmente las habilidades visuales, no dándose del mismo modo las habilidades verbales y las de modelar.



En esta muestra podemos destacar que no todos los alumnos llegan en las mismas actividades a desarrollar las mismas habilidades, ni alcanzan el mismo nivel de comprensión, aunque hayan podido resolverlas en forma razonable.

Los resultados indican, según esta muestra, que la secuencia podría habilitar efectivamente al tránsito por las fases de comprensión geométrica y desarrollo de habilidades. Pero hay que notar que no todas las habilidades fueron desarrolladas a igual nivel.

Además podemos observar que la *habilidad visual,* que está presente en todo el trabajo, ha avanzado en los niveles de comprensión. Las actividades fueron promoviendo su desarrollo desde el armar un rompecabezas con teselas definidas, hasta crear el propio mosaico.

Lo mismo aconteció con *las habilidades de dibujo* que fueron estimuladas por las mismas actividades que propiciaron, más allá de la capacidad de dibujar bien o mal, la oportunidad de copiar, reproducir y crear sus propios diseños. Recordamos la afirmación popular de que "hacer geometría es realizar razonamientos correctos sobre figuras mal hechas".

Aquí la habilidad gráfica ha reemplazado prácticamente a la verbal ya que "la representación gráfica es una manera de comunicación, un lenguaje para expresar y construir los conocimientos geométricos" (Alsina, 1995, p.64).

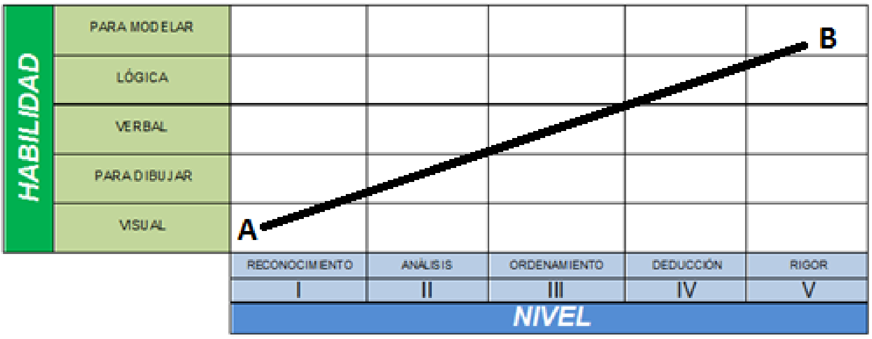
Los alumnos cumplieron con la frase de Hoffer: "There are times when we may have more need to draw a picture of a geometric situation than to prove a theorem".

En cambio en la *habilidad verbal,* en forma escrita, no se ha observado un avance en las diversas fases. Esta habilidad fue la más compleja de evaluar ya que lo escrito no representa en su totalidad lo verbalizado en clase y de ahí la necesidad de la toma de notas en el cuaderno de notas. Según Bressan (2013) esta habilidad refiere a cuestiones de comunicación y en este sentido es una habilidad más amplia que la detallamos aquí por Hoffer. Los alumnos han podido seguir las instrucciones escritas y seleccionar palabras adecuadas. Pero justamente en geometría, según Hoffer (1981) es donde se enfatiza el uso de vocabulario pero a la vez la precisión requerida "acobarda" al alumnado. Los alumnos suelen considerar que en matemática sólo se hacen cuentas, así que lo escrito "en palabras" es muy escaso. La falta de vocabulario específico y la poca capacidad de expresión, escribiendo como un "chat" con oraciones sin sujetos o predicados y frases incompletas (como puede verse en el ANEXO N°3 de los trabajos de los alumnos). Esta será una habilidad que deberá ser desarrollada no sólo en el área de matemática sino en todas las materias y a lo largo del tiempo, tal como se expresa en Rodríguez (2013) donde queda claro que el desarrollo de las habilidades no llega a culminar, sino que estarán siempre en constante desarrollo.

La *habilidad lógica* sí avanzó en las fases, sin llegar a la última que ya Van Hiele (ver cap.1.3.3) advierte que es muy difícil de alcanzar. Además que se debe destacar que es un curso de primer año del ciclo medio con alumnos de 13 o 14 años que recién inician el trabajo geométrico de este tipo. De todos modos, se ha desarrollado un buen nivel de trabajo lógico impulsado por las actividades de la secuencia.

No ha sido muy clara la información sobre la *habilidad para modelar* que pareció no tener un gran avance, pero la mayoría de los alumnos pudieron reconocer formas y fenómenos que son representables en modelos. Estos modelos fueron muy básicos pero requirieron abstracción y uso de técnicas. Suponemos que se debe también a la falta de expresión y formas diferentes de comunicar resultados. Es que "La matemática no funciona separando problemas, técnicas, representaciones, demostraciones; todas estas zonas convergen de diferentes maneras en la tarea de modelización" (Sadovsky, 2005, p.31).

En el análisis previo se indicó con una flecha la meta de logro (ver cap.1.4). En realidad, a partir de este trabajo reconocemos que podríamos plantear metas parciales que permitirían dar cuenta de grados de desarrollo intermedios. (Ver cap. 1.4 Gráfico 1)



Pero hemos notado que cada alumno desarrolla una habilidad más que otro, en distintos momentos y con distintas capacidades de comprensión y nos sería muy complejo detectar el avance individual con alto grado de precisión a partir de un trabajo grupal, donde las ideas se entrecruzan y avanzan juntas con un resultado común que es propio del grupo pero no podemos afirmar que sea propio de cada integrante.

Afirmamos que los estudiantes analizados han tenido la posibilidad de llegar a la tercera región determinada por la curva de puntos a partir del trabajo planteado en la secuencia.

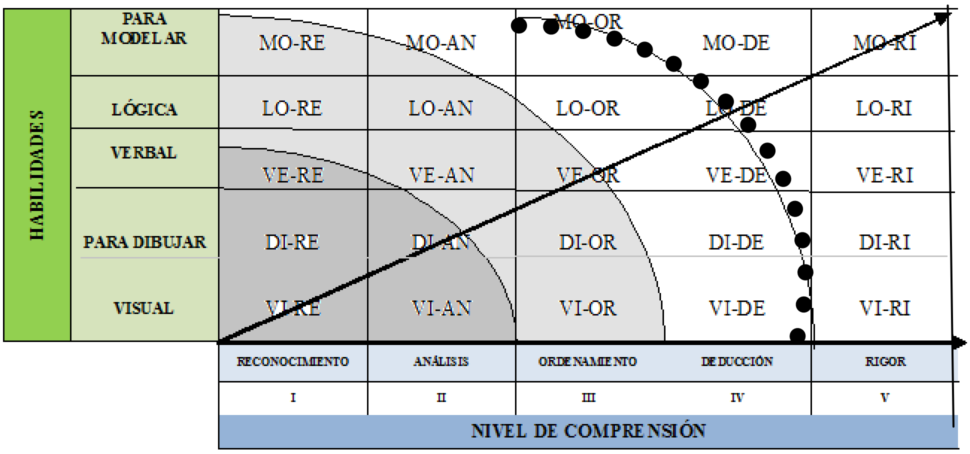
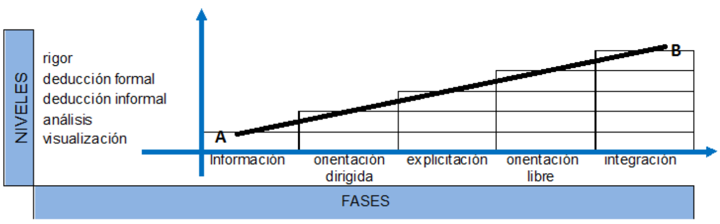


Gráfico 3

También con las fases resulta una idea similar. Nosotros planteados partir del punto A y llegar al B , en forma consecutiva. (Ver cap. 1.4 Gráfico 2)



Percibimos que este trabajo debe ser cíclico y que en cada fase se debe recorrer cada nivel de comprensión. Aunque Jaime y Gutiérrez (1990) afirman que no es necesario recorrer todas las fases en cada nivel, intuimos que desde un inicio el trabajo debería ser espiralado hasta que se logren ciertas habilidades para el trabajo autónomo. Además de las habilidades geométricas también nos referimos a la rutina y disciplina para el trabajo en clase, como por ejemplo, la lectura de las consignas en orden, el trabajo grupal, entre otras conductas necesarias para el logro del trabajo autónomo en clase.

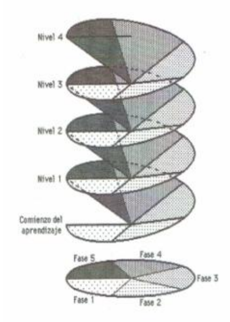


Ilustración 3-1

3.4. Conclusiones

Consideramos que la propuesta del estudio de mosaicos ha sido una actividad favorecedora del avance en las distintas fases e invitó al desarrollo de las habilidades básicas en los estudiantes que la completaron.

Esta secuencia pareciera tener potencial para que los estudiantes desarrollen habilidades visuales, para dibujar, lógicas y para impulsar a los estudiantes en avances en las fases de comprensión, siendo las habilidades verbales y para modelar las que hemos encontrado con menos presencia. Entendemos lo parcial de nuestros resultados, pero como es usual en investigación cualitativa lo que hemos observado aquí podría ser –y queda pendiente de verificación- más general. Será necesario seguir trabajando en esta senda con actividades que retomen las mismas habilidades, con una “planificación progresiva y cíclica” (Alsina, 1995, p.98), y lograr otros estímulos para que todos los alumnos lleguen a desarrollar mayores niveles de comprensión geométrica.

Retomando las preguntas planteadas en esta investigación resaltamos lo siguiente. Respecto de las habilidades al trabajar una secuencia sobre mosaicos, podemos afirmar que todas las habilidades básicas se manifiestan en distinto grado y en distintas fases de comprensión en cada uno de los alumnos estudiados. Fundamentalmente las habilidades de visualización, para dibujar y lógicas han sido las más utilizadas para la resolución de la secuencia sobre mosaicos geométricos.

Entendemos que las actividades han propiciado el desarrollo de las habilidades debido a que su diseño atiende a la gradualidad del las mismas, atendiendo a que el progreso en habilidades geométricas implica observar, reconocer, trazar, comparar, describir y clasificar para luego integrar lo aprendido.

Las actividades de construcción de rompecabezas estimulan las habilidades visuales, de dibujo y lógica. Las de las descripción de figuras, impulsa el análisis y deducción de propiedades. Las actividades referentes a la búsqueda de validaciones empujan a la reflexión y uso de la lógica, para que luego al aplicar en otros contextos logren establecer o proponer modelos nuevos. Puede observarse cómo la secuencia comienza con propuestas gráficas para que luego, al avanzar y requerirse el análisis se obvien los gráficos (Ver Anexo N°1).

Consideramos que la secuencia presenta las siguientes potencialidades:

- Un contenido adaptable a diferentes niveles de conocimiento
- Trabajo en variedad de marcos
- Un contenido conectado o conectable con otras áreas de conocimiento.
- Invita a adaptarse a diferentes modos de trabajo: trabajo grupal, en parejas e individual.
- Adaptabilidad al uso de material concreto y trabajo con el programa Geogebra.

Algunas palabras que identifican este trabajo:

- ✓ dinamismo
- ✓ gradualidad
- ✓ Adaptabilidad
- ✓ variedad
- ✓ conexión
- ✓ Ritmo

- ✓ belleza
- ✓ eficiencia
- ✓ Realismo/ aplicabilidad

Identificamos un par de desventajas que hemos detectado.

- T*iempo*: se requiere mucho más tiempo que en otro tipo de actividades o metodologías de clase. Para avanzar en la profundización de una habilidad se requiere tiempo de aplicación en secuencias intencionadas para tal fin.
- *Secuencialidad*: la continuidad y gradualidad ya que los procesos que involucra llevan un progreso necesario paso a paso, ya que un alumno no puede avanzar a otras fases de comprensión sin pasar por las anteriores.

Cabe destacar:

- La flexibilidad de las actividades que podían ser resueltas desde lo empírico hasta el trabajo lógico, brindando posibilidades de distintos abordajes. Por ello el trabajo grupal fue beneficioso ya que cada estudiante pudo realizar su aporte desde sus propias habilidades. Esta secuencia permite partir de una comprensión baja de los alumnos lo que a su vez posibilita la inclusión de los estudiantes a la propuesta.
- La importancia de la orientación por parte del docente, quien debe contestar preguntas y orientar para que fluyan los conocimientos sin dar respuestas ni pedir lo que no corresponde a la realidad de ese grupo en ese momento.
- La posibilidad de realizar esta misma secuencia con grupos de alumnos más avanzados donde las habilidades lógicas y para modelar podrían aparecer con mayor relevancia y se podría sacar provecho de la misma secuencia de actividades para potenciarlas.

- La riqueza que aporta el tema de los mosaicos que permite encarar el estudio de los movimientos en el plano, como la traslación, rotación y simetrías, el estudio de los grupos cristalográficos, el trabajo con el programa Geogebra, entre otros.

Respecto a la predominancia de alguna habilidad, señalamos que la visualización ha estado presente en este trabajo debido a que no hubo planteos descontextualizados o presentados íntegramente con terminología matemática, sino que en todo momento hubo vínculos con patrones, mosaicos, piezas, obras de arte, etc. Las otras habilidades han tenido una presencia mayor o no dependiendo del objetivo de la actividad en sí misma.

Respecto de poder identificar la evolución o no en niveles de comprensión de los estudiantes, consideramos que ha sido una tarea muy difícil ya que debe expresarse en la acción, es decir en la resolución de actividades que involucran habilidades específicas de cada nivel. Por ejemplo completar un patrón geométrico es una habilidad visual en fase III, de ordenamiento. Es posible la detección del nivel de comprensión pero es diferente para cada alumno en una misma actividad. Sólo puede determinarse un rango donde los alumnos se encuentran según la actividad a realizar (Ver gráfico 3). Gutiérrez (1998) afirma que existe una escasez de recursos fiables y válidos para determinar los niveles de razonamiento de los alumnos. Sin embargo haber establecido indicadores y el vínculo entre las habilidades y comprensión entendemos que nos ha dado herramientas para estudiar los avances de cada estudiante. Claramente es un trabajo que debe realizarse para cada estudiante de manera individual y los resultados son absolutamente personales.

El desarrollo de esta investigación ha dejado en evidencia la posibilidad de generar actividades geométricas que, partiendo de actividades empíricas, logre desplegar el pensamiento racional y permita que los estudiantes desarrollen habilidades que podrán ser aplicables no sólo a esta materia.

3.5. Perspectivas.

El estudio de los mosaicos geométricos generó una invitación al desarrollo de habilidades y el estímulo en el avance en los niveles de comprensión. Las habilidades geométricas, como las de visualización, para dibujar y de comunicación son comunes aunque no estimuladas en todos sus aspectos, y se ponen de manifiesto en distintos grados de desarrollo. En cambio, las lógicas y para modelar son estrictamente provocadas en el aula transformada en un laboratorio de ideas.

Hemos comprobado que ante las actividades de la secuencia se pusieron de manifiesto unas habilidades más que otras y que éstas van apareciendo en un orden lógico, necesario para avanzar en esta secuencia, y cuya finalidad es alcanzar una mayor abstracción. Para esto es necesario tiempo y continuidad para que realmente se logre un progreso que respete las particularidades de cada alumno.

Mencionamos en este cierre algunas preguntas para seguir investigando en esta senda: ¿es estrictamente necesaria la secuenciación de las habilidades, o sea partir de las visuales, para dibujar, luego las de comunicación, lógicas y finalmente las de modelar? ¿No podría darse que un estudiante desarrolle habilidades lógicas sin haber puesto de manifiesto habilidades visuales? ¿Se podrá realizar el camino inverso?: ¿se podrá generar una secuencia con otro tipo de actividades que privilegien sólo las habilidades lógicas o para modelar?

¿Cómo cambiar la propuesta para que resulte interesante abordar otros contenidos como los movimientos en el plano o la semejanza de polígonos?

Sabemos que en ciertas consignas de la secuencia como la de construcción de un rompecabezas o el trabajo final de armar un mosaico se vieron acotadas en la elección de las teselas por la dificultad de copiar y recortar con "tijeras". Nos preguntamos: si se hubiera trabajado desde un inicio con el Geogebra, ¿se habría logrado mayor riqueza, originalidad y dinámica en la elección de otras teselas?, ¿podría ser un camino para estimular el desarrollo de las habilidades lógicas y de modelar? ¿Se podrá adaptar la secuencia para trabajar con el programa Geogebra y acotar el tiempo de resolución de todo el trabajo?

Y así nos encontramos con muchas otras cuestiones en las que se podría seguir investigando.

3.6. A modo de cierre

El universo se ofrece continuamente a nuestra mirada, pero no puede ser comprendido si primero no aprendemos a comprender el lenguaje y a interpretar los caracteres con los que está escrito. Está escrito en el lenguaje de la naturaleza y sus características son: figuras geométricas, sin las cuales resulta humanamente imposible una sola palabra de él; sin ellas podemos vagar erráticamente a través de un oscuro laberinto"

Galileo Galilei

Pensar es una actividad humana que abre puertas, primero en la mente, luego en la realidad. El pensar tiene tiempos humanos que deben aprender a respetarse. En este sentido, la matemática enseña de la paciencia, tenacidad y la posibilidad de superarse. Enseña humildad porque nos obliga a ser honestos. No hay forma de mentir a otro, sin mentirse a uno mismo y dentro de la estructura de la matemática eso es imposible.

La rutina termina aplastando una asignatura con vida propia y la que debería permitir que cada alumno la construyera desde sus concepciones edificando un edificio lógico propio.

Esta secuencia resultó en un momento de encuentro para resolver situaciones que sirven para promocionar el estudio de la geometría dándole, en un principio un sentido lúdico, y en el final un momento de creación, sin perder el objetivo fundamental que es el de motivar y desarrollar al máximo el potencial de los alumnos.

El trabajo se plantea grupal y por esto la creación es colectiva. La interacción entre alumnos alienta y enriquece la solución de problemas y aparecen nuevas ideas que confirman concepciones de los alumnos.

No deberíamos dejar a nuestros alumnos sin la experiencia de conocer una rama de la matemática que es parte del cotidiano y que invita a la apreciación del arte y la naturaleza.

En esta investigación nos focalizamos en el desarrollo de habilidades geométricas básicas estimulando las fases de comprensión de los estudiantes. Entendemos que es valioso observar que estas habilidades no son útiles sólo para el estudio de la matemática sino, en nuestra opinión, para la vida como educando. La habilidad visual, para dibujar, la verbal, lógica y para modelar son capacidades para una mayor y mejor observación de las maravillas de la creación.

BIBLIOGRAFIA

- Alagia, H, Bressan, A. y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para La Educación Matemática*. Buenos Aires: Ed. del Zorzal.
- Alsina, C. (1995). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. (3° Reimpresión). Madrid: Ed. Síntesis.
- Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). ¿*Por qué Geometría*? *De La enseñanza de la Geometría.* Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa, México.
- Bressan, A. y Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva. Núm. 168. Buenos Aires Correo del Maestro.
- Bressan, A. y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Ed. del Zorzal.
- Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2013). *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. (3° Reimpresión). Argentina: Ed. Novedades educativas.
- Bressan, A., Zorzoli, G. y Reyna. I. (2003). *Enseñar Geometría. Redescubrir una tarea posible*. Buenos Aires: Ed. Styrka.
- Camuyrano, M., Crippa, A., Déboli, A. Guzner, G., Hanfling, M., Savón, S., Sessa, C. (1998). *Matemática. Temas de su Didáctica.* Buenos Aires.PRO CIENCIA Conicet.
- Carrulla, C. (1999). *Rutas hacia el / Raíces del álgebra*, reseña del libro de J. Mason Graham, y otros Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. *Revista EMA* Vol.5, Núm. 1. Bogotá.
- Diseño curricular de la Ciudad Autónoma de Bs As, Nueva Escuela Secundaria. Formación general. Ciclo básico del bachillerato, 2014.

- Documento Curricular de la Pcia. de Bs As. Orientaciones Didácticas para la enseñanza de la Geometría en la EGB. Doc. N°3. 2001.
- Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *PMME-UNISON*. http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm
- Fasello, T. y Osio, E. (2011). Relato de una experiencia: Taller de curiosidades geométricas. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Núm. 25 p. 141.
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. *Revista EMA*. *Vol. 2,* N° 1, 49-58. Bogotá. Colombia.
- García Peña, S. y López Escudero, O. (2008). *La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica*. México DF.
- Guasco, M. y Crespo Crespo, C. (1996). *Geometría y su enseñanza*. Buenos Aires. PRO CIENCIA -Conicet.
- Gutierrez, Á. Jaime, A. y Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics* Education. Vol. 22, pp.237-251 Stable URL: http://www.jstor.org/stable/749076.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática*. Alfar: Sevilla, España, pp. 295-384.
- Herrera, V.; Montes, Y.; Cruz, A. y Vargas, Á. (2010). *Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte* Universidad Distrital Francisco José de Caldas .Colombia.
- Hiatt, A. (1979). Basic Skills: What are they? *The Mathematics Teacher*, *72*(2), 141–144. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27961556.

- Hoffer, A. (1981). Geometry is more tan Proof. *The Mathematics Teacher, vol. 74*(1), 11–18. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27962295
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría* Buenos Aires: Ed. del Zorzal.
- Marmolejo Avenia, G. y Vega Restrepo, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, pp. 7-32.
- Muñoz Santoja, J., Hans Martín, J y Fernández, A. (2011) Jugando con teselas. *Revista de Didáctica de las matemáticas. Números* Volumen 77, julio de 2011, páginas 119–126 Grupo Alquerque. Sevilla. http://www.sinewton.org/numeros.
- Rodríguez, M. (2013). Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. *Mathema*.
- Sabino, C. (2010).*Cómo hacer una tesis (4°Reimpresión).* Buenos Aires: Ed. Lumen.
- Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Ed. del Zorzal.
- Santaló, L. (1993). *La Geometría en la formación de profesores. Buenos Aires:* Red Olímpica.
- Santaló, L. (1997). *Enfoques Hacia una didáctica humanista de la matemática*. (3° Reimpresión). Buenos Aires: Ed. Troquel.
- Sherard, W. (1981). Why is Geometry a basic skill? *The Mathematics teachers*,74(1), 19-60 Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27962296
- Uribe Garzón, S., Cárdenas Forero, O. y Becerra Martínez, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación Matemática*. *26, 2,* pp. 135-160.

- Van Hiele, P. (1999). Developing Geometric thinking through Activities with play. *Teaching Children Mathematics*, *6*, pp. 310-316.

ANEXO N° 1

TRABAJOS PRÁCTICOS
Secuencia de Mosaicos

Trabajo práctico N°1-Plan A

ROMPE-CABEZAS

Nombre y apellido:……………………………………………………….. Clase N°1

Armaremos rompecabezas de mosaicos romanos.
Empiecen con pocas fichas y a medida que lo logren mayor velocidad aumenten la cantidad y la variedad de piezas.
Consigna:

2) Jugamos en las PC armando rompecabezas de mosaicos romanos.
http://www.puzzlesjunior.
http://www.puzzlesjunior.com/puzzle-de-mosaicos-romanos_4d907b17b608d.html

a) Observa las piezas. Las hay de diferentes formas y encastran perfectamente unas con otras. No se superponen ni dejan huecos.

Copia todos los diseños de las piezas.

b) ¿Qué figuras geométricas puedes reconocer? Destácalas con color sobre el dibujo de cada pieza del rompecabezas.

Trabajo práctico N°1-Plan B (CONSIGNA ORAL)

ROMPE-CABEZAS

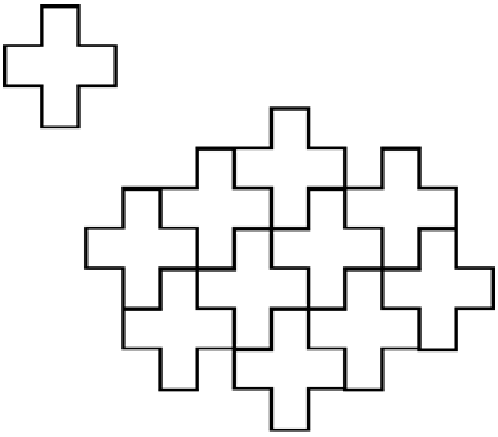
Nombre y apellido:………………………………………………………….. Clase N°1

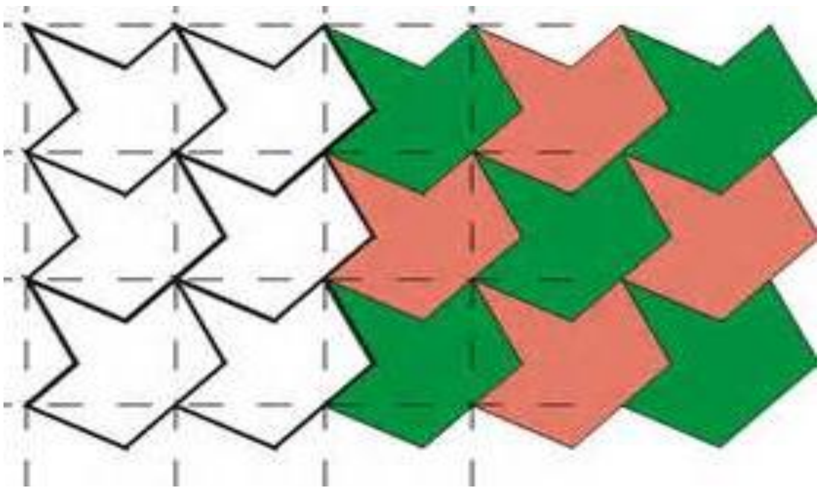
Separados en parejas construyan rompecabezas con las figuras que contiene cada sobre.
Las piezas del rompecabezas pueden ser alguna, solo una, de las siguientes.
Consideren que los bordes pueden ser diferentes a la pieza que eligieron.

Nombre y apellido:……………………………………………………………….Clase N° 2

Un rompecabezas está compuesto por piezas que no se superponen ni dejan espacios sin cubrir. Una superficie así se denomina MOSAICO puedes observas pisos, revestimientos y decoraciones en edificios públicos, religiosos, en la calle y en tu propio hogar.

3) Continúa estos dos modelos de mosaicos.



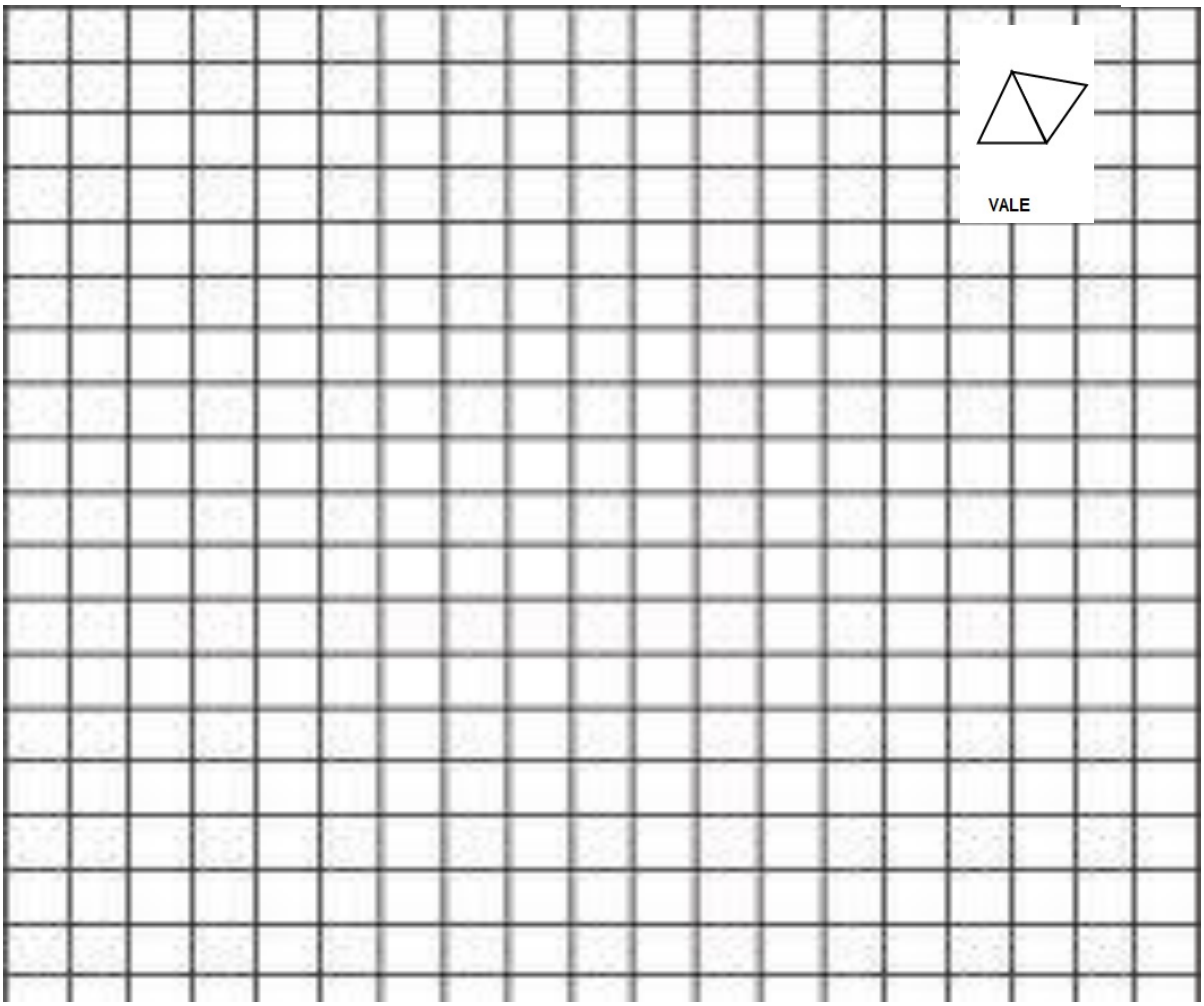


Nombre y apellido:…………………………………………………………….Clase N° 3

2) Prueba qué figuras (del sobre) te permiten realizar un mosaico y cuáles no. En caso afirmativo muestra el recubrimiento.

OBSERVACIÓN
Para cumplir con estas condiciones, las baldosas deben ser de tal forma que encajen perfectamente unas con otras. El criterio que se tendrá en cuenta es que los lados de los polígonos deben coincidir completamente.

NO VALE



Trabajo práctico N°2

MOSAICOS

Nombre y apellido:…………………………………………………….. Clase N°4

Objetivo:

Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

Observen las figuras del sobre n°1 ¿qué características presentan las figuras del sobre?

6) ………

Las figuras del sobre se denominan **polígonos** regulares Con sus palabras ¿Pueden caracterizarlos?

……..

7) Para esto tomen las figuras del sobre n° **1** y exploren cuáles de ellas te permiten diseñar las piezas de un rompecabezas o mosaico.
   Elijan una por vez y úsenla de molde para dibujar cada diseño en una hoja lisa.

8) ¿Cuáles les permitieron realizar el mosaico? ¿Cuál es la característica o propiedad que estarían cumpliendo dichos polígonos?

9) Realicen el punto 2) con las figuras del sobre n° **2.**

10) Analicen con sus compañeros ¿cuáles son las propiedades de estos polígonos que permiten realizar un mosaico?

……..

11) ¿Por qué determinadas figuras permiten diseñar un mosaico?
    Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.
    ………

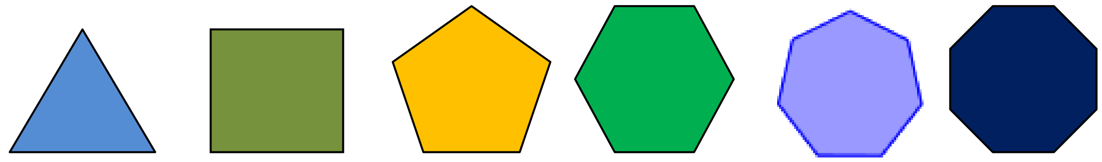
MOSAICOS

Nombre y apellido:………………………………………… Clase N° 5

OBJETIVO: Explorar la amplitud de los ángulos interiores de los polígonos.

Primero examinemos:

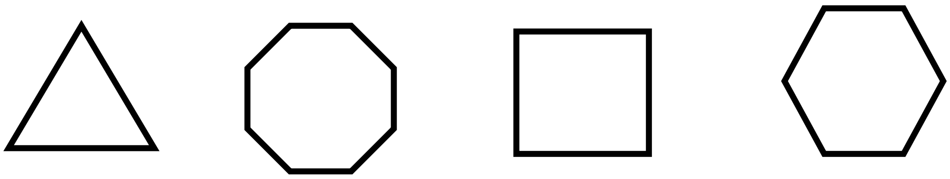
1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos?

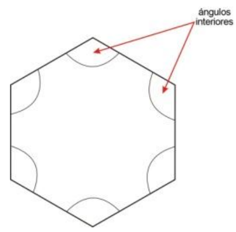


Triángulo cuadrado pentágono hexágono heptágono octógono

Expliquen;…………………………………………………………………………………

2) Observen el siguiente gráfico y señalen los ángulos interiores de los siguientes polígonos interiores.





¿Recuerdan la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo?

Propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo.

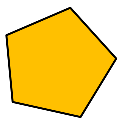
……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

3) a) Con esta información: ¿podrían averiguar cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un pentágono regular?

………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………



En caso afirmativo explica el procedimiento para calcularlo.

…………………………………………………………………………………………

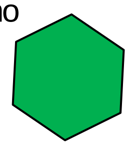
…………………………………………………………………………………………

En caso contrario mencionen qué información extra consideran necesaria.

…………………………………………………………………………………………

¿Cómo se puede obtener la suma de los ángulos interiores de un hexágono regular?

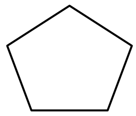
…………………………………………………………………………………………



Nombre y apellido:………………………………………… Clase N° 6

Resumiendo:

e) Mencionen toda la información que obtuvieron a lo largo de la clase n°5 sobre un pentágono regular, ¿podrían determinar la amplitud de cada uno los ángulos interiores?



f) En caso afirmativo, expliquen el procedimiento para calcularlo.

g) En caso contrario, mencionar qué información extra consideran necesaria.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

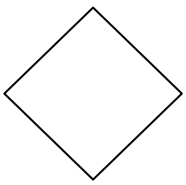
Podrían explicar cómo determinar la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono regular:

……………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

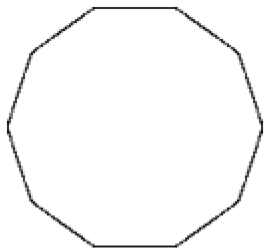
h) Indiquen cómo calcular la amplitud de un ángulo de un polígono regular.

i) Averigüen un ángulo interior de los polígonos indicados:

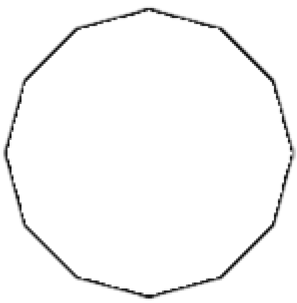
a)

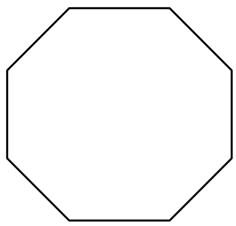


c)



b)

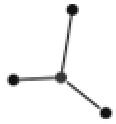




Nombre y Nombre y apellido:…………………………… Clase N° 7

Veamos una forma de justificar que sólo puedes teselar un superficie sólo con las figuras que hayas elegido ¿Existirán otros polígonos regulares que permitan teselar el plano?

d. En cada punto vértice de un teselado que involucre polígonos regulares deben concurrir por lo menos tres vértices de ellos, por lo tanto debe haber por lo menos 3 ángulos ¿Por qué?



………………………………………………………………………………………

e. Completen la siguiente tabla:

Polígono regular	Medida en grados de cada ángulo interior	Suma de la medida de 3 ángulos interiores en un punto vértice
Triángulo equilátero		
Cuadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Octógono		
Eneágono		
Decágono		

f. ¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que haya superposiciones?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie.

………………………………………………………………………………
………

Encuentren una justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Un teselado regular del plano cubre el mismo con la repetición de un polígono regular en particular. Por ende ocurre que todos los puntos vértices son congruentes.

Discutan alguna prueba para que validen esta hipótesis

Sólo el……………….,……………………………y…………………………,
todos regulares, son los que teselan el plano.

Trabajo práctico N° 3

MOSAICOS

Nombre y apellido:………………………………………………………. Clase N°8

Mosaicos semi-regulares.

Los mosaicos semi-regulares son aquellos que se forman utilizando polígonos regulares de igual medida de lado, pero de más de un tipo respecto al número de lados.

La condición que se impone es que todos los vértices sean equivalentes teniendo en cuenta los polígonos que confluyen en cada uno de ellos.

Consigna: Teselar una superficie con polígonos de distintas cantidad de lados de igual longitud.

e) Utilicen los polígonos del sobre 3 como plantilla para diseñar un mosaico semi-regular.

f) Existen 8 soluciones posibles, ¿Cuántas lograrás?

g) Dibujen hojas lisas las combinaciones que hayas encontrado.

h) Escriban los puntos vértices

	Puntos vértice	Polígonos en cada p.v.
1	*3,3,3,3,6*	*Cuatro triángulos y un hexágono*
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Trabajo práctico N° 4

MOSAICOS

Nombre y apellido:... Clase N°9

MOSAICOS NAZARÍES

Los artistas islámicos tenían grandes conocimientos de geometría, ellos hicieron posibles los denominados polígonos nazaríes. Estos son, entre otros: el hueso, el pétalo, el huso y la pajarita.

La dinastía nazarí, descendiente de Yúsuf ben Mazar, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. Granada en general, y La Alhambra, en particular, vivieron entonces una época de esplendor.



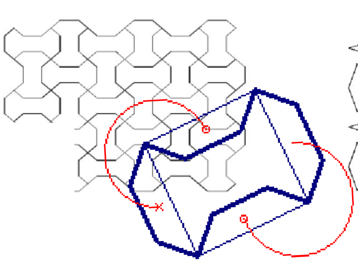
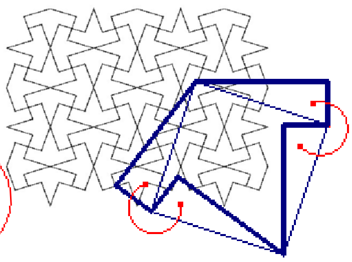
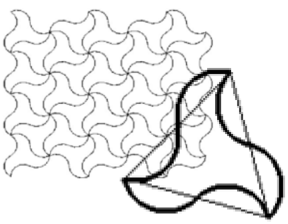

Estos mosaicos se denominan monoédricos pues son generados por una única tesela o baldosa.

3) Investiguen sobre los mosaicos de la Alhambra.

Ahora siguen unos pocos mosaicos para que mientras coloreen observen propiedades para su construcción

4) Construyan este mosaico y coloréanlo de manera que las teselas que comparten bordes tengan colores diferentes.

   Realicen el cubrimiento (puedes hacer un molde en cartulina/ cartón o traspasar con una hoja traslúcida) y píntenlo con diferentes tonos.

Trabajo práctico N° 5

MOSAICOS

Nombre y apellido:………………………………………………… Clase N°10

Gracias al triángulo, el cuadrado y el hexágono, se han creado mosaicos maravillosos.

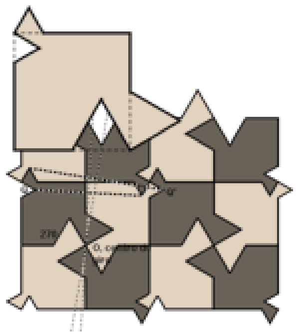
IMITANDO A ESCHER

Maurits Cornelius Escher (1898-1972), nacido en Holanda, muy conocido por sus famosas figuras imposibles se planteó el problema de recubrir el plano con un mismo motivo.
Este holandés abandonó pronto los estudios de arquitectura para especializarse en las técnicas gráficas, y convertirse más en geómetra ya que disfrutaba de estos diseños basados íntimamente con la geometría.

Probablemente sus viajes a Granada fueron una buena fuente de inspiración, de hecho su técnica es muy similar a la utilizada en los mosaicos de la Alhambra.

Tendrás muchas ideas viendo:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm

Mosaicos Originales



Objetivo: Teselar una superficie con baldosas originales.

1) A partir de un polígono regular construyan una baldosa novedosa.

   Para esto:

   d) Elijan un polígono regular: triángulo, cuadrado o hexágono.
   e) Diseñen un recorte, realízalo y peguen lo recortado en otro sector para armar un molde (en cartón o por calcado), o utilicen algún programa en PC si les resulta práctico
   f) Verifiquen (mediante traslaciones, giros, etc.) que sirve para teselar la superficie.

   Inspírense observando la obra de Escher.
2) Armen el mosaico
   a) Realicen el teselado recortando las teselas en hojas de colores.
   b) Peguen las baldosas armando el mosaico.
3) Ahora pueden dibujar esta baldosa en el reverso de la imagen que trajeron para armar un rompecabezas original.

   Recuerden mostrar el paso a paso.

ANEXO N° 2

CUADERNO DE NOTAS

¿Qué es el cuaderno de notas?

En este anexo se puede encontrar las notas que se tomaron al finalizar cada clase y fotos del curso.

Al iniciar la secuencia se comentó a los alumnos las particularidades de este trabajo. La mayoría de los trabajos serían grupales. No habría clase magistral y la resolución de la guía dependía de la resolución de los alumnos y para ello se necesitaba una lectura secuenciada y realización de las actividades en un orden específico. O sea, no se podía separar los ejercicios para que se los distribuyeran entre los integrantes del grupo. Hay que hacer las actividades todos juntos para que discutan e intercambien ideas. Les pedí que mantengan, dentro de posible, los mismos grupos.

No están acostumbrados a trabajar sin tener una explicación previa. Se trató de hacer acuerdos, como por ejemplo se contestarían todas las dudas y se orientaría sus trabajos.

Los alumnos preguntaron sobre el método de evaluación. Se propuso una evaluación de proceso, o bien como ellos denominaron de progreso y que al final, con el último práctico recibirían una calificación que involucraría el proceso de todas las clases junto el producto final.

CUADERNO DE NOTAS

Mes de agosto/septiembre de 2015

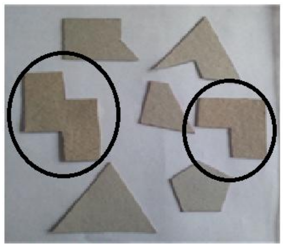
Trabajo práctico n°1   clase n° 1

Hablamos sobre las pautas generales de trabajo y condiciones de evaluación.

Se hizo una introducción de qué es un rompecabezas y su analogía con los revestimientos y su nombre mosaico o teselado y que las piezas se suelen llamar teselas.

Se mostraron imágenes de ejemplos de diferentes tipos de mosaicos.

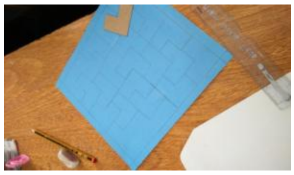
Ver ANEXO IMÁGENES 1,2 ,3 ,4 y 5.



Se inició con el juego de mosaicos romanos.

En la sala de computación se trabajó en parejas o tríos.

El problema que tuvimos es que es un juego en línea e internet no funcionaba bien para todos (la conexión muy lenta) . Así que se aplicó la actividad de armado de rompecabezas cuando volvimos a la clase.



En la selección de teselas para la construcción de rompecabezas todas las parejas eligieron dos tipos de fichas. Al consultarles porque no eligieron otras, dijeron que seleccionaron las perecidas a cuadrados. Supongo que por los ángulos rectos será más fácil para recortar.

No utilizaron, <u>ni probaron</u> con otras posibles.

Docente-*¿Por qué eligieron esa tesela?*

Alumnos -*Porque es como cuadrada.*

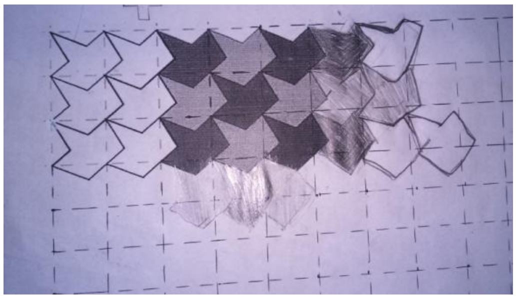
Consultaron por los bordes ya que no respetarían las formas. Hicimos la analogía con los rompecabezas y observamos el revestimiento de las paredes del aula que tiene azulejos cuadrados pero en las esquinas están

recortadas.

Igualmente tuvieron que lograr acuerdos para dibujar el rompecabzas pues unos empezaban por las esquinas y otros por el centro pero no se lograban encajar de esa manera. La idea es que hubiera un plan previo y trabajaran realmente en equipo y no solo amontonados.

Hubo mucho entusiasmo en el momento del juego , pero no leyeron las consignas.

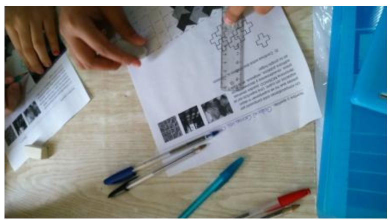
<u>Trabajo práctico N°1 Clase N° 2</u>



Para dibujar no se encontraban reglas, empezaron a utilizar tarjetas.

Preguntaron cuántas teselas dibujar y no sabían en qué sentido.

Dijeron resultó una actividad complicada.

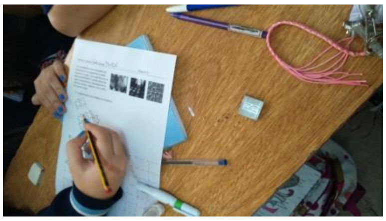


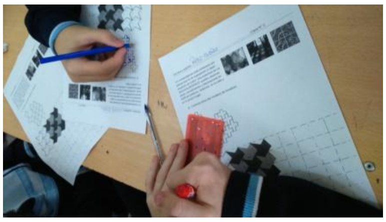
Sugerí utilizar papel de calcar y reparti pedazos en cada escritorio y les enseñé a calcar o traspasar un dibujo. Calcando las figuras lograron hacer un trabajo más dinámico.

Los que terminaron pronto los decoraban con colores.

Trabajaron concentrados y en silencio, más allá del horario de clase.

Neceistaron contínua aprobación ya que algunos no dibujan muy bien y notaban que sus gráficos no quedaban “lindos”.





Trabajo práctico N°1 clase N° 3

Nuevamente debían probar cuáles eran las teselas con las que podrían armar un revestimiento.

Al principio utilizaban todas ya que recordaban el trabajo con el trangam.

Tuve que orientar equipo por equipo.

Probaron con dos o tres repeticiones, descartando o aprobando la pieza.

Rotaron, trasladaron , sin nombrar los movimientos. Ellos decían solo mover sin distinguir tipos de movimientos, incluso simetrías.

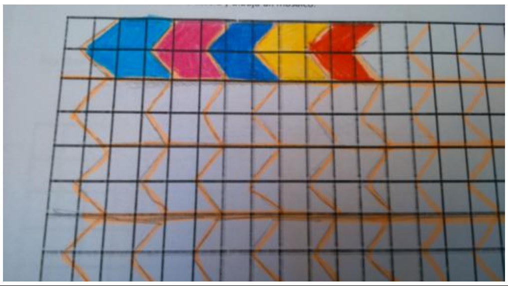
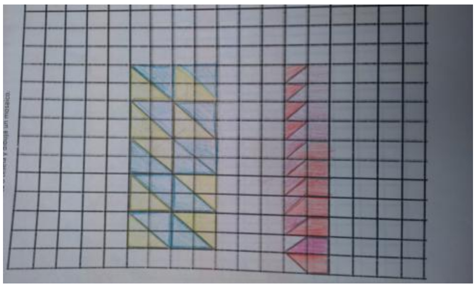
No advirtieron los diferentes movimientos.

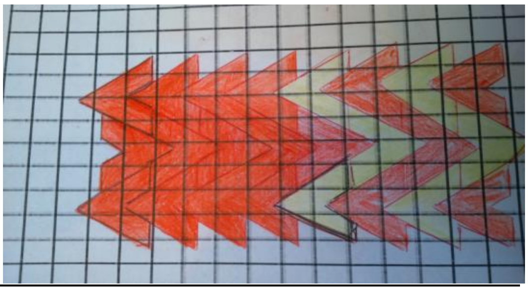
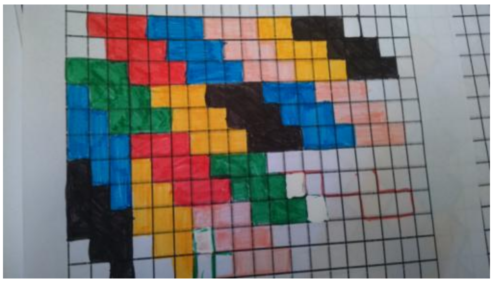
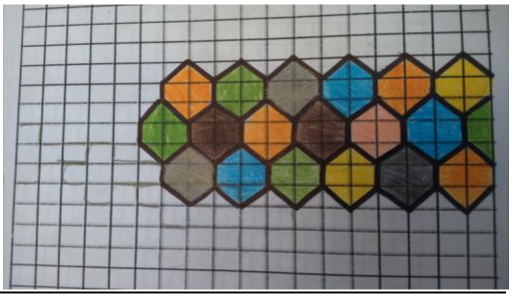
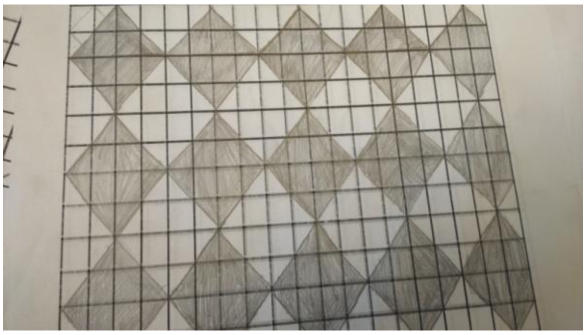
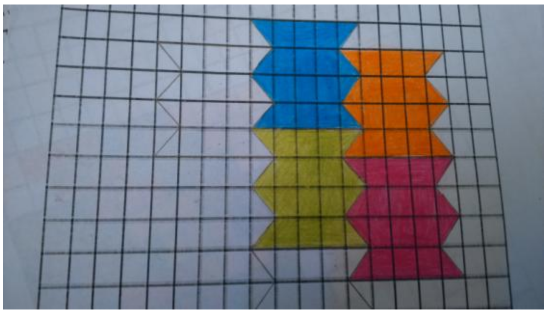
Ya las piezas van en una bolsita con un pedazo de papel de calcar para agilizar la composición.

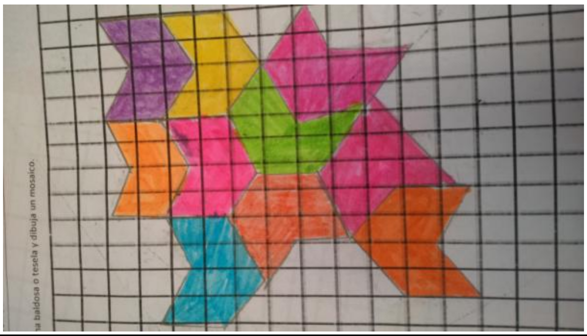
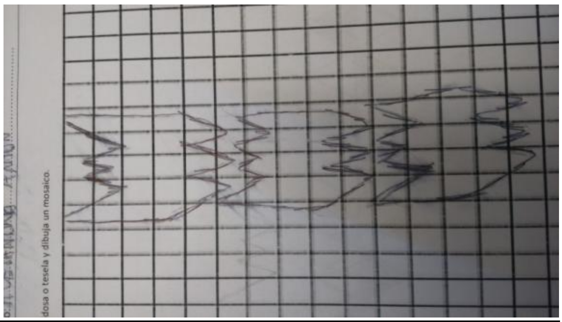
No trabajaron exhaustivamente. Junta dos piezas y no prueban en diferentes movimientos.

Ver ANEXO DE IMAGENES 5 y 6

Trabajos libres de los alumnos

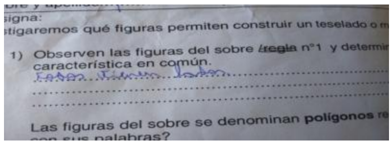



Estos dos últimos trabajos resultaron muy interesantes ya que en el primer caso el trabajo sin un plan de trabajo grupal hizo que la composición no resultara con la estética que los mismos alumnos esperaban. Y en el segundo caso no se pudo armar ya que no encastraban las piezas.

<u>Trabajo PrácticoN°2 Clase N° 4</u>

No comprendían las consignas. Entre la primera y la segunda no hallaban diferencias.

Tuve que orientar la observación de las piezas.



Decían redonditas por ser convexas. Aclaramos cuáles son las figuras cóncavas y convexas.

Necesitaron muchísimo vocabulario, se habló de lados, ángulos, de figuras regulares, etc.

Pidieron el nombre exacto de cada pieza, así que terminé copiando en el pizarrón el nombre de los polígonos regulares.

Alumnos -*¿Cómo se llaman esta figura de cinco lados? ¿Y la de ocho era octágono?*

Docente-*No se hagan problema para recordar todos los nombre igual se los anoto en el pizarrón.*

No tienen vocabulario geométrico.

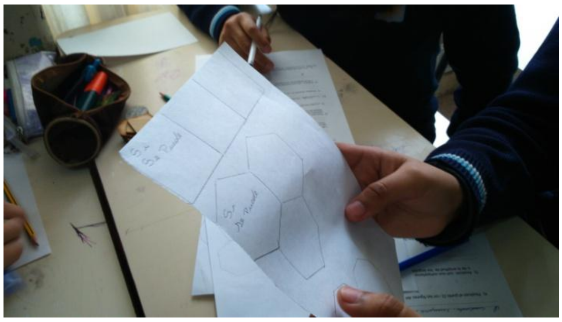
Dijeron que las piezas eran de madera y no observaban características.

Siempre había en los grupos algún alumno que recordaba algunos conceptos de la geometría de la escolaridad primaria.

Se agruparon de a cuatro y probaron con cada pieza.

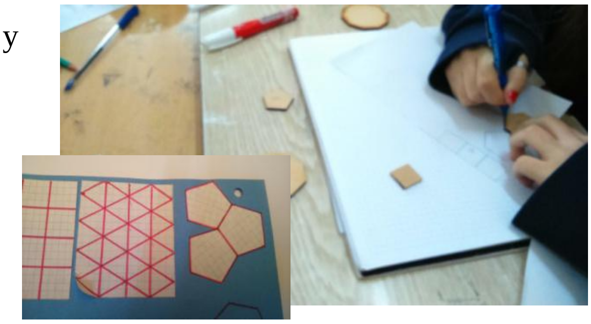
Se dieron cuenta que sólo tres son las posibles , salvo un equipo que opinó que el octógono también servía.

Probaron muy rápidamente con las figuras más grandes, y enseguida entendieron que se debía los ángulos y no por la longitud de los lados. La idea de semejanza no apareció, ya que no les es familiar.



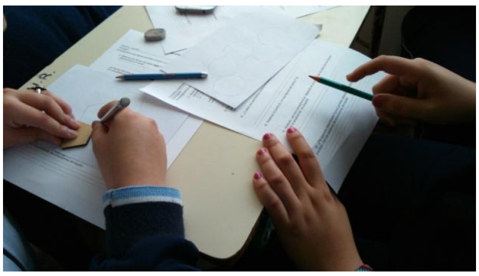
En la puesta en común hablamos sobre los polígonos definimos nombres y aclaramos con qué conjunto de figuras estábamos trabajando.

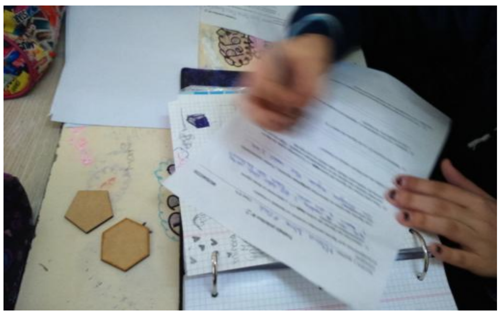
Yo les comenté la características de las figuras semejantes a partir de las ampliaciones y reducciones y escalas.



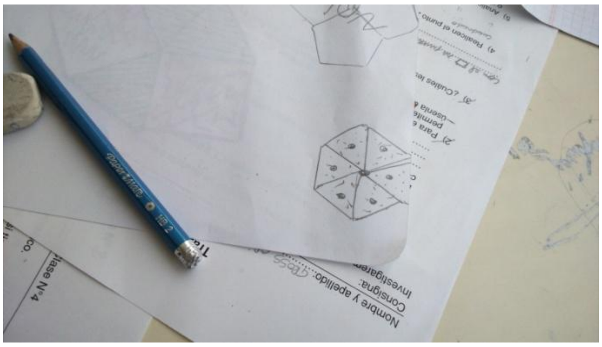
Así que quedó para seguir pensando cómo saber cuánto mide un ángulo interior de un polígono y cuánto debe medir para lograr construir un mosaico.

Ver ANEXON° 4 (imágenes 8 y 9)

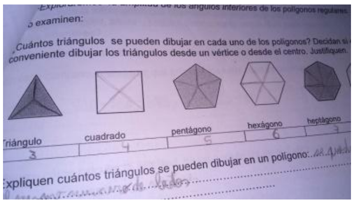


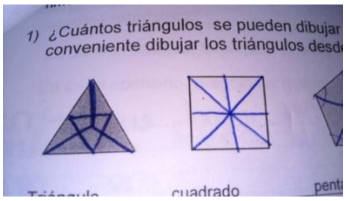


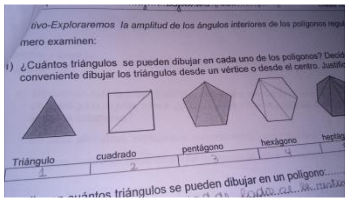
Trabajo Práctico N° 2 Clase N°5



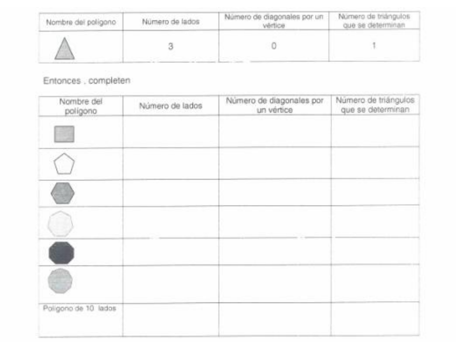
Les resultó difícil detectar los triángulos interiores. Insistí muchísimo con la lectura de las consignas.Hubo varios modelos.







Tuvimos que poner en la puesta en común todas las ideas y observar que algunas pueden servir y otras no. Tienen la idea que hay sólo una forma y las demás son erróneas y borran enseguida su ejercicio.



Nombre del polígono	Número de lados	Número de diagonales por un vértice	Número de triángulos que se determinan
	3	0	1

Entonces , completen

Nombre del polígono	Número de lados	Número de diagonales por un vértice	Número de triángulos que se determinan
Polígono de 10 lados			

Les cuesta validar sus opiniones ya que hay que tienen muy baja autoestima.

Juntos en el pizarrón invité a la inducción del resultado.

Y dedujimos juntos que si consideraban desde el punto central sólo era restar 360°

Quedaron así dos estilos de encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono.

En la clase siguiente se retomó la idea de la cantidad de triángulos en cada polígono e invité a pensar cómo calcularían un solo ángulo (sabiendo que todos son iguales).

Así pudieron resolver los ejercicios siguientes, pero sin escribir fórmulas.

En el pizarrón-

Suma de los ángulos interiores
de un polígono regular =180°. (cantidad de triángulos-2)

En el pizarrón -

Suma de los ángulos interiores
de un polígono regular =180°. cantidad de lados - 360°

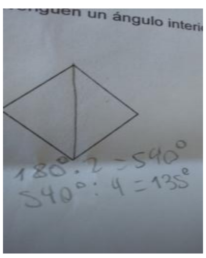
Entre todos comparamos los procedimientos y se puedo arribar a que eran expresiones equivalentes. No quedaron muy conformes, son muy inseguros, y prefieren un única forma. Así no tendrían que" pensar "cada vez.

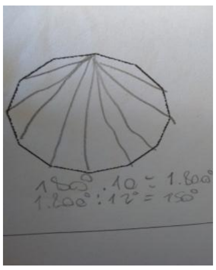
<u>Trabajo Práctico N° 2 Clase N° 6</u>

Resolvieron con un procedimiento explicado con palabras pero no lograron ningún tipo de simbología.

Algunos grupos tuvieron dificultades para respetar sus propias deducciones y no seguir otra de las que discutimos en el pizarrón.

La baja autoestima hace que siempre busquen aprobación e imitar a otros para no confundirse.





<u>Trabajo Práctico N°2 Clase N° 7</u>

En este trabajo retomamos el objetivo del por qué averiguar un ángulo interior de un polígono y buscar la validación que sólo el triángulo, el cuadrado y el hexágono eran los que permitian armar un mosaico regular.

Calcularon los ángulos. Tuvieron dificultad con el heptágono porque no recordaban las operaciones con los minutos y segundos . Opté por que lo dejen en notación decimal.

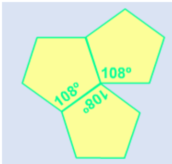
No encontraban el porqué sólo estas tres figuras.

En la puesta en común charlamos que sabían que deberían caber en forma exacta y de ahí dividimos 360° por la amplitud de los angulos que habían averiguado en el trabajo.

Docente.-¿Por qué no sólo se pueden teselar el plano con los tres polígonos?

¿Por qué no se puede con el pentágono?

Alumnos- cuando los ponés juntos, queda un cachito sin rellenar.

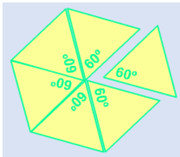


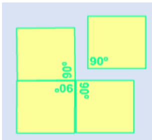
Docente- ¿numéricamente que implica? ¿Cuántos grados mide un giro?

Alumno- 360°

Docente- Entonces los ángulos de la figura tiene que entrar exactamente en 360°

Se orientó para que observaran la división exacta y rápidamente detectaron que esos tres polígonos caben en forma precisa. Se habló sobre que implicaba que quedara resto en la división y que sólo buscamos aquellos cuya cuenta diera con resto cero.



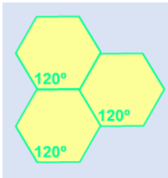


360°: 60°=

360°:90°=

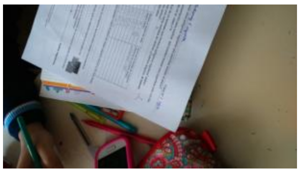
360° : 108°=

360°: 120°=



……..

$$\frac{360°}{\frac{180°.(n-2)}{n}} \in \{naturales\}$$

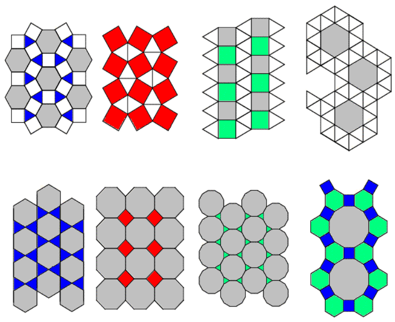


No se logró una deducción con rigor. Sólo se comprobó. No necesitaron má

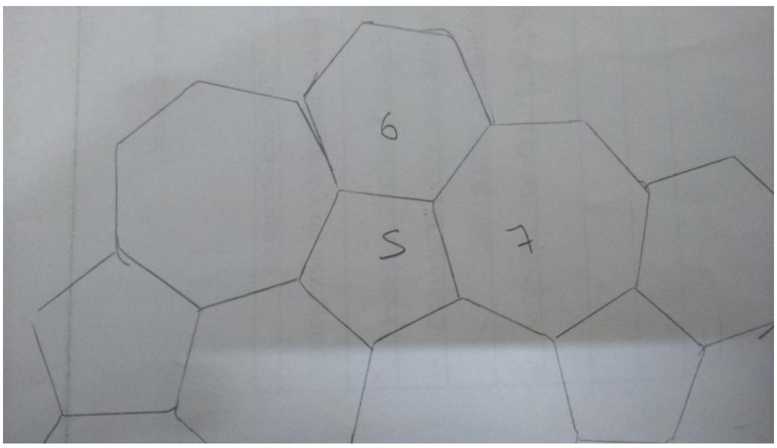
Trabajo Práctico N° 3 Clase N° 8

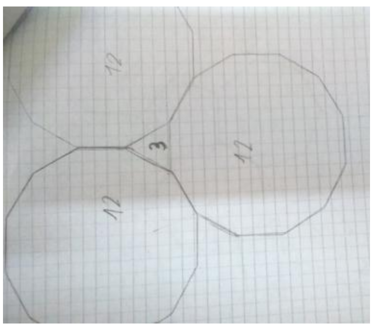
Los próximos trabajos resultan aplicaciones de lo aprendido.

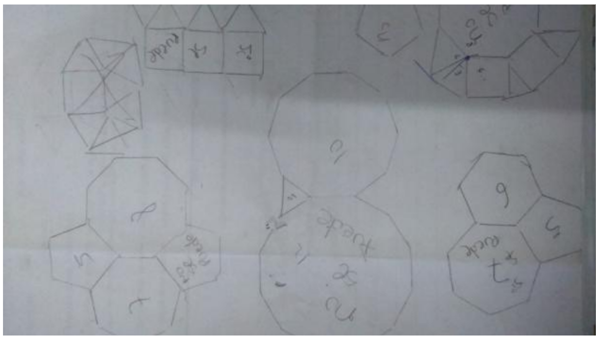
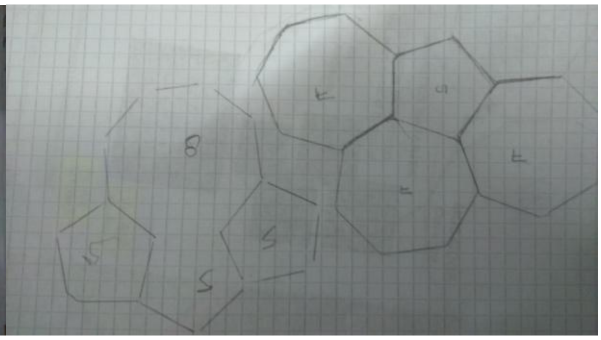
En sólo 40 minutos no todos lograron formar los 8 modelos. Muy pocos equipos hacían cálculos. La mayoría probaba las fichas directamente. Pero al tener una de cada uno , debían en algún momento calcular la posibilidad de cada diseño



No lo lograron en su mayoría hubieron muchos errores porque lo empírico no asegura la precisión del dibujo. Muy pocos fueron prolijos y metódicos. Probaron con pocas teselas. Se notó cansancio y aburrimiento.



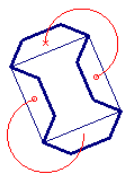


Trabajo Práctico N°4   Clase N° 9

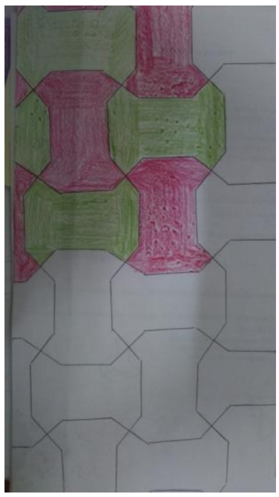
Aquí se mostró imágenes de los mosaicos de La Alhambra. Y les conté un poco sobre el trabajo de los artesanos musulmanes en Granada.

La totalidad de las parejas elijieron el hueso. Es el más sencillo de copiar, ya que copieron en base a un cuadrado.



Ver ANEXO DE IMÁGENES 7, 10 Y 11





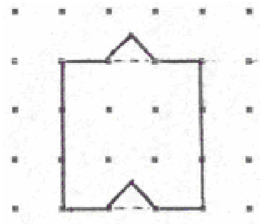
Algunos dibujan piezas más grandes que otros. Terminaron de teselar toda la carilla de la hoja y a partir de ahí pintaban.

Trabajo Práctico N° 5   Clase N° 10

En el último trabajo mostré imágenes de Escher y de la posibilidad de crear, como los artistas árabes, teselas a partir del triángulo equilátero, del cuadrado o del hexágono regular.

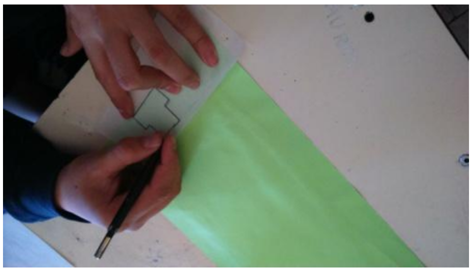
Mostré en el pizarrón, un diseño propio en goma Eva e invité a que crearan una pieza original.

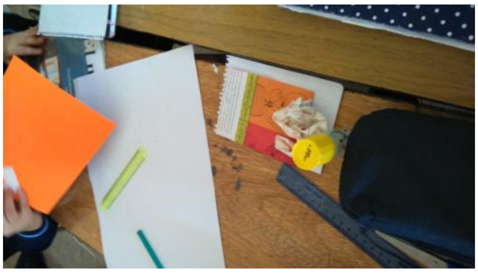
La mayoría empezó con cuadrados, sólo una pareja empezó con el hexágono regular y para ello consultaron cómo construirlo.

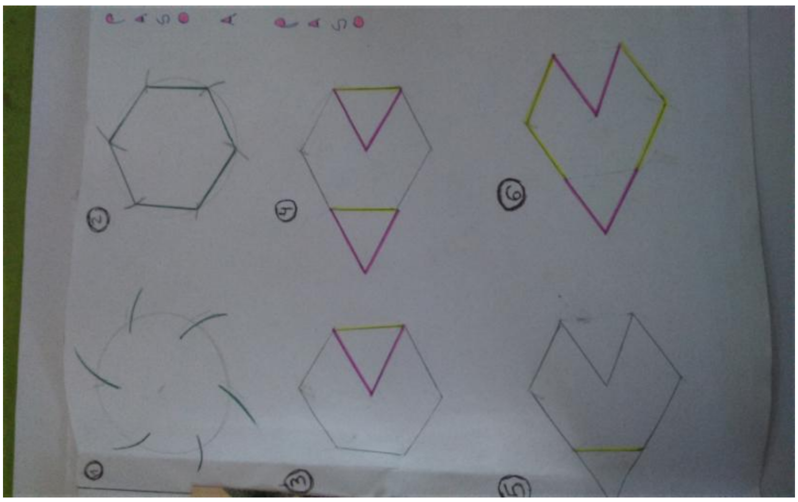


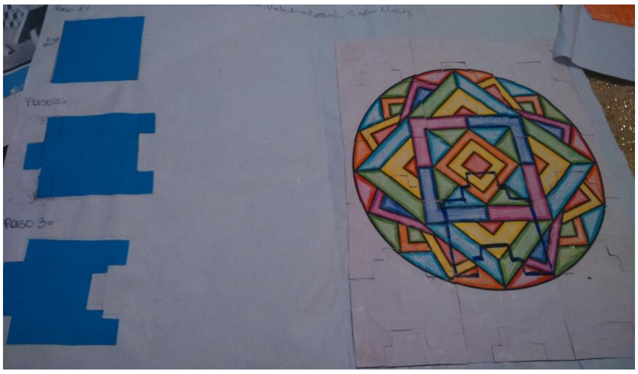
Resultaron todos trabajos muy originales.

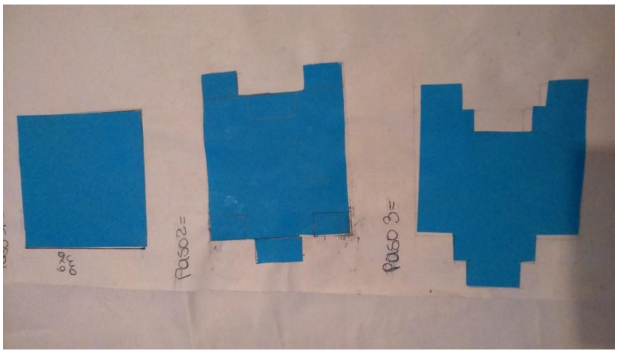
Ver ANEXO N° 4 (imágen N° 12)

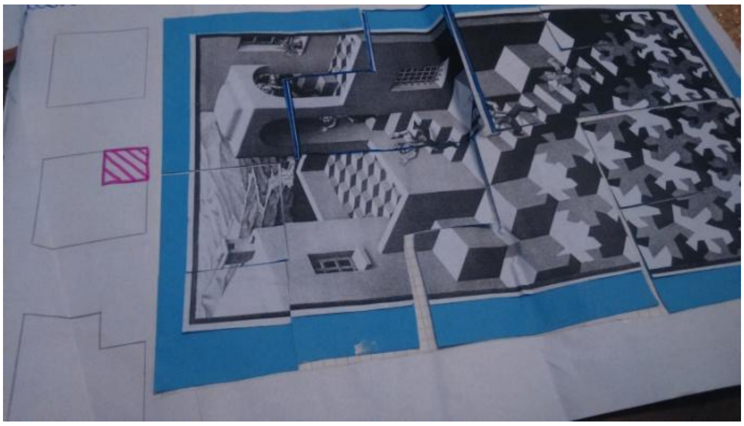


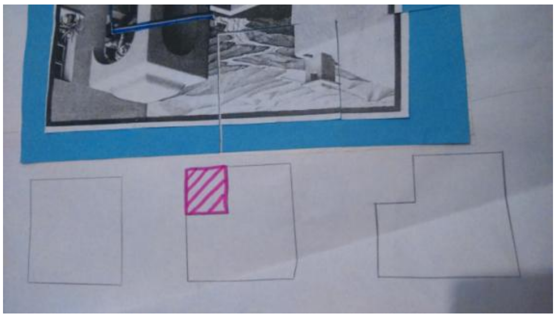






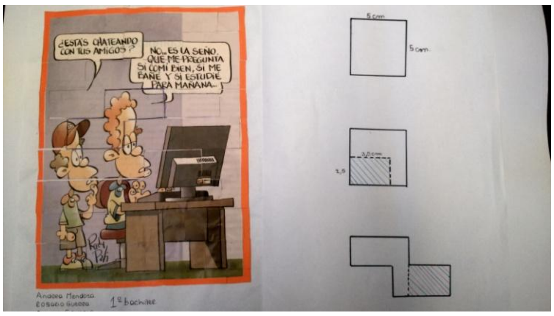


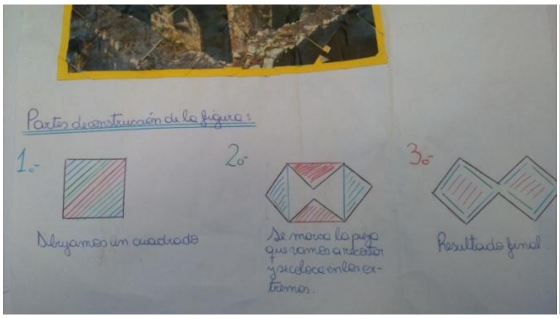




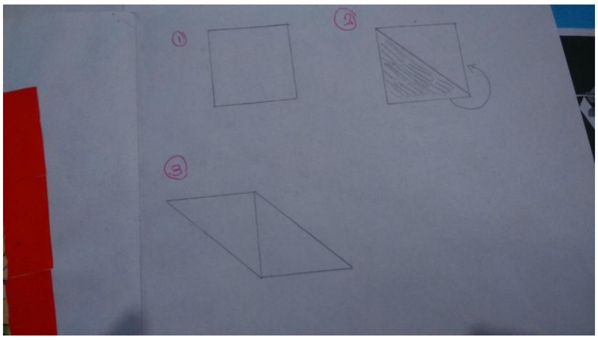
Cada equipo formuló el trabajo dentro de sus posibilidades. Algunos hicieron teselas sofisticadas en cambio otros fueron sobre seguro.

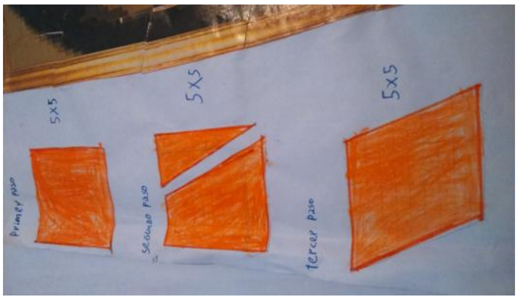
Se determinó 2 horas de clase (80 min) y en ese tiempo debían terminarlo (sólo un equipo no terminó y trajo el diseño finalizado la clase siguiente).




Partes de construcción de la figura:
1.-
Dibujamos un cuadrado
2o
Se mueve la pieza que vamos a recortar y se coloca en los extremos.
3o
Resultado final


5x5
5x5
5x5



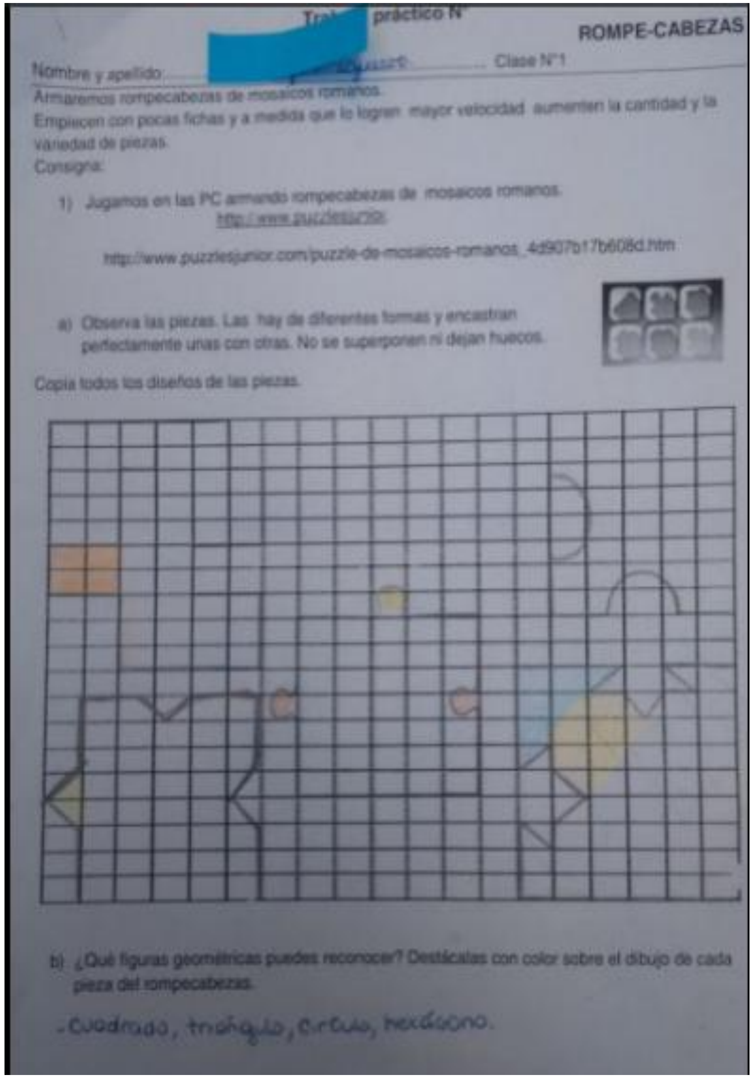

5x5
5x5
5x5
Primer paso
Segundo paso
Tercer paso

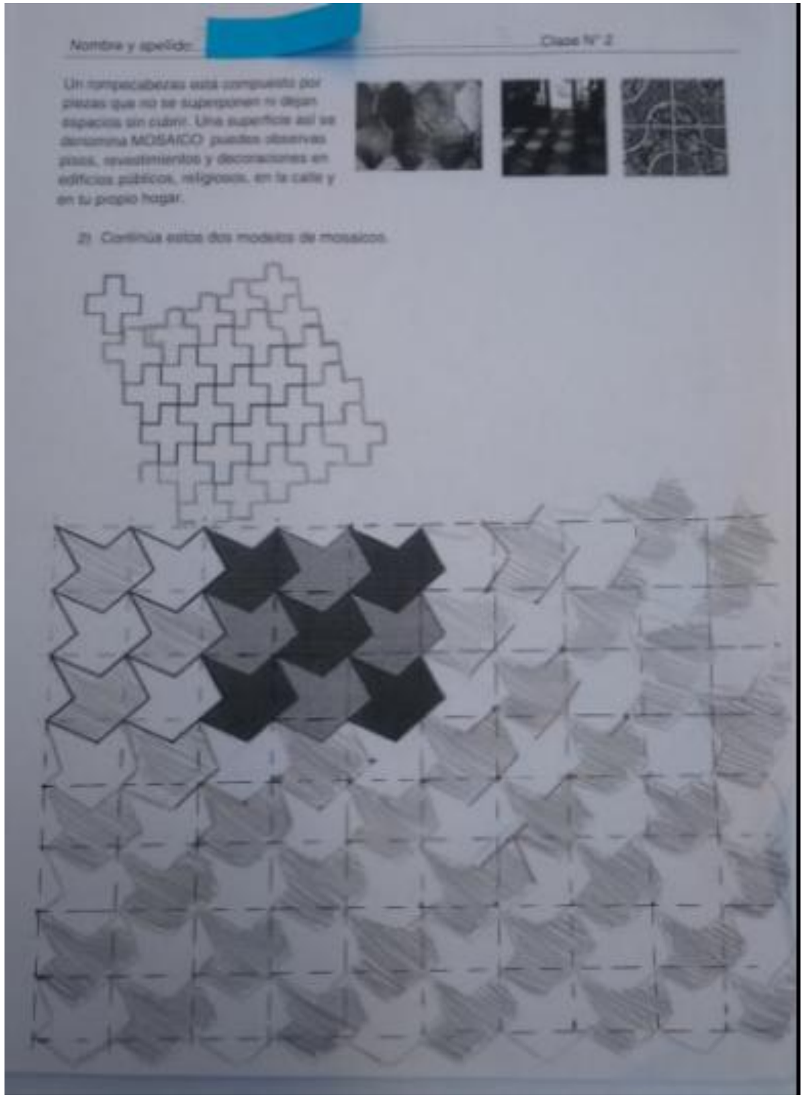
ANEXO N° 3

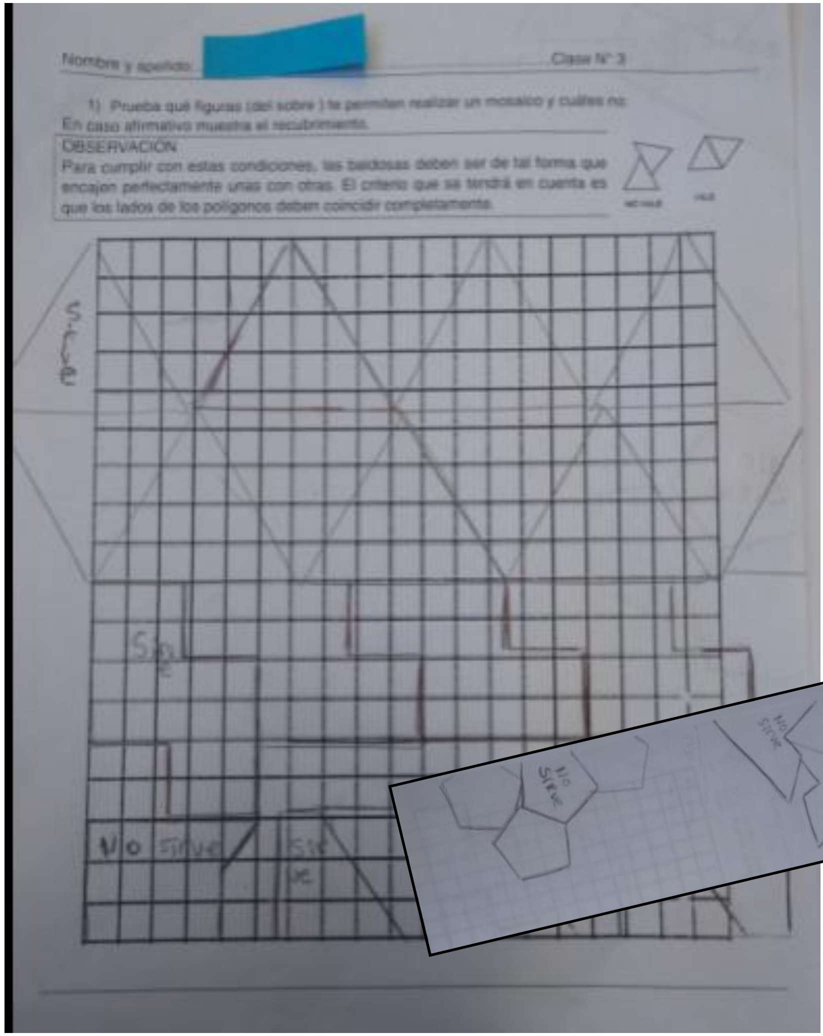
TRABAJO DE LOS ALUMNOS A, B Y C

En este anexo se han colocado las fotos de los trabajos de los alumnos de la muestra seleccionada. Las fotocopias de los trabajos se encuentran en la versión papel. Además se presentará el trabajo de todos los alumnos del curso.

ALUMNO A TRABAJO PRÁCTICO N° 1



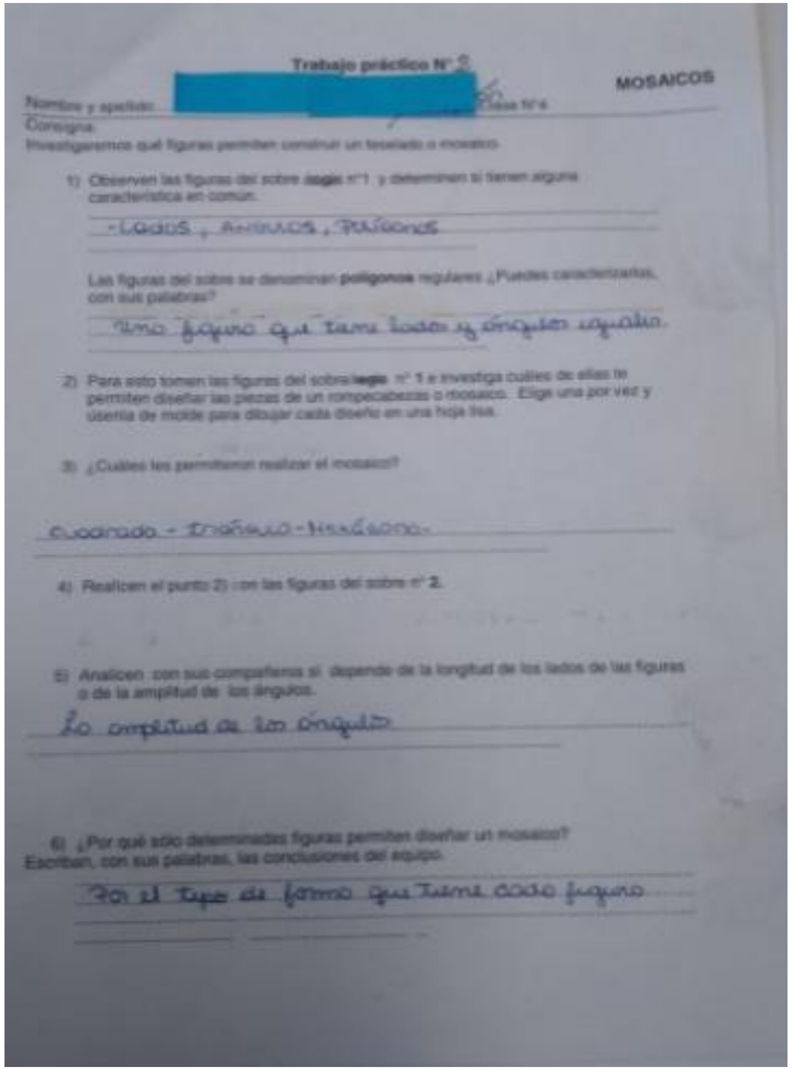



Nombre y apellido: [redacted] Clase N° 3

1) Prueba qué figuras (del sobre) te permiten realizar un mosaico y cuáles no.
En caso afirmativo muestra el recubrimiento.

OBSERVACIÓN
Para cumplir con estas condiciones, las baldosas deben ser de tal forma que encajen perfectamente unas con otras. El criterio que se tendrá en cuenta es que los lados de los polígonos deben coincidir completamente.

TRABAJO PRÁTICO N° 2


Trabajo práctico N° 2

MOSAICOS

Nombre y apellido: [redacted] Clase N°

Consigna:

Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

1) Observen las figuras del sobre n°1 y determinen si tienen alguna característica en común.

- Lados, ángulos, polígonos

Las figuras del sobre se denominan **polígonos** regulares ¿Puedes caracterizarlos, con sus palabras?

Una figura que tiene lados y ángulos iguales.

2) Para esto tomen las figuras del sobre n° 1 e investiga cuáles de ellas te permiten diseñar las piezas de un rompecabezas o mosaico. Elige una por vez y úsenla de molde para dibujar cada diseño en una hoja lisa.

3) ¿Cuáles les permitieron realizar el mosaico?

Cuadrado - triángulo - hexágono -

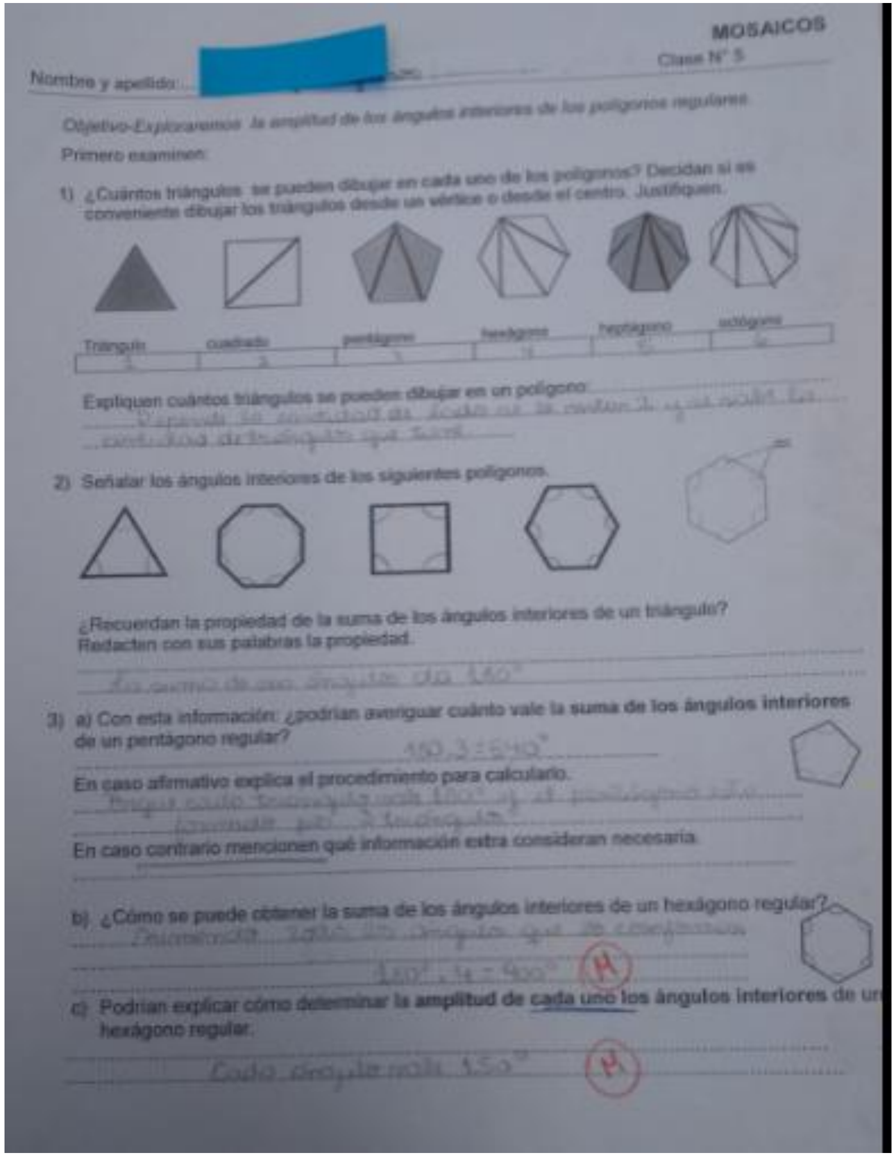
4) Realicen el punto 2) con las figuras del sobre n° **2**.

5) Analicen con sus compañeros si depende de la longitud de los lados de las figuras o de la amplitud de los ángulos.

La amplitud de los ángulos

6) ¿Por qué sólo determinadas figuras permiten diseñar un mosaico?
Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.

Por el tipo de forma que tiene cada figura



MOSAICOS

Nombre y apellido: Clase N° 5

Objetivo-Exploraremos la amplitud de los ángulos interiores de los polígonos regulares

Primero examinen:

1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si es conveniente dibujar los triángulos desde un vértice o desde el centro. Justifiquen.

Triángulo	cuadrado	pentágono	hexágono	heptágono	octógono
1	2	3	4	5	6

Expliquen cuántos triángulos se pueden dibujar en un polígono:

2) Señalar los ángulos interiores de los siguientes polígonos.

¿Recuerdan la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? Redacten con sus palabras la propiedad.

Los suma de sus ángulos da 180°

3) a) Con esta información: ¿podrían averiguar cuánto vale la **suma de los ángulos interiores** de un pentágono regular?

180.3 = 540°

En caso afirmativo explica el procedimiento para calcularlo.

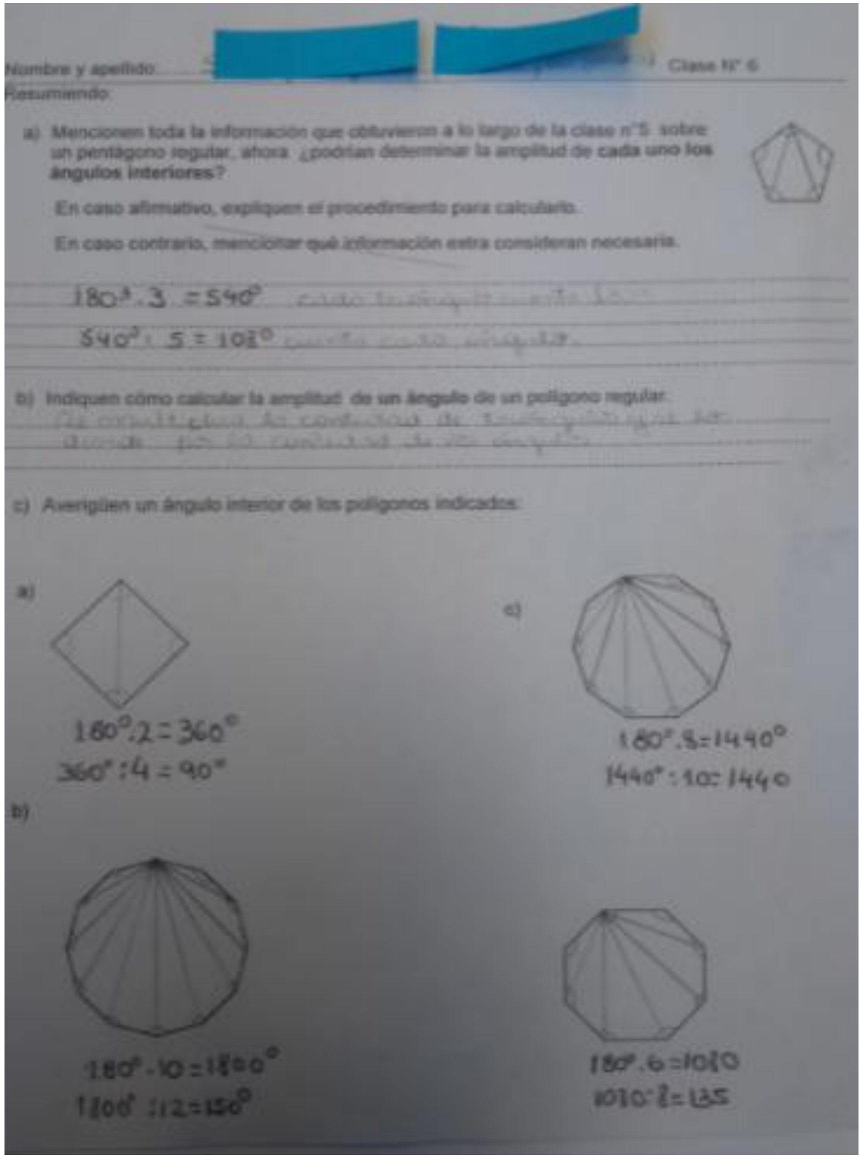
En caso contrario mencionen qué información extra consideran necesaria.

b) ¿Cómo se puede obtener la suma de los ángulos interiores de un hexágono regular?

180°.4 = 720°

c) Podrían explicar cómo determinar la **amplitud de cada uno los ángulos interiores** de un hexágono regular.

Cada ángulo vale 150°



Nombre y apellido: Clase N° 6

Resumiendo:

a) Mencionen toda la información que obtuvieron a lo largo de la clase n°5 sobre un pentágono regular, ahora ¿podrían determinar la amplitud de **cada uno los ángulos interiores**?

En caso afirmativo, expliquen el procedimiento para calcularlo.

En caso contrario, mencionar qué información extra consideran necesaria.

180°.3 = 540°

540° : 5 = 108°

b) Indiquen cómo calcular la amplitud de un ángulo de un polígono regular.

c) Averigüen un ángulo interior de los polígonos indicados:

a)

180°.2 = 360°

360° : 4 = 90°

c)

180°.8 = 1440°

1440° : 10 = 144°

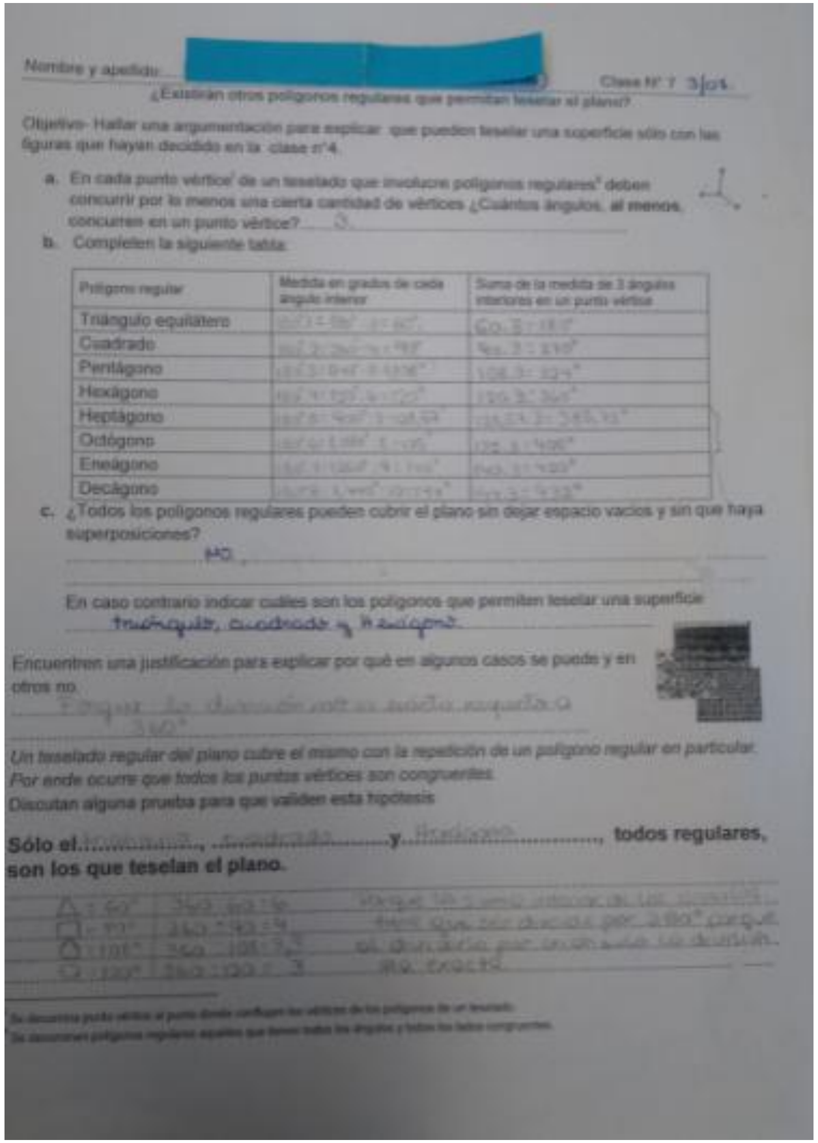
b)

180°.10 = 1800°

1800° : 12 = 150°

180°.6 = 1080

1080 : 8 = 135



Nombre y apellido: [redacted] Clase N° 7 3/05

¿Existirán otros polígonos regulares que permitan teselar el plano?

Objetivo- Hallar una argumentación para explicar que pueden teselar una superficie sólo con las figuras que hayan decidido en la clase n°4.

a. En cada punto vértice[1] de un teselado que involucre polígonos regulares[2] deben concurrir por lo menos una cierta cantidad de vértices ¿Cuántos ángulos, **al menos**, concurren en un punto vértice? 3

b. Completen la siguiente tabla:

Polígono regular	Medida en grados de cada ángulo interior	Suma de la medida de 3 ángulos interiores en un punto vértice
Triángulo equilátero	[illegible]	60.3=180°
Cuadrado	[illegible]	90.3=270°
Pentágono	[illegible]	108.3=324°
Hexágono	[illegible]	120.3=360°
Heptágono	[illegible]	128,57.3=385,71°
Octógono	[illegible]	135.3=405°
Eneágono	[illegible]	140.3=420°
Decágono	[illegible]	144.3=432°

c. ¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que haya superposiciones?

NO.

En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie

triángulo, cuadrado y hexágono.

Encuentren una justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.

Porque la división entre suma [illegible] 360°

Un teselado regular del plano cubre el mismo con la repetición de un polígono regular en particular. Por ende ocurre que todos los puntos vértices son congruentes.

Discutan alguna prueba para que validen esta hipótesis

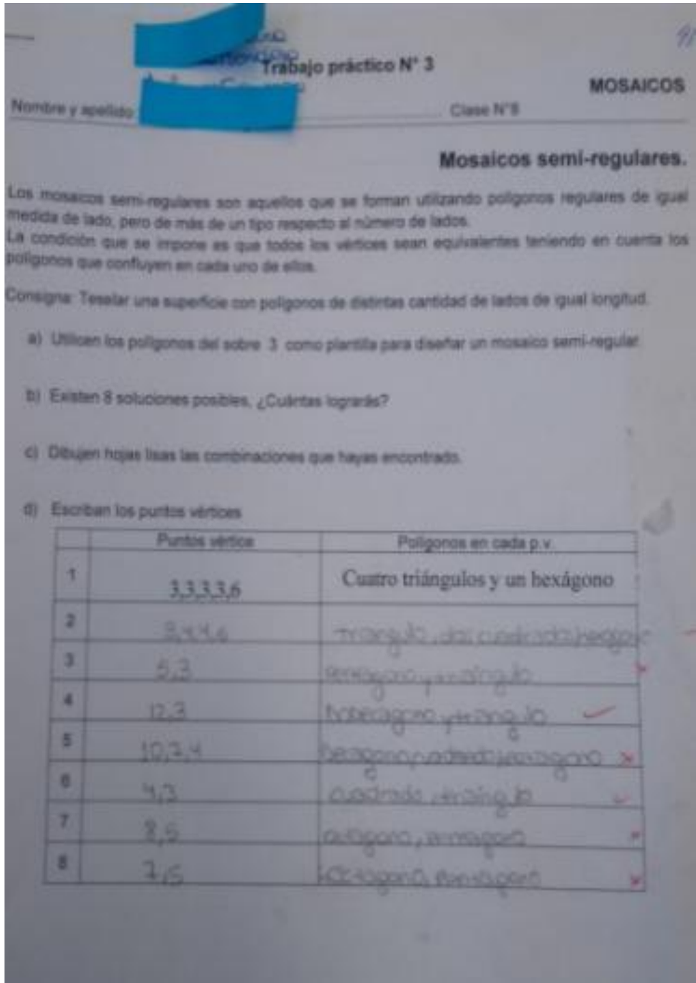
Sólo el triángulo, cuadrado **y** hexágono, **todos regulares, son los que teselan el plano.**

△ : 60° | 360 : 60 = 6
□ : 90° | 360 : 90 = 4
⬠ : 108° | 360 : 108 = 3,3
⬡ : 120° | 360 : 120 = 3

Porque la suma interior de los ángulos tiene que ser divisible por 360° porque al dividirlo por un ángulo la división no exacta.

[1] Se denomina punto vértice al punto donde confluyen los vértices de los polígonos de un teselado.
[2] Se denominan polígonos regulares aquellos que tienen todos los ángulos y todos los lados congruentes.

TRABAJO PRÁCTCO N ° 3



Trabajo práctico N° 3

MOSAICOS

Nombre y apellido: [redacted] Clase N°8

Mosaicos semi-regulares.

Los mosaicos semi-regulares son aquellos que se forman utilizando polígonos regulares de igual medida de lado, pero de más de un tipo respecto al número de lados.

La condición que se impone es que todos los vértices sean equivalentes teniendo en cuenta los polígonos que confluyen en cada uno de ellos.

Consigna: Teselar una superficie con polígonos de distintas cantidad de lados de igual longitud.

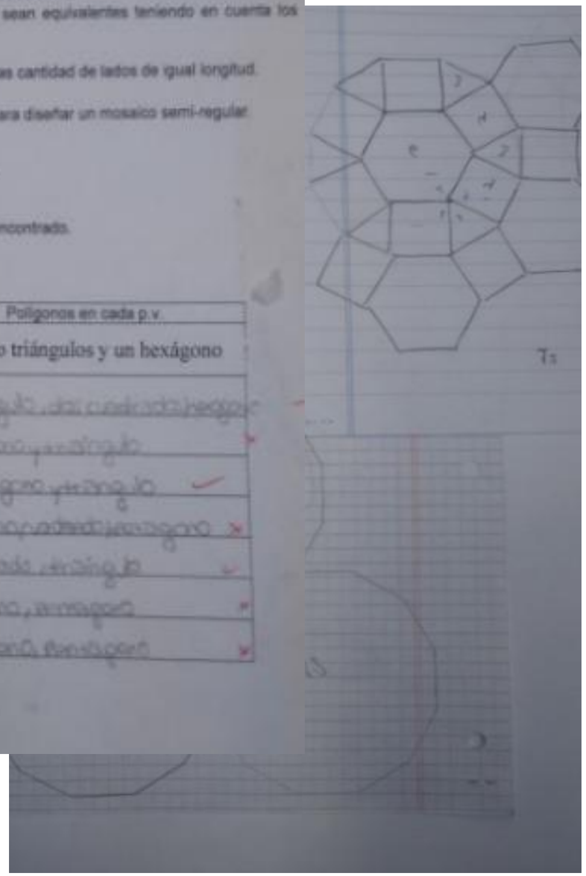
a) Utilicen los polígonos del sobre 3 como plantilla para diseñar un mosaico semi-regular

b) Existen 8 soluciones posibles, ¿Cuántas lograrás?

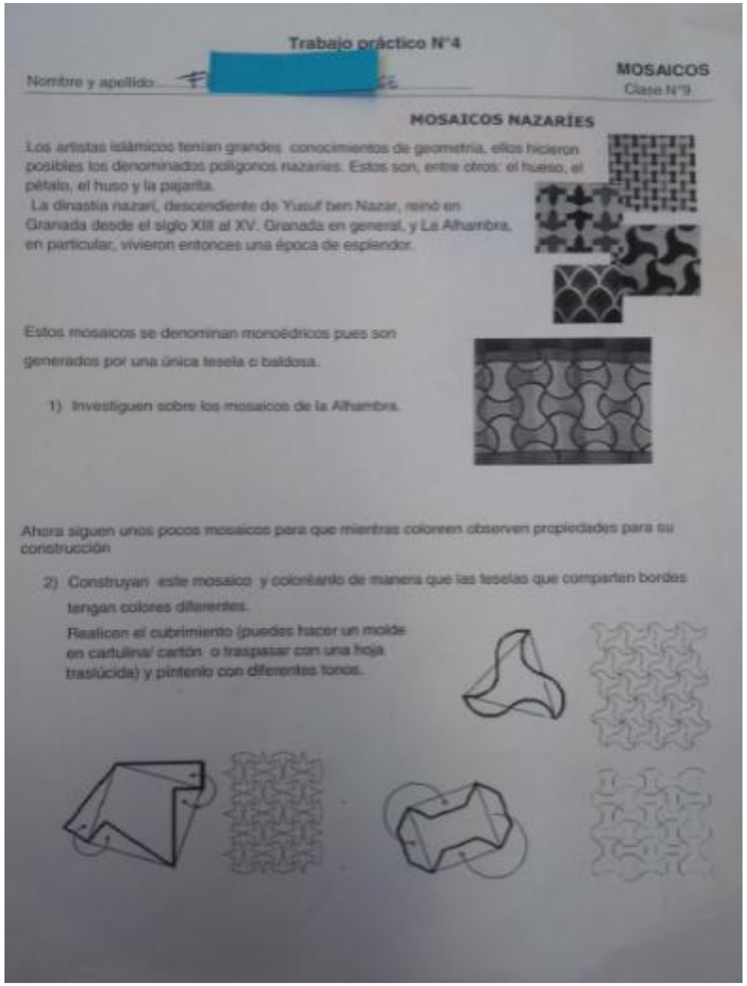
c) Dibujen hojas lisas las combinaciones que hayas encontrado.

d) Escriban los puntos vértices

	Puntos vértice	Polígonos en cada p.v.
1	3,3,3,3,6	Cuatro triángulos y un hexágono
2	3,4,4,6	triángulo, dos cuadrado, hexágono
3	6,3	hexágono y triángulo
4	12,3	dodecágono y triángulo
5	10,3,4	[illegible]
6	4,3	cuadrado y triángulo
7	8,5	octógono y pentágono
8	7,6	heptágono, hexágono



TRABAJO PRÁCTICO N° 4



Trabajo práctico N°4

Nombre y apellido: [redacted]

MOSAICOS
Clase N°9

MOSAICOS NAZARÍES

Los artistas islámicos tenían grandes conocimientos de geometría, ellos hicieron posibles los denominados polígonos nazaríes. Estos son, entre otros: el hueso, el pétalo, el huso y la pajarita.
La dinastía nazarí, descendiente de Yusuf ben Nazar, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. Granada en general, y La Alhambra, en particular, vivieron entonces una época de esplendor.

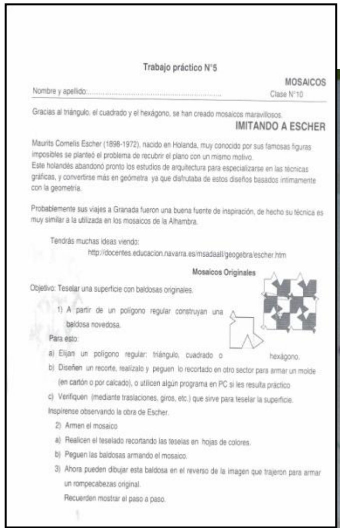
Estos mosaicos se denominan monoédricos pues son generados por una única tesela o baldosa.

1) Investiguen sobre los mosaicos de la Alhambra.

Ahora siguen unos pocos mosaicos para que mientras coloreen observen propiedades para su construcción

2) Construyan este mosaico y coloréenlo de manera que las teselas que comparten bordes tengan colores diferentes.
Realicen el cubrimiento (puedes hacer un molde en cartulina/ cartón o traspasar con una hoja traslúcida) y píntenlo con diferentes tonos.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5



Trabajo práctico N°5

MOSAICOS

Nombre y apellido:.. Clase N°10

Gracias al triángulo, el cuadrado y el hexágono, se han creado mosaicos maravillosos.

IMITANDO A ESCHER

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), nacido en Holanda, muy conocido por sus famosas figuras imposibles se planteó el problema de recubrir el plano con un mismo motivo.
Este holandés abandonó pronto los estudios de arquitectura para especializarse en las técnicas gráficas, y convertirse más en geómetra ya que disfrutaba de estos diseños basados íntimamente con la geometría.

Probablemente sus viajes a Granada fueron una buena fuente de inspiración, de hecho su técnica es muy similar a la utilizada en los mosaicos de la Alhambra.

Tendrás muchas ideas viendo:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm

Mosaicos Originales

Objetivo: Teselar una superficie con baldosas originales.

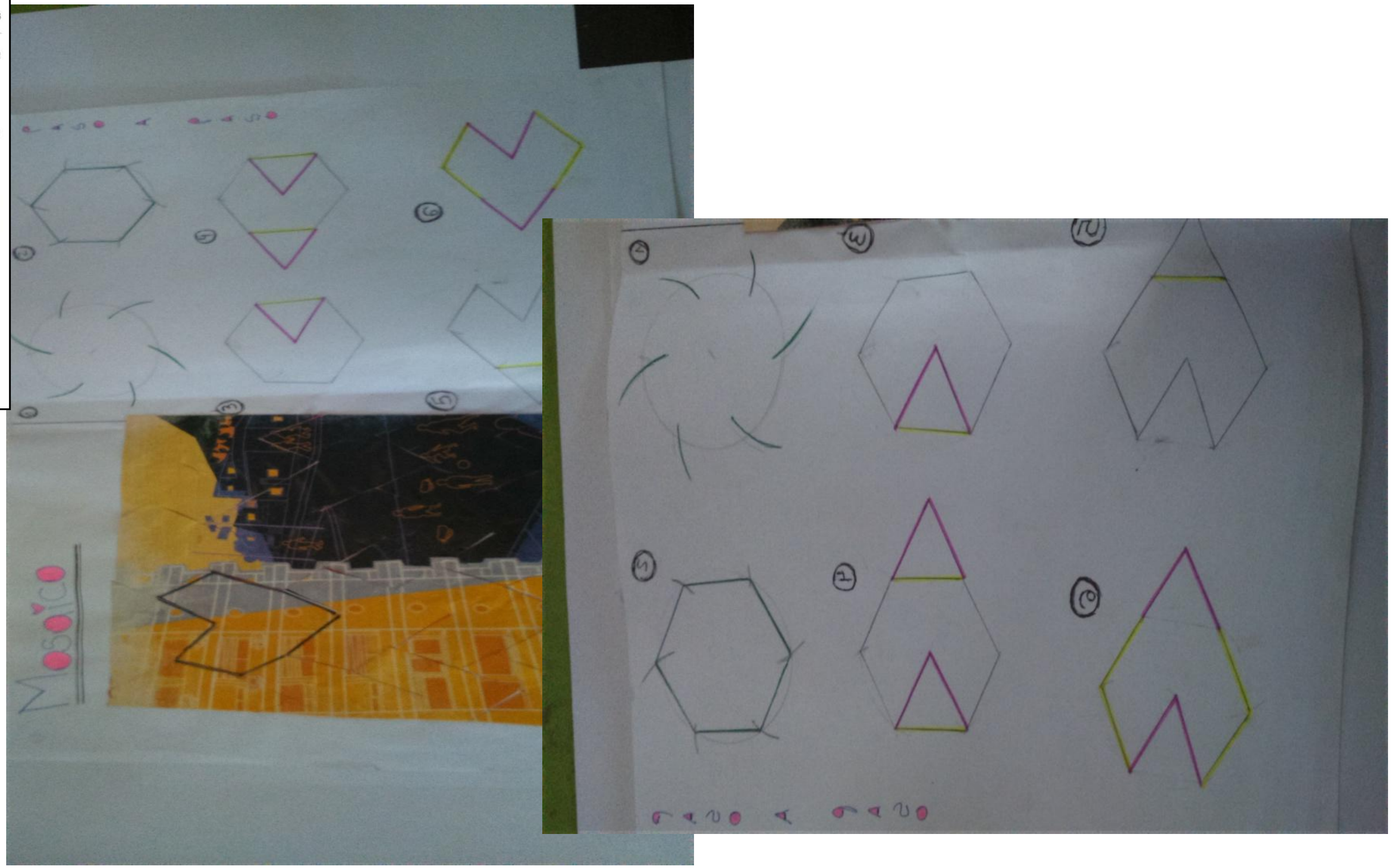
1) A partir de un polígono regular construyan una baldosa novedosa.

Para esto:

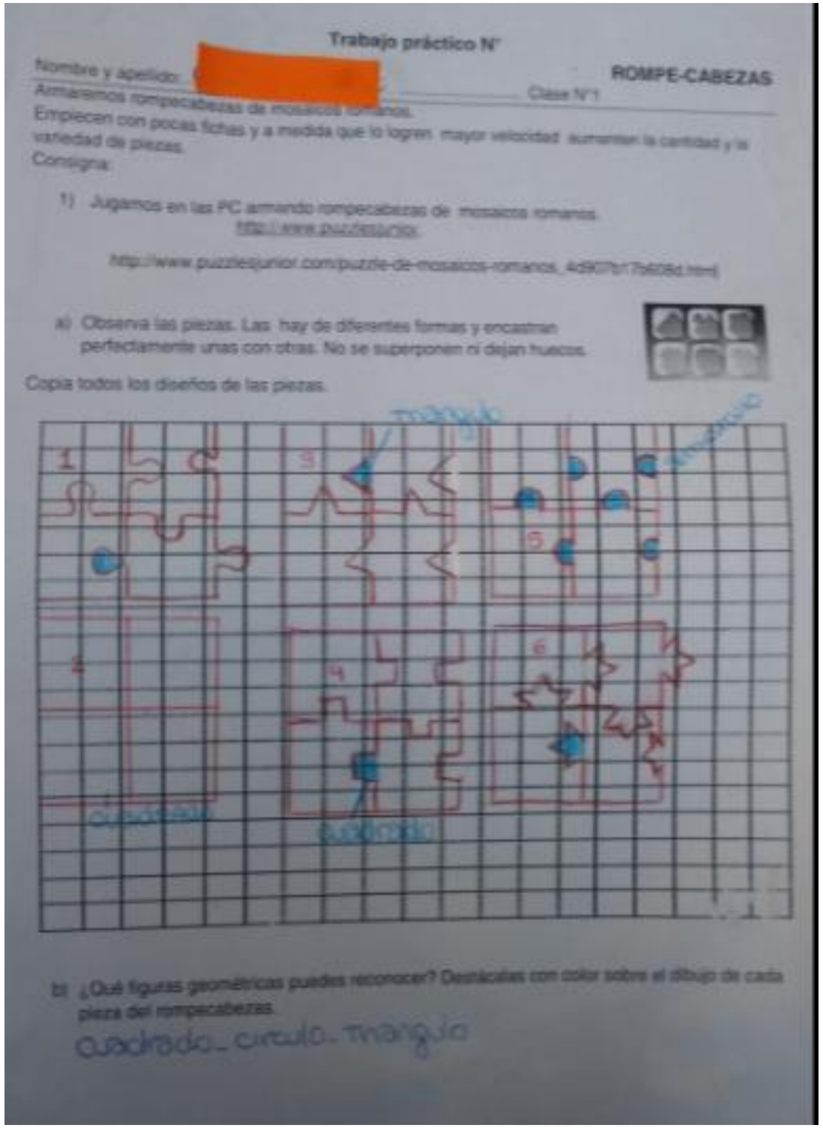
a) Elijan un polígono regular: triángulo, cuadrado o hexágono.
b) Diseñen un recorte, realizalo y peguen lo recortado en otro sector para armar un molde (en cartón o por calcado), o utilicen algún programa en PC si les resulta práctico
c) Verifiquen (mediante traslaciones, giros, etc.) que sirve para teselar la superficie.

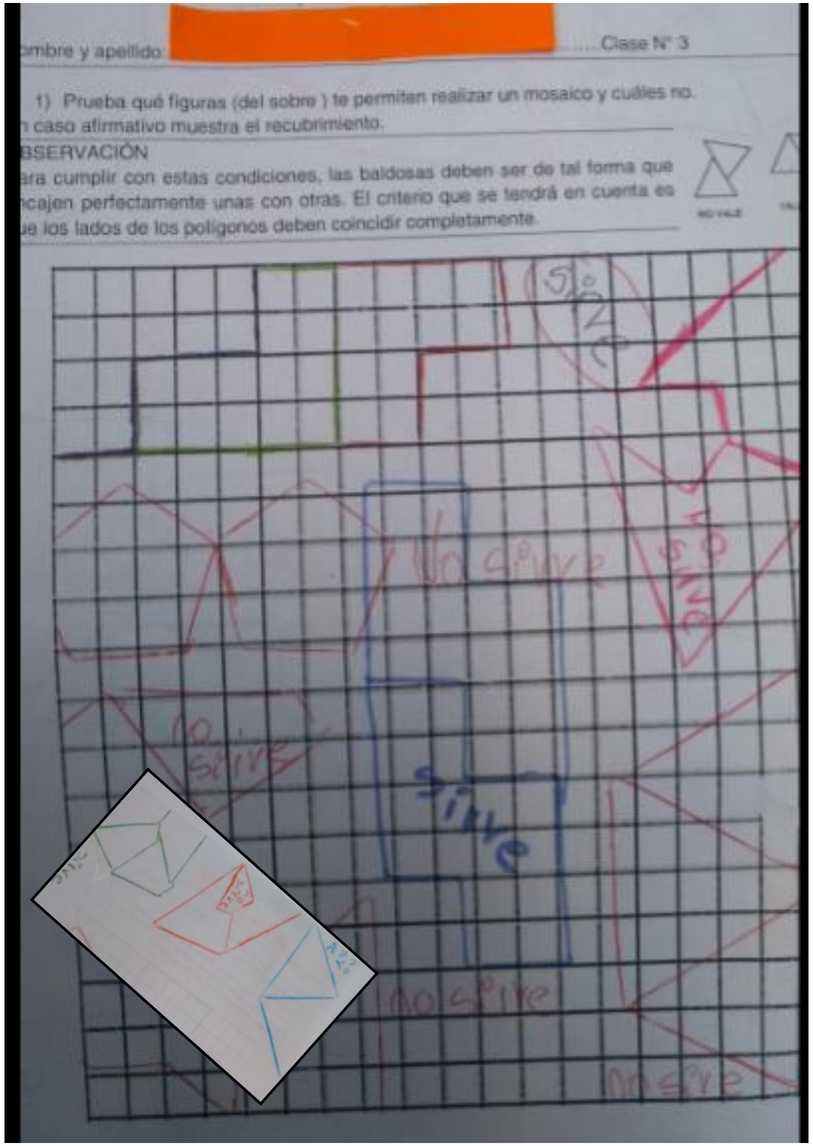
Inspírense observando la obra de Escher.

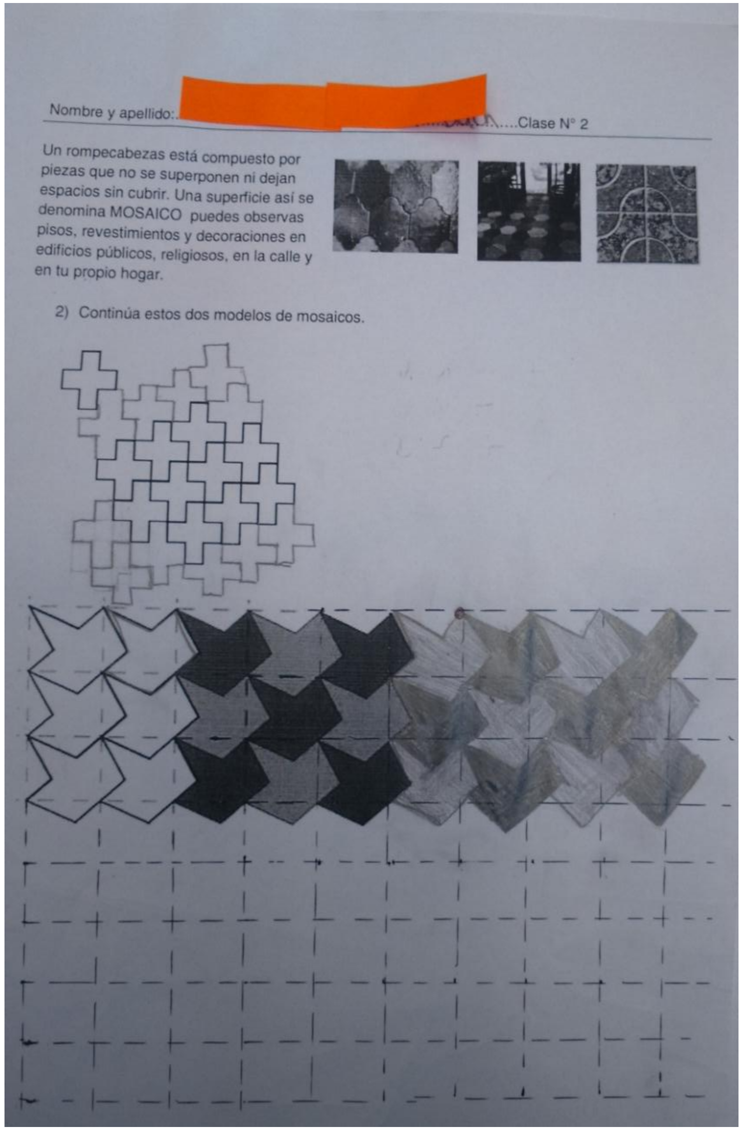
2) Armen el mosaico
a) Realicen el teselado recortando las teselas en hojas de colores.
b) Peguen las baldosas armando el mosaico.
3) Ahora pueden dibujar esta baldosa en el reverso de la imagen que trajeron para armar un rompecabezas original.
Recuerden mostrar el paso a paso.



ALUMNO B TRABAJO PRÁCTICO N°1





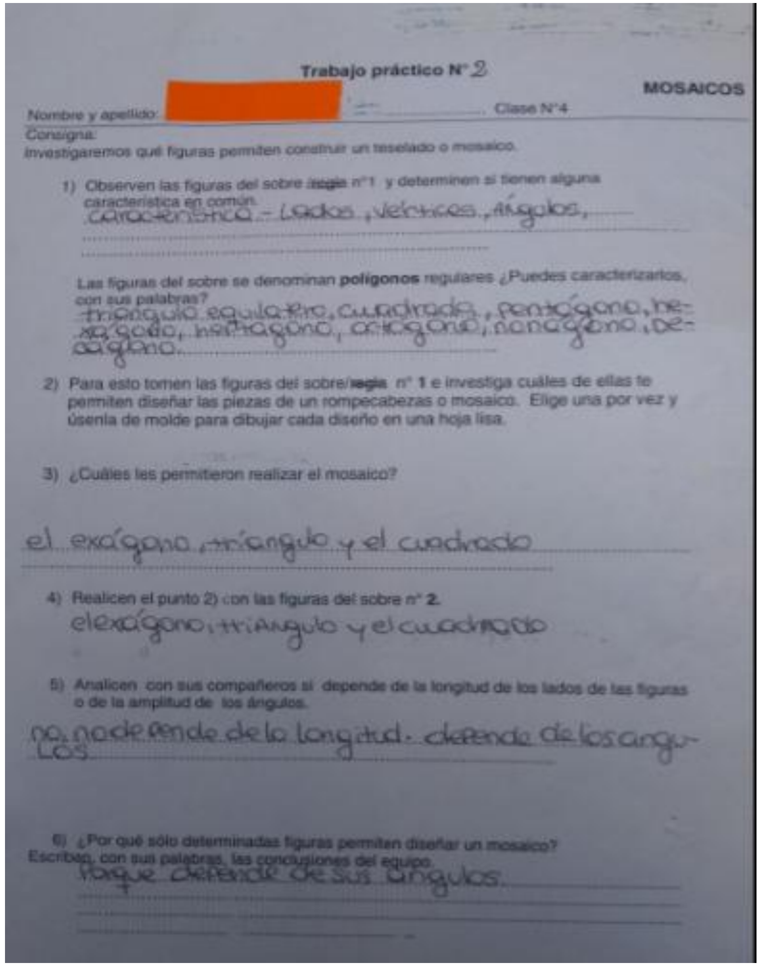


Nombre y apellido: [redacted]....Clase N° 2

Un rompecabezas está compuesto por piezas que no se superponen ni dejan espacios sin cubrir. Una superficie así se denomina MOSAICO puedes observas pisos, revestimientos y decoraciones en edificios públicos, religiosos, en la calle y en tu propio hogar.

2) Continúa estos dos modelos de mosaicos.

TRABAJO PRÁCTICO N ° 2



Trabajo práctico N° 2

MOSAICOS

Nombre y apellido: [redacted] .... Clase N°4

Consigna:

Investigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

1) Observen las figuras del sobre /regla n°1 y determinen si tienen alguna característica en común.
característica - Lados, vértices, ángulos,

Las figuras del sobre se denominan **polígonos** regulares ¿Puedes caracterizarlos, con sus palabras?
triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, nonágono, decágono.

2) Para esto tomen las figuras del sobre/regla n° **1** e investiga cuáles de ellas te permiten diseñar las piezas de un rompecabezas o mosaico. Elige una por vez y úsenla de molde para dibujar cada diseño en una hoja lisa.

3) ¿Cuáles les permitieron realizar el mosaico?

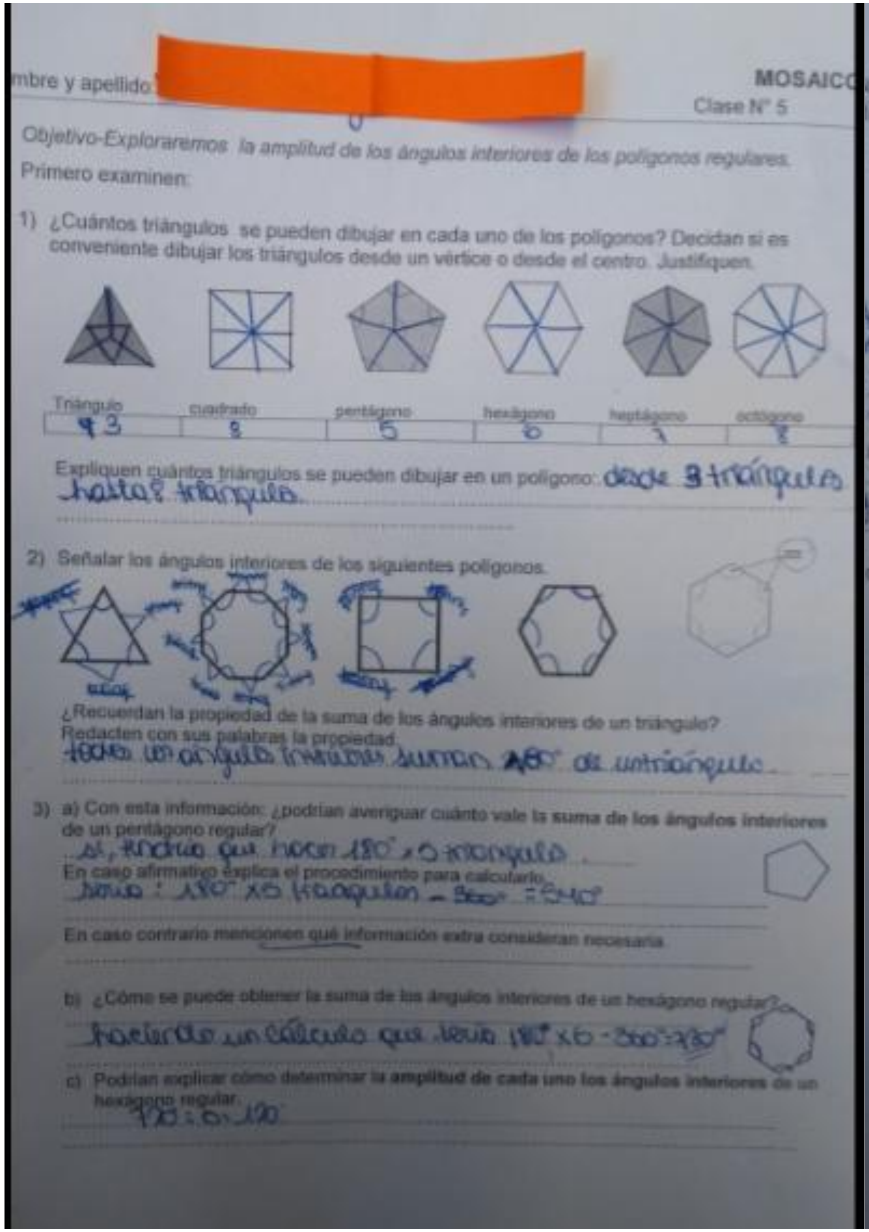
el exágono, triángulo y el cuadrado

4) Realicen el punto 2) con las figuras del sobre n° **2**.
el exágono, triángulo y el cuadrado

5) Analicen con sus compañeros si depende de la longitud de los lados de las figuras o de la amplitud de los ángulos.

no, no depende de la longitud. depende de los angulos

6) ¿Por qué sólo determinadas figuras permiten diseñar un mosaico?
Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.
Porque depende de sus ángulos.



mbre y apellido:

MOSAICO

Clase N° 5

Objetivo-Exploraremos la amplitud de los ángulos interiores de los polígonos regulares.

Primero examinen:

1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si es conveniente dibujar los triángulos desde un vértice o desde el centro. Justifiquen.

Triángulo	cuadrado	pentágono	hexágono	heptágono	octógono
3	8	5	6	7	8

Expliquen cuántos triángulos se pueden dibujar en un polígono: desde 3 triángulos hasta 8 triángulos.

2) Señalar los ángulos interiores de los siguientes polígonos.

¿Recuerdan la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? Redacten con sus palabras la propiedad.

todos los ángulos interiores suman 180° de un triángulo.

3) a) Con esta información: ¿podrían averiguar cuánto vale la **suma de los ángulos interiores** de un pentágono regular?

si, tendría que hacer 180° x 5 triángulos.

En caso afirmativo explica el procedimiento para calcularlo.

sería: 180° x 5 triángulos − 360° = 540°

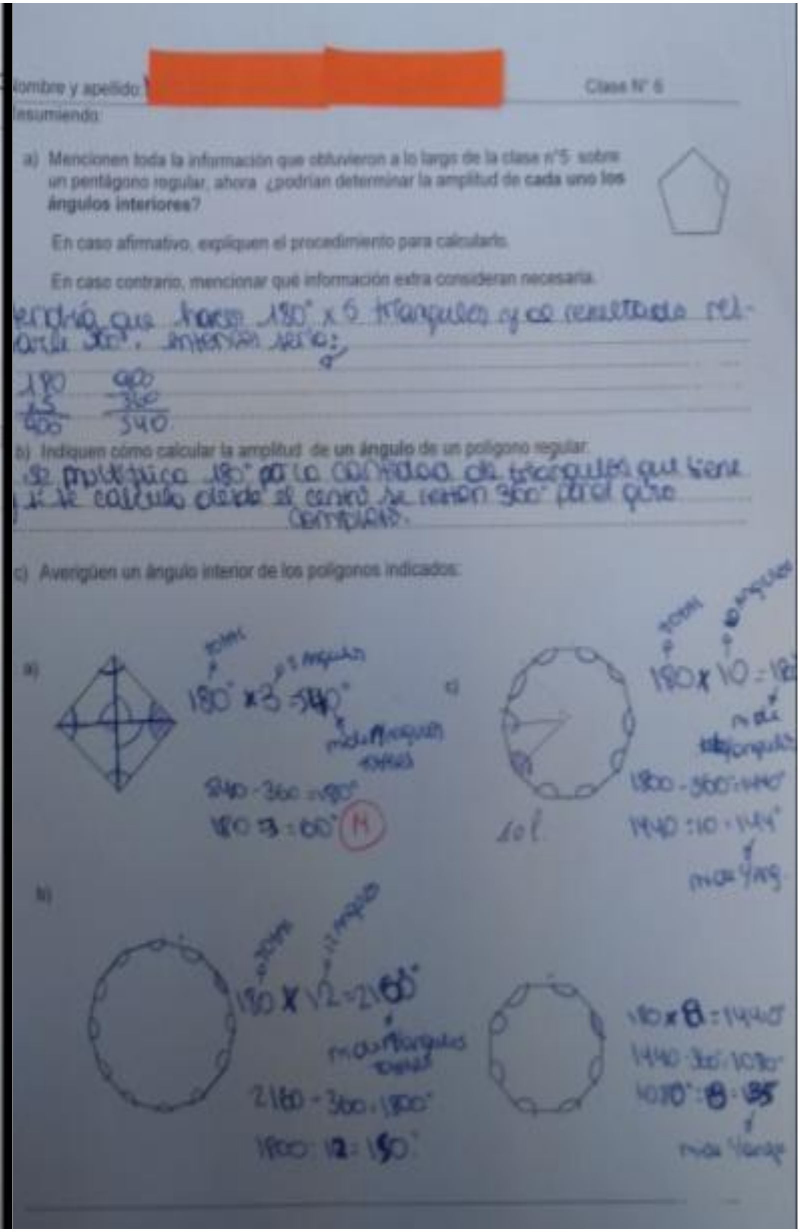
En caso contrario mencionen qué información extra consideran necesaria.

b) ¿Cómo se puede obtener la suma de los ángulos interiores de un hexágono regular?

haciendo un cálculo que sería 180° x 6 − 360° = 720°

c) Podrían explicar cómo determinar la **amplitud de cada uno los ángulos interiores** de un hexágono regular.

720 : 6 = 120



Nombre y apellido:

Clase N° 6

Resumiendo:

a) Mencionen toda la información que obtuvieron a lo largo de la clase n°5 sobre un pentágono regular, ahora ¿podrían determinar la amplitud de **cada uno los ángulos interiores**?

En caso afirmativo, expliquen el procedimiento para calcularlo.

En caso contrario, mencionar qué información extra consideran necesaria.

tendría que hacer 180° x 5 triángulos y el resultado restarle 360°, entonces sería:

180 x 5 = 900; 900 − 360 = 540

b) Indiquen cómo calcular la amplitud de un ángulo de un polígono regular.

se multiplica 180° por la cantidad de triángulos que tiene y si lo calculo desde el centro se restan 360° para el giro completo.

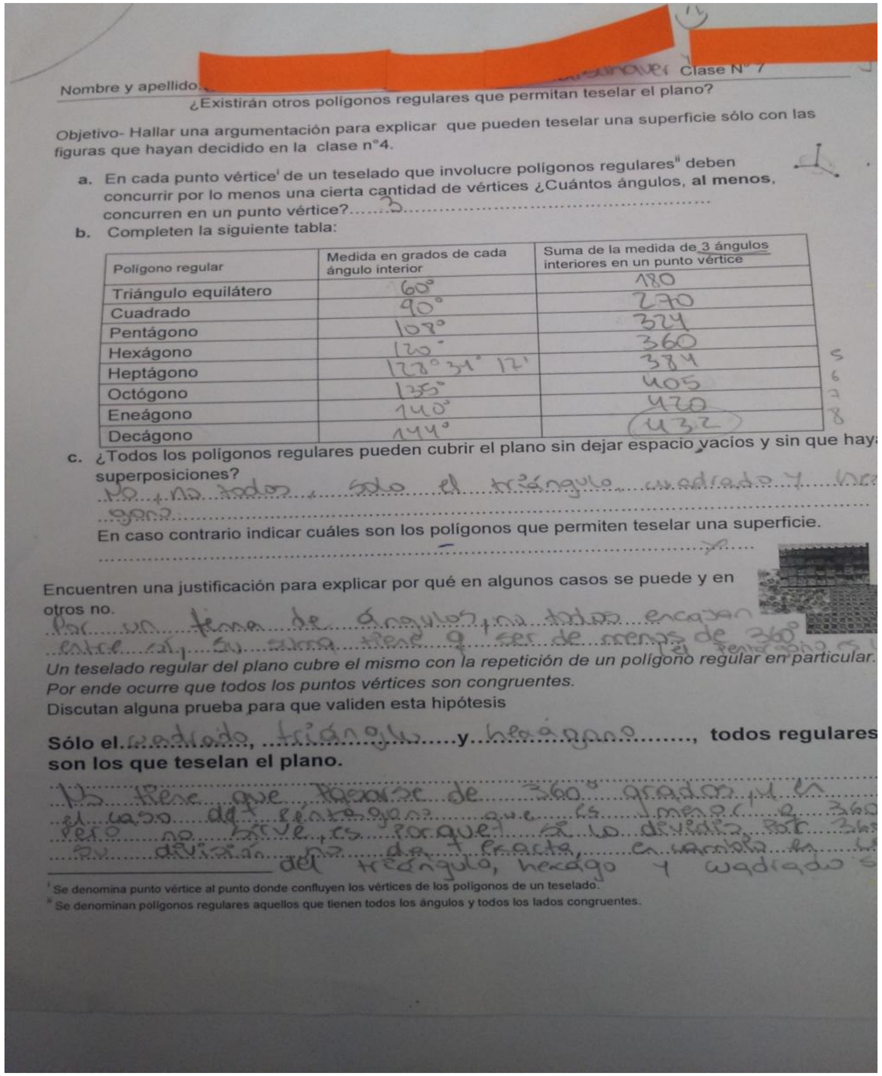
c) Averigüen un ángulo interior de los polígonos indicados:

a) 180° x 3 = 540°; 540 − 360 = 180°; 180 : 3 = 60°

c) 180 x 10 = 1800; 1800 − 360 = 1440°; 1440 : 10 = 144°

b) 180 x 12 = 2160°; 2160 − 360 = 1800°; 1800 : 12 = 150°

180 x 8 = 1440; 1440 − 360 = 1080°; 1080° : 8 = 135



Nombre y apellido [redacted] Clase N° 7

¿Existirán otros polígonos regulares que permitan teselar el plano?

Objetivo- Hallar una argumentación para explicar que pueden teselar una superficie sólo con las figuras que hayan decidido en la clase n°4.

a. En cada punto vértice[i] de un teselado que involucre polígonos regulares[ii] deben concurrir por lo menos una cierta cantidad de vértices ¿Cuántos ángulos, **al menos**, concurren en un punto vértice?......3

b. Completen la siguiente tabla:

Polígono regular	Medida en grados de cada ángulo interior	Suma de la medida de 3 ángulos interiores en un punto vértice
Triángulo equilátero	60°	180
Cuadrado	90°	270
Pentágono	108°	324
Hexágono	120°	360
Heptágono	128° 34' 17'	384
Octógono	135°	405
Eneágono	140°	420
Decágono	144°	432

c. ¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que hay superposiciones?

No, no todos, solo el triángulo, cuadrado y hexágono

En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie.

Encuentren una justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.

Por un tema de ángulos, no todos encajan entre sí, su suma tiene q' ser de menos de 360°

Un teselado regular del plano cubre el mismo con la repetición de un polígono regular en particular. Por ende ocurre que todos los puntos vértices son congruentes.

Discutan alguna prueba para que validen esta hipótesis

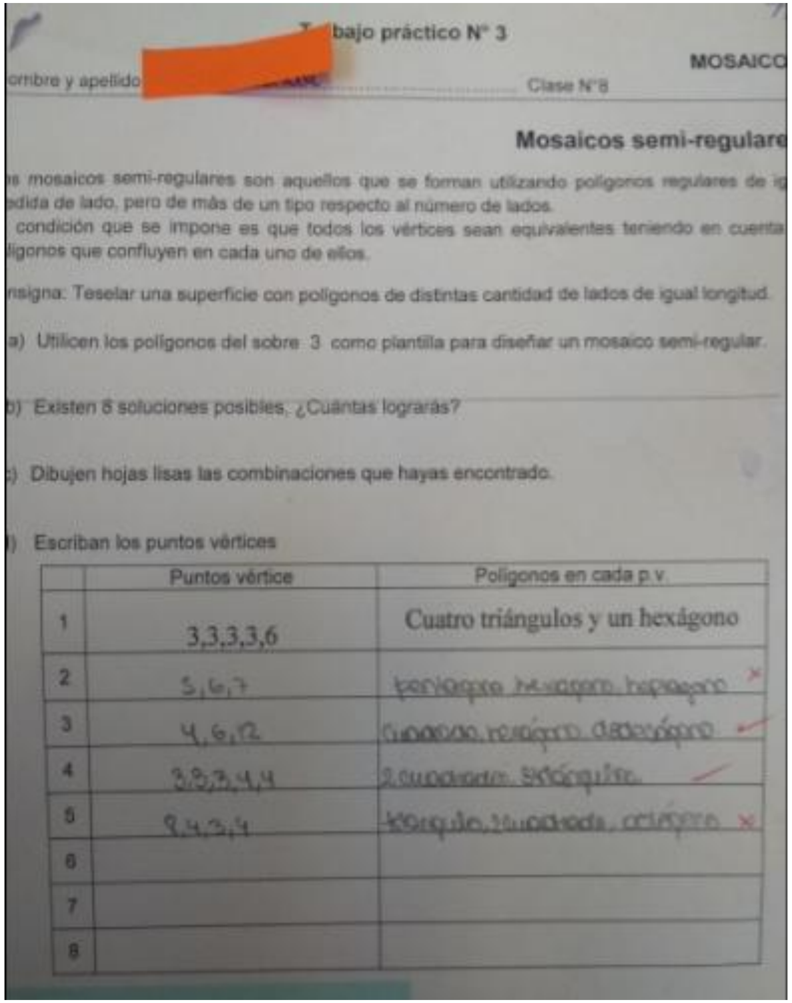
Sólo el cuadrado, triángulo **y** hexágono, **todos regulares son los que teselan el plano.**

No tiene que pasarse de 360° grados, y en el caso del pentágono que es menor a 360 pero no sirve, es porque si lo divides por 360 su división no da exacta, en cambio en el del triángulo, hexágono y cuadrado

[i] Se denomina punto vértice al punto donde confluyen los vértices de los polígonos de un teselado.

[ii] Se denominan polígonos regulares aquellos que tienen todos los ángulos y todos los lados congruentes.

TRABAJO PRÁCTICO N° 3



Trabajo práctico N° 3

MOSAICO

Nombre y apellido [redacted] Clase N°8

Mosaicos semi-regulare

...s mosaicos semi-regulares son aquellos que se forman utilizando polígonos regulares de ig... ...edida de lado, pero de más de un tipo respecto al número de lados.

... condición que se impone es que todos los vértices sean equivalentes teniendo en cuenta ...lígonos que confluyen en cada uno de ellos.

...nsigna: Teselar una superficie con polígonos de distintas cantidad de lados de igual longitud.

a) Utilicen los polígonos del sobre 3 como plantilla para diseñar un mosaico semi-regular.

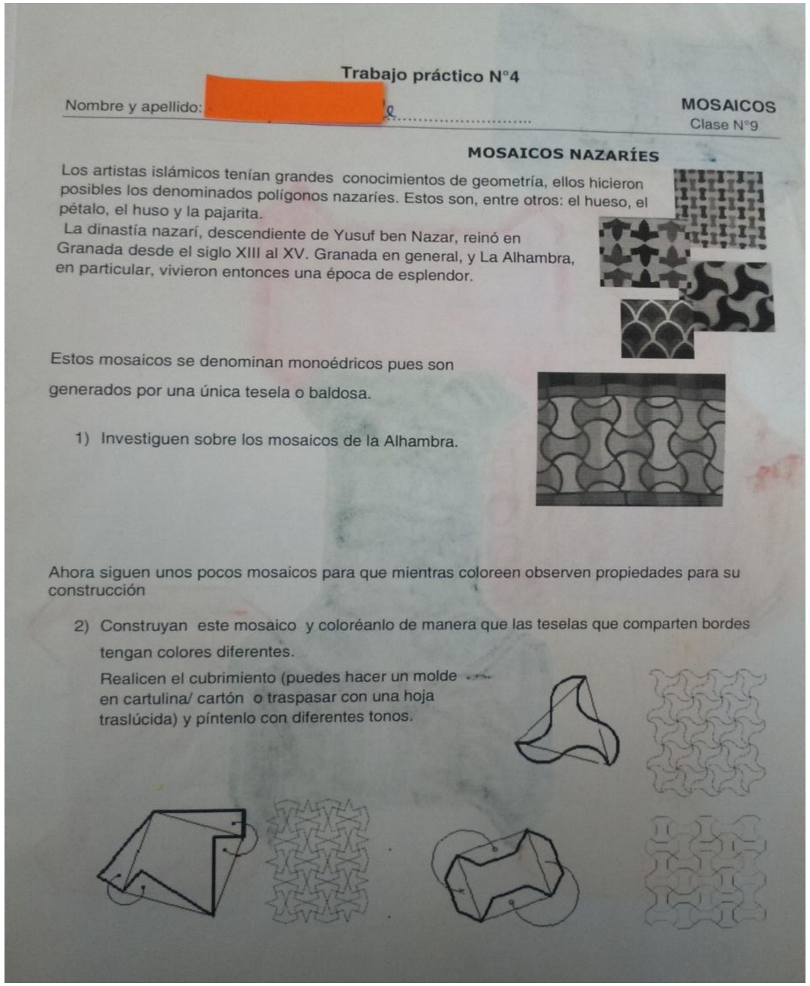
b) Existen 8 soluciones posibles, ¿Cuántas lograrás?

c) Dibujen hojas lisas las combinaciones que hayas encontrado.

d) Escriban los puntos vértices

	Puntos vértice	Polígonos en cada p.v.
1	3,3,3,3,6	Cuatro triángulos y un hexágono
2	5,6,7	pentágono, hexágono, heptágono
3	4,6,12	cuadrado, hexágono, dodecágono
4	3,3,3,4,4	2 cuadrados, 3 triángulos
5	3,4,3,4	triángulo, cuadrado, octógono
6		
7		
8		

TRABAJO PRÁCTICO N° 4


Trabajo práctico N°4

Nombre y apellido: [redacted]........................ MOSAICOS

Clase N°9

MOSAICOS NAZARÍES

Los artistas islámicos tenían grandes conocimientos de geometría, ellos hicieron posibles los denominados polígonos nazaríes. Estos son, entre otros: el hueso, el pétalo, el huso y la pajarita.

La dinastía nazarí, descendiente de Yusuf ben Nazar, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. Granada en general, y La Alhambra, en particular, vivieron entonces una época de esplendor.

Estos mosaicos se denominan monoédricos pues son generados por una única tesela o baldosa.

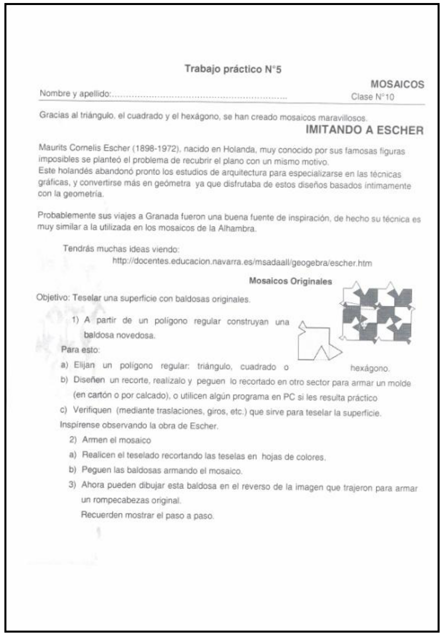
1) Investiguen sobre los mosaicos de la Alhambra.

Ahora siguen unos pocos mosaicos para que mientras coloreen observen propiedades para su construcción

2) Construyan este mosaico y coloréanlo de manera que las teselas que comparten bordes tengan colores diferentes.

Realicen el cubrimiento (puedes hacer un molde en cartulina/ cartón o traspasar con una hoja traslúcida) y píntenlo con diferentes tonos.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5



Trabajo práctico N°5

MOSAICOS

Nombre y apellido:..

Clase N°10

Gracias al triángulo, el cuadrado y el hexágono, se han creado mosaicos maravillosos.

IMITANDO A ESCHER

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), nacido en Holanda, muy conocido por sus famosas figuras imposibles se planteó el problema de recubrir el plano con un mismo motivo.
Este holandés abandonó pronto los estudios de arquitectura para especializarse en las técnicas gráficas, y convertirse más en geómetra ya que disfrutaba de estos diseños basados íntimamente con la geometría.

Probablemente sus viajes a Granada fueron una buena fuente de inspiración, de hecho su técnica es muy similar a la utilizada en los mosaicos de la Alhambra.

Tendrás muchas ideas viendo:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm

Mosaicos Originales

Objetivo: Teselar una superficie con baldosas originales.

1) A partir de un polígono regular construyan una baldosa novedosa.

Para esto:

a) Elijan un polígono regular: triángulo, cuadrado o hexágono.
b) Diseñen un recorte, realizalo y peguen lo recortado en otro sector para armar un molde (en cartón o por calcado), o utilicen algún programa en PC si les resulta práctico
c) Verifiquen (mediante traslaciones, giros, etc.) que sirve para teselar la superficie.

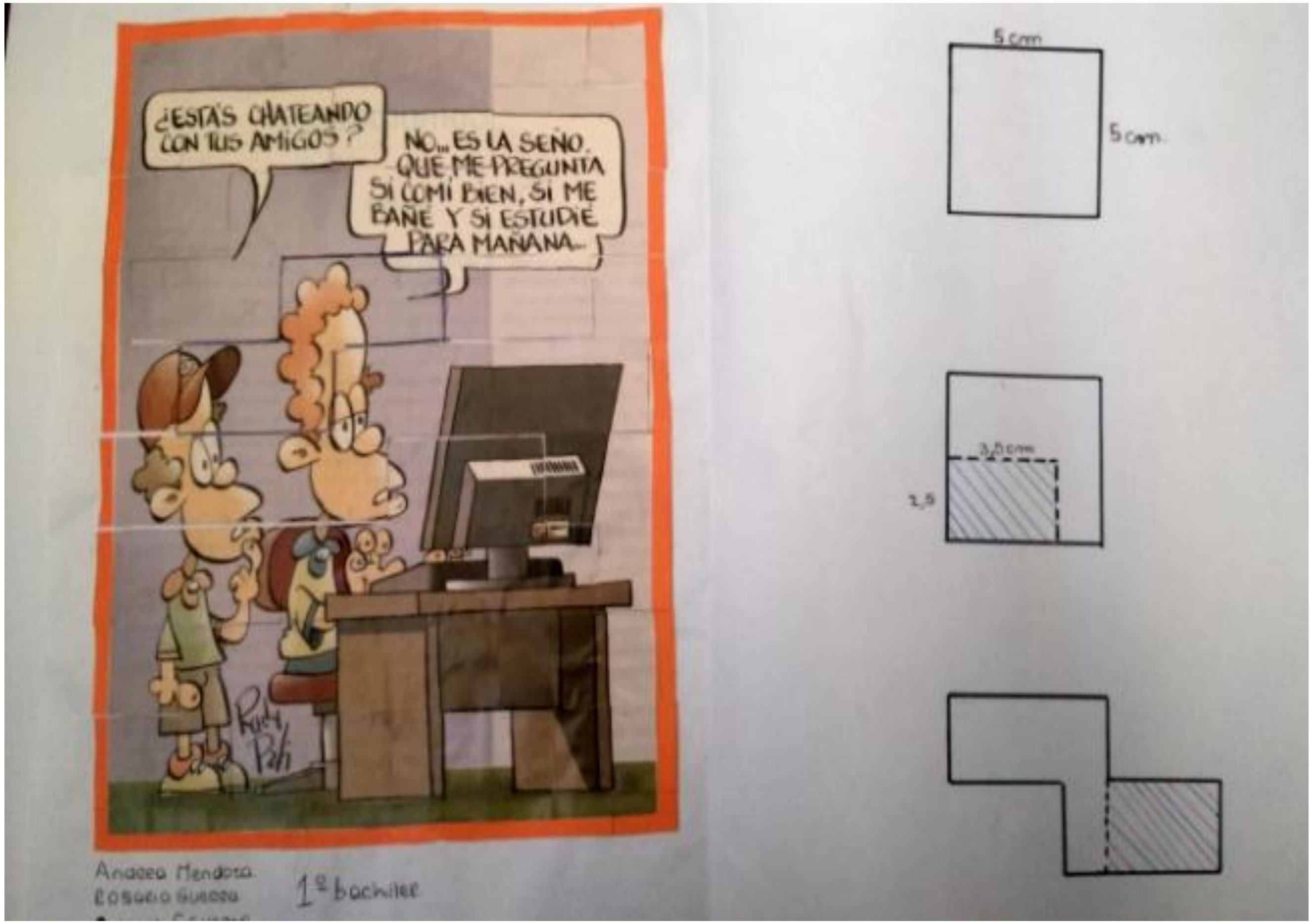
Inspírense observando la obra de Escher.

2) Armen el mosaico

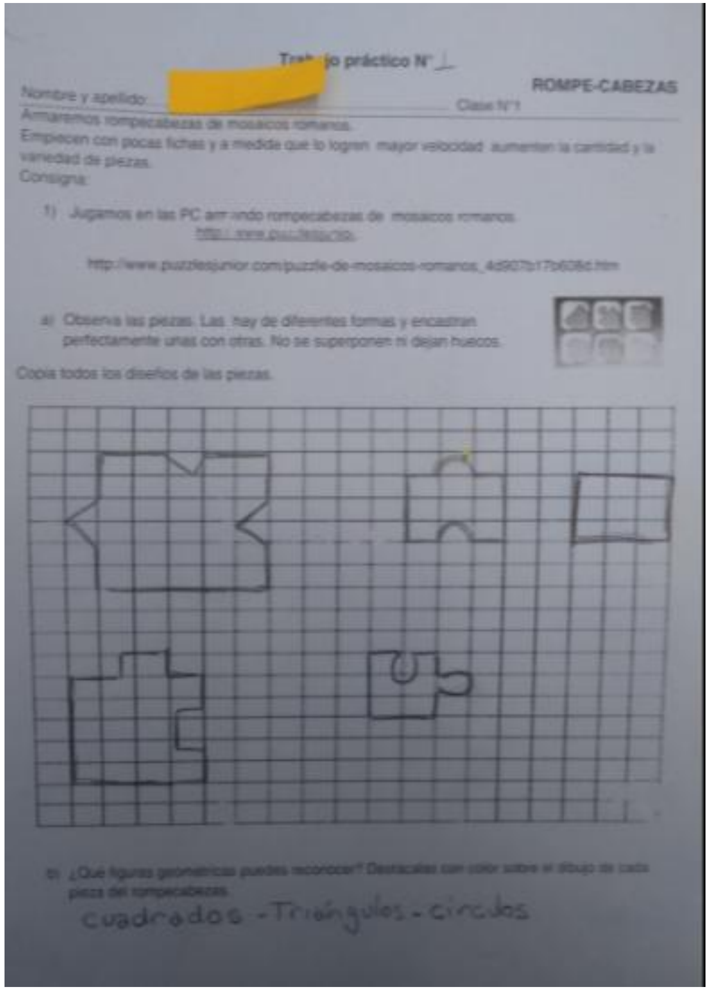
a) Realicen el teselado recortando las teselas en hojas de colores.
b) Peguen las baldosas armando el mosaico.

3) Ahora pueden dibujar esta baldosa en el reverso de la imagen que trajeron para armar un rompecabezas original.

Recuerden mostrar el paso a paso.



ALUMNO C TRABAJO PRÁCTICO N° 1



Trabajo práctico N° 1

ROMPE-CABEZAS

Nombre y apellido: Clase N°1

Armaremos rompecabezas de mosaicos romanos.

Empiecen con pocas fichas y a medida que lo logren mayor velocidad aumenten la cantidad y la variedad de piezas.

Consigna:

1) Jugamos en las PC armando rompecabezas de mosaicos romanos.

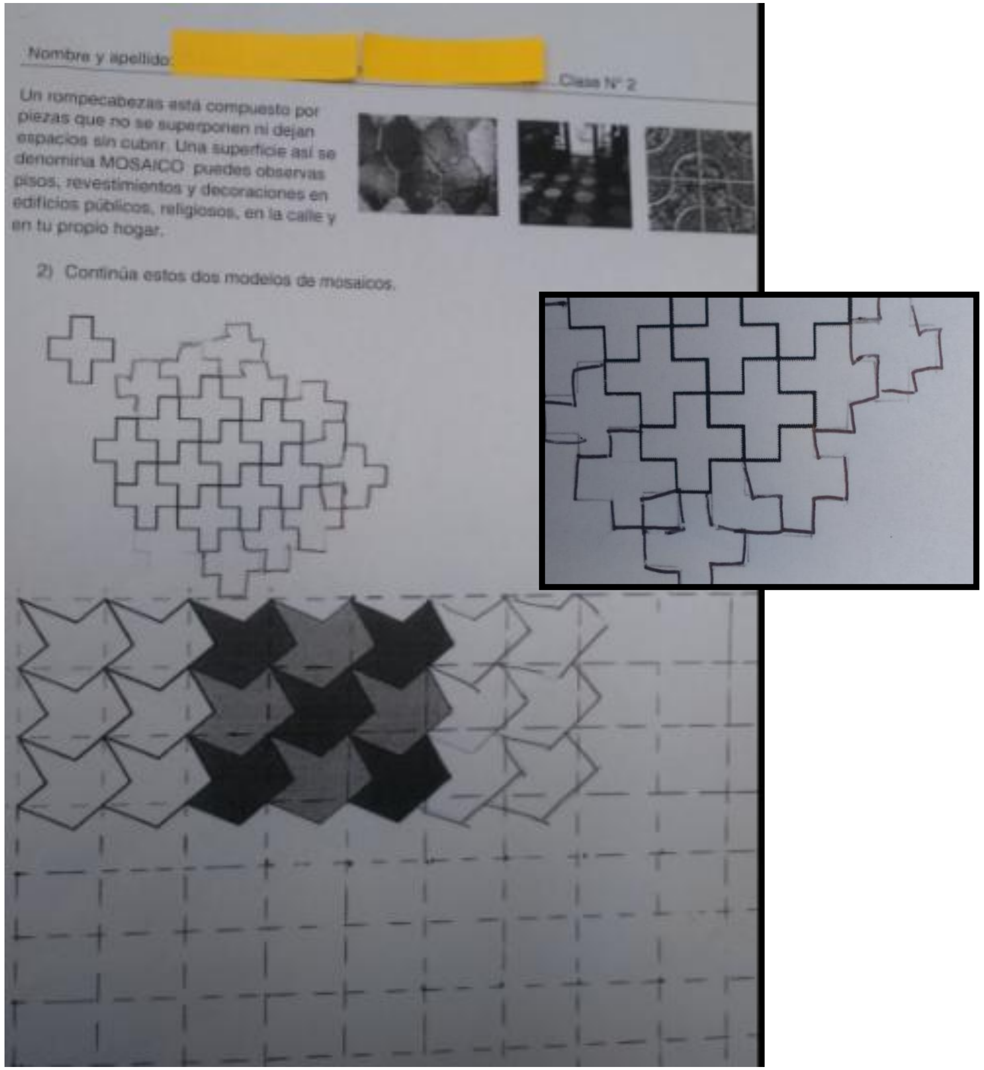
http://www.puzzlesjunior.com/puzzle-de-mosaicos-romanos_4d907b17b608d.htm

a) Observa las piezas. Las hay de diferentes formas y encastran perfectamente unas con otras. No se superponen ni dejan huecos.

Copia todos los diseños de las piezas.

b) ¿Qué figuras geométricas puedes reconocer? Destácalas con color sobre el dibujo de cada pieza del rompecabezas.

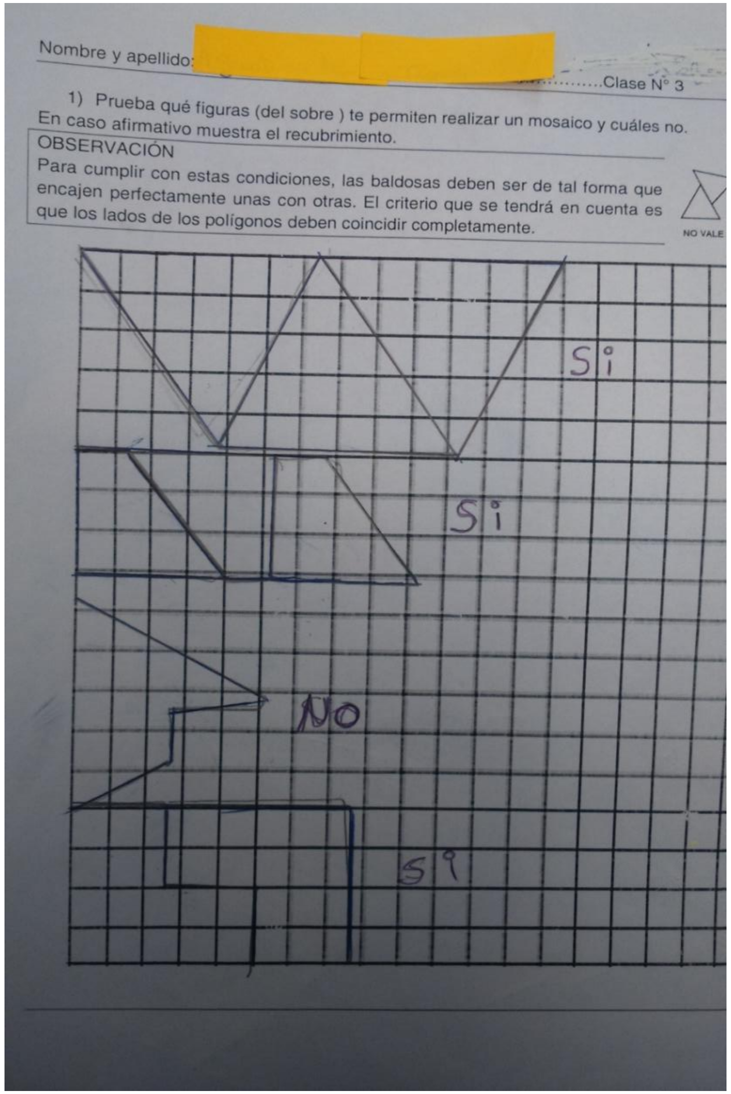
cuadrados - Triángulos - circulos



Nombre y apellido: Clase N° 2

Un rompecabezas está compuesto por piezas que no se superponen ni dejan espacios sin cubrir. Una superficie así se denomina MOSAICO puedes observas pisos, revestimientos y decoraciones en edificios públicos, religiosos, en la calle y en tu propio hogar.

2) Continúa estos dos modelos de mosaicos.



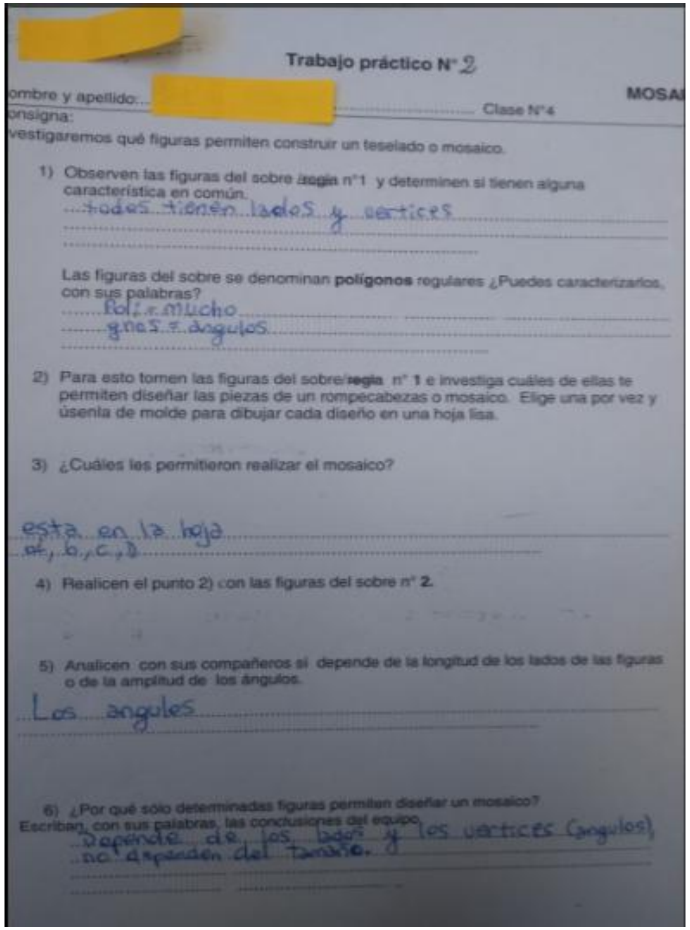
Nombre y apellido: [redacted] ....Clase N° 3

1) Prueba qué figuras (del sobre) te permiten realizar un mosaico y cuáles no. En caso afirmativo muestra el recubrimiento.

OBSERVACIÓN

Para cumplir con estas condiciones, las baldosas deben ser de tal forma que encajen perfectamente unas con otras. El criterio que se tendrá en cuenta es que los lados de los polígonos deben coincidir completamente.

TRABAJO PRÁCTICO N° 2



[redacted]

Trabajo práctico N° 2

ombre y apellido: [redacted] .... Clase N°4 **MOSAI**

onsigna:

vestigaremos qué figuras permiten construir un teselado o mosaico.

1) Observen las figuras del sobre /regla n°1 y determinen si tienen alguna característica en común.

todes tienen lados y vertices

Las figuras del sobre se denominan **polígonos** regulares ¿Puedes caracterizarlos, con sus palabras?

Poli = mucho
gnos = angulos

2) Para esto tomen las figuras del sobre/regla n° **1** e investiga cuáles de ellas te permiten diseñar las piezas de un rompecabezas o mosaico. Elige una por vez y úsenla de molde para dibujar cada diseño en una hoja lisa.

3) ¿Cuáles les permitieron realizar el mosaico?

esta en la hoja
a, b, c, d

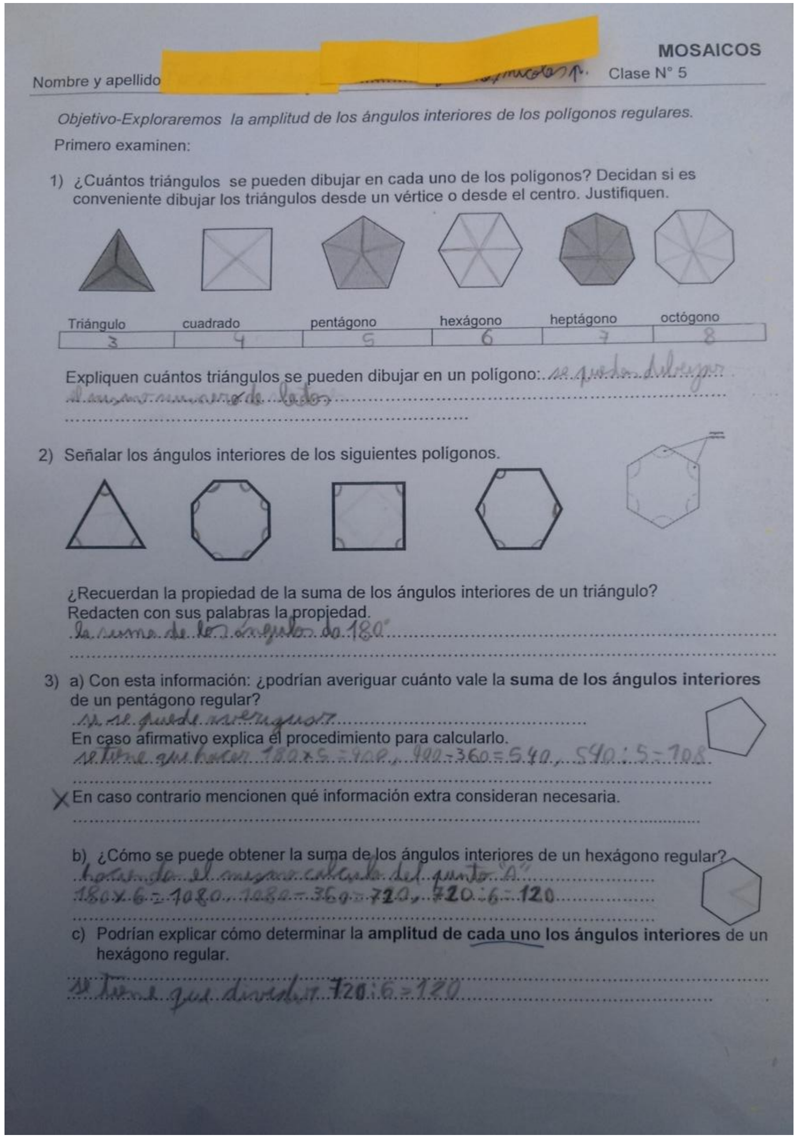
4) Realicen el punto 2) con las figuras del sobre n° **2**.

5) Analicen con sus compañeros si depende de la longitud de los lados de las figuras o de la amplitud de los ángulos.

Los angules

6) ¿Por qué sólo determinadas figuras permiten diseñar un mosaico? Escriban, con sus palabras, las conclusiones del equipo.

Depende de los lados y los vertices (angulos)
no dependen del tamaño.



MOSAICOS

Nombre y apellido [redacted] Clase N° 5

Objetivo-Exploraremos la amplitud de los ángulos interiores de los polígonos regulares.

Primero examinen:

1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si es conveniente dibujar los triángulos desde un vértice o desde el centro. Justifiquen.

Triángulo	cuadrado	pentágono	hexágono	heptágono	octógono
3	4	5	6	7	8

Expliquen cuántos triángulos se pueden dibujar en un polígono: se pueden dibujar el mismo numero de lados

2) Señalar los ángulos interiores de los siguientes polígonos.

¿Recuerdan la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? Redacten con sus palabras la propiedad.

la suma de los ángulos da 180°

3) a) Con esta información: ¿podrían averiguar cuánto vale la **suma de los ángulos interiores** de un pentágono regular?

si se puede averiguar

En caso afirmativo explica el procedimiento para calcularlo.

se tiene que hacer 180x5=900, 900-360=540, 540:5=108

En caso contrario mencionen qué información extra consideran necesaria.

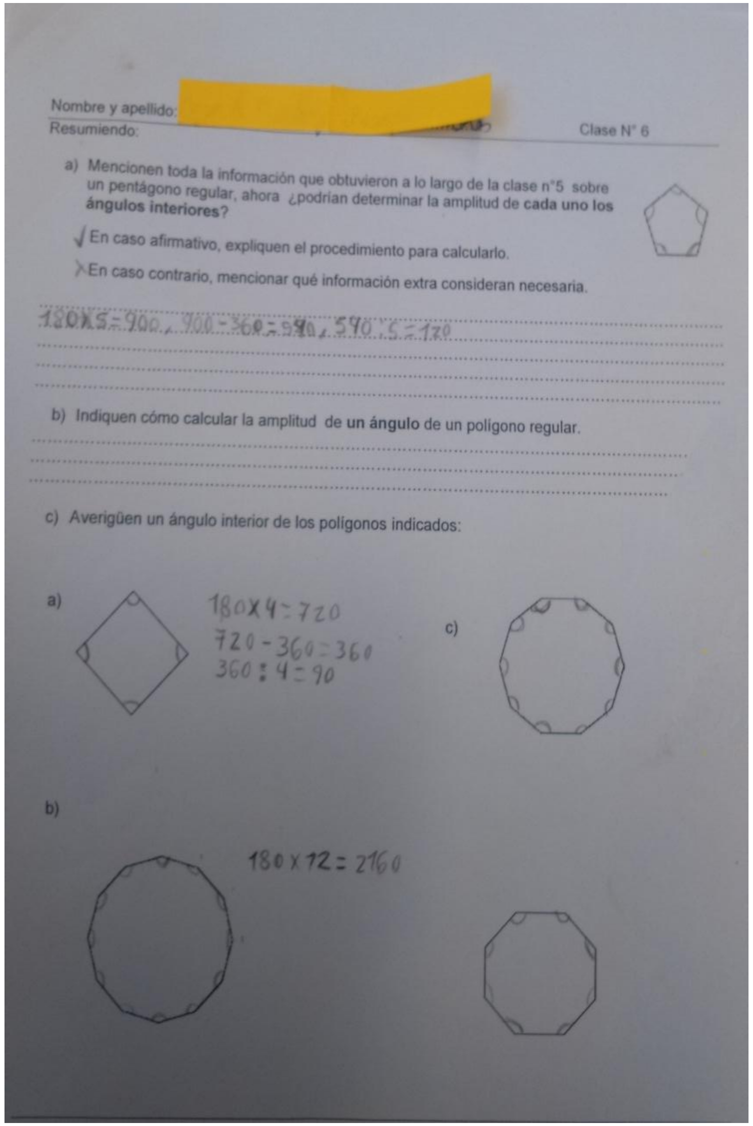
b) ¿Cómo se puede obtener la suma de los ángulos interiores de un hexágono regular?

haciendo el mismo calculo del punto "A"

180x6=1080, 1080-360=720, 720:6=120

c) Podrían explicar cómo determinar la **amplitud de cada uno los ángulos interiores** de un hexágono regular.

se tiene que dividir 720:6=120



Nombre y apellido: [redacted] Clase N° 6

Resumiendo:

a) Mencionen toda la información que obtuvieron a lo largo de la clase n°5 sobre un pentágono regular, ahora ¿podrían determinar la amplitud de **cada uno los ángulos interiores?**

√ En caso afirmativo, expliquen el procedimiento para calcularlo.

En caso contrario, mencionar qué información extra consideran necesaria.

180x5=900, 900-360=540, 540:5=120

b) Indiquen cómo calcular la amplitud de **un ángulo** de un polígono regular.

c) Averigüen un ángulo interior de los polígonos indicados:

a) 180x4=720

720-360=360

360:4=90

c)

b) 180x12=2160

Nombre y apellido: [illegible] Clase N° 7

¿Existirán otros polígonos regulares que permitan teselar el plano?

Objetivo- Hallar una argumentación para explicar que pueden teselar una superficie sólo con las figuras que hayan decidido en la clase n°4.

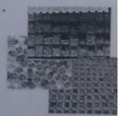
a. En cada punto vértice[i] de un teselado que involucre polígonos regulares[ii] deben concurrir por lo menos una cierta cantidad de vértices ¿Cuántos ángulos, **al menos**, concurren en un punto vértice? Tienen que haber 3 ángulos por lo menos

b. Completen la siguiente tabla:

Polígono regular	Medida en grados de cada ángulo interior	Suma de la medida de 3 ángulos interiores en un punto vértice
Triángulo equilátero	60	180
Cuadrado	90	270
Pentágono	108	324
Hexágono	120	360
Heptágono	128	384
Octógono	135	405
Eneágono	140	420
Decágono	144	432

c. ¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que ha[y] superposiciones?
no, no todos pueden cubrir el plano sin dejar espacios

En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie.
Triangulo, cuadrado y hexágono



Encuentren una justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.
porque quedan huecos y 3 ángulos no pueden pasarse de 360°

Un teselado regular del plano cubre el mismo con la repetición de un polígono regular en particular. Por ende ocurre que todos los puntos vértices son congruentes.
Discutan alguna prueba para que validen esta hipótesis

Sólo el Triángulo, Cuadrado **y** Hexágono, **todos regulares, son los que teselan el plano.**
con algunos polígonos regulares se puede teselar y con otros no porque el ángulo interior debe medir justo, no puede dividirse quede con coma.

[i] Se denomina punto vértice al punto donde confluyen los vértices de los polígonos de un teselado.
[ii] Se denominan polígonos regulares aquellos que tienen todos los ángulos y todos los lados congruentes.

TRABAJO PRÁCTICO N ° 3

[...]abajo práctico N° 3 **MOSAICOS**

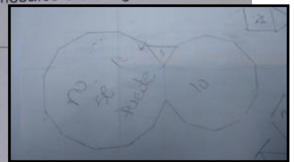
[N]ombre y apellido: [illegible] Clase N°8

Mosaicos semi-regulares.

[L]os mosaicos semi-regulares son aquellos que se forman utilizando polígonos regulares de igual [m]edida de lado, pero de más de un tipo respecto al número de lados.
[L]a condición que se impone es que todos los vértices sean equivalentes teniendo en cuenta los [p]olígonos que confluyen en cada uno de ellos.

[Co]nsigna: Teselar una superficie con polígonos de distintas cantidad de lados de igual longitud.

a) Utilicen los polígonos del sobre 3 como plantilla para diseñar un mosaico semi-regular.

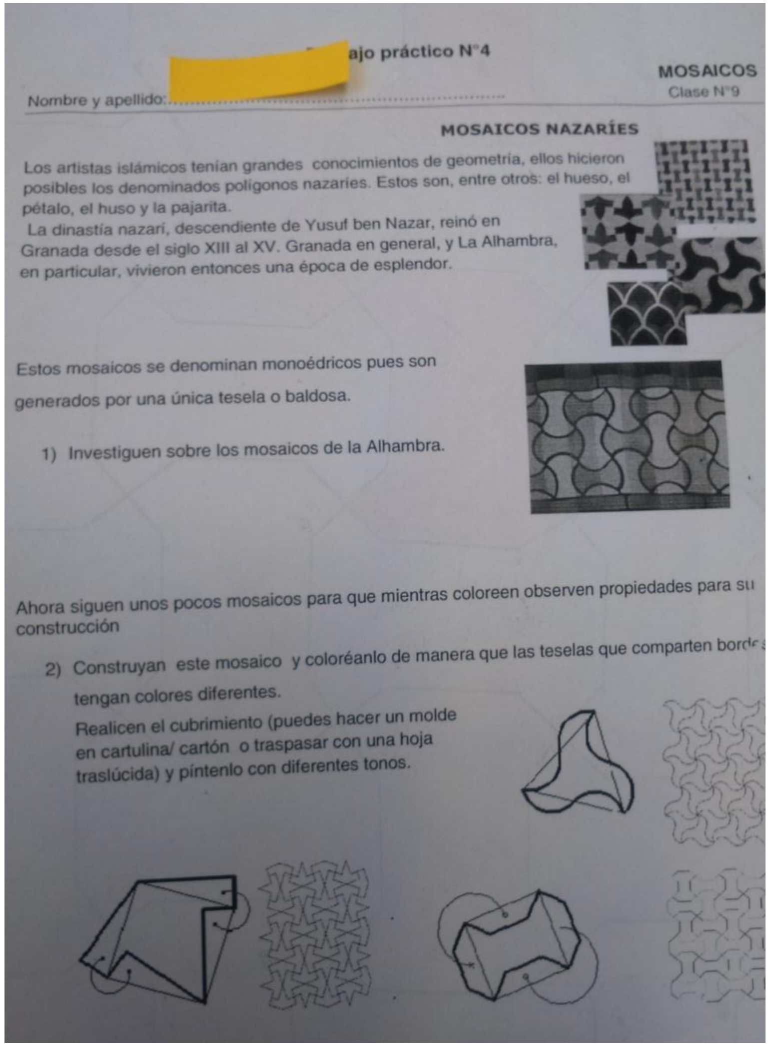


b) Existen 8 soluciones posibles, ¿Cuántas lograrás?
4

c) Dibujen hojas lisas las combinaciones que hayas encontrado.

d) Escriban los puntos vértices

	Puntos vértice	Polígonos en cada p.v.
1	3,3,3,3,6	Cuatro triángulos y un hexágono
2	4, 6, 12	dodecágono, hexágono, cuadrado ✓
3	3, 3, 3, 4, 4	2 cuadrados, 3 triang. ✓
4	5, 6, 7	heptágono, hexágono y Pentágono ✗
5	8, 4, 3, 4	octogono, cuadrado, triangulo ✗
6		
7		
8		


ajo práctico N°4

MOSAICOS
Clase N°9

Nombre y apellido:...

MOSAICOS NAZARÍES

Los artistas islámicos tenían grandes conocimientos de geometría, ellos hicieron posibles los denominados polígonos nazaríes. Estos son, entre otros: el hueso, el pétalo, el huso y la pajarita.
La dinastía nazarí, descendiente de Yusuf ben Nazar, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. Granada en general, y La Alhambra, en particular, vivieron entonces una época de esplendor.

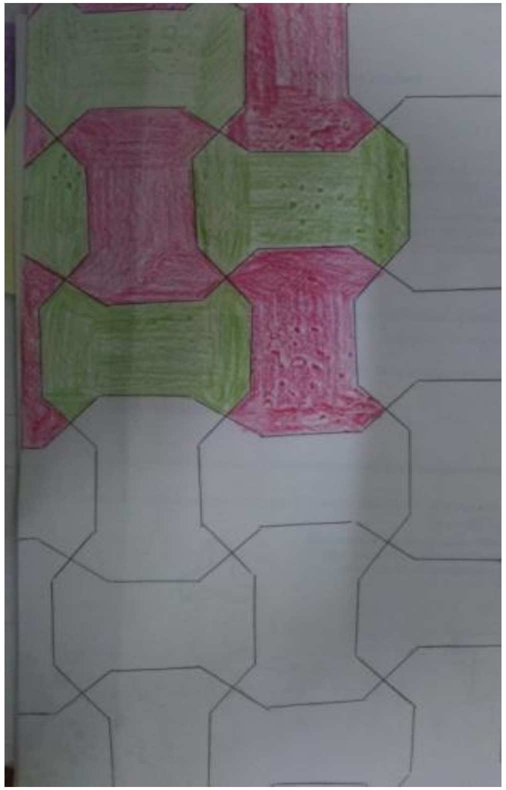
Estos mosaicos se denominan monoédricos pues son generados por una única tesela o baldosa.

1) Investiguen sobre los mosaicos de la Alhambra.

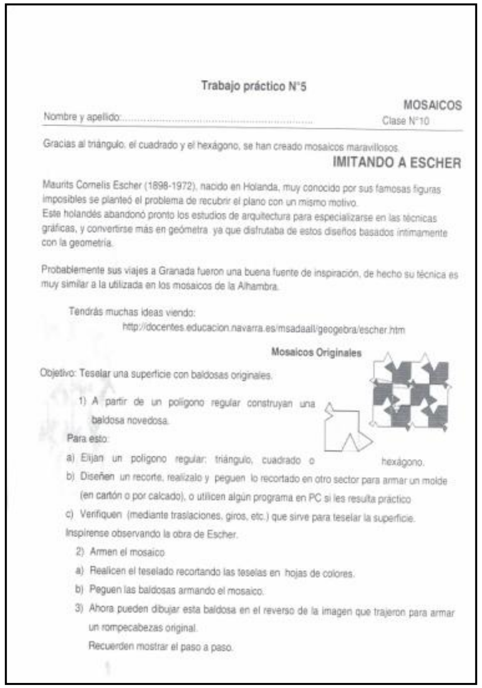
Ahora siguen unos pocos mosaicos para que mientras coloreen observen propiedades para su construcción

2) Construyan este mosaico y coloréanlo de manera que las teselas que comparten bord
tengan colores diferentes.
Realicen el cubrimiento (puedes hacer un molde en cartulina/ cartón o traspasar con una hoja traslúcida) y píntenlo con diferentes tonos.

TRABAJO PRÁCTICO N° 4



TRABAJO PRÁCTICO N ° 5



Trabajo práctico N°5

MOSAICOS

Nombre y apellido:..

Clase N°10

Gracias al triángulo, el cuadrado y el hexágono, se han creado mosaicos maravillosos.

IMITANDO A ESCHER

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), nacido en Holanda, muy conocido por sus famosas figuras imposibles se planteó el problema de recubrir el plano con un mismo motivo.
Este holandés abandonó pronto los estudios de arquitectura para especializarse en las técnicas gráficas, y convertirse más en geómetra ya que disfrutaba de estos diseños basados íntimamente con la geometría.

Probablemente sus viajes a Granada fueron una buena fuente de inspiración, de hecho su técnica es muy similar a la utilizada en los mosaicos de la Alhambra.

Tendrás muchas ideas viendo:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm

Mosaicos Originales

Objetivo: Teselar una superficie con baldosas originales.

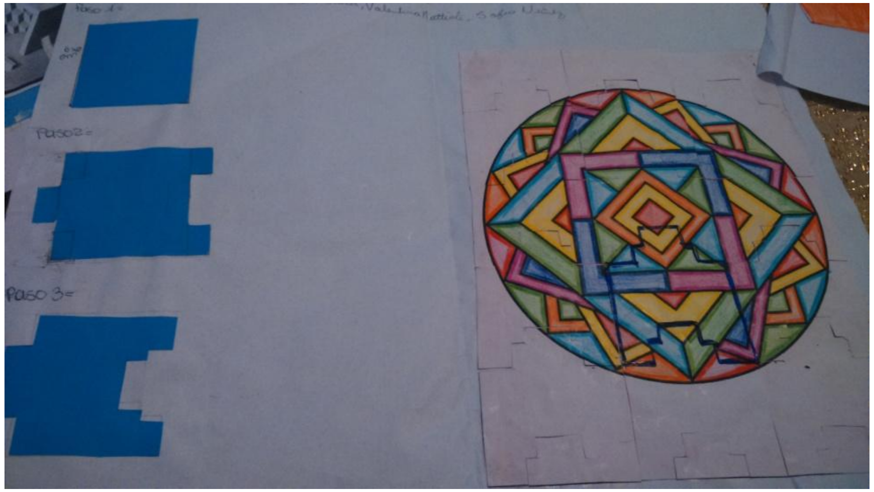
1) A partir de un polígono regular construyan una baldosa novedosa.

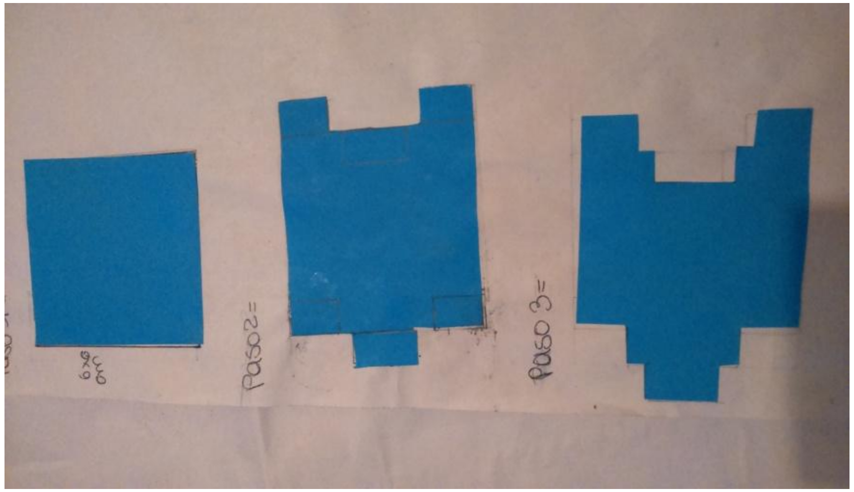
Para esto:

a) Elijan un polígono regular: triángulo, cuadrado o hexágono.
b) Diseñen un recorte, realizalo y peguen lo recortado en otro sector para armar un molde (en cartón o por calcado), o utilicen algún programa en PC si les resulta práctico
c) Verifiquen (mediante traslaciones, giros, etc.) que sirve para teselar la superficie.

Inspirense observando la obra de Escher.

2) Armen el mosaico
a) Realicen el teselado recortando las teselas en hojas de colores.
b) Peguen las baldosas armando el mosaico.
3) Ahora pueden dibujar esta baldosa en el reverso de la imagen que trajeron para armar un rompecabezas original.
Recuerden mostrar el paso a paso.





ANEXO N° 4

IMÁGENES

IMAGEN N°1
CATEDRAL DE SALTA
(FOTO PROPIA)

IMAGEN N°2
MOSAICO DE LA ENTRADA DE LA CATEDRAL DE SALTA
(FOTOS PROPIA)

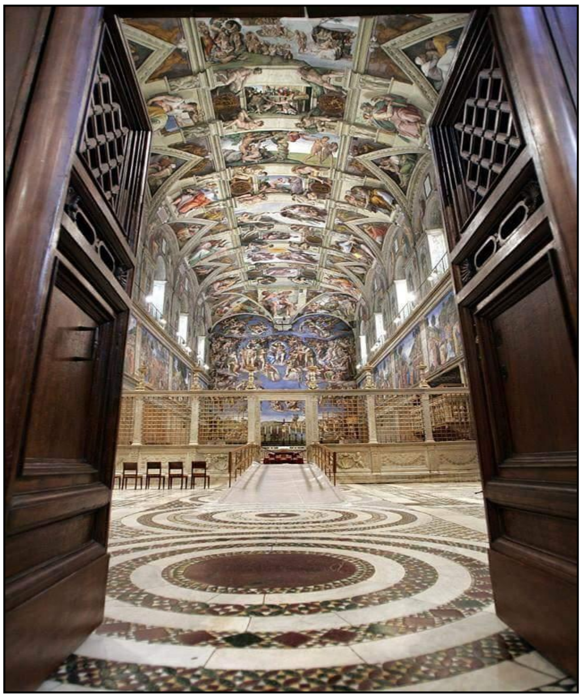


IMAGEN N°3
CAPILLA SIXTINA (ITALIA)
(FOTO DE NICOLÁL PASZIEKNIK)

IMAGEN N°4
CALLE DE POMPEYA (ITALIA)
(FOTO PROPIA)

IMGEN N° 5
MUSEO DE TÚNEZ
Monastir
(FOTO PROPIA)

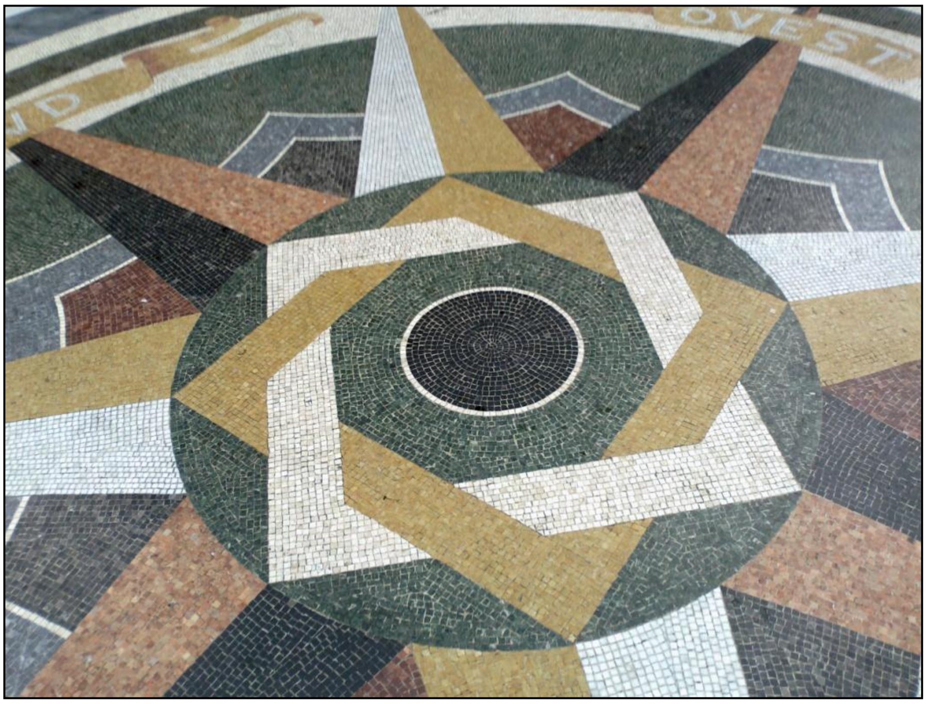


IMAGEN N° 6
FOTO DE
NÁPOLES (ITALIA)
(FOTO PROPIA)

IMAGEN N°7
ENTRADA DEL PALACIO
DE TOPKANI (TURQUÍA)
(FOTO PROPIA)

IMAGEN N° 8 PANAL DE ABEJAS
(Imagen de internet)

IMAGEN N°9 PIEL DE LOS ANIMALES
(Imagen de internet)

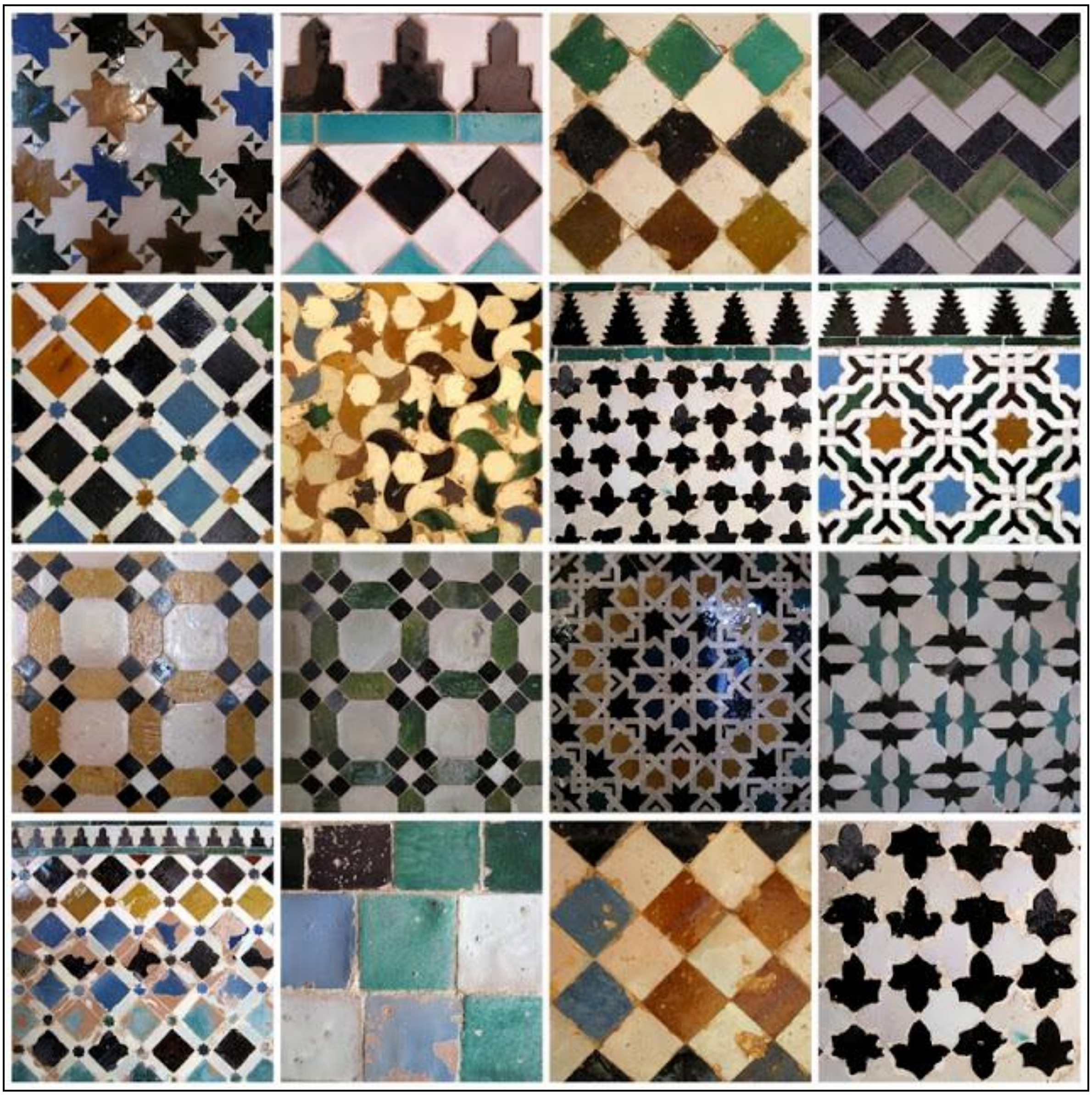
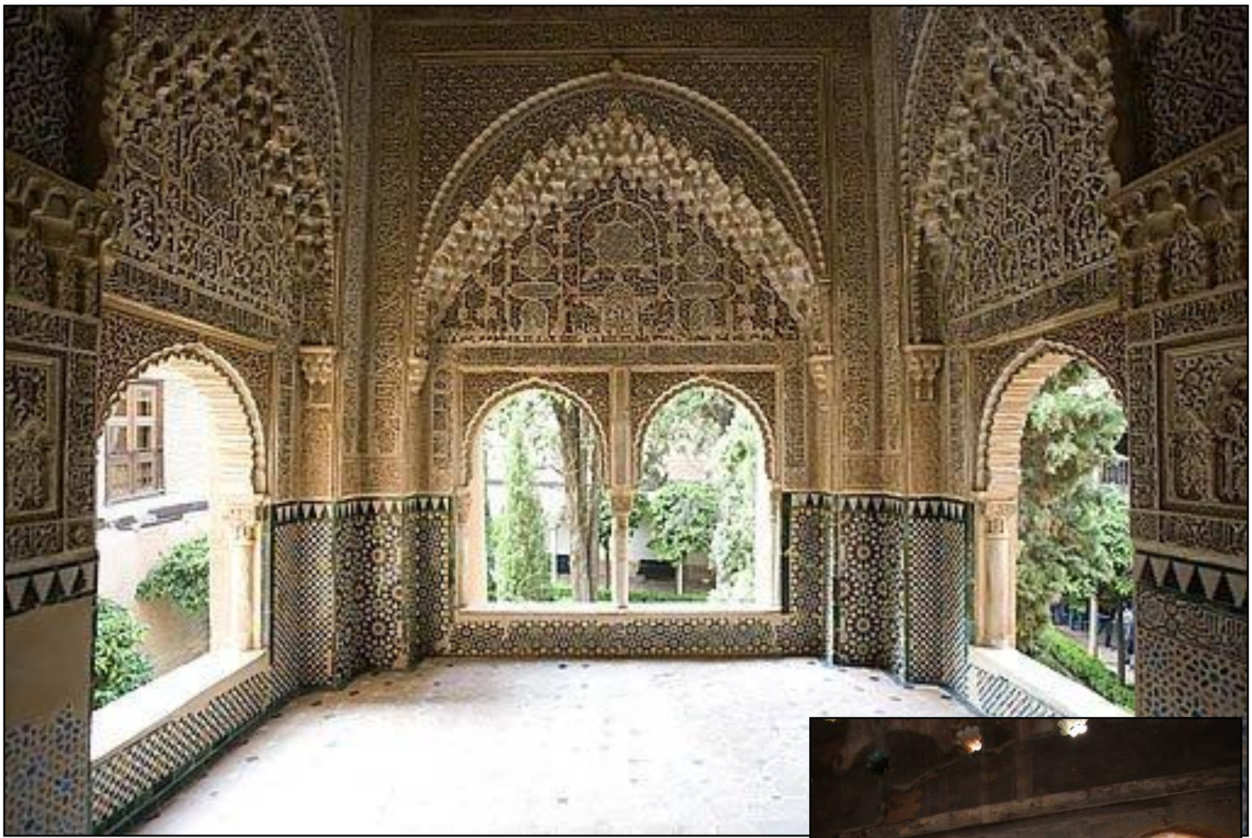


IMAGEN N°10 MOSAICOS DE LA ALHAMBRA
(IMAGEN DE INTERNET)



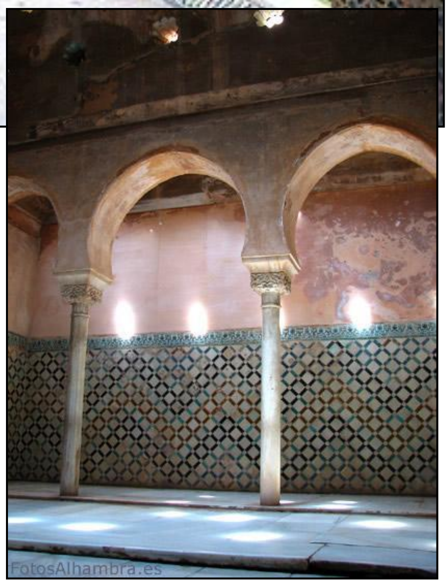
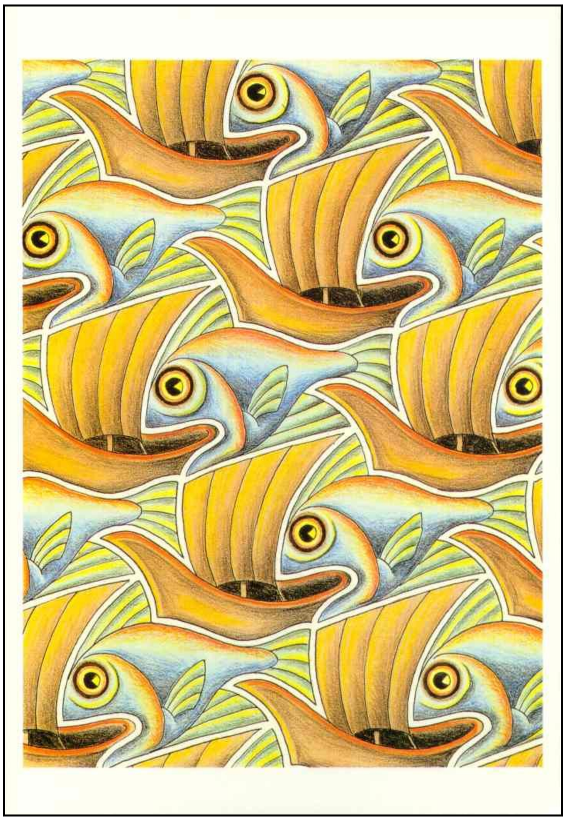
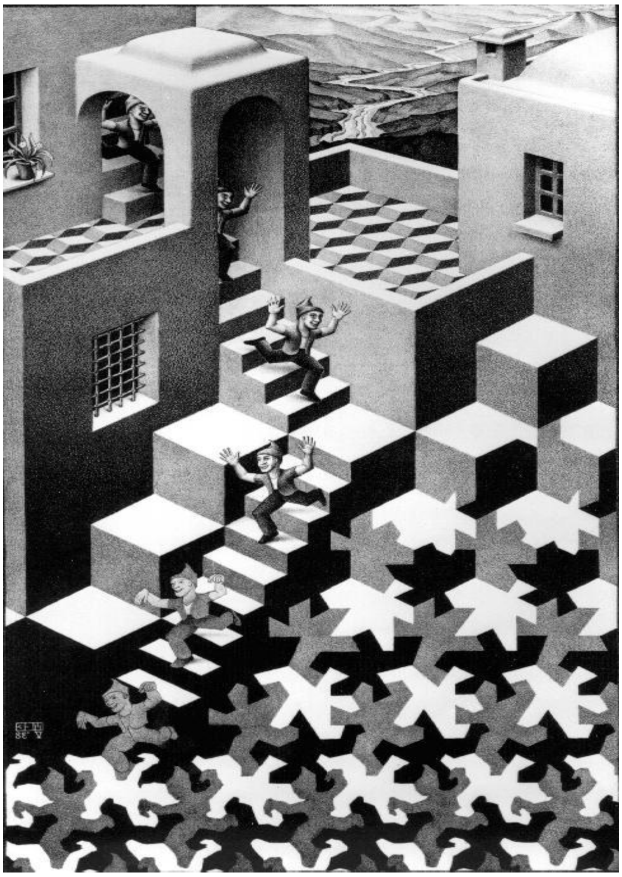


IMAGEN N°11
MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

(IMAGEN DE INTERNET)





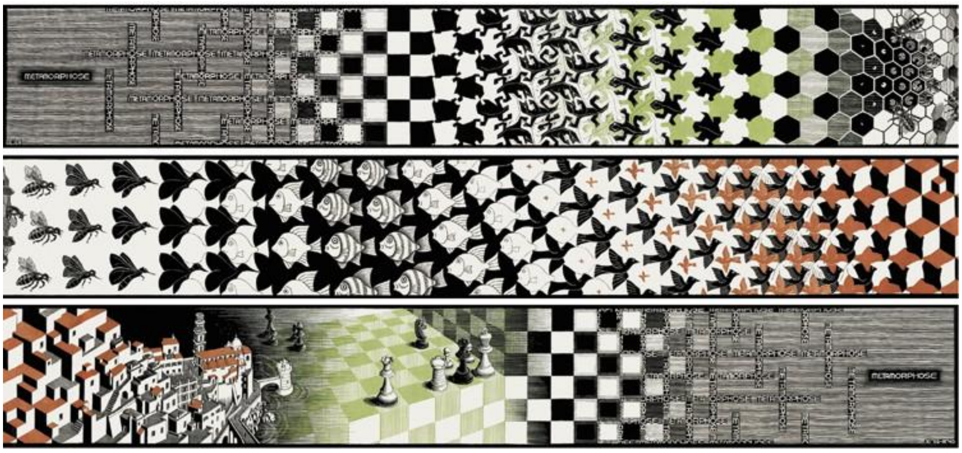


IMAGEN N°12 DIBUJO DE MAURITS ESCHER
(IMAGEN DE INTERNET)

Índice de ilustraciones