



# Modelos: propósitos y representación matemática

## Models: purposes and mathematical representation

Presentación: 25/03/2024

### **Jorge Paruelo**

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires, Argentina  
jparuelo@frba.utn.edu.ar

### **Silvina Cafferata Ferri**

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires, Argentina  
scafferataferri@frba.utn.edu.ar

### **Andrea Campillo**

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires, Argentina  
acampillo@frba.utn.edu.ar

### **Yalile Srour**

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires, Argentina  
ysrour@frba.utn.edu.ar

### **Resumen**

La modelización es una de las capacidades que se espera desarrollen las/os futuras/os ingenieras/os durante su formación. Según el tipo de modelos con los que se opere, la Matemática juega un rol importante dentro del proceso de modelización. La enseñanza en esta línea debe tener en cuenta ese rol y evidenciarlo a lo largo de la formación matemática del futuro profesional. La Matemática aparece como recurso de representación: el tipo de conceptos matemáticos que se utilicen dependerá, entre otras cosas, del propósito que tenga el modelo. En el presente trabajo se proponen las características de una secuencia de actividades de enseñanza que apuntan, entre otros objetivos, a llamar la atención de los estudiantes sobre la relación entre los propósitos de los modelos y los recursos de representación matemática, colaborando de esa manera a establecer que hay una multiplicidad de modelos posibles de un mismo objeto o situación y que también existen múltiples representaciones matemáticas.

**Palabras clave:** modelización, representación matemática, enseñanza de la modelización, modelos.

### **Abstract**

Modeling is one of the skills that future engineers are expected to develop during their training. Depending on the type of models used, Mathematics plays an important role in the modeling process. Teaching along this line must take this role into account and show it throughout the mathematical training of future professionals. Mathematics appears as a representation resource: the type of mathematical concepts used will depend, among other things, on the purpose of the model. In the present work, the characteristics of a sequence of teaching activities are proposed that aim, among other objectives, to draw the attention of students to the relationship between the purposes of the models and the resources of mathematical representation, thus collaborating to establish that there are a multiplicity of possible models of the same object or situation and that there are also multiple mathematical representations.



**Keywords:** modeling, mathematical representation, modeling teaching, models.

## Introducción

La modelización es una de las capacidades que se espera desarrollen las/os futuras/os ingenieras/os durante su formación según se establece en documentos del CONFEDI (2014) y es concebida en la literatura sobre el tema como una competencia a desarrollar en la formación científica de profesionales de diversas especialidades (Upmeier zu Belzen et al., 2019). En el marco de la enseñanza esta competencia se asocia con cierta línea de trabajo conocida como “enseñanza basada en la modelización”.

Para focalizarnos en el problema que intentamos abordar en este trabajo vamos a tomar la caracterización de “modelo” dada por Gilbert et al. (2000), que es citada a menudo en la literatura sobre el tema, en la que se considera que modelo es una representación de una idea, objeto, acontecimiento, proceso o sistema creado con un objetivo específico. Aunque algo vaga, esta definición alcanza a los fines del presente trabajo.

Otro concepto que aparece es el referido por el término “modelización”, y que lleva a dos líneas diferentes de “enseñanza basada en la modelización” como puede encontrarse en Oliva (2019) y Justi (2006). Una primera acepción del término es la que se liga a la progresión de modelos. La otra variante es la que entendemos que está más cerca de lo que se pretende lograr en la formación del/la ingeniero/a. Esta vertiente, que describimos resumidamente en lo que sigue, no es incompatible con el aprendizaje de modelos ya establecidos. Cuando se plantea una pregunta, un problema, sea científico o no, se elabora un modelo mental para operar con él y resolverlo, o para dar una respuesta posible. El modelo mental se representa mediante algún recurso y se va modificando a medida que se consigue mayor conocimiento sobre el objeto involucrado en el problema. En este proceso se generan nuevos modelos que resultan más útiles para el objetivo buscado. Esta caracterización del término “modelización” es considerarlo como una práctica similar a la científica, e involucra la creación, modificación, uso y evaluación de modelos. Dos elementos cruciales para diferenciarlo de la otra acepción se centran en la creación y el uso, entendido esto como aplicación en una nueva situación. Esta última variante es la que se sostiene en este trabajo, tanto cuando se hace referencia a la competencia de modelización como cuando se hace referencia a la enseñanza basada en la modelización.

Según el tipo de modelos con los que se opere, la Matemática juega un rol importante dentro del proceso de modelización. La enseñanza en esta línea debe tener en cuenta ese rol y evidenciarlo a lo largo de la formación matemática del/la futuro/a profesional.

La Figura 1 da una idea de la parte del proceso de modelización que nos interesa.

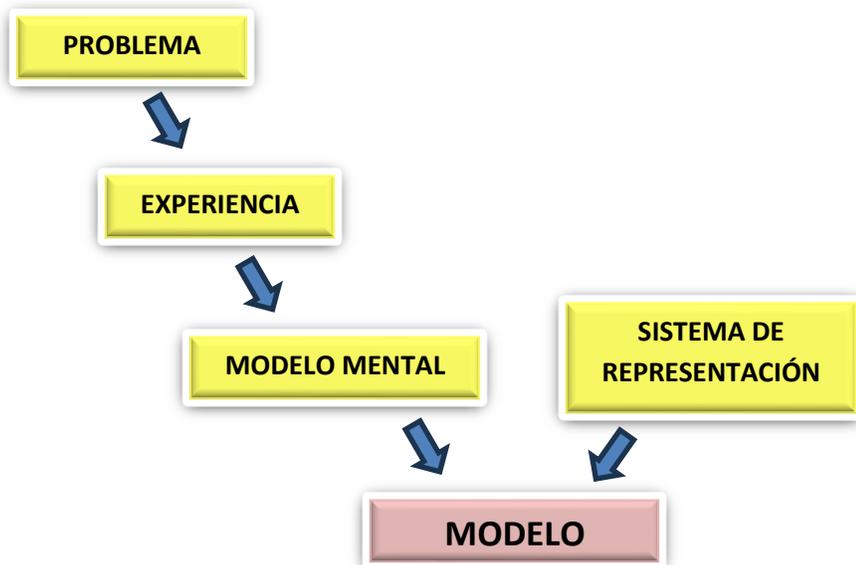


Figura 1: creación del modelo

En la Figura 1 se registra el inicio del proceso de modelización, con la formulación de un problema. Usamos “formulación” y no “identificación” porque en la determinación del problema hay un aporte que hace el agente que va a desarrollar el modelo. Esto es porque un modelo tiene algún propósito, se formula un modelo con alguna finalidad. Supongamos que estamos interesados en el diseño de envases de madera con la forma de una botella clásica de vino. Para trabajar con el envase desarrollamos un modelo, pero ¿qué queremos hacer con el modelo?, ¿queremos usarlo para analizar diferentes alternativas de sus dimensiones?, ¿queremos un modelo que nos permita desarrollar recursos de envasado o construcción? Las diferentes respuestas a estas preguntas indican que hay diferentes propósitos en el desarrollo del modelo y esos propósitos forman parte de lo que hemos identificado como problema en la Figura 1. Cuál es el problema condiciona la experiencia que vamos a recoger de nuestro objeto de estudio y también qué sistema de representación resulta más adecuado una vez ideado un primigenio modelo mental. La forma de plasmar tal modelo mental en algo comunicable y analizable objetivamente es desarrollando el modelo representado, que mencionamos como “modelo” en la Figura 1. Éste toma elementos del modelo mental y los expresa mediante un sistema de representación conveniente. En ese sistema de representación es donde aparece la Matemática. Este proceso de búsqueda de datos a partir de la experiencia, generación de modelos mentales y elección y aplicación de un sistema de representación, es un proceso integral. Más allá de que podamos separar sus partes para el análisis, es algo que ocurre conjuntamente. Una vez desarrollado el modelo comienza un proceso de evaluación y reformulación que mejora dicho modelo.

La Matemática aparece como recurso de representación: el tipo de conceptos matemáticos que se utilicen dependerá, entre otras cosas, del propósito que tenga el modelo. Los aspectos vinculados a los propósitos de los modelos no han sido muy analizados ni tenidos en cuenta en la enseñanza (Norström y Hallström, 2023). Vinculado con esto está la distinción entre modelos tecnológicos y modelos científicos. Una primera aproximación en este punto es que los primeros remiten a responder problemas particulares mientras que los segundos apuntan a problemas generales, aunque esta distinción es discutible y requiere un análisis que excede los límites de este trabajo (Yaghmaie, 2021). En el presente documento se proponen las características de una secuencia de actividades de enseñanza que apuntan, entre otros objetivos, a llamar la atención de los estudiantes sobre la relación entre los propósitos de los modelos y los recursos de representación matemática, colaborando de esa manera a establecer que



hay una multiplicidad de modelos posibles de un mismo objeto o situación y que también existen múltiples representaciones matemáticas y que la elección de cuál es la más conveniente depende del propósito.

La propuesta se enmarca en una forma, aún en desarrollo, de enseñanza de la modelización en carreras de Ingeniería que parte de dos premisas centrales:

- La modelización constituye un contenido transdisciplinar a enseñar, en el que pueden insertarse los contenidos disciplinares para su enseñanza integrada.
- Es conveniente enseñar los contenidos matemáticos asociándolos con representaciones de modelos fácticos.

## Desarrollo

Las actividades que se propongan en la secuencia deben tener en cuenta una graduación creciente en la consideración de complejidades. Norström y Hallström (2023) proponen una serie de pasos involucrados en la creación de modelos que incluye entre ellos la simplificación. Dentro de la simplificación se seleccionan “cajas negras”, es decir partes de la situación que terminan siendo un solo objeto o un proceso de input y output. Por ejemplo, si un fabricante compra una máquina que fabrica tornillos poniendo alguna variante metálica como insumo, puede determinar cuál es su eficiencia tomando como datos sólo el material con que abastece la máquina, los tornillos que obtiene y los gastos de funcionamiento. En este caso, el modelo de funcionamiento considera la maquinaria interna como una caja negra. Pero si lo que se busca es tratar de mejorar la eficiencia, será necesario trabajar con un modelo diferente abriendo esa caja y, seguramente, trabajando con otras en su interior. El modelo será diferente. Claramente la diferencia en la elección del modelo se asocia con el cambio del propósito.

A esta complejidad en la simplificación del modelo se suma la del sistema de representación. En los casos donde se emplean recursos matemáticos, hay que tener en cuenta que tal recurso esté disponible para los/as estudiantes o que sea posible introducirlo para el caso particular que se está tratando. Esto es posible hacerlo como hemos mostrado en un trabajo anterior (Paruelo et al., 2023) en el que propusimos un recurso para introducir el tema de funciones continuas a partir de las necesidades de representación al desarrollar un modelo.

Para ejemplificar la secuencia tomemos un caso en el que involucramos un mismo objeto (o tipo de objeto), diferentes propósitos y diferentes sistemas de representación. Supongamos que se pide el diseño del packaging de una botella. Se pide un envase sencillo, una caja de base cuadrada en la que entre una botella dada. Para diseñar el packaging hace falta tener un modelo de la botella que se introduce en la caja. Más allá de las variantes que se le puedan ocurrir a los/as estudiantes, hay dos variantes que son simples: modelar la botella como un cilindro o como un paralelepípedo. En cualquiera de los dos casos utilizamos una representación geométrica que requiere solamente medir la altura de la botella y establecer el diámetro del cilindro o la medida de la base del paralelepípedo de manera que quede abarcada la totalidad de la botella. Si ahora se agrega que el envase debe copiar el pico en la parte superior, el modelo debe cambiarse. Ahora la botella requiere un modelo que registre las características del pico, tal vez haga falta superponer un cilindro, un cono recortado y otro cilindro de diámetro más pequeño sobre él, si la botella es del estilo de las clásicas botellas de vino. Cambian las características del tipo de envase y eso es un cambio en el propósito

del modelo, cambio menor, pero cambio al fin<sup>1</sup>. Cambia el modelo, pero usamos el mismo tipo de recurso de representación, el geométrico, aunque utilizando mayor cantidad de formas geométricas.

Podemos avanzar cambiando el propósito nuevamente, por ejemplo, queremos ahora un envase que reproduzca el formato de la botella en su parte exterior. En este caso, además de tener que cambiar el modelo de la botella, tal vez sea útil trabajar con otro recurso de representación. No parece necesario esto último si la botella fuese una clásica de vino, pero analicemos la situación si consideramos el envase de la Figura 2.



Figura 2: Envase no convencional

En este caso, probablemente nos convenga representar gráficamente el contorno y aproximarlos con una función porque eso nos serviría para, por ejemplo, programar un torno si lo que se desea es hacer el envase en madera. El gráfico de la función del contorno podría verse como la detallada en la Figura 3.

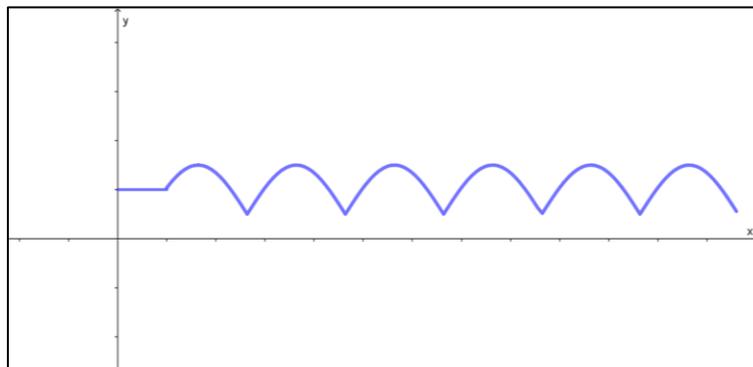


Figura 3: Función que representa el contorno de una botella no tradicional (elaboración propia)

<sup>1</sup> Esto llevaría a una distinción entre propósito tipo y propósito caso que excede los límites de este trabajo y se asocia con la discusión, ya mencionada, acerca de la distinción entre modelos científicos y modelos tecnológicos.



La forma de establecer la función podría hacerse, dependiendo de los recursos que manejen los/as estudiantes, mediante aproximaciones funcionales sucesivas, mediante aproximación por rectas tangentes o mediante recursos tecnológicos, por ejemplo, utilizando recursos de realidad virtual con GeoGebra.

En este caso, alumnos/as de una asignatura como Análisis Matemático I están en condiciones de proponer una función que permita modelizar el contorno y con la que se puede programar un torno para tallar un envase en madera. Los conceptos utilizados dependiendo de la forma como se trabaje la modelización matemática involucran los de función por tramos, funciones trigonométricas, composición de funciones, representación paramétrica de funciones y continuidad de funciones. La modelización funcional permite desarrollar, a lo largo de un curso de Análisis Matemático I, varios conceptos e inclusive introducir aplicaciones que resultan útiles para trabajar ciertos propósitos como superficie y volumen de revolución.

Lo relevante en el diseño de la actividad es llamar la atención sobre las relaciones que llevan a que distintos propósitos requieran distintos modelos y distintos sistemas de representación. Sumado a eso está la introducción de conceptos matemáticos a partir de su utilidad para resolver un problema recurriendo a modelos.

## Conclusiones

El resumen presentado en la sección anterior está pensado para aplicar en los inicios de la formación del/la ingeniero/a y a lo largo de un año en el que los/as estudiantes trabajan recursos de análisis de funciones de variable real. Al inicio del proceso se utiliza la Geometría, que es un recurso que los estudiantes manejan desde la Escuela Media o que, de no ser así, no requiere gran esfuerzo para su aprendizaje. Más adelante se pasa al empleo de funciones y otros recursos que habitualmente se estudian en Análisis Matemático. Pueden pensarse representaciones desde la Geometría Analítica, sobre todo para la variante de fabricar el envase de madera.

Es posible generalizar este tipo de casos y luego apuntar a la metacognición llevando a cabo una discusión con los/as estudiantes sobre las actividades realizadas. Estas discusiones mejoran el aprendizaje de la modelización (Upmeier et al., 2019).

Respecto de la generalización del proceso, la secuencia se establece proponiendo un objeto o fenómeno que se va a modelizar, pero con diferentes propósitos y con diferentes recursos de representación, es decir, utilizando diferentes recursos matemáticos. Conviene, sin embargo, buscar casos visualizables para plantear la actividad, al menos si se está pensando en estudiantes ingresantes a las carreras de Ingeniería.

Se propone un formato de secuencia de actividades que apunta a tener en cuenta que, dentro de la enseñanza de la modelización, una parte fundamental de la actividad es el propósito que se persigue con el modelo. Además, asociado al propósito, está la representación matemática que se busca emplear. Se presentó a partir de un ejemplo cómo se lleva al aula la idea de que el propósito condiciona la elección del modelo y de la forma de representación. Es deseable establecer casos en los que se vea cómo la representación elegida condiciona el propósito, limitándolo, por ejemplo, pero eso excede los límites de este trabajo.

Se espera que con la propuesta de este trabajo se logre enseñar modelización en carreras de ingeniería con distintos niveles de complejidad, según se justifique, acorde al modelo escogido y los fines que se persigue en cada caso. También se espera lograr una mayor integración de contenidos de otras áreas temáticas en la formación del/la ingeniero/a.



## Referencias

CONFEDI (2014). Competencias en Ingeniería. Recuperado de

[https://confedi.org.ar/download/documentos\\_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf](https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf)

Gilbert, J., Boulter, C. y Elmer, R. (2000). Positioning Models in Science Education and in Design and Technology Education. En J. K. Gilbert y C. J. Boulter (Eds), *Developing Models in Science Education*. Springer Dordrecht. Países Bajos. 3-17.

Justi, R. (2006). La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de modelos. *Enseñanza de las ciencias*, 24 (2), 173-184.

Norström, P. y Hallström, J. (2023) Models and modelling in secondary technology and engineering education. *International Journal of Technology and Design Education* (2023) 33:1797–1817. <https://doi.org/10.1007/s10798-023-09808-y>

Oliva, J. M. (2019). Distintas acepciones para la idea de modelización en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, 37 (2), 5-24.

Paruelo, J., Cafferata Ferri, S., Campillo, A. y Srour, Y. (2023). Enseñar Matemática a partir de la modelización. JEIN – IX Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería. Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional. Septiembre de 2023.

Upmeyer zu Belzen, A.; Krüger, D.; van Driel, J. (2019). *Towards a Competence-Based View on Models and Modeling in Science Education*. Springer. Cham, Suiza.

Yaghmaie, A. (2021) Scientific Modeling Versus Engineering Modeling: Similarities and Dissimilarities. *Journal for General Philosophy of Science*. <https://doi.org/10.1007/s10838-020-09541-3>.