



**CONTROL DE LA POSICIÓN DE UNA BOLA
SOBRE UNA PLATAFORMA BASCULANTE
MEDIANTE TÉCNICAS DE LÓGICA DIFUSA**

**Tesis de Maestría
Ingeniería en Control Automático**

**DIRECTOR
Dr. Ing. Mario Roberto Modesti**

**CO DIRECTOR
Dr. Ing. Carlos María Chezzi**

**TESISTA
Ing. José Jorge Penco**

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba
2019

Agradecimientos

A mi familia, Cristina, Gastón, Cristhian, Gisela y Ludmila, por apoyar incondicionalmente mi trabajo, resignando pacientemente el tiempo que podría haber dedicado a ellos.

A la Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional por haber hecho posible esta significativa formación profesional.

Al Profesor Mario Modesti, quien me brindó sus amplios conocimientos en el tema, acompañándome en las publicaciones y finalmente aceptando el desafío de dirigir este trabajo.

Al Profesor Carlos Chezzi por sus indicaciones y consejos acerca de cómo avanzar en la tarea.

A mis colegas docentes de la Facultad Regional Concordia por haber transitado juntos el camino de este conocimiento.

... dedicado a Pepe y Mimí, quienes supieron creer y apoyar sin condiciones, y en tiempos muy difíciles, mi aventura de ser ingeniero.

RESUMEN

En este trabajo se propone como objetivo general desarrollar una estrategia de control a partir de la aplicación de técnicas de control difusas, para obtener el diseño de un sistema controlador adecuado a efectos de gobernar la posición de una bola que puede rodar libremente sobre una plataforma basculante, ya sea estabilizando su ubicación en un punto determinado o generando un desplazamiento que reproduzca una trayectoria prefijada minimizando el error.

Se desarrollan controladores diseñados primeramente a partir de las metodologías convencionales de inferencia difusa y, en segundo lugar, a través de sistemas adaptivos del tipo ANFIS¹. La evaluación de los resultados obtenidos mediante la técnica de simulación permitió efectuar una comparación del desempeño de cada tipo.

Como resultado se obtuvieron modelos de sistemas de control estables y suficientemente robustos con el propósito de que puedan ser programados e implementados en un sistema real.

Palabras clave: *sistema de bola y plataforma, control no lineal, controladores difusos, controladores ANFIS, simulación.*

¹ Adaptive Network Fuzzy Inference System

ÍNDICE

Agradecimientos	i
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Consideraciones iniciales	1
1.2 Motivación	2
1.3 Descripción del problema.....	3
1.4 Objetivos	5
1.4.1 General	5
1.4.2 Específicos	5
1.5 Metodología	6
1.6 Antecedentes del trabajo.....	7
2. ESTADO DEL ARTE	9
2.1 Desarrollos comerciales.....	9
2.2 Antecedentes bibliográficos	12
3. MODELO MATEMÁTICO.....	15
3.1 Modelo del dispositivo bola-plataforma	15
3.2 Modelo del motor de corriente continua.....	21
4. MODELO DE CONTROL DEL SISTEMA	25
5. MODELOS DIFUSOS PROPUESTOS.....	27
5.1 Controlador difuso tipo Mamdani	27
5.2 Controlador difuso tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK).....	31
5.3 Controlador Neuro-Difuso.....	34
6. DESEMPEÑO DE LOS MODELOS PROPUESTOS.....	40
6.1 Desempeño del controlador Mamdani.....	41
6.2 Desempeño del controlador Sugeno	45
6.3 Desempeño del controlador ANFIS.....	49
6.4 Consideraciones sobre estabilidad	51
7. CONCLUSIONES.....	56
8. REFERENCIAS	57
ANEXOS.....	61
A.1 Control basado en lógica difusa.....	61
A.1.1 Fuzzificación	62
A.1.2 Etapa de inferencia	65
A.1.3 Defuzzificación.....	65
A.2 Sistema de inferencia difusa	69
A.3 Estrategias de control difuso.....	71

B. Modelos de simulación	73
C. Códigos de MATLAB®	75
C.1 Curvas de respuesta de los sistemas.....	75
C.2 Gráficas de las funciones de membresía	75
C.3 Cálculo del centro de gravedad con el método del centroide	77
C.4 Defuzzificación con diferentes métodos	78

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1	Parámetros físicos del sistema de bola y plataforma.....	23
Tabla 3.2	Parámetros físicos de los motores de accionamiento	24
Tabla 5.1	Reglas de inferencia para el controlador difuso	30
Tabla A.1	Cálculos parciales para determinación del COG.....	67

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Estructura de doble lazo para controlar el movimiento en cada eje	4
Figura 2.1. Equipo experimental desarrollado por GUNT Hamburg GmbH.....	9
Figura 2.2. Equipo desarrollado por Feedback Instruments Ltd.	10
Figura 2.3. Sistema construido en el Rensselaer Polytechnics Institute	11
Figura 2.4. Equipo CE 151 de HUMUSOFT®	11
Figura 2.5. Sistema experimental de doble plataforma	12
Figura 2.6. Sistema de bola y plataforma BPVS-JLU I	13
Figura 3.1. Diagrama esquemático del sistema de bola y plataforma.....	15
Figura 3.2. Modelado del sistema de bola y plataforma para cada eje de movimiento	21
Figura 3.3. Esquema de un motor de CC con excitación independiente [15].....	21
Figura 3.4. Diagrama de bloques del motor de CC controlado por armadura	22
Figura 4.1. Esquema de doble lazo cerrado para control del sistema	25
Figura 4.2. Lazo de control de inclinación de la plataforma	26
Figura 5.1. Estructura del controlador FPD+I.....	28
Figura 5.2. Funciones de pertenencia para las variables de entrada	29
Figura 5.3. Función de pertenencia para la variable de salida del controlador	29
Figura 5.4. Superficie de actuación del controlador Mamdani	31
Figura 5.5. Modelo Simulink® del controlador Mamdani con ganancias ajustadas	31
Figura 5.6. Funciones de pertenencia de entrada al controlador TSK	32
Figura 5.7. Reglas difusas evaluadas con Matlab® en un punto de operación.....	33
Figura 5.8. Superficie de actuación del controlador TSK	34
Figura 5.9. Modelo Simulink® del controlador TSK con ganancias ajustadas	34
Figura 5.10. (a) Razonamiento difuso Sugeno, (b) Estructura ANFIS equivalente [28].....	35
Figura 5.11. Estructura de la red neuronal creada	37
Figura 5.12. Evolución del error de entrenamiento	37
Figura 5.13. Funciones de membresía ajustadas durante el entrenamiento	38
Figura 5.14. Superficies de control de la estructura ANFIS	39
Figura 6.1. Respuesta con controladores Mamdani y señal de excitación pura.....	41
Figura 6.2. Amplitudes relativas de las señales: en amarillo consigna de entrada, en azul ruido aplicado en el lazo interno, en rojo ruido en el lazo exterior	42
Figura 6.3. Respuesta con controladores Mamdani y presencia de ruido de los sensores.....	42
Figura 6.4. Respuesta con controladores Mamdani, con ruido y perturbación externa	43
Figura 6.5. Señales aplicadas a la plataforma para generar una consigna de trayectoria cuadrada....	43
Figura 6.6. Respuesta con controladores Mamdani y consigna de trayectoria cuadrada	44
Figura 6.7. Respuesta con controladores Mamdani y ruido en lazos de realimentación	44
Figura 6.8. Respuesta con controladores Mamdani, ruido y perturbación externa.....	45

Figura 6.9. Respuesta con controladores Sugeno y señales senoidales puras.....	46
Figura 6.10. Respuesta con controladores Sugeno y presencia de ruido de los sensores	46
Figura 6.11. Respuesta con controladores Sugeno, incluyendo ruido y perturbación	47
Figura 6.12. Respuesta con controladores Sugeno, consigna cuadrada sin efectos externos	47
Figura 6.13. Respuesta con controladores Sugeno incluyendo ruido en los sensores	48
Figura 6.14. Respuesta con controladores Sugeno con ruido y perturbación externa	48
Figura 6.15. Respuesta con controladores ANFIS y consigna circular pura	49
Figura 6.16. Respuesta con controladores ANFIS, consigna circular y ruido en los sensores.....	49
Figura 6.17. Respuesta con controladores ANFIS, consigna circular, ruido y perturbación.....	50
Figura 6.18. Respuesta con controladores ANFIS y consigna cuadrada sin efectos externos	50
Figura 6.19. Respuesta con controladores ANFIS, consigna cuadrada y ruido en los sensores.....	51
Figura 6.20. Respuesta con controladores ANFIS, con ruido y perturbación externa.....	51
Figura 6.21. Planos de fase para la “posición” y “velocidad” utilizando controladores Mamdani	54
Figura 6.22. Planos de fase para la “posición” y “velocidad” utilizando controladores Sugeno	54
Figura 6.23. Planos de fase para la “posición” y “velocidad” utilizando controladores ANFIS	55
Figura A.1. Estructura típica de un controlador difuso	62
Figura A.2. Función de membresía tipo “singleton”.....	63
Figura A.3. Función de membresía del tipo “gaussiano”.....	63
Figura A.4. Función de membresía del tipo “trapezoidal”	64
Figura A.5. Función de membresía del tipo “triangular”	64
Figura A.6. Delimitación de áreas parciales para cálculo del COG.....	67
Figura A.7. Defuzzificación con diferentes métodos.	69
Figura A.8. Esquema de un <i>control directo</i> [38].....	71
Figura A.9. Esquema conceptual de un sistema <i>feedforward control</i> [38].....	72
Figura A.10. Estructura de un sistema del tipo <i>control adaptivo</i> [38].....	72
Figura B.11. Diagrama de bloques del modelo no lineal del sistema bola-plataforma (eje x).....	73
Figura B.12. Diagrama de bloques para la simulación completa con controladores Mamdani.....	73
Figura B.13. Diagrama de bloques para la simulación completa con controladores TSK	74
Figura B.14. Diagrama de bloques para la simulación completa con controladores ANFIS	74

Capítulo 1

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Consideraciones iniciales

El control de plantas no lineales, multivariables e inherentemente inestables constituye un desafío permanente para los investigadores e ingenieros que se desempeñan en el área del control de sistemas y procesos, y a medida que van creciendo tanto el conocimiento como el desarrollo tecnológico de los sensores y actuadores, se ensayan nuevas estrategias de control para lograr una mejor performance en su operación.

Los sistemas no lineales originariamente fueron tratados a partir de modelos linealizados en un determinado punto de operación, Sin embargo, en la práctica dicha simplificación generalmente adolece de consideraciones reales que pueden originar un comportamiento indeseable y tornándose muchas veces ingobernables.

En los estudios vinculados con la ingeniería de control, los dispositivos construidos a partir de una bola que puede moverse libremente sobre una plataforma basculante, pivotada en su centro geométrico, han resultado de interés para la experimentación y desarrollo de diversas técnicas de control, cuyo objetivo puede ser tanto estabilizar la bola en una determinada posición como controlar su movimiento según una trayectoria predeterminada. Un sistema como el descrito presenta un único punto de equilibrio, de carácter ideal, ya que resulta evidente la tendencia de la bola a rodar hacia los bordes abandonando finalmente la plataforma.

En los últimos años los avances desarrollados en una disciplina como la inteligencia artificial, particularmente la lógica difusa, las redes neuronales y sus combinaciones, han permitido disponer opciones muy interesantes a la hora de diseñar controladores para plantas o procesos complejos cuyo funcionamiento no puede anticiparse con suficiente precisión a través de su modelado.

Por otra parte, en el ámbito de la ingeniería se evidencia una creciente tendencia hacia el empleo de la simulación para obtener de manera rápida, económica y segura, los resultados de la aplicación de técnicas de diseño o control de procesos, cualquiera sea su naturaleza. Esta técnica resulta de gran utilidad a la hora de evaluar anticipadamente el posible comportamiento de dispositivos, máquinas, herramientas, o sistemas de alta complejidad en distintos escenarios de operación, obteniendo resultados que posibilitan generar los ajustes adecuados para mejorar su desempeño hasta donde se considere satisfactorio.

Sin embargo, en este contexto resulta importante disponer de modelos, ya sean matemáticos o físicos, que representen a los dispositivos reales con los que se pretende interactuar, resultando de especial relevancia en la ingeniería de control ya que son utilizados como base para la aplicación de las teorías de análisis y diseño que finalmente redundarán en un producto, sistema o proceso, correctamente adaptado a los requerimientos planteados.

Asimismo, los modelos están siendo explotados en gran medida durante las etapas de desarrollo de dispositivos de ingeniería para aplicaciones industriales o domésticas, dado que resultan de gran utilidad como elementos preliminares de evaluación comparativa, antes del comienzo de las grandes producciones en serie.

En los campos de la investigación científica y comercial el uso de los modelos a escala tiene el propósito principal que surge de la posibilidad de probar los sistemas reales en una réplica simplificada en las plataformas construidas en los laboratorios.

En las universidades es habitual la utilización de maquetas y dispositivos diseñados para emular el comportamiento de los sistemas reales a través de los cuales se pueden validar las técnicas y algoritmos desarrollados a partir de los avances teóricos conocidos.

Resulta factible entonces la aplicación de técnicas basadas en lógica difusa, cuyas proposiciones semánticas tienden a representar esquemas de razonamiento más que acciones precisas sobre el modelo de un sistema o proceso real, que adolece de imperfecciones producto de las simplificaciones físicas y/o matemáticas consideradas.

1.2 Motivación

A diferencia de otros dispositivos construidos con fines educativos, el sistema de bola y plataforma presenta varias características propias de los sistemas inestables y no lineales que se han considerado de interés para el presente trabajo.

En primer lugar, éste y otros sistemas clásicos como los de levitación magnética, péndulo invertido sobre un móvil o el mecanismo de bola y barra, son dispositivos denominados hiperestáticos o sub actuados debido a que poseen mayor cantidad de grados de libertad que el número de actuadores utilizados para controlarlos. En particular para el sistema de bola y plataforma deben considerarse las direcciones de desplazamiento de la bola sobre la plataforma más los ángulos posibles de inclinación de ésta sobre su pivote central. Descomponiendo estos movimientos según dos ejes perpendiculares entre sí se evidencia la existencia de cuatro grados de libertad.

En segundo término, este sistema no solamente ofrece la oportunidad de estudiar el problema de la estabilidad, sino que, además, por su carácter bidimensional presenta el desafío de reproducir una trayectoria determinada en el plano de la plataforma.

Y, por último, las prácticas de laboratorio vinculadas a la teoría de control que se realizan en el ámbito de la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Facultad Regional Concordia, se limitan a interactuar con sistemas SISO², dada la facilidad de su implementación. Por ello las características de multivariable que presenta el dispositivo de bola y plataforma podrán utilizarse para ampliar el alcance de los estudios e investigaciones. Además, un sistema como el referido también es influenciado por fricciones, juegos en las transmisiones mecánicas, tiempos de retardo en las mediciones, parámetros inciertos y tiempos de computación.

² *Single Input Single Output*

Por las razones anteriores es necesaria la conjunción de conocimientos y técnicas en áreas de control automático, mecánica, electrónica y computación resultando de gran interés analizar y diseñar un sistema que permita gobernar con precisión su operación.

Particularmente las estrategias de control basadas en técnicas difusas pueden ser aplicadas con éxito para solucionar problemas de índole no lineal como en el caso mencionado. Entonces disponer de una estrategia de control suficientemente precisa para gobernar dispositivos de estas características resulta de alto grado de interés, tanto como una aplicación específica para aportar al estudio de los sistemas no lineales como así también para una implementación futura sobre un mecanismo físico construido en el ámbito del laboratorio.

1.3 Descripción del problema

El sistema de bola y plataforma es un dispositivo electromecánico de dos dimensiones, denominado habitualmente “*planta*”, el cual puede ser categorizado como no lineal, multivariable y además inestable [1], a su vez este sistema posee más grados de libertad que el número de actuadores disponibles [2] [3]. Por lo tanto, el hecho de que el movimiento de la bola pueda ser controlado indirectamente por el accionamiento de la plataforma resulta un desafío muy interesante para tener en cuenta.

El problema entonces consiste en controlar la posición de una bola que puede moverse libremente sobre una plataforma, motivo por el cual será necesario imprimir a esta última diferentes ángulos de inclinación para conseguir la ubicación deseada.

Tanto mantener la bola en una posición determinada como producir su desplazamiento según una determinada trayectoria pueden conseguirse manipulando adecuadamente la inclinación de la plataforma. Si bien se trata de un sistema MIMO³, se analiza la validez de asumir que es posible el desacoplamiento de las entradas y salidas teniendo en cuenta que la dirección de cualquier movimiento puede descomponerse en dos componentes ortogonales entre sí.

Bajo estas consideraciones el sistema puede ser tratado como dos subsistemas SISO independientes actuando simultáneamente sobre cada uno de los ejes de inclinación de la plataforma, para lo cual se propone en este trabajo una estructura de doble lazo cerrado, como se observa en la Figura 1.1.

En este esquema el lazo interior funciona como un controlador angular para ajustar la inclinación de la plataforma, en tanto que el lazo exterior se implementa con el fin de controlar eficazmente la posición de la bola sobre la placa. De esta manera, mientras que el lazo externo calcula el ángulo necesario para estabilizar el movimiento de la bola, el lazo interno controla que la plataforma efectivamente se incline en dicho ángulo.

A tal efecto es necesario disponer de dos señales de realimentación para cada uno de los ejes de movimiento. En este trabajo se asume que las señales de realimentación de los lazos internos se adquieren con sensores del tipo potenciométrico, produciendo una

³ *Múltiple Input Múltiple Output*

información proporcional a los ángulos de inclinación de la plataforma. Por otra parte, para los lazos de realimentación externos, las coordenadas de posición de la bola se obtienen a partir del procesamiento de la imagen proveniente de una cámara situada a una cierta distancia por encima de la plataforma y alineada con su centro geométrico. Esta última consideración se asume teniendo en cuenta que la imagen resultante presenta una distorsión de perspectiva en razón de que durante el movimiento de la plataforma se pierde la perpendicularidad respecto al eje de enfoque de la cámara, motivo por el cual debería considerarse una matriz de ajuste en el procesamiento de la imagen para corregir el error de posición de la bola. No obstante, si los ángulos de inclinación de la plataforma son reducidos y la distancia a la que se encuentra la cámara suficientemente grande, es posible despreciar dicha distorsión sin incurrir en error significativo.

Para transmitir los movimientos a la plataforma se considera que las señales de salida de los controladores se aplican a sendos motores de corriente continua cuya función de transferencia también es considerada en el modelado completo del sistema.

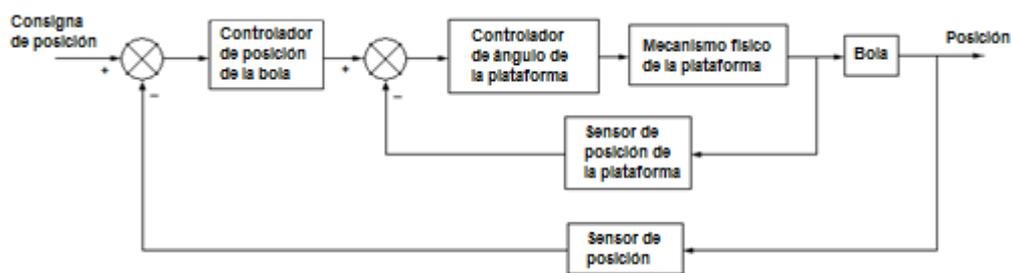


Figura 1.1. Estructura de doble lazo para controlar el movimiento en cada eje

Dado el carácter no lineal que presenta un mecanismo como el referido, y teniendo en cuenta que la aceleración que adquiere la bola frente a los cambios en el ángulo de inclinación de la plataforma tiene una relación no lineal con su posición, no resulta eficiente aplicar las estrategias propuestas por la teoría clásica de control, con base en modelos lineales obtenidos a partir de suposiciones y simplificaciones tales como no considerar fricciones mecánicas y juego en las transmisiones de los movimientos. Por el contrario, las técnicas basadas en la aplicación de lógica difusa resultan particularmente atractivas cuando ciertas partes del sistema a controlar son desconocidas y/o no pueden medirse o modelarse de manera confiable.

Dispositivos como el descrito son inherentemente inestables, razón por la cual se requiere que las condiciones de operación del sistema de control permitan asegurar un funcionamiento estable en un determinado rango de actuación. Esto implica que, a pesar de la eficiencia que puede presentar un controlador difuso, su estabilidad no está absolutamente garantizada. En general los sistemas no lineales son localmente estables en las cercanías de un determinado punto de operación, motivo por el cual es necesario analizar las condiciones del sistema completo, esto es, planta + controlador, para determinar qué restricciones son necesarias en el rango de los ángulos de inclinación que se pueden aplicar a la plataforma.

En este trabajo se pretende aportar una solución al problema a partir de la aplicación de los conceptos desarrollados por la lógica difusa, evaluando los resultados obtenidos mediante las metodologías convencionales de inferencia difusa y los modelos adaptivos propuestos por la arquitectura ANFIS.

1.4 Objetivos

1.4.1 General

Desarrollar una estrategia de control que, mediante la aplicación de técnicas de control difuso, permita obtener el diseño de un sistema controlador adecuado para gobernar la posición de una bola que puede rodar libremente sobre una plataforma basculante, ya sea, estabilizando su ubicación en un punto determinado, o generando un desplazamiento que reproduzca una trayectoria prefijada, minimizando el error.

Como resultado del mismo se espera obtener el modelo de un sistema de control de buen desempeño con el propósito de que pueda ser programado e implementado en un mecanismo real.

1.4.2 Específicos

Los objetivos secundarios o específicos que conlleva este trabajo son

- i. Disponer un modelo matemático adecuado que represente al dispositivo mecánico de bola y plataforma con sus actuadores y sensores asociados caracterizados.
- ii. Establecer los lazos de control para gobernar el ángulo de inclinación de la plataforma y el posicionamiento de la bola sobre ella.
- iii. Verificar que el modelo de control diseñado alcance las condiciones de estabilidad suficientes para asegurar el funcionamiento adecuado de todo el sistema.
- iv. Validar el funcionamiento del sistema de control a partir de las simulaciones que demuestren la performance de su operación.
- v. Adquirir el conocimiento necesario para su futura implementación en un sistema real a construir en el laboratorio de Control Automático de la Facultad Regional Concordia.

1.5 Metodología

En este trabajo se propone diseñar y validar, en fase de simulación, un sistema de control cuyo funcionamiento sea aceptable y en condiciones de poder aplicar los movimientos adecuados sobre un dispositivo mecánico consistente en una plataforma capaz de pivotar sobre su centro geométrico, sobre la cual una bola puede desplazarse libremente en cualquier dirección y sentido.

A tal efecto, y como punto de partida, resulta necesario disponer de un modelo matemático para representar satisfactoriamente su comportamiento dinámico y que sirva como base para el diseño del sistema de control.

Un dispositivo físico de bola y plataforma, cuyo modelo matemático se puede obtener a partir de la ecuación general de movimiento de Euler-Lagrange, produce un sistema de 8° orden. Este modelo matemático, que posee términos de acoplamiento y términos no lineales, se puede luego simplificar a partir de un conjunto de suposiciones razonables permitiendo finalmente obtener un sistema de menor orden y aceptable controlabilidad. Se considera conveniente emplear una formulación basada en el enfoque de análisis en el espacio de estados de manera que el modelo obtenido pueda ser fácilmente utilizado durante el trabajo.

Por otro lado, el desplazamiento libre de la bola se puede descomponer en dos direcciones ortogonales razón por la cual, para contrarrestar el mismo, se debe ejercer el control en estas direcciones, lo que significa que resulta posible considerar un sistema compuesto por dos controladores que actúen sobre la plataforma de manera independiente y simultánea, uno para cada eje del movimiento. De esta manera se puede aplicar a la plataforma el ángulo de inclinación necesario para controlar el desplazamiento de la bola evitando su caída.

Para el diseño de estos controladores se emplea el concepto de *“loop in the loop”*, visto en la Figura 1.1, el cual se aplica de igual manera sobre cada uno de los ejes de movimiento de la plataforma.

Para el lazo externo encargado del control de la posición se diseña un controlador difuso del tipo PID⁴ con reglas individuales para las entradas, dando mayor grado de importancia a las variables que permitan mejorar el rendimiento del sistema.

En el lazo de realimentación interno se controla el ángulo de inclinación de la plataforma utilizando como señal de referencia el valor de los ángulos calculados en el lazo externo. A tal efecto se diseña un controlador del tipo PD⁵ con el objetivo de obtener una respuesta que sea lo suficientemente rápida para evitar la caída de la bola.

En este punto se evalúan dos alternativas para lograr un diseño adecuado basado en técnicas difusas. En primer término, se emplean los métodos de inferencia convencionales propuestos por Mamdani y Takagi-Sugeno, verificando el desempeño de cada uno para diferentes tipos de funciones de membresía, y en segundo lugar se desarrolla un sistema a partir de la utilización de redes adaptivas del tipo ANFIS.

⁴ Proporcional-Integral-Derivativo

⁵ Proporcional-Derivativo

Para la validación de los modelos seleccionados se realizan las simulaciones correspondientes, con el apoyo de las herramientas de software apropiadas. En tal sentido se utiliza el *Fuzzy Logic Toolbox* de MATLAB® para los procedimientos de diseño debido a la ventaja de posibilitar que los modelos generados sean directamente transferidos para su evaluación al entorno de simulación proporcionado por Simulink®.

Con referencia a la estabilidad, los métodos convencionalmente utilizados en sistemas lineales para determinar estabilidad no pueden ser aplicados al modelo bajo análisis debido a que el mismo no es lineal.

En general un sistema no lineal puede ser analizado a través de dos métodos:

- El primero fue presentado por Lyapunov y es un estudio de las curvas de energía del sistema, a través de las cuales se puede determinar si el mismo es estable o no.
- El segundo método requiere la linealización del sistema alrededor del punto de trabajo.

Respecto al primer método, el mismo se basa en la propuesta de una ecuación, habitualmente denominada ecuación de Lyapunov, que permita determinar la energía del sistema y su estabilidad intrínseca.

En el caso particular del segundo método, el mismo no puede ser aplicado al modelo de la planta ya que no posee un único punto de trabajo.

Dado que el análisis de estabilidad como el planteado en el primer método requiere de un nivel de análisis que podría ser equivalente o mayor al trabajo realizado para esta tesis, se realizará una evaluación de desempeño por medio de simulación.

1.6 Antecedentes del trabajo

Como trabajo previo a la temática de control mediante técnicas difusas se presentó el artículo “*Controlador Neuro Fuzzy para el sistema de bola y barra*”, en el 25° Congreso Argentino de Control Automático [4]. En el mismo se propone el diseño de un controlador neuro-difuso capaz de reproducir el comportamiento de un PID clásico para estabilizar el mecanismo no lineal de bola y barra, utilizado como planta didáctica en el estudio de sistemas de control. Empleando el método de generación y entrenamiento de un sistema de inferencia difuso adaptivo (ANFIS), mediante herramientas computacionales, se utilizaron muestras de las señales de entrada y salida obtenidas por simulación de un PID convencional. Finalmente se propusieron y validaron diferentes estructuras de redes neuronales analizando los índices de error y la complejidad de las topologías para determinar el modelo más apropiado.

Posteriormente fue presentado el trabajo “*Control difuso versus PID para un sistema de bola y plataforma*”, en las IX Jornadas Argentinas de Robótica [5], organizadas por el Centro de Investigaciones en Informática para Ingeniería (CIII) de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba. En el mismo se presentaron los resultados obtenidos mediante la utilización de un controlador PID convencional y un controlador difuso aplicados al control del sistema de bola y plataforma. A partir del

modelo matemático linealizado se diseñaron ambos controladores, empleando la metodología clásica y la estructura de Mamdani, respectivamente. La verificación se realizó aplicando consignas de entrada para generar trayectorias circular y rectangular en el movimiento de la bola. La comparación de las respuestas obtenidas por simulaciones mostró una clara ventaja en favor del controlador diseñado con técnicas difusas, incluso ante la presencia de ruido y perturbaciones externas.

Finalmente se presentó el artículo “*Desempeño de controladores difuso y neuro-difuso sobre una planta no lineal inestable*”, en el 26° Congreso Argentino de Control Automático [6], en el que se mostró la performance de los controladores aplicados sobre el modelo no lineal desarrollado para la planta de bola y plataforma. Ambos modelos fueron evaluados en simulación y los resultados demostraron que la aplicación de técnicas difusas resulta eficiente para plantas o procesos no lineales e inestables.

Capítulo 2

2. ESTADO DEL ARTE

2.1 Desarrollos comerciales

El sistema seleccionado como planta a controlar en este trabajo es conocido en el ámbito académico como el sistema de bola y placa (*Ball and Plate System*). Originalmente desarrollado de manera experimental en el laboratorio Rockwell, perteneciente a la Universidad de Checoslovaquia, a mediados de la década de 1990 [1]. En los años siguientes distintas universidades diseñaron variantes con importantes mejoras en su diseño mecánico y sistema de control. Actualmente es utilizado con el objetivo de asistir a las actividades académicas y proyectos de investigación en mecánica, eléctrica, control, electrónica, mecatrónica, etc., pero también es fabricado comercialmente por numerosas empresas proveedoras de equipamiento didáctico para las casas de estudio. Estas últimas, desarrollaron inicialmente variantes constructivas orientadas a aplicaciones específicas, sin embargo, actualmente se ofrecen de plataforma abierta para facilitar su incorporación en sistemas de diferentes características.

Un ejemplo es el equipo construido por GUNT Hamburg Gerätebau GmbH que se observa en la Figura 2.1, desarrollado en colaboración con el Department of Automation and Information Technology at the Harz University of Applied Studies and Research, el cual está orientado a la implementación de sistemas de control mediante técnicas de control difusas.

La plataforma consiste en una placa táctil resistiva que permite obtener la información sobre la posición de la bola y su trayectoria. Utiliza servomotores para gobernar el ángulo de la plataforma y potenciómetros como sensores de inclinación en ambos ejes.

El mando de los servos se implementa mediante un microcontrolador de la línea Zilog Z8 Encore y la elaboración del algoritmo de control se realiza en una computadora a través del software FSH-Shell que se ejecuta bajo el sistema operativo Windows®.



Figura 2.1. Equipo experimental desarrollado por GUNT Hamburg GmbH [7]

Por su parte la compañía Feedback Instruments Ltd. presentó un sistema destinado a la implementación de técnicas de control digital mediante la utilización del software LabVIEW® de la compañía National Instruments, ver Figura 2.2.

El mismo consiste en una plataforma rectangular cuyos movimientos son controlados mediante cuatro actuadores electromagnéticos ubicados en sus vértices. Para obtener la posición de la bola se utiliza una cámara digital suspendida sobre la plataforma y para obtener la información de su inclinación se emplean potenciómetros ubicados en cada eje de giro, cuyas señales son amplificadas y transferidas mediante una placa de adquisición del tipo PCI6251/6221 hacia una computadora. El software realiza los cálculos y, a través de la misma placa, envía hacia los inductores electromagnéticos las señales de corriente necesarias para el control [8].



Figura 2.2. Equipo desarrollado por Feedback Instruments Ltd. [8]

Un dispositivo similar fue construido en el Departamento de Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Mecánica, perteneciente al Rensselaer Polytechnics Institute, USA [9] que se muestra en la Figura 2.3.

A partir de un modelo linealizado, el sistema de control se desarrolló en base a dos lazos de realimentación, uno interior y otro exterior.

Los ángulos de inclinación son medidos utilizando codificadores ópticos de alta resolución y la posición de la bola se obtiene con una pantalla resistiva táctil de cristal, montada sobre la plataforma.

En el lazo interno un controlador PID⁶ gobierna un motor de corriente continua que modifica el ángulo de inclinación de la plataforma. Este subsistema se encuentra, a su vez, contenido dentro de un lazo externo que controla la posición de la bola y cuyo controlador fue diseñado utilizando la técnica del lugar de raíces. El funcionamiento correcto se asegura logrando una velocidad de respuesta mucho más rápida del lazo interno con respecto al externo.

⁶ *Proporcional-Integral-Derivativo*

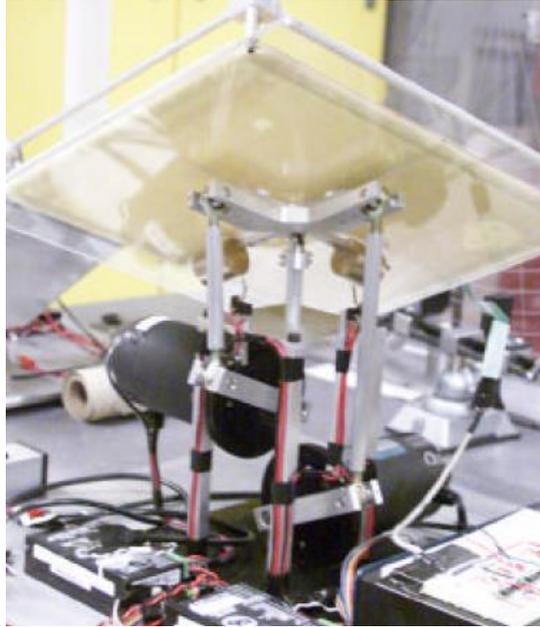


Figura 2.3. Sistema construido en el Rensselaer Polytechnics Institute [9]

Otro ejemplo, de utilización muy extendida en los ámbitos académicos, es el equipo desarrollado por la firma Checa HUMUSOFT spol. s.r.o. que es comercializado mundialmente mediante TecQuipment Ltd, del Reino Unido, Figura 2.4, Está constituido por una plataforma cuyo ángulo de inclinación es controlado también en dos direcciones a través de motores paso a paso. La información de la posición de la bola se obtiene mediante una cámara CCD de 720p de resolución, y la imagen es procesada en tiempo real por un software elaborado en lenguaje C. El módulo incluye una placa de entrada/salida utilizada para las señales de control y el accionamiento de los motores se efectúa mediante dos canales temporizados que son excitados desde Simulink Desktop Real-Time provisto con el equipo. Las especificaciones físicas del conjunto bola y plataforma se tomaron como base para el desarrollo del presente trabajo.



Figura 2.4. Equipo CE 151 de HUMUSOFT® [10]

2.2 Antecedentes bibliográficos

En general la problemática del control del sistema de bola y plataforma ha sido abordada desde diferentes puntos de vista y considerando una gran variedad de conceptos sustentados en las teorías clásicas y modernas del control automático.

En el trabajo de Hongwei L. y Yanyang L. [1] fue propuesto un algoritmo de control por modos deslizantes para el seguimiento de la trayectoria de la bola y el control de su posición. El problema se dividió en dos partes, el control de la posición de la bola, por un lado, y el control del ángulo de inclinación de la plataforma, por otra parte.

Se distinguió de otros trabajos debido a que la plataforma fue subdividida en dos placas con movimientos independientes. La primera de ellas, sobre la que se encuentra la bola, podía girar según el eje x, en tanto que la segunda, montada sobre la anterior, permitía el giro respecto al eje y, como se observa en la Figura 2.5. De esta forma se otorgó a la primera de las placas los dos grados de libertad necesarios para el movimiento libre en el espacio.

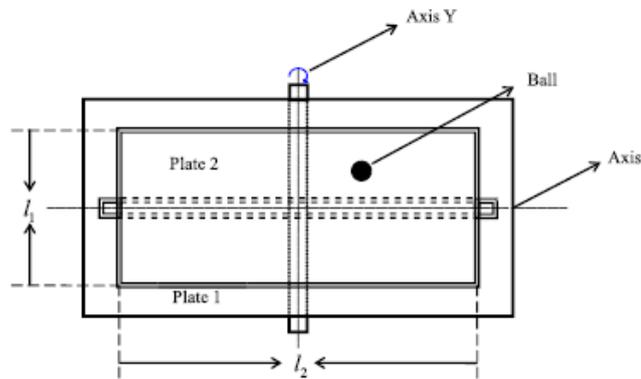


Figura 2.5. Sistema experimental de doble plataforma [1]

En el proyecto se utilizaron motores de corriente continua con un sistema de transmisión mediante engranajes para proporcionar el movimiento sobre ambos ejes de giro, en tanto que la información de posición se obtuvo empleando sensores piezoeléctricos con una adecuada técnica de filtrado de las señales.

Con el algoritmo utilizado se eliminó el impacto de efectos inciertos como la fricción por deslizamiento y/o por rodadura de la bola durante su movimiento, el juego mecánico y los retardos causados por la transmisión de los movimientos sobre las placas.

En este trabajo se propuso un sistema de control del tipo “*loop in the loop*”, sin embargo, se presentó únicamente el método de diseño del lazo exterior, no haciendo referencia sobre la metodología utilizada para el lazo interior. La validación del algoritmo se realizó mediante simulación.

Por otra parte, en la Universidad de Ciencia y Tecnología de Henan, China, se realizó un trabajo de comparación del desempeño de un controlador PD adaptativo difuso con relación a un controlador PD tradicional y un tercero diseñado con el método MPC⁷ [11], sobre un mecanismo de bola y plataforma de construcción propia. En función de la simetría del sistema también se diseñaron controladores independientes para cada eje de rotación de la plataforma. Para el diseño del controlador PD adaptativo difuso se consideraron como entradas el error entre el valor de referencia y el medido, y la velocidad de cambio del error. Como salida se obtuvieron los valores de corrección para los parámetros del controlador. Dichos parámetros se ajustaron automáticamente conforme a la situación de operación del sistema para conseguir un movimiento rápido y estable de la bola.

Con dicho estudio se pudo verificar que, incrementando el valor de la ganancia proporcional, P, se disminuyó el tiempo de respuesta y el error de estado estacionario, pero aumentando el sobrepaso y generando oscilaciones. Mientras que el incremento de la constante de tiempo diferencial, Td, mejoró el sobrepaso, pero aumentando la sensibilidad a las perturbaciones.

Por otro lado, en el laboratorio del Instituto de Automatización de la Universidad de Jilin, China, se desarrolló un dispositivo de bola y plataforma denominado BPVS-JLU I con la variante de utilizar motores paso a paso para los movimientos, como se observa en la Figura 2.6. El mismo fue utilizado como base para el desarrollo de diversos trabajos de investigación como el presentado en [12], en el cual se diseñó un sistema de control basado en una estructura de doble lazo, donde el control de posición en el lazo externo se realizó mediante un controlador difuso de simple entrada y para el ajuste del ángulo de la plataforma se utilizó un controlador de características conmutadas con diferentes algoritmos seleccionados en función de la magnitud del error de ángulo de la plataforma.



Figura 2.6. Sistema de bola y plataforma BPVS-JLU I [12]

Con el mismo dispositivo, en [13], se propuso un observador de estados, no lineal, de la velocidad para regular la salida del sistema. En este caso la velocidad de la bola fue estimada por el observador en lugar de utilizar el método de la diferencia de primer orden. Adicionalmente fue aumentado el orden del modelo del sistema para incluir el efecto de la resistencia al movimiento, entre la bola y plataforma, y se evaluaron las mejoras obtenidas respecto al uso del modelo original. No obstante, el error de posición obtenido con el orden aumentado fue casi de la misma magnitud que para el sistema original y, por otra parte, no se consideró el efecto del ruido de medición.

Un controlador difuso supervisor fue desarrollado en [14], tomando como base el mismo mecanismo citado anteriormente, con una implementación en dos niveles. En un nivel bajo se desarrolló un controlador de seguimiento de simple entrada tipo SIRM⁸ mientras que en el nivel superior se implementó un controlador de supervisión con base en el modelo difuso de Mamdani. Para monitorear adecuadamente el movimiento de la bola se adoptó una supervisión continua de la velocidad y aceleración mediante un servo control visual utilizando un software comercial de la firma Matrox Electronic Systems Ltd. En los experimentos no se sometió el sistema a perturbaciones momentáneas por lo que no es posible inferir su comportamiento en esas condiciones.

Por otra parte, en el trabajo *“Trajectory tracking control for unconstrained objects based on the SIRMs dynamically connected fuzzy inference model”* [15] fue presentado un experimento que utilizó como objeto de control una pelota de tenis cuyo movimiento fue gobernado diseñando un controlador basado en un modelo de inferencia difusa dinámicamente conectado del tipo SIRM. Señales de control generadas a partir de trayectorias circulares se aplicaron a la plataforma mediante motores de pasos, realimentando la posición de la pelota a través de una cámara de video. El experimento demostró que fue posible reproducir el movimiento siguiendo dichas trayectorias con suficiente precisión.

Con base en el accionamiento de la plataforma mediante cuatro actuadores por suspensión magnética, se presentó el trabajo *“Image Fuzzy Control on Magnetic Suspension Ball and Plate System”* [16] donde dichos actuadores se han construido combinando la acción de imanes permanentes con el efecto de electroimanes para mejorar la estabilidad del accionamiento. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos comparando los comportamientos de un FLC⁹ básico versus un EFLC¹⁰. Debido a que la bola siempre rebasa el punto objetivo fijado, el EFLC fue ajustado para mejorar la eficiencia del seguimiento aplicando una acción de freno antes de alcanzar el punto establecido. El trabajo da cuenta de la mejora lograda con el EFLC. No obstante, sólo se mencionan experimentos considerando un punto inicial y un punto final fijos en la plataforma, sin realizar pruebas sobre trayectorias continuas ni tampoco se evalúa el resultado frente a la aparición de perturbaciones externas.

⁸ *Single Input Rule Module*

⁹ *Fuzzy Logic Controller*

¹⁰ *Enforced Fuzzy Logic Controller*

Capítulo 3

3. MODELO MATEMÁTICO

3.1 Modelo del dispositivo bola-plataforma

El sistema de bola y plataforma considerado en este trabajo, y que se muestra esquemáticamente en la Figura 3.1, está compuesto por un plano cuadrado pivotado en su centro geométrico sobre el que una bola puede rodar libremente.

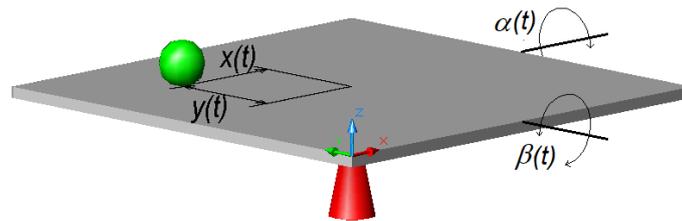


Figura 3.1. Diagrama esquemático del sistema de bola y plataforma

La plataforma puede inclinarse en cualquier dirección y por lo tanto la esfera, por acción de la fuerza de gravedad, también puede rodar de igual manera. Descomponiendo ambos movimientos en ejes perpendiculares se puede observar la existencia de dos grados de libertad para la plataforma originados por su rotación alrededor del *eje x*, generando los ángulos $\alpha(t)$, y por la rotación sobre el *eje y* originando los ángulos $\beta(t)$. Asimismo, se puede descomponer el desplazamiento de la bola en las direcciones perpendiculares $x(t)$, $y(t)$. Por tal motivo este dispositivo posee cuatro grados de libertad.

El desplazamiento de la bola sobre la plataforma se mide según las coordenadas x_b e y_b , ubicando en el centro del plano el origen de dichas coordenadas, en tanto que la inclinación del plano de movimiento, o sea de la plataforma, se mide según los ángulos α y β con respecto a los *ejes x* e *y* respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento del sistema pueden obtenerse a partir de consideraciones energéticas, basadas en la fórmula general de Euler-Lagrange, desarrollo referenciado en los trabajos [17], [18], [19].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.1)$$

Siendo

q_i la coordenada en la dirección i

T la energía cinética del sistema

V la energía potencial del sistema

Q_i la fuerza compuesta

La energía cinética de la bola está dada por la energía rotacional respecto al centro de la bola más la energía de traslación del centro de la misma.

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2} J_b (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (3.2)$$

Donde

m_b = masa de la bola

r_b = radio de la bola

J_b = momento de inercia de la bola

\dot{x}_b, \dot{y}_b = velocidades de traslación de la bola según cada eje

ω_x, ω_y = velocidades de rotación de la bola según cada eje

Las relaciones entre las velocidades de traslación y rotación son

$$\dot{x}_b = r_b \omega_y \quad , \quad \dot{y}_b = r_b \omega_x$$

Por lo que reemplazando se obtiene

$$T_b = \frac{1}{2} \left[m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{J_b}{r_b^2} (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) \right] = \frac{1}{2} \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) \quad (3.3)$$

A su vez, la energía cinética rotacional de la plataforma considerando la bola como una masa puntual resulta

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} (J_p + J_b) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} m_b (x_b \dot{\alpha} + y_b \dot{\beta})^2 \\ &= (J_p + J_b) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} m_b (x_b^2 \dot{\alpha}^2 + 2x_b \dot{\alpha} y_b \dot{\beta} + y_b^2 \dot{\beta}^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

con

$\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ = velocidades rotacionales de la plataforma

J_p = momento de inercia de la plataforma

Por lo tanto, la energía cinética total del sistema (bola y plataforma) resulta

$$T = \frac{1}{2} \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2} (J_p + J_b) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} m_b (x_b^2 \dot{\alpha}^2 + 2x_b \dot{\alpha} y_b \dot{\beta} + y_b^2 \dot{\beta}^2) \quad (3.5)$$

Por otra parte, la energía potencial de la bola relativa a un plano horizontal hipotéticamente ubicado en el centro de la plataforma inclinada se calcula con

$$V_b = m_b g h = m_b g (x_b \text{ sen } \alpha + y_b \text{ sen } \beta) \quad (3.6)$$

Luego, la energía total del sistema se puede expresar como

$$L = T_b + T_p - V_b$$

Calculando las derivadas parciales y reemplazando en la fórmula de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = (J_p + J_b) \dot{\alpha} + m_b x_b (x_b \dot{\alpha} + y_b \dot{\beta}) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = (J_p + J_b) \dot{\beta} + m_b y_b (y_b \dot{\beta} + x_b \dot{\alpha}) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = m_b g \cos \alpha \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = m_b g \cos \beta \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_b} = \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) \dot{x}_b \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_b} = m_b (x_b \dot{\alpha} + y_b \dot{\beta}) \dot{\alpha} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_b} = \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) \dot{y}_b \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y_b} = m_b (x_b \dot{\alpha} + y_b \dot{\beta}) \dot{\beta} \quad (3.11)$$

Asumiendo de manera generalizada que τ_x y τ_y son los torques aplicados a la plataforma según los respectivos ejes, las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir de la siguiente manera

$$\alpha: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = (J_p + J_b) \ddot{\alpha} + m_b x_b^2 \ddot{\alpha} + 2m_b x_b \dot{x}_b \dot{\alpha} + m_b x_b y_b \ddot{\beta} + m_b \dot{x}_b y_b \dot{\beta} + m_b x_b \dot{y}_b \dot{\beta} - m_b g \cos \alpha = \tau_x \quad (3.12)$$

$$\beta: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = (J_p + J_b) \ddot{\beta} + m_b y_b^2 \ddot{\beta} + 2m_b y_b \dot{y}_b \dot{\beta} + m_b x_b y_b \ddot{\alpha} + m_b \dot{y}_b x_b \dot{\alpha} + m_b y_b \dot{x}_b \dot{\alpha} - m_b g \cos \beta = \tau_y \quad (3.13)$$

$$x: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_b} - \frac{\partial L}{\partial x_b} = \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) \ddot{x}_b - m_b (x_b \dot{\alpha} + y_b \dot{\beta}) \dot{\alpha} + m_b g \sin \alpha = 0 \quad (3.14)$$

$$y: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_b} - \frac{\partial L}{\partial y_b} = \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) \ddot{y}_b - m_b (y_b \dot{\beta} + x_b \dot{\alpha}) \dot{\beta} + m_b g \sin \beta = 0 \quad (3.15)$$

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales no lineales para el conjunto completo de bola y plataforma resultan

$$\left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) \ddot{x}_b - m_b (x_b \dot{\alpha}^2 + y_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + m_b g \sin \alpha = 0 \quad (3.16)$$

$$\left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) \ddot{y}_b - m_b (y_b \dot{\beta}^2 + x_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + m_b g \sin \beta = 0 \quad (3.17)$$

$$\tau_x = (J_p + J_b + m_b x_b^2) \ddot{\alpha} + 2m_b x_b \dot{x}_b \dot{\alpha} + m_b x_b y_b \ddot{\beta} + m_b \dot{x}_b y_b \dot{\beta} + m_b x_b \dot{y}_b \dot{\beta} + m_b g x_b \cos \alpha \quad (3.18)$$

$$\tau_y = (J_p + J_b + m_b y_b^2) \ddot{\beta} + 2m_b y_b \dot{y}_b \dot{\beta} + m_b y_b x_b \ddot{\alpha} + m_b \dot{y}_b x_b \dot{\alpha} + m_b y_b \dot{x}_b \dot{\alpha} + m_b g y_b \cos \beta \quad (3.19)$$

Las ecuaciones (3.16) y (3.17) indican que la aceleración de la bola depende del ángulo y de la velocidad angular de inclinación de la plataforma. En tanto que las ecuaciones (3.18) y (3.19) muestran como la inclinación de la plataforma es, a su vez, dinámicamente influenciada por la posición y velocidad de la bola.

Mediante el análisis de dichas expresiones se observa que el dispositivo de bola y plataforma presenta un único punto de equilibrio, de carácter inestable, que se verifica cuando todas sus variables $x_b, \dot{x}_b, \alpha, \dot{\alpha}, y_b, \dot{y}_b, \beta, \dot{\beta}$ son nulas, condición que sólo se cumple con la plataforma inmóvil en posición perfectamente horizontal y con la bola detenida en el centro geométrico. Considerando que el dispositivo tiene un apoyo puntual, cualquier perturbación externa mínima producirá un ángulo de inclinación que hará rodar la bola hasta caer de la plataforma.

En las ecuaciones anteriores se puede observar el carácter no lineal del dispositivo y la existencia de términos de acoplamiento entre las direcciones de movimiento.

Para simplificar dicho sistema de ecuaciones es conveniente obtener un modelo en el espacio de estados, a tal efecto se define el siguiente vector de variables

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T = [x_b, \dot{x}_b, \alpha, \dot{\alpha}, y_b, \dot{y}_b, \beta, \dot{\beta}]^T \quad (3.20)$$

Cuando el sistema es excitado por el vector de entradas

$$\mathbf{U} = [u_x, u_y]^T = [\alpha, \beta]^T \quad (3.21)$$

produce una respuesta dada por

$$\mathbf{Y} = [x_1, x_5]^T = [x_b, y_b]^T \quad (3.22)$$

Considerando que el momento de inercia de una bola sólida se obtiene como

$$J_b = \frac{2}{5} m_b r_b^2 \quad (3.23)$$

y definiendo un factor constante que depende de los parámetros físicos de la bola

$$B = \frac{m_b}{\left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2}\right)} \quad (3.24)$$

se obtiene, a partir de las expresiones (3.16) y (3.17)

$$\frac{m_b}{B} \dot{x}_2 - m_b(x_1 x_4^2 + x_4 x_5 x_8) + m_b g \operatorname{sen} x_3 = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{m_b}{B} \dot{x}_6 - m_b(x_5 x_8^2 + x_1 x_4 x_8) + m_b g \operatorname{sen} x_7 = 0 \quad (3.26)$$

Finalmente, la ecuación de estado no lineal del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ se escribe como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B(x_1x_4^2 + x_4x_5x_8 - g \sin x_3) \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \\ B(x_5x_8^2 + x_1x_4x_8 - g \sin x_7) \\ x_8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A pesar de la simetría de la ecuación se observa que existe un acoplamiento interno en el sistema, ya que los términos $x_4x_5x_8 (\dot{\alpha}_y \dot{\beta})$ y $x_1x_4x_8 (x_b \dot{\alpha} \dot{\beta})$ indican que la velocidad aplicada a la variación del ángulo de inclinación de la plataforma, según uno de los ejes de movimiento, modifica tanto la posición de la bola como el ángulo de inclinación de la plataforma respecto al otro eje de movimiento. No obstante, asegurando una baja velocidad y aceleración de la bola resulta válida la aproximación

$$|\dot{\alpha}| \ll 1 \quad \text{y} \quad |\dot{\beta}| \ll 1$$

Luego pueden omitirse los términos de acoplamiento en $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y dividir el sistema en dos subsistemas de igual estructura, con lo que es posible realizar el control sobre cada eje del movimiento de manera independiente, pero empleando la misma estrategia.

Las ecuaciones de estado desacopladas que corresponden a cada eje, se indican a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B(x_1x_4^2 - g \text{sen } x_3) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_x] \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ B(x_5x_8^2 - g \text{sen } x_7) \\ x_8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_y] \quad (3.29)$$

En la Figura 3.2 se observa el modelo desarrollado en Simulink® para representar la ecuación (3.28), que considera el movimiento de la plataforma según el eje x definido en la Figura 3.1. Idéntico modelo representa la ecuación (3.29), que corresponde al movimiento según el eje y .

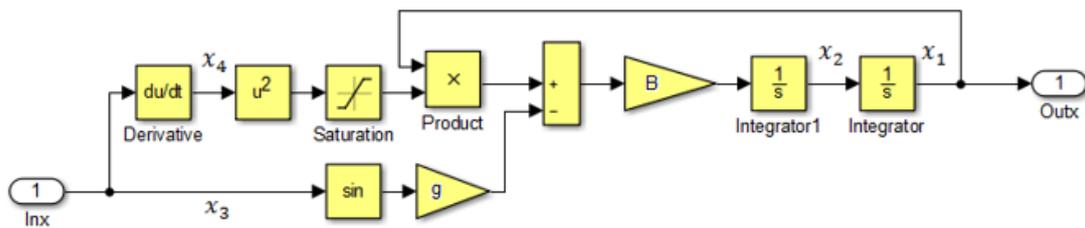


Figura 3.2. Modelado del sistema de bola y plataforma para cada eje de movimiento

3.2 Modelo del motor de corriente continua

Para controlar la inclinación de la plataforma es necesario aplicar, sobre ésta, sendos pares motores τ_x y τ_y que producirán los ángulos α y β en sus respectivas direcciones, según lo indicado en la Figura 3.1. En este trabajo se ha considerado que dichos pares se aplican a través de motores de corriente continua, por medio de los controladores situados en el lazo interior del sistema, Figura 1.1. Estos motores son los actuadores que producen el movimiento de la plataforma, motivo por el cual se debe incorporar su modelo matemático en la estructura del sistema.

Con base en los principios físicos y los parámetros eléctricos y mecánicos que determinan el funcionamiento en un motor de estas características, a partir de una señal de tensión aplicada sobre su circuito de inducido, se deriva un modelo matemático que representa su dinámica de actuación [20] [21].

En la Figura 3.3 se observa el esquema de composición de un motor de corriente continua con excitación constante e independiente. De este modo el control se efectúa sobre el circuito de armadura a partir de una señal de tensión.

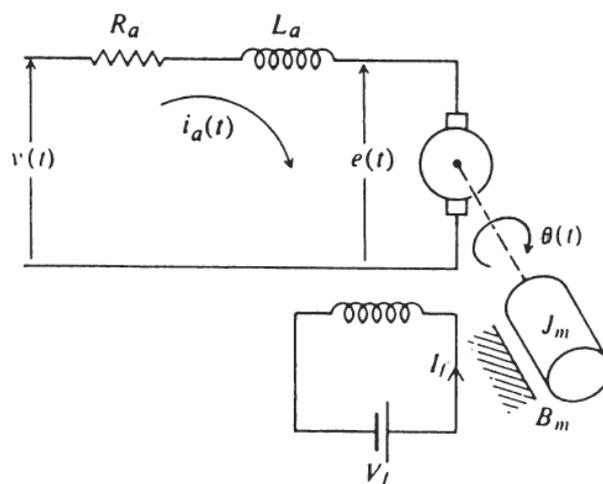


Figura 3.3. Esquema de un motor de CC con excitación independiente [21]

Para un motor de CC el par generado $\tau(t)$ es proporcional a la corriente de armadura $i_a(t)$ y a la intensidad del campo magnético. Si la excitación es independiente y de magnitud constante, el par motor resulta directamente proporcional a dicha corriente a través de la constante de torque electromagnético K_m , en tanto que la fuerza electromotriz inducida $e(t)$ es proporcional a la velocidad de rotación, $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, a través de la constante de fuerza contra electromotriz K_b . Por lo tanto

$$\tau(t) = K_m i_a(t) \quad (3.30)$$

$$e(t) = K_b \dot{\theta}(t) \quad (3.31)$$

A partir del esquema de la Figura 3.3, aplicando la ley de tensiones de Kirchoff y la 2da. ley de Newton se obtienen las ecuaciones que representan el funcionamiento del motor

$$v(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t) \quad (3.32)$$

$$\tau(t) = J_m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3.33)$$

Interpretando estas ecuaciones diferenciales en el dominio de la Transformada de Laplace se obtienen

$$V(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + E(s) \quad (3.34)$$

$$T(s) = J_m \ddot{\theta}(s) + B_m \dot{\theta}(s) \quad (3.35)$$

A partir de las cuales se construye el diagrama de bloques de la Figura 3.4 donde se puede observar la interrelación entre los parámetros electromecánicos y las variables que intervienen en el funcionamiento del motor. Con base en este diagrama se obtiene la función de transferencia de la ecuación (3.36) que representa la relación entre el ángulo de salida con respecto a la tensión aplicada.

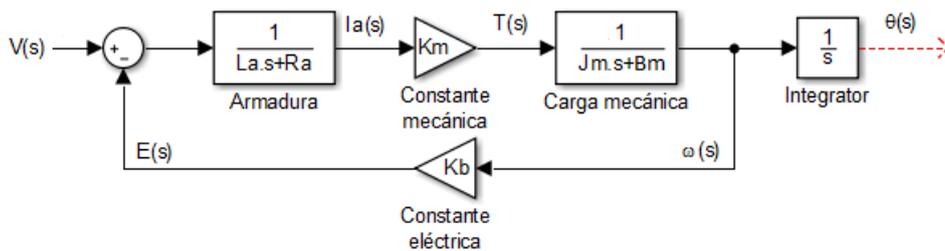


Figura 3.4. Diagrama de bloques del motor de CC controlado por armadura

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(J_m s + B_m) + K_m K_b]} \quad (3.36)$$

Por otra parte, es posible obtener un modelo definido en el espacio de estados a partir de las ecuaciones diferenciales, considerando la elección de las siguientes variables de estado

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \theta(t) \\x_2(t) &= \dot{\theta}(t) \\x_3(t) &= i_a(t)\end{aligned}\tag{3.37}$$

con lo que se puede escribir, de manera simplificada

$$\dot{x}_1 = x_2\tag{3.38}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B_m}{J_m} x_2 + \frac{K_m}{J_m} x_3\tag{3.39}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_b}{L_a} x_2 - \frac{R_a}{L_a} x_3 + \frac{1}{L_a} v\tag{3.40}$$

Y finalmente se obtiene un modelo representado en el espacio de estados por las ecuaciones a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_m}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \cdot [v]\tag{3.41}$$

$$\theta = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\tag{3.42}$$

siendo las expresiones (3.41) y (3.42) las denominadas ecuación de estado del motor y ecuación de salida respectivamente.

Para realizar las simulaciones y evaluar el comportamiento de los controladores se adoptaron los valores indicados en la TABLA 3.1 para los parámetros físicos del dispositivo de bola y plataforma [20], y los valores de la TABLA 3.2 para los parámetros de los motores utilizados en el accionamiento [22].

TABLA 3.1 PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA DE BOLA Y PLATAFORMA

Parámetro	Descripción	Valor y unidades
m_b	Masa de la bola	0.027 kg
r_b	Radio de la bola	0.02 m
m_p	Masa de la plataforma	0.1 kg
J_p	Momento de inercia de la plataforma	0.5 kg.m ²
J_b	Momento de inercia de la bola	4.32 10 ⁻⁶ kg.m ²
g	Aceleración gravitatoria	9.81 m/s ²

TABLA 3.2 PARÁMETROS FÍSICOS DE LOS MOTORES DE ACCIONAMIENTO

Parámetro	Descripción	Valor y unidades
\mathbf{K}_m	Constante de par	0.0274 N.m/A
\mathbf{K}_b	Constante de fem	0.0274 V.s/rad
\mathbf{J}_m	Momento de inercia del rotor	$3.2284 \cdot 10^{-6}$ kg.m ²
\mathbf{B}_m	Rozamientos	$3.5077 \cdot 10^{-6}$ N.m/(rad/s)
\mathbf{L}_a	Inductancia de armadura	$2.75 \cdot 10^{-6}$ H
\mathbf{R}_a	Resistencia de armadura	4 Ω

Tomando los datos anteriores se obtuvieron las siguientes expresiones, en adelante consideradas para este trabajo

A partir de las ecuaciones (3.24), (3.28) y (3.29), para el conjunto de bola y plataforma se tienen

$$B = \frac{m_b}{\left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2}\right)} = 0.714 \cong \frac{5}{7} \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0.714 (x_1 x_4^2 - 9.81 \text{ sen } x_3) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_x] \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ 0.714 (x_5 x_8^2 - 9.81 \text{ sen } x_7) \\ x_8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_x] \quad (3.45)$$

y para los motores de accionamiento, de las ecuaciones (3.41) y (3.42) se obtienen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.087 & 8487 \\ 0 & -9964 & -1.455 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.636 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \cdot [v] \quad (3.46)$$

$$\theta = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Capítulo 4

4. MODELO DE CONTROL DEL SISTEMA

Tal como ha sido expresado en la introducción, para el desarrollo del presente trabajo se utiliza un esquema conformado por un lazo cerrado interno que opera dentro de un lazo cerrado exterior. Este concepto conocido como “*loop in the loop*”, o control en cascada, Figura 4.1, ha sido utilizado con éxito en el control de dispositivos no lineales de diferentes características [23], [24], [25], [26], [27], y en particular aquellos que presentan condiciones muy exigentes de operación.

Con base en las ecuaciones (3.28) y (3.29) que determinan un modelo matemático desacoplado para la plataforma propuesta, los controladores a diseñar presentan iguales características para ambos ejes de movimiento, por esta razón en adelante se hará referencia solamente a uno de ellos.

En el esquema de la Figura 4.1 se observa que el movimiento de la plataforma, provocado por el lazo interno, se efectúa a partir de la señal de corrección generada por el lazo exterior, el cual toma referencia de la posición real de la bola respecto de la consigna establecida. Por tal motivo es necesario que dicho movimiento se efectúe suficientemente rápido para lograr una adecuada reacción de la plataforma a medida que se va modificando la posición de la bola, afectada por el ángulo de inclinación y la aceleración de la gravedad.

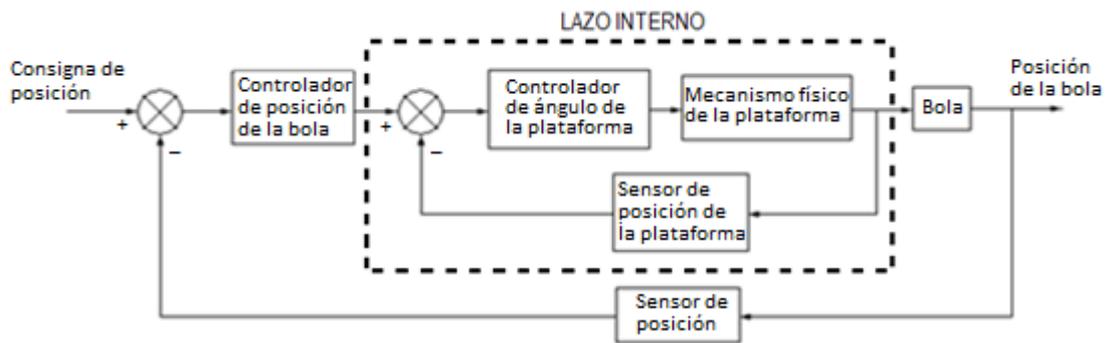


Figura 4.1. Esquema de doble lazo cerrado para control del sistema

Como se detalla en la Figura 4.2, el lazo interno del sistema tiene la función de controlar el accionamiento de la plataforma. Dicho movimiento se realiza mediante un servomotor de corriente continua que aplica el torque necesario para producir el ángulo de inclinación requerido. Dicho motor se controla mediante la tensión de armadura, manteniendo su excitación constante. En estas condiciones su dinámica puede representarse por la función de transferencia lineal expresada en la (3.36), la cual ha sido obtenida a partir de los principios físicos que rigen su funcionamiento [20], [21].

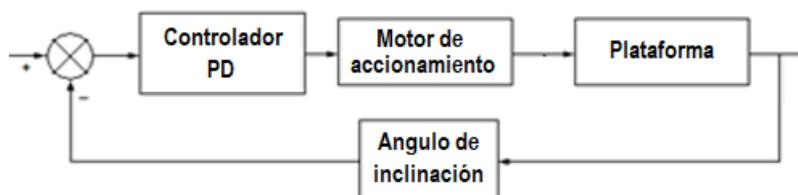


Figura 4.2. Lazo de control de inclinación de la plataforma

Para que el sistema responda eficientemente evitando que la bola caiga de la plataforma es necesario que la velocidad de respuesta del lazo interior sea mayor que la velocidad del lazo externo, razón por la cual se propone la incorporación de un controlador PD para generar la acción de control adecuada.

Con esta premisa y empleando los criterios clásicos para el diseño y ajuste de controladores a partir del método del lugar geométrico de las raíces, empleando la herramienta SISOtool de Matlab® [28], se obtuvo la función de transferencia expresada en la ecuación (4.1). La misma caracteriza al controlador con un tiempo de establecimiento $T_s = 0.64$ s y un margen de fase $MF = 103^\circ$ a 7.6 rad/s para el lazo cerrado interior. Estos parámetros permiten una respuesta rápida sin la presencia de oscilaciones.

$$G_{PD}(s) = 0.2 + 0.01 s = 0.2 (1 + 0.05 s) \quad (4.1)$$

Con referencia a la Figura 4.2, el lazo externo del sistema tiene la función de mantener el control de la posición de la bola. En este lazo el controlador opera en base a la señal de error que se obtiene a partir de la consigna de entrada y la señal proveniente de un sensor que realimenta la información de la posición real de la bola durante su desplazamiento sobre la plataforma.

En este trabajo se propone el diseño del controlador externo con las características operativas de un PID convencional. El mismo se desarrolla mediante dos arquitecturas diferentes, utilizando técnicas de lógica difusa. En primer término, se realiza el diseño de un controlador basado en el método clásico de inferencia difusa y, en segundo lugar, el desarrollo de un controlador del tipo ANFIS, compuesto por un sistema de inferencia basado en reglas difusas que se ajustan mediante el entrenamiento de una red neuronal. Esto le confiere una característica de adaptabilidad posibilitando el ajuste automático de los parámetros de las funciones de pertenencia inicialmente definidas.

Capítulo 5

5. MODELOS DIFUSOS PROPUESTOS

5.1 Controlador difuso tipo Mamdani

Teniendo en cuenta la estructura de los controladores difusos existen dos arquitecturas básicas cuya diferencia consiste en la formulación del consecuente que se corresponde con las reglas difusas definidas.

En los controladores del tipo Mamdani, también denominados como sistemas de Tipo I, tanto los antecedentes como los consecuentes de las reglas son términos expresados en forma lingüística, por ejemplo

Si x_1 es Bajo y x_2 es Alto, entonces u es Bajo

Mientras que en una estructura del tipo Takagi-Sugeno-Kang, sistemas de Tipo II, los antecedentes son también términos lingüísticos pero el consecuente de cada regla está expresado como una función matemática de las variables de entrada, tal como

Si x_1 es Bajo y x_2 es Alto, entonces $u = f(x_1, x_2)$

donde f generalmente es una combinación lineal de las entradas.

Al igual que para los controladores convencionales, existen diferentes estructuras para el desarrollo de controladores difusos, por lo que considerando el tipo de acción de control que realizan se han desarrollado controladores difuso-proporcionales (FP), difuso-proporcionales-diferenciales (FPD), difuso-proporcionales-integrales (FPI) y difuso-proporcionales-integrales-derivativos (FPID) [29].

En primer lugar, se propone el diseño de un controlador del tipo Mamdani en el cual se consideran como variables de entrada el error y la variación del error de la posición de la bola sobre la plataforma, respecto de la consigna. A efectos de anular errores de estado estacionario, se incorpora una acción integral sobre la señal de error, configurando un controlador PID difuso. No obstante, esta estructura generalmente demanda la necesidad de definir un número importante de reglas difusas, hecho que genera mayores dificultades al momento de la implementación física del controlador y consume mayores tiempos de computación. Con el objetivo de simplificar el diseño la acción integral sobre el error de posición se incorpora al sistema de forma paralela, como se observa en la Figura 5.1, configurando la variante denominada FPD+I [30].

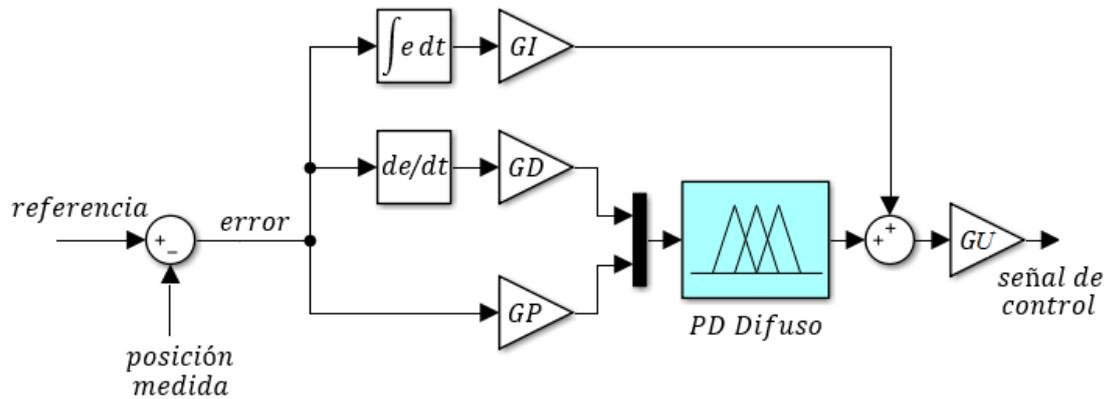


Figura 5.1. Estructura del controlador FPD+I

En los controladores digitales la componente de integración del error es proporcional a la acumulación de los errores medidos en los instantes anteriores de tiempo, por lo que considerando tiempos de muestreo T_s suficientemente pequeños resulta válida la aproximación

$$GI \cdot \int e dt \approx GI \cdot \sum_{i=1}^n e(n) \cdot T_s \quad (5.1)$$

Considerando entonces la estructura del controlador FPD+I de la Figura 5.1 la señal de control resulta una función no lineal del error, de los cambios del error y de la acumulación de éstos, para cualquier instante n de tiempo, según la expresión

$$u(n) \approx \left[GP \cdot e(n) + GD \cdot \dot{e}(n) + GI \cdot \sum_{i=1}^n e(n) \cdot T_s \right] \cdot GU \quad (5.2)$$

Este controlador FPD+I provee todos los beneficios de un control PID, no obstante, puede presentar mayor sensibilidad especialmente frente a la presencia de ruido o cambios abruptos en la señal de error, debido a la acción derivativa. En tanto que la acción integral asegura eliminar los errores de estado estacionario, aunque con alta ganancia puede provocar inestabilidad [30].

Los valores difusos de entrada se obtienen aplicando tres funciones de membresía del tipo triangular para cada una de dichas variables, ver Figura 5.2. Debido a la simetría que presenta el sistema, tanto en las dimensiones de la plataforma como en su accionamiento, se optó por definir funciones de pertenencia con un formato simétrico alrededor del punto teórico de equilibrio en $x = y = 0$.

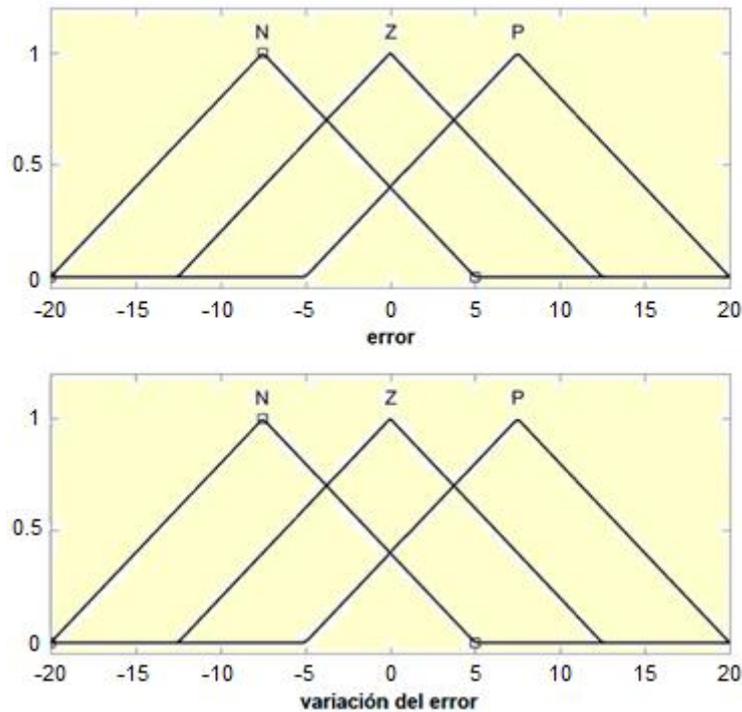


Figura 5.2. Funciones de pertenencia para las variables de entrada

Por otra parte, en la Figura 5.3 se observan las tres funciones de pertenencia de tipo trapezoidal propuestas para la variable de salida del controlador.

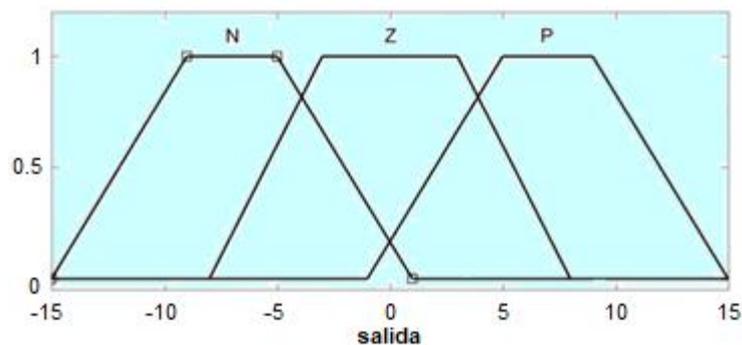


Figura 5.3. Funciones de pertenencia para la variable de salida del controlador

En el sistema creado se definen las funciones de membresía con los términos lingüísticos N (negativo), Z (cero) y P (positivo) tomando en consideración el signo de las variables de entrada y salida. La base de reglas, entonces, queda conformada por un total de nueve reglas difusas según se indica en la TABLA 5.1. Para la conexión de los antecedentes se utiliza la operación lógica *and* con el método del *mínimo*. Para la operación de implicación se utiliza el método de *mínimo* y para la agregación se utiliza el *máximo*, en tanto que para el proceso de defuzzificación se emplea el método del *centroide*.

TABLA 5.1 REGLAS DE INFERENCIA PARA EL CONTROLADOR DIFUSO

		Variación del error		
		N (negativo)	Z (cero)	P (positivo)
Error	N (negativo)	N	N	Z
	Z (cero)	N	Z	P
	P (positivo)	Z	P	P

Conforme al esquema observado en la Figura 5.1 y la ecuación (5.2), se incorporan factores de ganancia sobre las entradas al controlador como así también un factor de ganancia general sobre la señal de actuación, a la salida del mismo. Su efecto es equivalente a un cambio de escala del universo de discurso sobre el que se definen las funciones de membresía. Para las señales de entrada al controlador difuso, si GP y GD tienen valores > 1 producen una contracción de los universos de discurso, en tanto que valores < 1 producen expansión de los mismos. Un efecto opuesto ocurre para la salida del controlador, en razón de que el factor de ganancia se aplica posteriormente al proceso de defuzzificación [30].

El objetivo es proveer elementos de ajuste respecto del desempeño del sistema, operando como variables de sintonía que permiten calibrar la acción de control sobre la planta para lograr una respuesta adecuada. No obstante, deben elegirse cuidadosamente dichos valores de ganancia dado que en fase de simulación es posible obtener respuestas muy rápidas, pero a costa de producir señales de control excesivamente elevadas lo cual, en el caso de realizar una implementación física del sistema, puede llevar a la saturación de los actuadores y la pérdida de la estabilidad.

En general, el ajuste de las funciones de pertenencia supone la existencia de un experto que provee la información necesaria para determinar los valores del sistema. Para el caso de los controladores difusos puede no existir una base sólida de conocimientos para un caso específico, o una configuración que permita obtener exactamente la respuesta deseada. Por ello los parámetros de diseño se ajustan normalmente con base en el conocimiento de la dinámica del sistema y, si bien existen numerosos algoritmos con el objetivo de optimizar la sintonía [31], en la práctica es habitual utilizar el método directo de prueba y error. Este último es el procedimiento empleado en el trabajo, con el objetivo de que sea posible reproducir las trayectorias de referencia procurando mantener la estabilidad y un error aceptable.

En la Figura 5.4 se observa la superficie de control que describe la dinámica del controlador, la cual presenta características de operación simétrica respecto del movimiento del sistema. En tanto que los valores finales de ajuste de ganancias se muestran en la Figura 5.5.

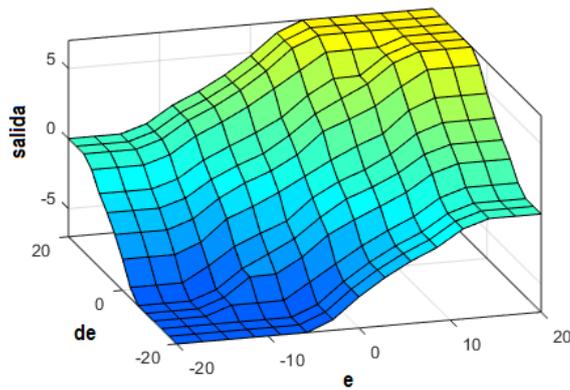


Figura 5.4. Superficie de actuación del controlador Mamdani

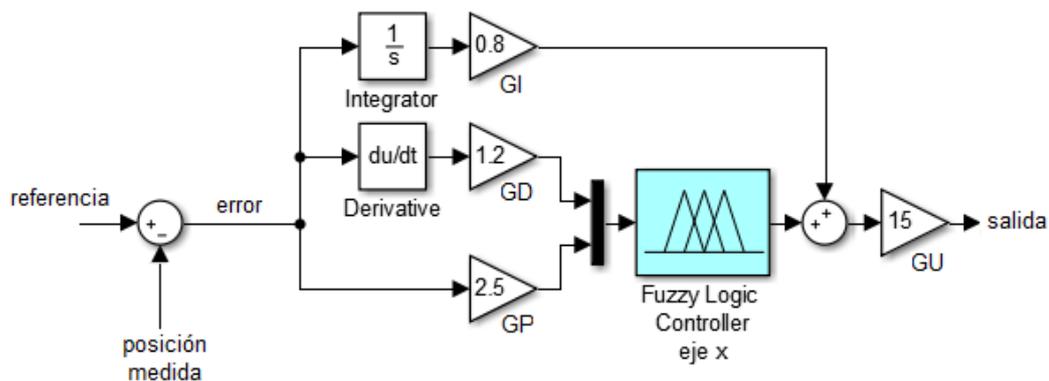


Figura 5.5. Modelo Simulink® del controlador Mamdani con ganancias ajustadas

5.2 Controlador difuso tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

Habitualmente denominado controlador de Sugeno, está basado en el método de inferencia difusa introducido en 1985 por el físico japonés Michio Sugeno. La principal diferencia respecto de los controladores tipo Mamdani consiste en el formato de las reglas difusas que se utilizan en el mecanismo de inferencia. Mientras que los sistemas del tipo Mamdani emplean conjuntos difusos para definir el consecuente de las reglas, los sistemas TSK utilizan funciones, generalmente polinómicas, definidas sobre las variables de entrada. Estas funciones son generalmente de valor constante, dando lugar a un sistema de orden cero, o bien de primer orden. Si bien, es posible definir sistemas de orden superior, esto produce una mayor complejidad sin aportar mejoras significativas [32]. Luego, a partir de ellas, el mecanismo de inferencia genera directamente los valores de salida del sistema sin la necesidad de realizar un procedimiento de defuzzificación.

Dado que el funcionamiento de un sistema no lineal puede aproximarse por tramos lineales sobre determinados puntos de operación, la dependencia lineal de las funciones de salida sobre las variables de entrada, en un controlador TSK, resulta equivalente a la

conmutación de diferentes controladores lineales que se aplican en distintos puntos de operación del sistema no lineal sobre el que actúa. Por este motivo suelen ser más eficientes con técnicas lineales como el control PID y en los recursos computacionales que demandan.

A continuación, se propone el diseño de un controlador TSK para aplicar al sistema de bola y plataforma anteriormente descrito, con el objetivo de evaluar el resultado de su operación de manera comparativa respecto del diseño Mamdani.

Siguiendo el esquema conceptual de la Figura 5.1 se utilizan las mismas variables de entrada para este controlador, esto es el error de posición y su variación. El proceso de fuzzificación de dichas señales se realiza a través de funciones de membresía de tipo trapezoidal sobre ambos extremos del universo de discurso y una función triangular centrada en el centro en razón de la simetría geométrica del dispositivo, las que se pueden observar en la Figura 5.6.

Por otra parte, y para obtener el valor de la variable de salida que corresponde a la señal del actuador, se define un controlador de *orden cero*, lo que significa que el consecuente de las reglas difusas empleadas serán funciones lineales limitadas a valores constantes, representándose mediante funciones del tipo denominado *singleton*.

Para este controlador se adoptaron los siguientes valores constantes

$$N = -6.9$$

$$Z = 0$$

$$P = 6.9$$

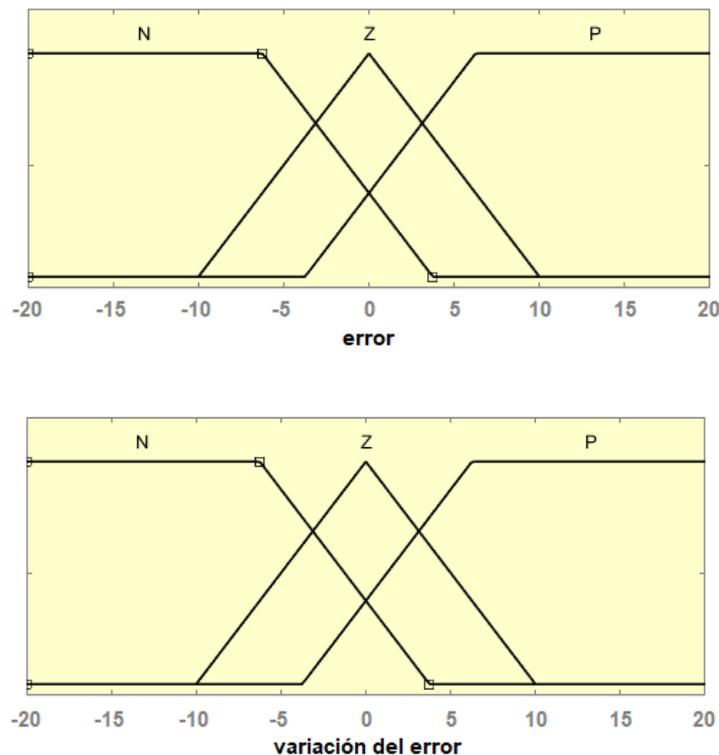


Figura 5.6. Funciones de pertenencia de entrada al controlador TSK

Se definen las siguientes nueve reglas difusas

- Si el "error" es N y la "variación del error" es N, luego la "salida" es N
- Si el "error" es N y la "variación del error" es Z, luego la "salida" es N
- Si el "error" es N y la "variación del error" es P, luego la "salida" es Z
- Si el "error" es Z y la "variación del error" es N, luego la "salida" es N
- Si el "error" es Z y la "variación del error" es Z, luego la "salida" es Z
- Si el "error" es Z y la "variación del error" es P, luego la "salida" es P
- Si el "error" es P y la "variación del error" es N, luego la "salida" es Z
- Si el "error" es P y la "variación del error" es Z, luego la "salida" es P
- Si el "error" es P y la "variación del error" es P, luego la "salida" es P

En la Figura 5.7 se muestra un esquema general de las reglas difusas del tipo Sugeno, definidas para el controlador diseñado. El sistema de inferencia emplea la operación *and* con el método del *mínimo* en los antecedentes de las reglas, la implicación se efectúa con el método del *producto*, la agregación mediante *suma*, y para obtener el valor final de salida utiliza el método del *promedio de los pesos*.

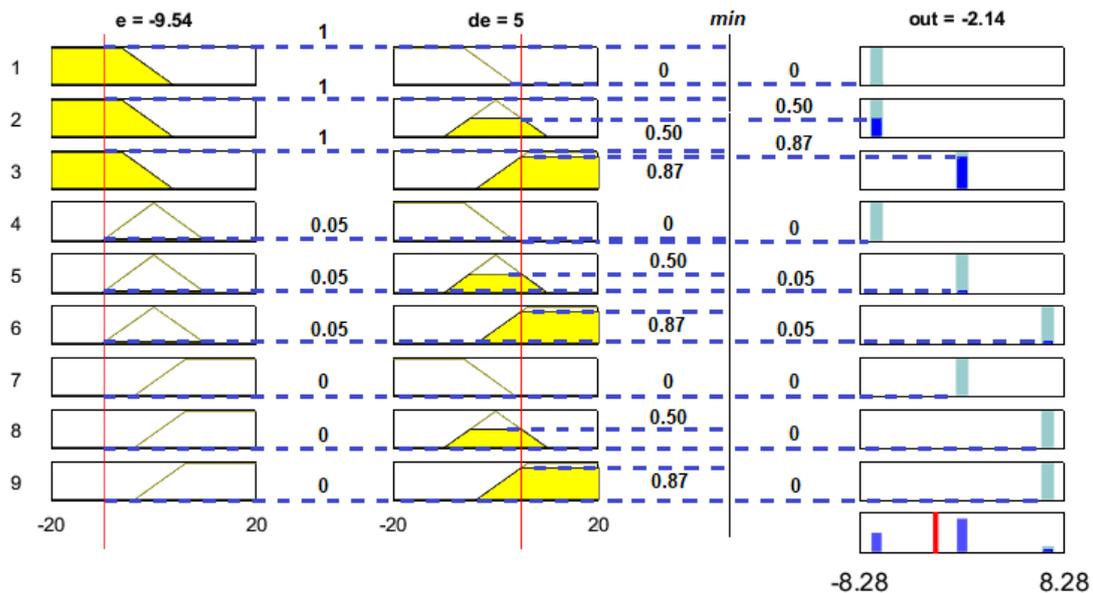


Figura 5.7. Reglas difusas evaluadas con Matlab® en un punto de operación

La superficie de control que desarrolla este controlador se observa en la Figura 5.8, en tanto que los valores de ganancia asociados al mismo se indican en la Figura 5.9.

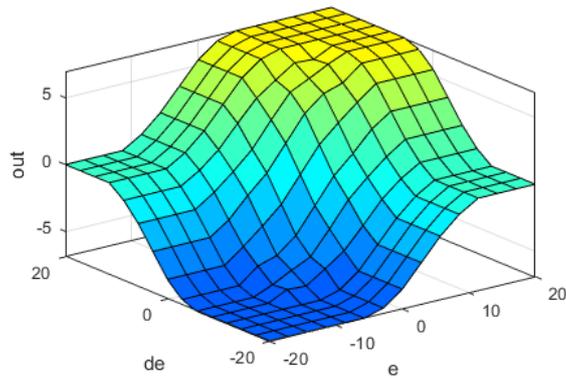


Figura 5.8. Superficie de actuación del controlador TSK

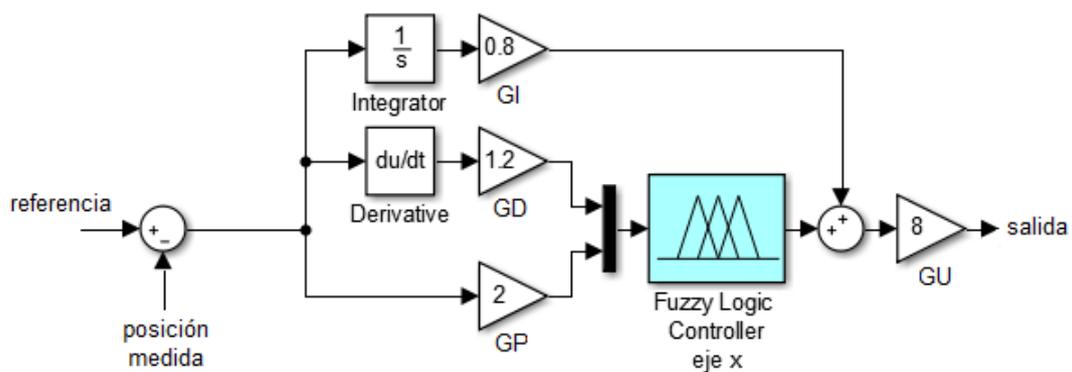


Figura 5.9. Modelo Simulink® del controlador TSK con ganancias ajustadas

5.3 Controlador Neuro-Difuso

Los sistemas Neuro-Difusos, propuestos originalmente por J-S. R. Jang [33], combinan los mecanismos de inferencia difusa con redes neuronales adaptivas. De esta forma los sistemas basados en estructuras ANFIS¹¹, como se los conoce habitualmente, consisten en sistemas de inferencia contruidos con reglas difusas que incorporan la capacidad de aprendizaje de las redes neuronales artificiales, ANN¹² [34].

Las ANN son un conjunto de unidades denominadas nodos que se interconectan entre sí generando un modelo matemático abstracto que intenta simular el comportamiento de las neuronas cerebrales. Estas unidades de cálculo, o nodos, se distribuyen en capas clasificadas según su función en capa de entrada, capas ocultas y capa de salida. En esta abstracción las interconexiones representan la función de las dendritas, axones y sinapsis de los sistemas nerviosos biológicos [35].

La principal ventaja de la ANN deviene de su capacidad de aprendizaje, lo que permite el ajuste de sus propios parámetros luego de un proceso secuencial de cálculo durante el cual se realiza una minimización del error de salida. Uno de los métodos de

¹¹ Adaptive Network Fuzzy Inference System

¹² Artificial Neural Network

entrenamiento más utilizados es la regla de aprendizaje híbrido, basada en el denominado *batch learning* o aprendizaje por lotes. Este procedimiento, propuesto en [36], se realiza fuera de línea y combina el método del gradiente descendente con la estimación mediante mínimos cuadrados, LSE¹³, para actualizar el valor de los parámetros de la red adaptativa. Cada ciclo, o *epoch*, de entrenamiento está compuesto por un cálculo hacia adelante, o *forward pass*, y un cálculo hacia atrás, *backward pass*. En el paso de avance, a partir de los datos de entrada a la red se calculan los parámetros de los nodos ubicados en la capa de salida empleando el método de mínimos cuadrados, y a continuación se calcula la medida del error. En el paso de retroceso, el error se propaga desde la salida a la entrada y por el método del gradiente descendente se actualizan los parámetros de los nodos pertenecientes a las capas ocultas de la red.

Conceptualmente, entonces, los controladores neuro-difusos combinan la capacidad de aprendizaje de las redes neuronales artificiales con el poder de interpretación lingüística de los sistemas de inferencia difusos. Estas estructuras combinadas pueden ajustar la base de reglas de un sistema difuso, utilizando el algoritmo de entrenamiento de retropropagación a partir de la recopilación de datos de un proceso. Su arquitectura es funcionalmente equivalente a una base de reglas del tipo Sugeno [33] [37].

En la Figura 5.10 (a) se presenta, a manera de ejemplo, un sistema de inferencia difusa de dos entradas y una salida, con una base de reglas del tipo Takagi-Sugeno y el razonamiento seguido para obtener el valor de salida. Asimismo, en la Figura 5.10 (b) se puede observar la estructura ANFIS equivalente.

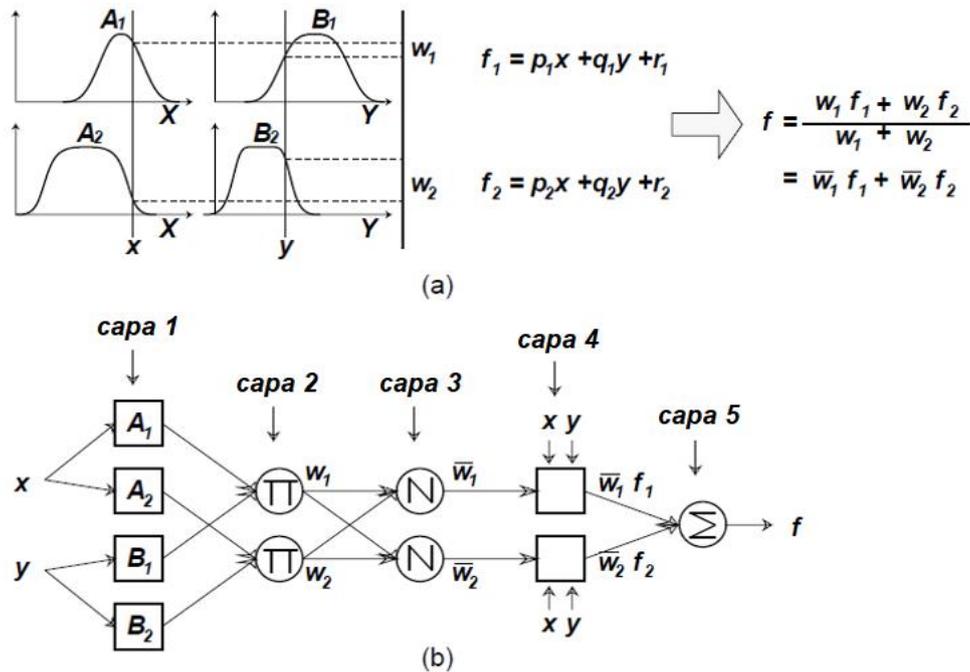


Figura 5.10. (a) Razonamiento difuso Sugeno, (b) Estructura ANFIS equivalente [33]

¹³ Least Squares Estimate

Una estructura ANFIS está compuesta por nodos fijos, indicados por círculos, y nodos variables, cuadrados, cuyos valores son ajustados durante el proceso de entrenamiento. La estructura de nodos está organizada en capas, o *layers*, con diferentes funciones. En la capa 1 se definen las funciones de membresía que conforman las reglas difusas y donde se realiza el proceso de fuzzificación de las señales de entrada. La capa 2 genera los antecedentes de las reglas difusas mediante la multiplicación de los grados de pertenencia obtenidos luego de la fuzzificación. La salida de estos nodos representa el nivel de activación de las reglas difusas evaluadas en cada uno. En la capa 3 se calcula el valor relativo de cada nivel de activación respecto de la suma total de los mismos, lo que produce el nivel de activación normalizado. La capa 4 genera los consecuentes de las reglas difusas relacionando los niveles normalizados con las funciones lineales de salida definidas en el sistema de inferencia. Esta capa se inicializa con los parámetros predefinidos y luego son ajustados automáticamente durante el proceso de entrenamiento. Por último, la capa 5 denominada capa de salida, contiene un único nodo donde se realiza la defuzzificación mediante la sumatoria de todos los consecuentes generando la función final de salida de la red.

Conforme a lo expresado por Jang [33], en general para cualquier tipo de razonamiento, es posible simplificar la función de salida de la red, ver Figura 5.10, mediante un valor finito constante, o *crisp*, con lo cual el sistema de inferencia difuso resultante puede aproximar adecuadamente funciones no lineales sobre un espacio acotado. Lo dicho reduce la formulación de las reglas difusas a una expresión del tipo

Si la entrada x es “...” y la entrada y es “...”, entonces la salida f es k

La importancia de la utilización de las estructuras ANFIS surge de la propia capacidad de entrenamiento, proceso mediante el cual pueden autoajustar los parámetros que definen las funciones de membresía, como así también los pesos y umbrales de activación de cada una de las reglas difusas que componen el sistema de inferencia. El procedimiento de aprendizaje se realiza a partir de un conjunto de datos de entrada y salida del sistema y la aplicación de un algoritmo de entrenamiento.

Las características de adaptabilidad y procesamiento no lineal permiten un desempeño robusto y aumenta la inmunidad frente al ruido. Asimismo, el alto grado de interconectividad permite el procesamiento en paralelo de las señales, disminuyendo el tiempo de respuesta. Estas características son las que posibilitan su utilización en una amplia gama de aplicaciones en el campo de la ingeniería de control y el procesamiento de señales e imágenes.

A continuación, se propone el diseño de un controlador ANFIS para gobernar los movimientos del dispositivo de bola y plataforma descrito en este trabajo.

La primera fase del procedimiento consiste en obtener una serie de datos proporcionados por el sistema, a partir de la utilización de un controlador PID clásico ubicado en el lazo exterior del sistema, el cual es sintonizado para obtener una respuesta adecuada de todo el conjunto. Como señales de entrada se consideran el error de posición de la bola sobre la plataforma, su integral y su derivada.

Para diseñar y entrenar la red neuronal el conjunto de datos de entrada y salida es importado a la interface gráfica *Neuro-Fuzzy Designer* de Matlab® [38].

En este caso particular se emplean tres funciones de membresía del tipo campana generalizada para cada una de las señales de entrada y una función de tipo lineal para la salida. En la Figura 5.11 se observa la red neuronal compuesta por un total de 27 reglas que conforman el sistema de inferencia difusa.

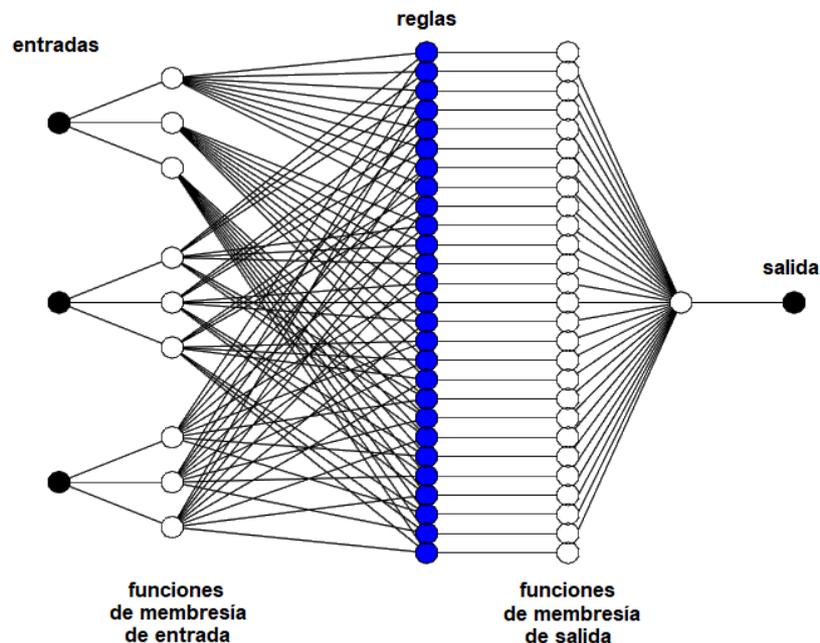


Figura 5.11. Estructura de la red neuronal creada

Para su entrenamiento se empleó el método híbrido de optimización alcanzándose un error de 0.1 %. Con la red entrenada se ajustó el universo de discurso de las señales de entrada a los intervalos $[-1 \ 1]$ para el error y la integral del error, y al intervalo $[-2 \ 2]$ para la derivada del error. En la Figura 5.12 se puede observar la curva de disminución del error de entrenamiento, en tanto que las Figuras 5.13 muestran el estado final de ajuste de las funciones de membresía luego de finalizado dicho proceso.

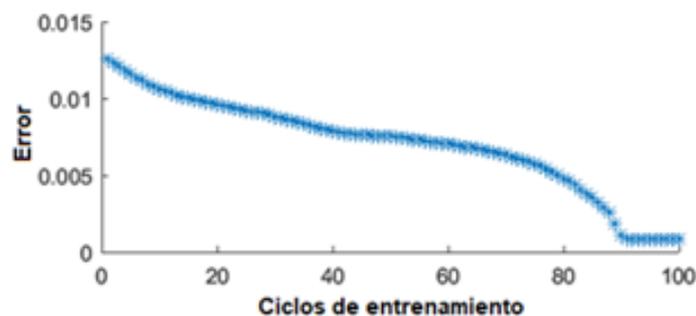


Figura 5.12. Evolución del error de entrenamiento

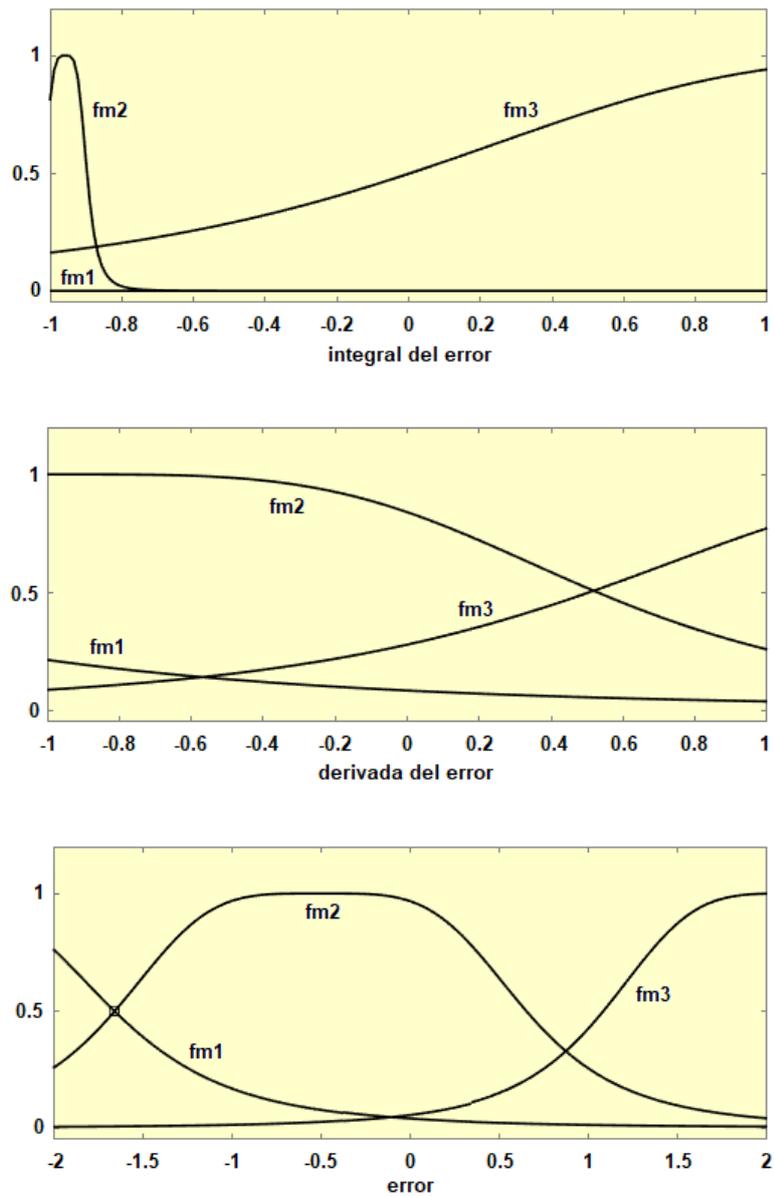


Figura 5.13. Funciones de membresía ajustadas durante el entrenamiento

Las superficies de control que presenta la estructura diseñada se pueden apreciar en la Figura 5.14 que se muestran a continuación

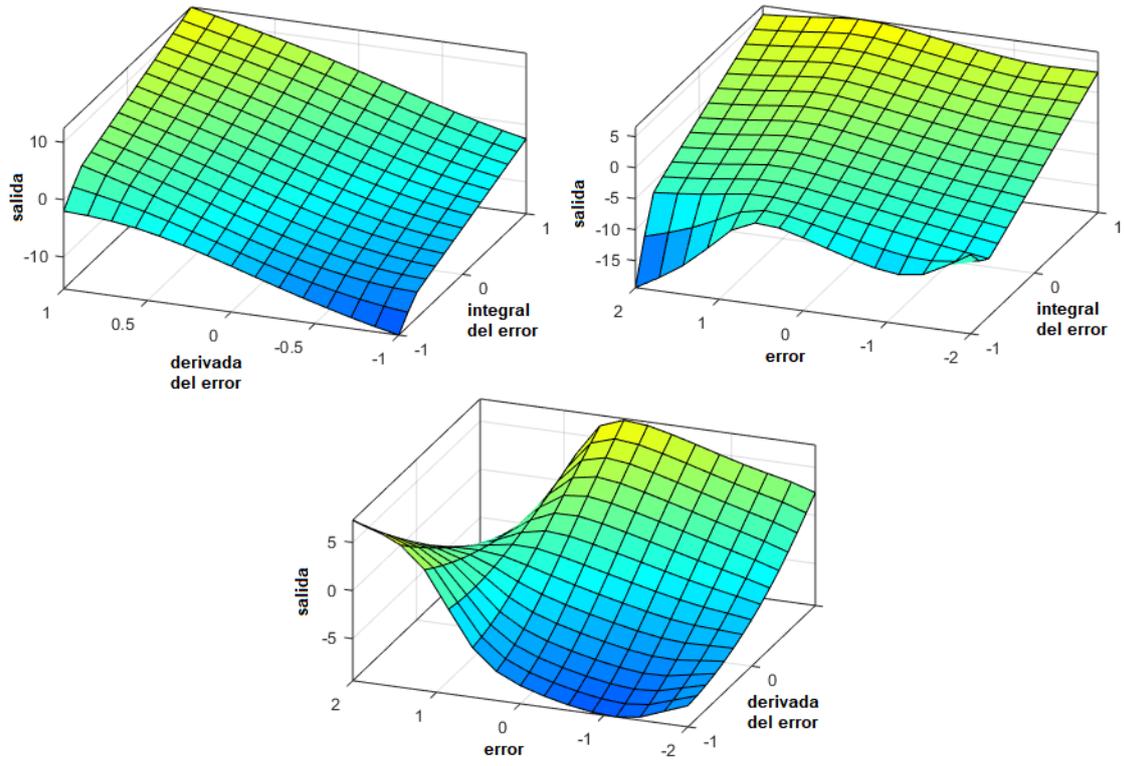


Figura 5.14. Superficies de control de la estructura ANFIS

Capítulo 6

6. DESEMPEÑO DE LOS MODELOS PROPUESTOS

En este capítulo se presenta el análisis de desempeño, en fase de simulación, de los modelos propuestos.

Como fue explicado oportunamente, todas las pruebas se realizaron utilizando Matlab® (R2016a) y su entorno de simulación provisto por Simulink® (v. 8.7). Mediante estas herramientas es posible explorar el funcionamiento de los sistemas a partir de un diseño basado en modelos, reduciendo costosos prototipos y efectuando pruebas en condiciones riesgosas, que en los sistemas físicos reales serían imposibles de realizar. Utilizando ambos programas conjuntamente se combinan la programación textual y gráfica, lo que permite el diseño de un sistema completo dentro de un entorno de simulación.

Las simulaciones efectuadas en este trabajo de tesis se desarrollaron en un equipo Dell® con sistema operativo Windows® 10, de 64 bits. En todos los casos Simulink® se ha configurado con el método de simulación de paso variable y selección automática del algoritmo ejecutado (automatic solver selection). Esta configuración, recomendada para modelos en tiempo continuo, permite al programa seleccionar el método numérico adecuado para computar el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan al modelo en estudio, como también el tiempo entre los sucesivos pasos de la simulación, obteniéndose un razonable equilibrio entre el tiempo empleado en la simulación y la precisión alcanzada [39].

Para analizar el desempeño de los controladores propuestos en cada caso es necesario conformar un esquema de simulación que combine la acción de dos sistemas de control de iguales características, actuando uno por cada eje de movimiento de la plataforma. Los modelos Simulink® se presentan completos en el Anexo B.

A tal efecto se realizaron dos tipos de pruebas empleando diferentes consignas. Primeramente, se generaron señales senoidales con una amplitud del 65 %, en términos relativos respecto de las dimensiones de la plataforma. Éstas se aplicaron sobre cada eje de movimiento, desfasadas 90° entre sí para generar una trayectoria circular de la bola sobre la plataforma. En una segunda instancia se generó una trayectoria cuadrada a partir de la aplicación de señales secuenciales, con amplitud del 50 % cada una, para producir desplazamientos en ambas direcciones y de manera alternativa sobre los ejes. Mediante esta segunda excitación se sometió al sistema a condiciones más exigentes en cuanto al control de los cambios de dirección impuestos al movimiento de la bola.

Asimismo, para ambas consignas, se incorporó la presencia de ruido en las señales provenientes de todos los sensores y, por último, se aplicaron perturbaciones momentáneas y simultáneas sobre ambos ejes del movimiento.

6.1 Desempeño del controlador Mamdani

En primera instancia se expone el desempeño obtenido con el controlador difuso desarrollado en la [Sección 5.1](#), con base en un sistema de inferencia difusa de estructura Mamdani. Se empleó un tiempo de simulación $t=100s$. Inicialmente, en la Figura 6.1, se puede observar la trayectoria de seguimiento que realiza la bola conforme a la consigna circular de movimiento aplicada a la plataforma. Si bien este desplazamiento se obtiene con señales de excitación puras, se aprecia el rápido acercamiento a la posición final, aunque persiste un error relativo de estado estacionario no superior al 3.5 %. En el Anexo C.1 se presenta el código utilizado para la obtención de todas las respuestas.

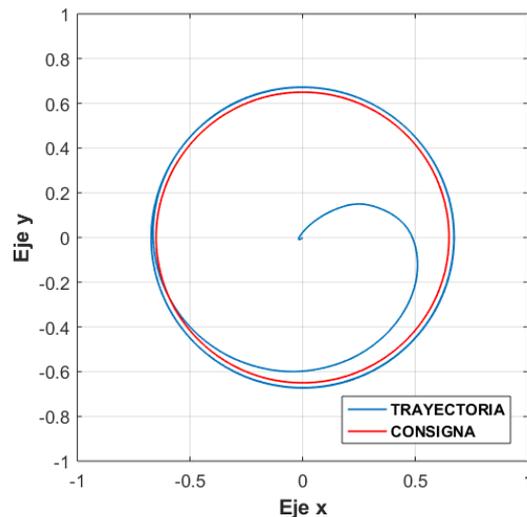


Figura 6.1. Respuesta con controladores Mamdani y señal de excitación pura

En función de simular el impacto que representa la existencia de efectos tales como fricciones y vibraciones mecánicas, como el ruido generado por los sensores de las variables medidas, se aplican señales de ruido en ambos lazos de realimentación. En la Figura 6.2 se observan las amplitudes de dichas señales en comparación con el nivel de la señal de consigna.

La Figura 6.3 muestra la trayectoria desarrollada por la bola considerando la influencia del ruido en las señales proporcionadas por los sensores.

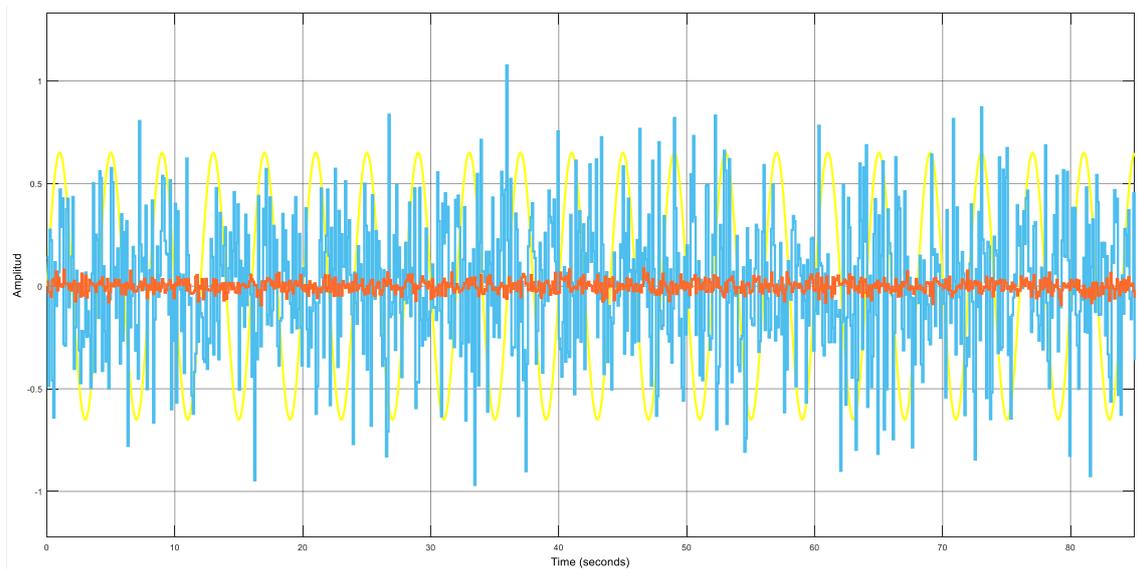


Figura 6.2. Amplitudes relativas de las señales: en amarillo consigna de entrada, en azul ruido aplicado en el lazo interno, en rojo ruido en el lazo externo

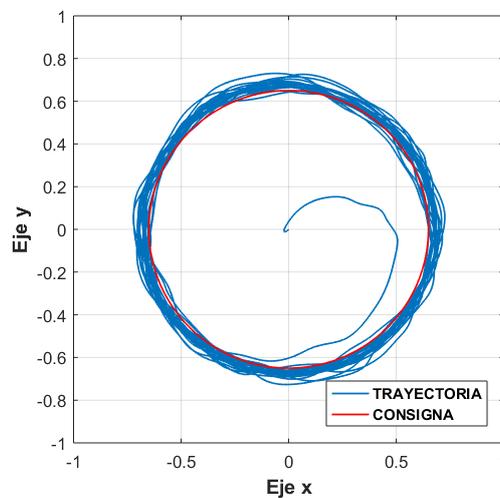


Figura 6.3. Respuesta con controladores Mamdani y presencia de ruido de los sensores

En la Figura 6.4 se observa el efecto causado por una perturbación externa con amplitud del 30 %, y aplicada transcurrido el 30 % del tiempo total de simulación.

En las simulaciones efectuadas se verificó una mayor sensibilidad a la influencia del ruido presente en el lazo de realimentación externo, sin embargo, las respuestas obtenidas indican que el sistema con presencia de ruido, y aún perturbado, tiene la capacidad de recuperar el seguimiento de la consigna.

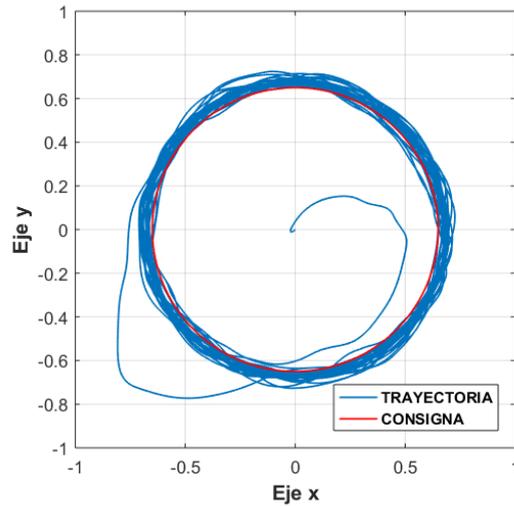


Figura 6.4. Respuesta con controladores Mamdani, con ruido y perturbación externa

Posteriormente se aplicaron señales intercaladas secuencialmente con el objeto de generar una trayectoria de consigna cuadrada provocando variaciones de 90° en el recorrido a seguir por la bola, ver Figura 6.5.

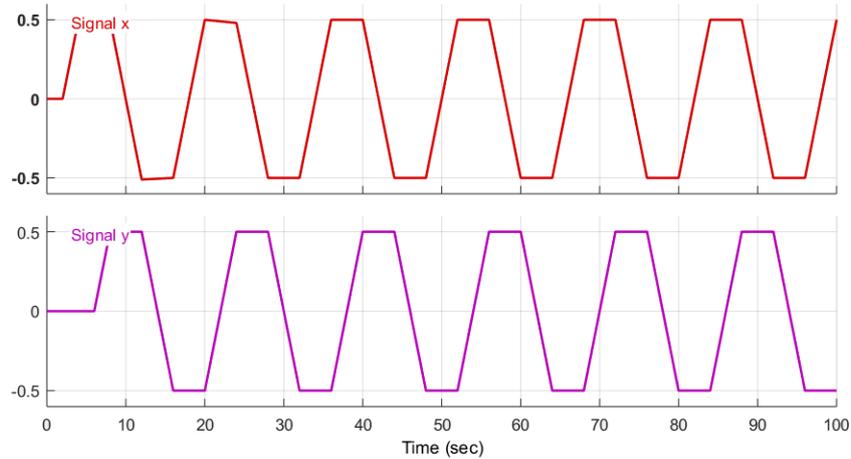


Figura 6.5. Señales aplicadas a la plataforma para generar una consigna de trayectoria cuadrada

Con estas señales de entrada, se obtuvo la respuesta que se indica a continuación en la Figura 6.6, donde se puede observar el seguimiento de la bola respecto de la trayectoria consigna. Se advierte una distorsión al inicio del movimiento debido al transitorio inicial de establecimiento de la secuencia en las señales de entrada. No se observa error de estado estacionario.

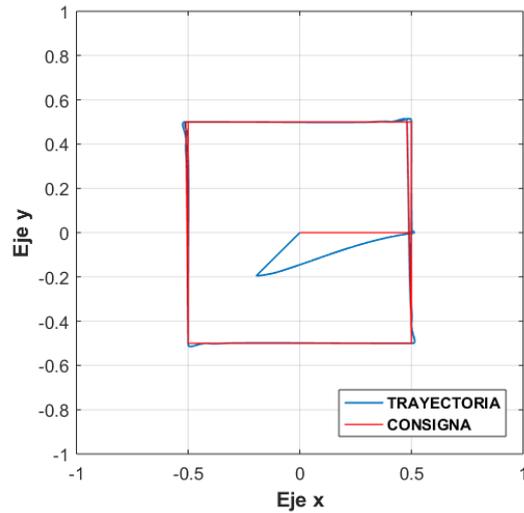


Figura 6.6. Respuesta con controladores Mamdani y consigna de trayectoria cuadrada

A continuación, en la Figura 6.7 se aprecia el efecto que produce la incorporación de ruido en los lazos de realimentación. Nuevamente se verificó una mayor influencia en el lazo externo del sistema. Las señales de ruido aplicadas en simulación son iguales a las consideradas para la trayectoria circular, ver Figura 6.2.

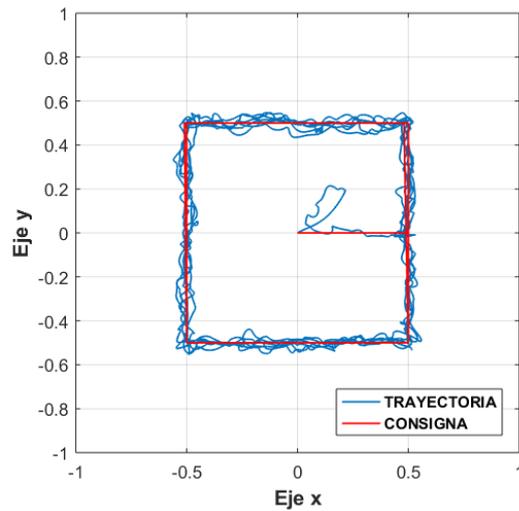


Figura 6.7. Respuesta con controladores Mamdani y ruido en lazos de realimentación

Por último, se muestra en la Figura 6.8 la desviación momentánea causada por una perturbación externa, de igual característica a la aplicada para la trayectoria circular.

En todos los casos se verifica el seguimiento de la consigna, en tanto se mantengan los efectos externos limitados a las amplitudes señaladas.

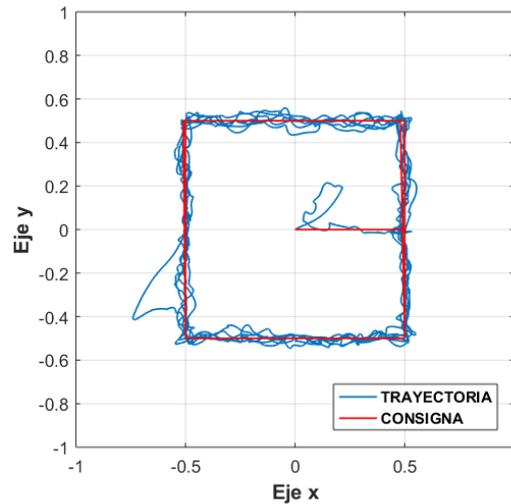


Figura 6.8. Respuesta con controladores Mamdani, ruido y perturbación externa

6.2 Desempeño del controlador Sugeno

En segundo lugar, se efectuaron las simulaciones del sistema diseñado con base en el controlador difuso desarrollado con el mecanismo de inferencia del tipo Sugeno. Se utilizó la estructura obtenida en la [Sección 5.2](#), conformada por dos funciones trapezoidales y una triangular, tanto para la señal de error como para su derivada. La salida consiste en tres funciones de orden cero por lo que dichas funciones de membresía son del tipo *singleton*.

Esta estructura fue excitada primeramente con una consigna de trayectoria circular y posteriormente con trayectoria cuadrada. Las señales aplicadas son de iguales características que las utilizadas en la Sección 6.1 por lo tanto, los resultados obtenidos pueden ser evaluados de manera comparativa entre ambas alternativas.

De manera similar al procedimiento anterior las simulaciones se realizaron en tres instancias, con señales de excitación puras, con la incorporación de ruido en los lazos de realimentación y, por último, considerando el efecto de una perturbación externa momentánea aplicada sobre la plataforma.

En la Figura 6.9 se presenta la respuesta obtenida cuando el sistema es excitado con señales senoidales puras. Se puede observar un acercamiento más lento, en términos del tiempo de simulación, al valor final de la trayectoria, teniendo en cuenta el resultado obtenido con los controladores Mamdani. Persiste también un error de estado estacionario que puede considerarse aceptable por cuanto la máxima desviación sobre el eje x es del 5.2 %, en tanto que para el eje y alcanza al 7.7 %.

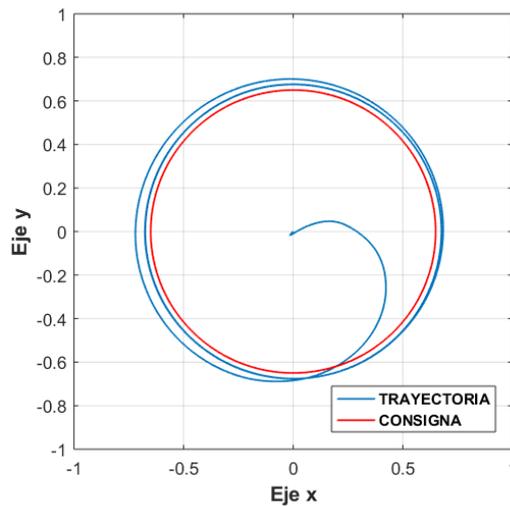


Figura 6.9. Respuesta con controladores Sugeno y señales senoidales puras

En la Figura 6.10 se observa la respuesta obtenida considerando el impacto de niveles de ruido de iguales características a las utilizadas con los controladores Mamdani, como se indicaron en la Figura 6.2, sobre las señales realimentadas desde los sensores. También en este caso se manifiesta una sensibilidad notablemente mayor en la perturbación que afecta el lazo externo del sistema.

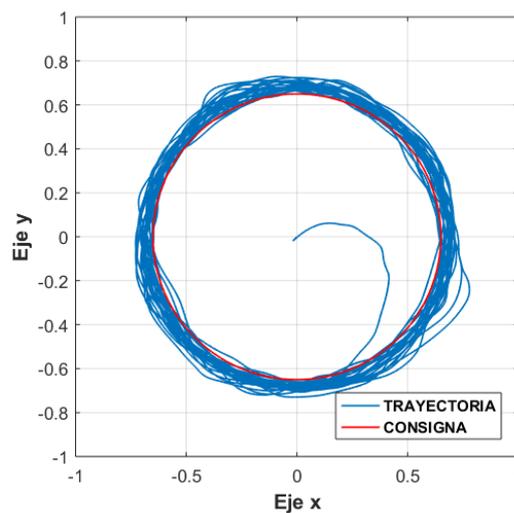


Figura 6.10. Respuesta con controladores Sugeno y presencia de ruido de los sensores

Incluyendo el impacto de una perturbación aplicada sobre la plataforma, se observa en la Figura 6.11 la desviación que se produce en la trayectoria seguida por la bola. Si bien esta desviación demora comparativamente un tiempo mayor para recuperarse, se alcanza finalmente una trayectoria estable.

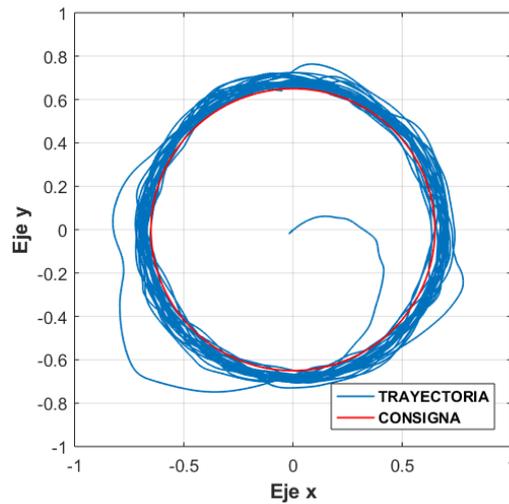


Figura 6.11. Respuesta con controladores Sugeno, incluyendo ruido y perturbación

A continuación, se realizó la evaluación de sistema a partir de la consigna de trayectoria cuadrada, para lo cual se aplicaron señales de iguales características a las utilizadas en la Sección 6.1. En la Figura 6.12 se observa la respuesta del sistema para dicha excitación, sin considerar efectos externos.

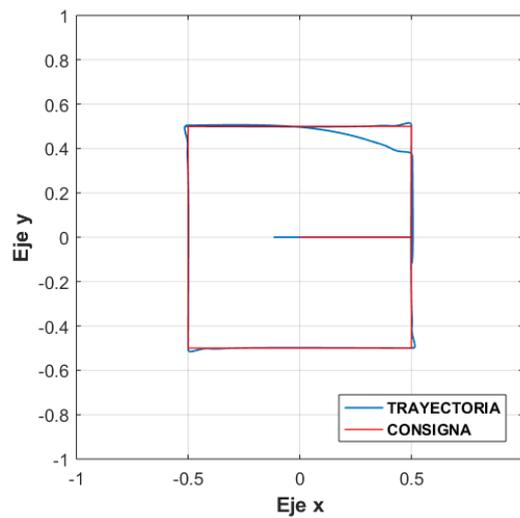


Figura 6.12. Respuesta con controladores Sugeno, consigna cuadrada sin efectos externos

En la Figura 6.13 se tuvo en cuenta la incorporación del ruido de los sensores, con iguales características que los considerados anteriormente. Si bien se aprecia una importante influencia, con los niveles aplicados se mantiene la estabilidad del sistema.

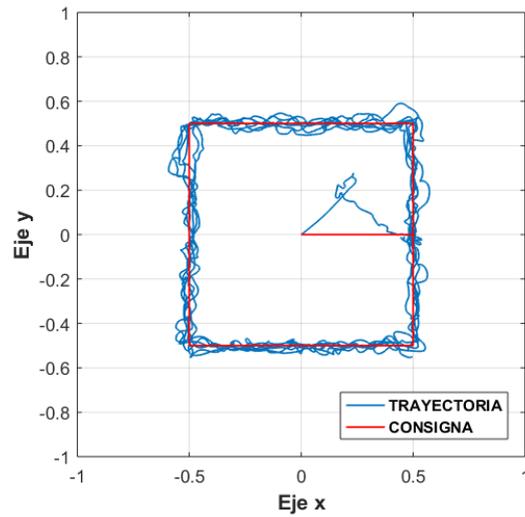


Figura 6.13. Respuesta con controladores Sugeno incluyendo ruido en los sensores

En la Figura 6.14 aparece el impacto de la perturbación externa aplicada simultáneamente sobre ambos ejes, transcurrido el 30 % del tiempo de simulación y con una amplitud del 30 %. Teniendo en cuenta los límites físicos de la plataforma también puede considerarse un diseño robusto en cuanto a la reacción frente a perturbaciones.

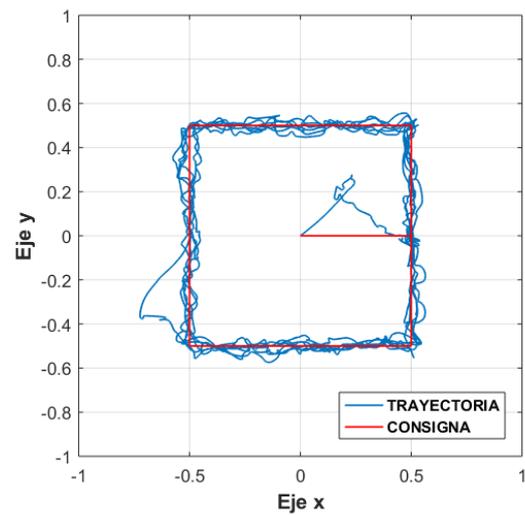


Figura 6.14. Respuesta con controladores Sugeno con ruido y perturbación externa

6.3 Desempeño del controlador ANFIS

Para evaluar el comportamiento del controlador neuro-difuso propuesto en la [Sección 5.3](#) se aplicaron excitaciones con iguales consignas que en los modelos anteriores. La Figura 6.15 muestra la respuesta obtenida frente a señales senoidales puras, sin efectos externos. En este caso se percibe una dinámica más lenta en comparación con los casos anteriores, no obstante, se mantiene una trayectoria estable durante el mismo tiempo de simulación empleado.

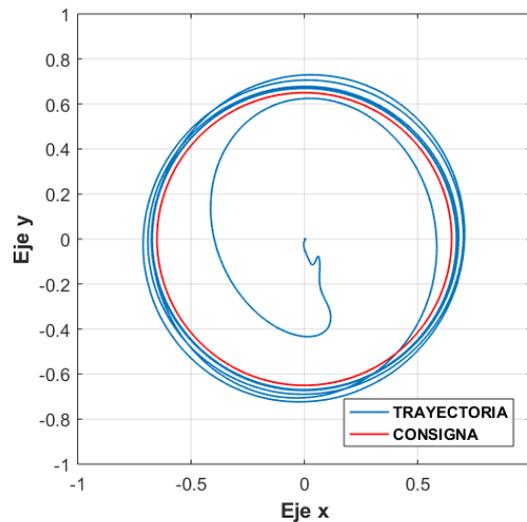


Figura 6.15. Respuesta con controladores ANFIS y consigna circular pura

En la Figura 6.16 se observa la respuesta del sistema con la incorporación de ruido en los lazos de realimentación. Los niveles considerados también fueron los mismos que para los casos anteriores, observándose una adecuada trayectoria de salida en cuanto a la estabilidad y a la dispersión respecto de la consigna.

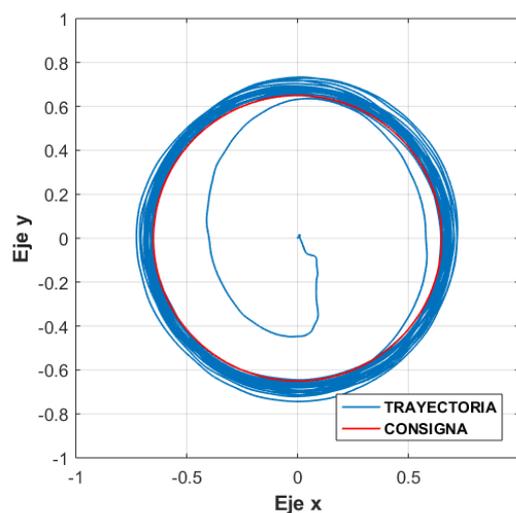


Figura 6.16. Respuesta con controladores ANFIS, consigna circular y ruido en los sensores

En la Figura 6.17 aparece el impacto producido por la perturbación externa sobre la plataforma, observándose también, mayor demora en la estabilización de la trayectoria.

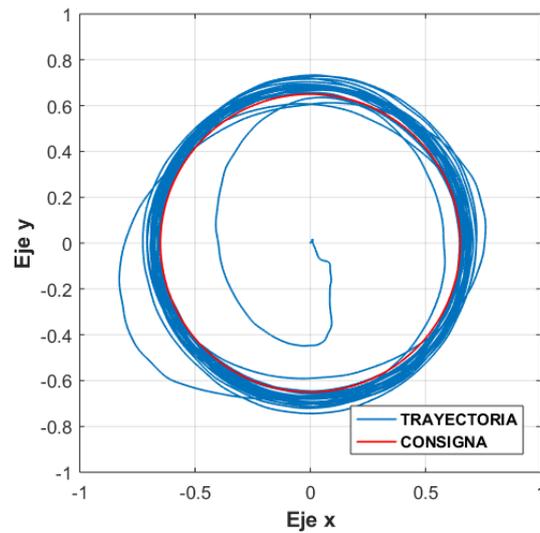


Figura 6.17. Respuesta con controladores ANFIS, consigna circular, ruido y perturbación

En una segunda instancia se aplicó la consigna de trayectoria cuadrada sin presencia de ruido ni perturbación. La respuesta obtenida se observa en la Figura 6.18 donde se puede apreciar un seguimiento estable y sin error de trayectoria.

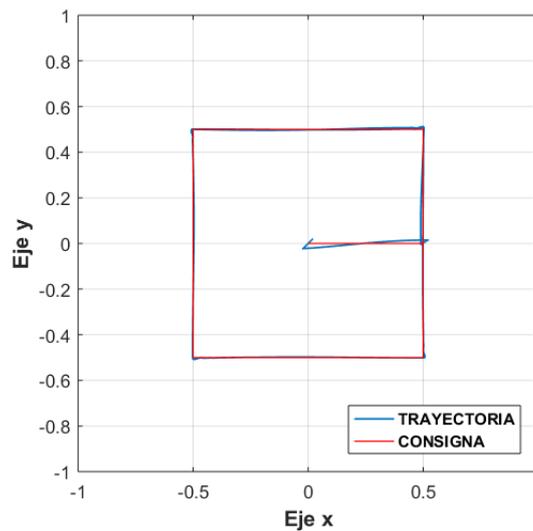


Figura 6.18. Respuesta con controladores ANFIS y consigna cuadrada sin efectos externos

En la Figura 6.19 se muestra el resultado obtenido cuando se incorpora el efecto de los ruidos incluidos en las señales de los sensores. Los apartamientos respecto de la trayectoria consigna fueron bajos y la estabilidad se alcanzó rápidamente.

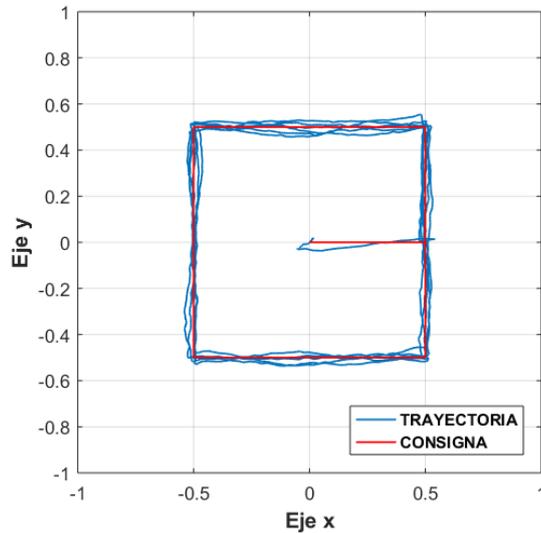


Figura 6.19. Respuesta con controladores ANFIS, consigna cuadrada y ruido en los sensores

La Figura 6.20 muestra la desviación producida por la perturbación externa. Si bien el tiempo de acomodamiento fue superior al de la prueba anterior, los niveles de apartamiento respecto de la consigna fueron bajos en términos comparativos con los otros controladores.

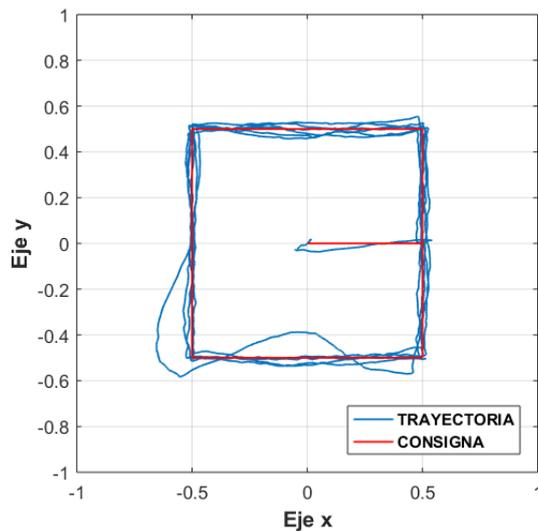


Figura 6.20. Respuesta con controladores ANFIS, con ruido y perturbación externa

6.4 Consideraciones sobre estabilidad

Si bien la utilización de controladores difusos ha alcanzado un notable grado de avance en las aplicaciones de control industrial debido a su versatilidad y la facilidad de poder ser diseñados en base al conocimiento que se tenga sobre el comportamiento de una planta o proceso, con independencia de modelos matemáticos precisos, no es posible garantizar de manera absoluta la estabilidad del sistema controlado. Por esta razón, el

diseño de un controlador difuso basado en reglas implica la necesidad de disponer de alguna técnica para el estudio de las condiciones o de las restricciones que permiten asegurar un cierto grado de estabilidad del sistema controlado.

Resulta, entonces, dificultoso el análisis de la condición de estabilidad global o asintótica de los sistemas de control difuso, en los que generalmente la estabilidad sólo se verifica de manera local, en la cercanía de un determinado punto de equilibrio. Por lo tanto, en los sistemas conformados por plantas no lineales y controladores no lineales, la estabilidad puede ser garantizada localmente, alrededor del punto activo de trabajo, y no de una manera global.

Existen numerosos criterios que permiten el análisis de la estabilidad de los sistemas no lineales, entre los cuales la teoría propuesta por Alexander Lyapunov (1892) considera conceptos fundamentales sobre los diferentes tipos de estabilidad y métodos para su determinación, dando lugar a diferentes definiciones de la estabilidad.

Debido a que los controladores basados en técnicas difusas son un caso particular de sistemas no lineales, es posible utilizar los conceptos de la teoría de Lyapunov para analizar su condición de estabilidad [40].

El método directo de Lyapunov se basa en el concepto de energía asociada al sistema; si la energía total del mismo resulta una función que decrece en el tiempo, entonces dicho sistema tiende a un equilibrio por lo que resultará estable, ya sea de forma natural o dirigido a través de una determinada señal de control.

Verificar esta condición implica conocer la expresión de la función de energía para cada caso particular, o bien definir una función, habitualmente denominada candidata de Lyapunov, que permita representar de forma similar la evolución de la energía del sistema considerado. No obstante, determinar esta función es particularmente dificultoso cuando se trata de sistemas basados en técnicas difusas.

En los desarrollos experimentales utilizados para diseñar y evaluar el desempeño de controladores basados en lógica difusa, es necesario conocer la dinámica de la planta del sistema, información que puede obtenerse a partir de un modelo físico matemático, mediante técnicas de identificación o bien utilizando un modelado difuso. En este trabajo se consideró un modelo matemático no lineal de la plataforma, obtenido a partir de las consideraciones físicas que se han expuesto en la [Sección 3.1](#).

Reescribiendo el modelo no lineal de la planta obtenido en las expresiones (3.25) y (3.26) en términos de las variables de estado definidas en dicha sección, y, empleando los valores adoptados para los parámetros físicos, se tiene

$$m_b \left[\frac{7}{5} \ddot{x}_b - (x_b \dot{\alpha}^2 + y_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + g \sin \alpha \right] = 0 \quad (6.1)$$

$$m_b \left[\frac{7}{5} \ddot{y}_b - (y_b \dot{\beta}^2 + x_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + g \sin \beta \right] = 0 \quad (6.2)$$

Luego para encontrar los puntos de equilibrio, haciendo nulas las derivadas respecto al tiempo se tiene para cada eje de movimiento

$$m_b g \sin \alpha = 0 \quad \text{y} \quad m_b g \sin \beta = 0 \quad (6.3)$$

ecuaciones que se verifican para $\alpha = \beta = n\pi$ con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

pero, dado que la rotación angular de la plataforma sobre cada eje está comprendida dentro del intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sólo hay una única solución para $n = 0$, o sea que el punto de equilibrio ocurre en $\alpha = \beta = 0^\circ$ para los ejes x e y respectivamente.

Por otro lado, asumiendo que se aplica a la plataforma una baja velocidad de inclinación, se tiene que

$$\dot{\alpha} \ll 1 \quad \text{y} \quad \dot{\beta} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha}\dot{\beta} \approx 0, \quad \dot{\alpha}^2 \approx 0 \quad \text{y} \quad \dot{\beta}^2 \approx 0$$

en tanto que las derivadas de orden superior y los términos de acoplamiento no presentan valores significativos en la (6.1) y (6.2).

Luego para un ángulo de inclinación pequeño de la plataforma, no superior de $\pm 5^\circ$, $\sin \alpha \cong \alpha$ y $\sin \beta \cong \beta$, y se obtiene una simplificación linealizada para el modelo de la planta. En efecto,

$$\frac{7}{5} \ddot{x}_b - g\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \frac{7}{5} \ddot{y}_b - g\beta = 0 \quad (6.4)$$

Luego, pasando al dominio de Laplace resulta

$$\frac{7}{5} s^2 X_b(s) = g\alpha(s) \quad \rightarrow \quad \frac{X_b(s)}{\alpha(s)} = G_x(s) = \frac{5g}{7s^2} = \frac{g}{0.714s^2} = \frac{7}{s^2} \quad (6.5)$$

$$\frac{7}{5} s^2 Y_b(s) = g\beta(s) \quad \rightarrow \quad \frac{Y_b(s)}{\beta(s)} = G_y(s) = \frac{5g}{7s^2} = \frac{g}{0.714s^2} = \frac{7}{s^2} \quad (6.6)$$

$$\frac{X_b(s)}{\alpha(s)} = \frac{Y_b(s)}{\beta(s)} = \frac{m_b g}{\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) s^2} = \frac{(0.027)(9.81)}{\left(0.027 + \frac{4.32 \cdot 10^{-6}}{0.02^2}\right) s^2} = \frac{5g}{7s^2} = \frac{g}{0.714s^2} = \frac{7}{s^2} \quad (6.7)$$

lo que permite verificar el punto de equilibrio, que ocurre para $\alpha = \beta = 0^\circ$. No obstante, el mismo tiene carácter estrictamente teórico dado que ante cualquier desbalance mecánico o la aparición de una mínima perturbación externa la plataforma se inclinará y la bola rodará hasta caerse.

Con el objetivo de realizar un análisis cualitativo de la condición de estabilidad alcanzada mediante los controladores propuestos, se graficaron los planos de fase correspondientes a cada uno de los sistemas desarrollados en el Capítulo 5. A tal efecto se tomó como base el modelo en variables de estado para el conjunto bola y plataforma, obtenido en las expresiones (3.28) y (3.29) para los ejes x e y respectivamente, transcriptas a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B(x_1 x_4^2 - g \text{sen } x_3) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_x] \quad (6.8)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ B(x_5 x_8^2 - g \text{sen } x_7) \\ x_8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_y] \quad (6.9)$$

En todos los casos los sistemas se excitaron con una señal equivalente a un escalón de posición hacia las coordenadas $x = 0.4$, $y = -0.6$, a partir de la posición inicial en el centro de la plataforma.

En las Figuras 6.21 a 6.23 se observan las trayectorias desarrolladas por las variables correspondientes a la *posición* y *velocidad* de la bola para cada uno de los ejes del movimiento.

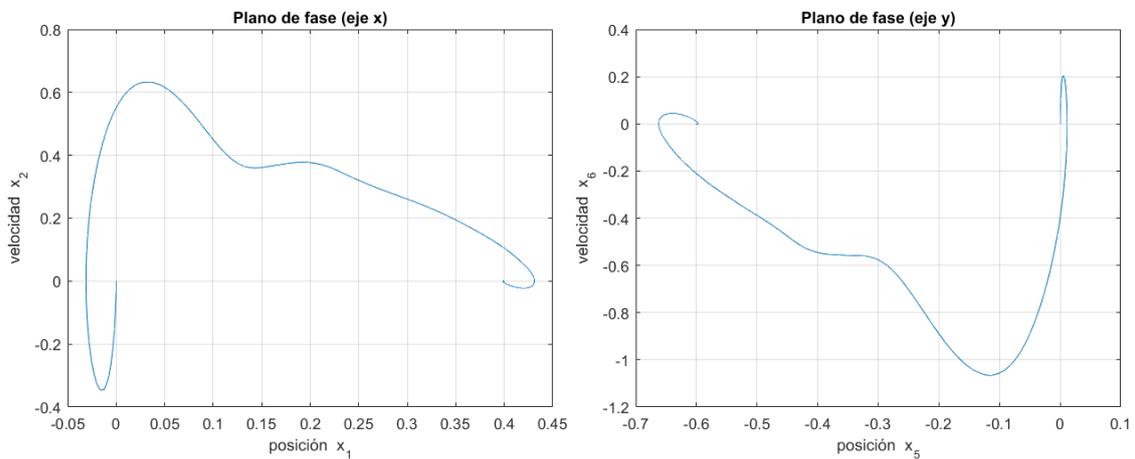


Figura 6.21. Planos de fase para la “posición” y “velocidad” utilizando controladores Mamdani

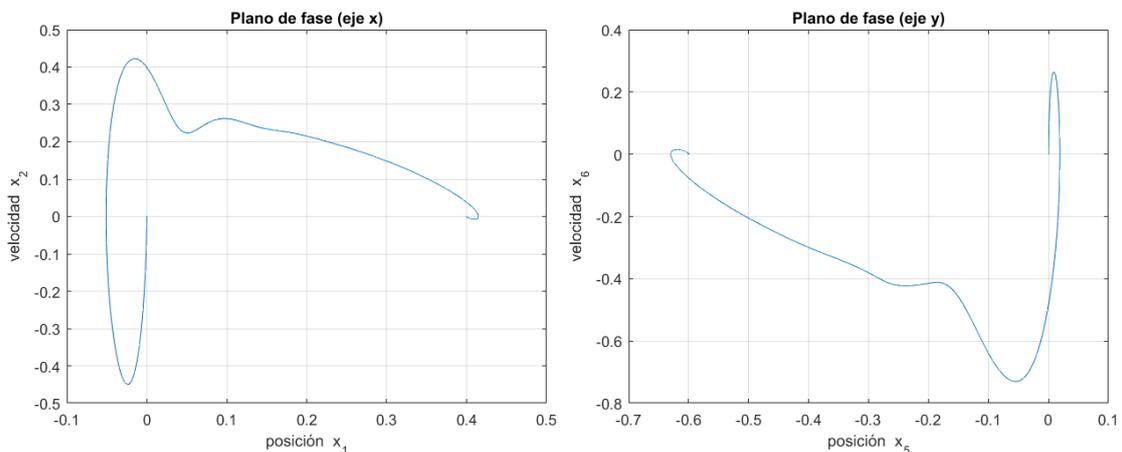


Figura 6.22. Planos de fase para la “posición” y “velocidad” utilizando controladores Sugeno

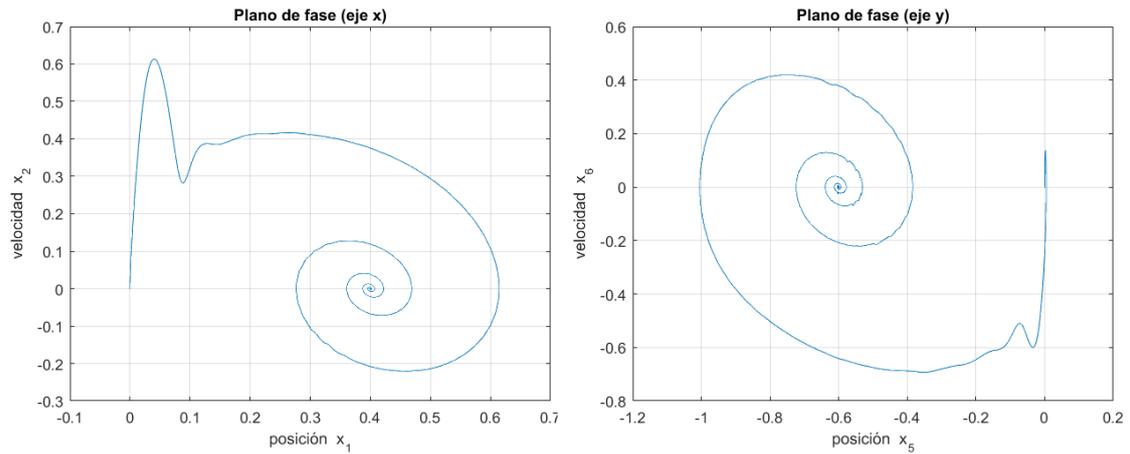


Figura 6.23. Planos de fase para la “posición” y “velocidad” utilizando controladores ANFIS

De las gráficas anteriores se puede apreciar que bajo la misma condición de excitación todos los sistemas alcanzan el equilibrio en el punto deseado. Por otra parte, se observa que hay similitud entre las trayectorias correspondientes a los sistemas desarrollados mediante técnicas difusas exclusivamente, en tanto que la utilización de los controladores neuro difusos produjo mayor dispersión en la trayectoria recorrida y amplitud de oscilación en la evolución de las variables de estado consideradas.

Capítulo 7

7. CONCLUSIONES

Como resultado del trabajo realizado se pueden señalar las siguientes conclusiones:

El modelo matemático obtenido para el sistema de bola y plataforma, la planta objetivo del control, evidencia la no linealidad del conjunto. No obstante, sin perder su esencia de alineal, pero considerando el bajo impacto de algunos términos de orden superior se alcanzó una razonable simplificación del modelo, lo que permitió realizar adecuadamente el procedimiento de diseño de los controladores propuestos.

Por otra parte, la simetría geométrica del dispositivo posibilitó el tratamiento del problema del control de manera independiente para cada dirección del movimiento, razón por la cual fue posible utilizar iguales controladores para accionar ortogonalmente la plataforma.

La estrategia empleada para controlar el dispositivo resultó adecuada y aplicable, en el contexto de simulación del sistema planteado, a pesar de la sencillez de los controladores utilizados, verificándose que puede ser aplicada con éxito en el control de dispositivos no lineales e inherentemente inestables como el abordado en este trabajo. Sin embargo, a efectos de lograr un funcionamiento correcto es condición que el accionamiento de la plataforma se realice suficientemente rápido para obtener una adecuada reacción a medida que se va modificando la posición de la bola sobre ella. Esta operación ejecutada en el lazo interno de control se concretó mediante un controlador de acción proporcional-derivativa obtenido mediante las técnicas clásicas de diseño.

Para el lazo externo de control se propusieron tres modelos diferentes de controladores a efectos de comparar el desempeño de cada uno, siendo los dos primeros elaborados a partir de técnicas difusas exclusivamente y el tercero empleando la combinación con una red neuronal, constituyendo un controlador neuro difuso (ANFIS).

En fase de simulación resulta importante considerar los recursos de computación necesarios, motivo por el cual se priorizaron diseños simples para lograr una apreciación adecuada de los resultados.

La dinámica no lineal e inestable del conjunto bola-plataforma determina que la condición de estabilidad no puede alcanzarse con cualquier nivel de señal de entrada como así también si el ruido o perturbaciones existentes tienen valores significativos, ya que la saturación de los actuadores causará la pérdida del control del sistema.

Bajo las condiciones de excitación utilizadas, los controladores propuestos mediante las diferentes técnicas de diseño permitieron estabilizar convenientemente el sistema, inclusive ante la presencia de ruido y perturbación externa.

8. REFERENCIAS

- [1] L. Hongwei y L. Yanyang, «Trajectory tracking sliding mode control of ball and plate system,» *2nd. International Asia Conference on Informática en Control, Automation and Robotics*, vol. 3, pp. 142-145, 2010.
- [2] N. H. Andinet, «Design of Fuzzy Sliding Mode Controller for the Ball and Plate System,» *Thesis of Master of Science in Electrical Engineering; Addis Ababa Institute of Technology, Addis Ababa University*, Jul 2011.
- [3] M. Nokhbeh y D. Khashabi, «Modelling and Control of Ball-Plate System,» *Final Project Report, Amirkabir University of Technology*, Irán, 2011.
- [4] J. J. Penco, «Controlador Neuro Fuzzy para el sistema de bola y barra,» de *25° Congreso Argentino de Control Automático*, Buenos Aires, Argentina, 2016.
- [5] J. J. Penco y M. R. Modesti, «Diffuse Versus PID Control for a Ball and Platform System,» *Revista Tecnología y Ciencia, Universidad Tecnológica Nacional*, vol. 17, n° 36, pp. 155-168, Octubre 2019.
- [6] J. J. Penco y M. R. Modesti, «Performance of Fuzzy and Neuro-Fuzzy Controllers on an Unstable Non-Linear Plant,» de *Proceeding of 2018 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA)*, Buenos Aires, Argentina, 2018.
- [7] GUNT Hamburg, «RT 123 Fuzzy Control: Ball-on-Plate,» G.U.N.T. Gerätebau GmbH, Fahrenberg 14, D-22885 Barsbüttel, 2011.
- [8] Feedback Instruments Ltd., «Ball and Plate Control Experiments Manual 33-240 LabView,» Feedback Instruments Ltd., Park Road, Crowborough, East Sussex, UK, Marzo 2011.
- [9] S. Awtar, D. Bernard, N. Boklund, A. Master, D. Ueda y K. C. Craig, «Mechatronic Design of Ball on Plate Balancing System,» *Mechatronics*, vol. 12, pp. 217-228, Feb 2002.
- [10] TecEquipment Ltd, «CE 151 Ball and Plate Apparatus,» TecEquipment Ltd, Bonsall Street, Long Eaton, Nottingham NG10 2AN, UK.
- [11] L. k. Qiu, W. l. Lei y Q. l. Liu, «Fuzzy Adaptive Control Scheme for Ball and Plate System and comparison with PD and MPC controller,» *International Journal of Digital Content, Technology and its Applications (JDCTA)*, vol. 7, n° 9, May 2013.
- [12] H. Wang, Y. Tian, Z. Sui, X. Zhang y C. Ding, «Tracking Control of Ball and Plate System with a Double Feedback Loop Structure,» *International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 1114-1119, 2007.
- [13] H. Wang, Y. Tian, C. Ding, Q. Gu y F. Guo, «Output regulation of the Ball and Plate System with a Nonlinear Velocity Observer,» *Proc. of a 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, China*, pp. 2164-2169, Jun 2008.
- [14] M. Bai, H. Lu, J. Su y Y. Tian, «Motion Control of Ball and Plate System Using Supervisory Fuzzy Controller,» *Proc. of a 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, China*, pp. 8127-8131, Jun 2006.

- [15] N. Yubazaki, J. Yi, M. Otani, N. Unemura y K. Himota, «Trajectory tracking control for unconstrained objects based on the SIRMs dynamically connected fuzzy inference model,» *Proc. of a 6th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, vol. 2, pp. 609-614, 1997.
- [16] C. E. Lin, M.-C. Liou y C.-M. Lee, «Image Fuzzy Control on Magnetic Suspension Ball and Plate System,» de *International Journal of Automation and Control Engineering*, 2014.
- [17] X. Fan, N. Zhang y S. Teng, «Trajectory planning and tracking of ball and plate system using hierarchical fuzzy control scheme,» *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 144, n° 2, pp. 297-312, 2003.
- [18] K.-K. Lee, G. Bätz y D. Wollherr, «Basketball Robot: Ball-on-Plate with Pure Haptic Information,» *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2410-2415, May 2008.
- [19] D. Yuan y Z. Zhang, «Modelling and control scheme of the ball-plate trajectory-tracking pneumatic system with a touch screen and a rotary cilinder,» *IET Control Theory and Applications*, vol. 4, n° 4, pp. 573-589, 2010.
- [20] R. C. Dorf y R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 12th ed., Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc., 2010.
- [21] S. M. Shinnars, *Modern Control System Theory and Design*, 2nd. ed., New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [22] B. Messner y D. Tilbury, «Control Tutorials for Matlab & Simulink,» Michigan University, Carnegie Mellon University and University of Detroit Mercy, [En línea]. Available: <http://www.ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorPosition§ion=SystemModeling>. [Último acceso: 20 Junio 2018].
- [23] V. Vandoren, «Fundamentals of cascade control,» *Control Engineering*, 17 August 2014. [En línea]. Available: <https://www.controleng.com/articles/fundamentals-of-cascade-control/>. [Último acceso: 10 March 2019].
- [24] M. Amjad, M. I. Kashif, S. S. Abdullah y Z. Shareef, «Fuzzy Logic Control of Ball and Beam System,» de *2nd International Conference on Education Technology and Computer (ICETC)*, 2010.
- [25] Y. Zhong y Y. Luo, «Comparative Study of Single-loop Control and Cascade Control,» *Procedia Engineering*, vol. 15, pp. 783-787, 2011.
- [26] D. Cooper y A. Houtz, «A Cascade Control Architecture for the Jacketed Stirred Reactor,» [En línea]. Available: <https://controlguru.com/a-cascade-control-architecture-for-the-jacketed-stirred-reactor/>. [Último acceso: 10 March 2019].
- [27] O. A. Ahmed y . A. F. Fadhil, «Power Flow Management for the Fuel Cell Hybrid Electrical Vehicle Based on State Logic Controller Algorithm implemented in FPGA Environment,» *International Journal of Current Engineering and Technology*, vol. 7, n° 2, pp. 515-525, 2017.
- [28] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, 5th. ed., Madrid, España: Pearson Educación S.A., 2010.

- [29] P. Pivonka, «Comparative analysis of fuzzy pi/pd/pid controlled based on classical pid controller approach,» de *IEEE International Conference of Fuzzy Systems*, pp 541-546, 2002.
- [30] J. Jantzen, *Foundations of Fuzzy Control. A practical approach*, Chichester, United Kingdom: John Wiley & Sons, Ltd., 2013.
- [31] S. Panayotis, M. Tremante y B. Ebert, «Ajuste de las Funciones de Pertenencia de Entrada de un Sistema de Control con Lógica Difusa de un Péndulo Invertido mediante el Método de Optimización del Patrón de Búsqueda,» *Sistemas, Cibernética e Informática*, vol. 11, nº 1, pp. 35-40, 2014.
- [32] S. N. Sivanandam, S. Sumathi y S. N. Deepa, *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*, Heidelberg: Springer-Verlag GmbH, 2007.
- [33] J.-S. R. Jang, «ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System,» *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 23, nº 3, pp. 665-685, 1993.
- [34] T. Mitiku y M. S. Manshaia, «Neuro Fuzzy Inference Approach: A Survey,» *International Journal of Scientific Research in Science, Engineering and Technology (IJSRSET)*, vol. 4, nº 7, pp. 505-519, 2018.
- [35] L. G. Marulanda Gonzalez, «Control por medio de redes neuronales. Sistemas avanzados de control,» Universidad del Valle, Santiago de Cali, Código 0732263-3746; 2010.
- [36] J.-S. R. Jang, «Fuzzy Modeling Using Generalized Neural Networks and Kalman Filter Algorithm,» de *Proceedings of the Ninth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-91)*, pp. 762-767, 1991.
- [37] V. Bakircioğlu, M. A. Şen y M. Kalyoncu, «Adaptive Neural-Network Based Fuzzy Logic (ANFIS) Based Trajectory Controller Design for One Leg of a Quadruped Robot,» de *Proceedings of the 5th International Conference on Mechatronic and Control Engineering (ICMCE'16)*, Venice, Italy, 2016.
- [38] MathWorks, «Fuzzy Logic Toolbox User's Guide,» The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, EE. UU., 2015.
- [39] MathWorks, «Simulink User's Guide,» The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, EE. UU., 2015.
- [40] B. M. Al-Hadithi, F. Matía y A. Jiménez, «Análisis de estabilidad de sistemas borrosos,» *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 4, nº 2, pp. 7-25, 2007.
- [41] Á. Garrido, «Historia de la polémica sobre la introducción de la Lógica Difusa,» *ÉNDOXA*, nº N° 38, pp. 329-345, 2016, UNED, Madrid.
- [42] L. Zadeh, «Fuzzy Sets,» *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [43] K. Passino y S. Yurkovich, *Fuzzy Control*, California, USA: Addison Wesley Longman, Inc., 1998.
- [44] L. X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, USA: Prentice-Hall International, Inc., 1999.

- [45] D. Driankov, H. Hellendoorn y M. Reinfrank, An Introduction to Fuzzy Control, Berlin Heidelberg GmbH: Springer, 2nd edition 1996.
- [46] J. Jantzen, «Design Of Fuzzy Controllers,» Technical University of Denmark, Department of Automation, Lyngby, Denmark, 1998.
- [47] Feedback Instruments Ltd., «Ball and Plate Control Experiments. Manual: 33-240 Labview,» Park Road, Crowborough, East Sussex, UK, 2011.

ANEXOS

A.1 Control basado en lógica difusa

A pesar que la lógica difusa ha tenido un notable desarrollo en las últimas décadas, sus orígenes se remontan a los debates y propuestas ya planteadas por algunos filósofos griegos, incluso desde la China y la India antiguas, donde se discutía que las cosas no tienen por qué ser o no ser de una determinada manera, sino que existe un sinnúmero de estados o situaciones intermedias, tal como se verifica en la realidad [41].

Uno de sus primeros antecedentes alrededor de 1930 tuvo lugar en los trabajos del filósofo polaco Jan Lukasiewicz quien propuso una metodología de razonamiento imprecisa, conocida como *teoría de posibilidades*, en la que una proposición lógica podía tener tres resultados, es decir que su valor de verdad podía diferir de verdadero o falso como deviene de la aplicación de la lógica clásica.

Años más tarde, en 1965 Lotfi A. Zadeh (1921-2017) Profesor de la Universidad de California, en Berkeley EE. UU. presenta su teoría de conjuntos difusos a través de la publicación de su artículo *Fuzzy Sets* [42]. Zadeh introduce el concepto de los conjuntos difusos en un sistema formal de lógica matemática en el cual se aplican términos del lenguaje natural, constituyéndose en el pilar fundamental sobre el que se desarrollara la lógica difusa.

Contrasta con la lógica convencional debido a la característica de asociar incertidumbre a la estructura de un conjunto de datos. Se presenta como una técnica comprendida dentro del paradigma de la Inteligencia Artificial, cuyo objetivo es expresar el conocimiento, caracterizado mediante términos lingüísticos, en un lenguaje matemático basado en la teoría de los conjuntos difusos y las funciones de pertenencia asociados a éstos, tratando de emular patrones de razonamiento similares a los del pensamiento humano. Esto es, establece una relación de contexto lingüístico con los datos numéricos que proporcionan precisión matemática.

La lógica difusa es utilizada para implementar sistemas de control que toman decisiones similares al razonamiento humano y su aplicación presenta ventajas dada su flexibilidad y la tolerancia a imprecisiones, característica muy útil cuando se trabaja con sistemas complejos. Un controlador basado en lógica difusa, habitualmente denominado como FLC¹⁴, se puede construir de manera que imite el proceso deductivo humano, es decir, el proceso que las personas utilizan para inferir conclusiones de las cosas que conocen.

En términos generales, un controlador basado en técnicas difusas, consta de cuatro componentes principales, Figura A.1, una interfaz de fuzzificación de las entradas, una base de conocimientos, un mecanismo de inferencia difuso, y una interfaz defuzzificadora de las salidas.

¹⁴ *Fuzzy Logic Controller*

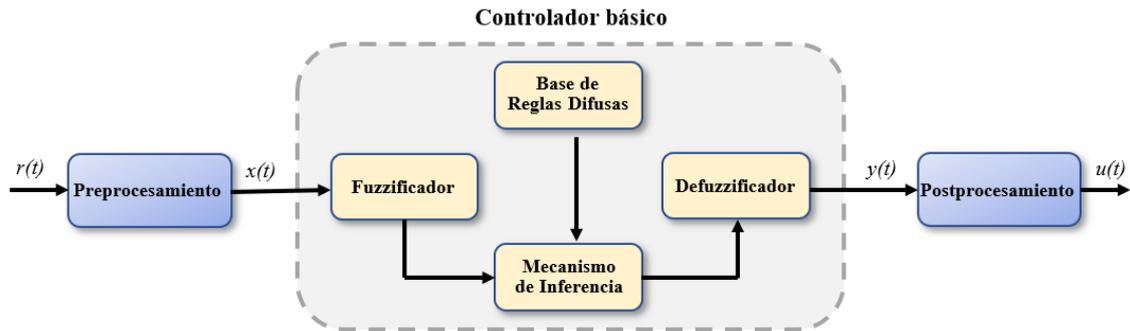


Figura A.1. Estructura típica de un controlador difuso

Adicionalmente se incluye una etapa de preprocesamiento con el objetivo de realizar el filtrado de ruidos, la cuantificación de las señales y un escalamiento para determinar el rango dinámico que se aplicará sobre la entrada del controlador, habitualmente denominado universo de discurso. Cuando el controlador opera sobre la señal de error del sistema, pueden requerirse acciones respecto de la derivada y/o la integral del error, a efectos de optimizar la acción del control. Estas operaciones también se realizan en la etapa de preprocesamiento.

Por otra parte, la señal de salida del controlador suele estar establecida dentro de un intervalo normalizado, habitualmente $[-1,1]$, por lo que es necesario incluir también una etapa de postprocesamiento con el objeto de escalar dicha señal dentro de los intervalos de las magnitudes que son requeridas por el sistema físico real, como por ejemplo rangos entre $[-10,10]$, $[0,100]$, correspondiente a volts, amperes, °C, m/s, etc., según sea el proceso a controlar. Esta etapa incluye una ganancia que debe ser ajustada para obtener una correcta operación [43].

A.1.1 Fuzzificación

El fuzzificador es la etapa de entrada del controlador. Su función es tomar los valores numéricos de las entradas y convertirlos en valores difusos. Un conjunto difuso describe conceptos vagos referidos a una variable (tales como rápido, lento, tibio, pesado, etc.), los cuales serán luego procesados en la etapa de inferencia. Este procedimiento se realiza a través de funciones que determinan el grado de pertenencia (entre 0 y 1) que tiene un valor determinado de la variable de entrada respecto de un conjunto definido lingüísticamente mediante criterios prácticos, asociados al conocimiento de cada sistema en particular. Estas funciones se denominan funciones de membresía, o MF¹⁵, pudiendo tener diferentes características, como, por ejemplo

Función tipo “singleton”. Transforma un valor numérico real $x \in U$ en un conjunto difuso del tipo impulsional, A en U, el cual tiene un grado de pertenencia de 1 en x_c y 0 en todos los demás puntos de U. Ver Figura A.2.

¹⁵ Membership Functions

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x = x_c \\ 0 & , x \neq x_c \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

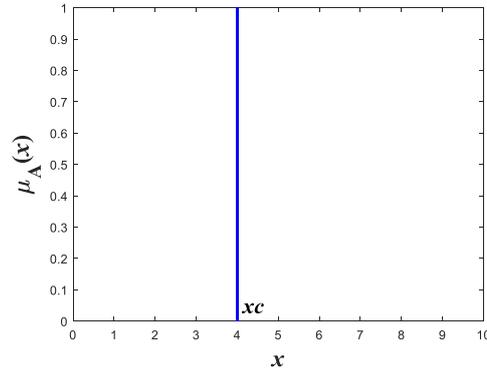


Figura A.2. Función de membresía tipo “singleton”

Función tipo “gaussiana”. Transforma un valor numérico real $x \in U$ en un conjunto difuso A en U, el cual posee la siguiente función de pertenencia gaussiana, Figura A.3.

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.2})$$

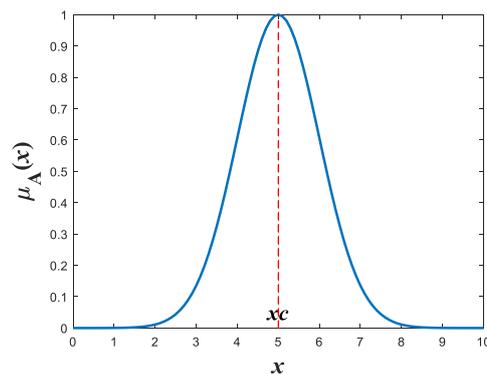


Figura A.3. Función de membresía del tipo “gaussiano”

donde x_c es el valor de x donde la función gaussiana es máxima y σ es la desviación estándar.

Función tipo “trapezoidal”. Transforma un valor numérico real $x \in U$ en un conjunto difuso A en U, donde a, b, c y d son los parámetros de la función trapezoidal, como se observa en la Figura A.4.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } b \leq x < c \\ \left(1 - \frac{|b-x|}{b-a}\right) & , \text{si } a \leq x < b \\ \left(1 - \frac{|x-c|}{d-c}\right) & , \text{si } c \leq x < d \\ 0 & , \text{si } x \notin [a, d] \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

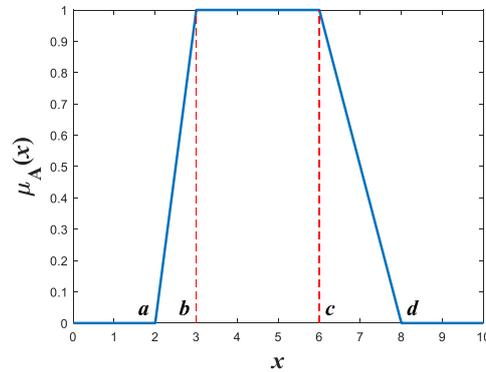


Figura A.4. Función de membresía del tipo “trapezoidal”

Función tipo “triangular”. Transforma un valor numérico real $x \in U$ en un conjunto difuso A en U, el cual posee la siguiente función de pertenencia de forma triangular

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x = x_c \\ \left(1 - \frac{|x_c-x|}{x_c-a}\right) & , \text{si } a \leq x < x_c \\ \left(1 - \frac{|x-x_c|}{b-x_c}\right) & , \text{si } x_c \leq x < b \\ 0 & , \text{si } x \notin [a, b] \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

donde a y b son los parámetros de la función triangular y x_c es el valor de x donde la función triangular es máxima, ver Figura A.5. Se puede observar que el fuzzificador triangular es un caso especial de fuzzificador trapezoidal.

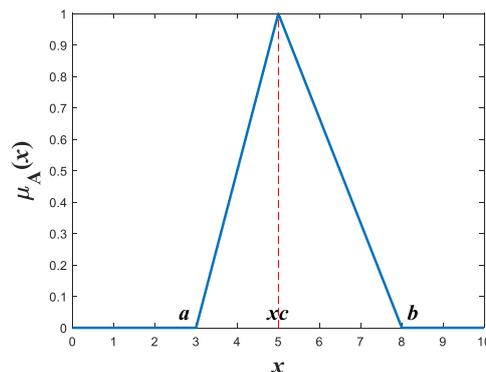


Figura A.5. Función de membresía del tipo “triangular”

A.1.2 Etapa de inferencia

Se conoce como etapa de inferencia al procedimiento mediante el cual se evalúan los valores difusos correspondientes a las señales de entrada, con una base de reglas que ha sido previamente definida. Esto produce a su vez uno o varios conjuntos difusos como resultado.

Las asignaciones que dan como resultado los conjuntos de salida se obtienen a partir de la aplicación de operaciones efectuadas en el marco de la lógica difusa.

La base de reglas o base de conocimientos difusos almacena un conjunto de formulaciones del tipo SI-ENTONCES que traducen en términos lingüísticos la experiencia que poseen los técnicos o expertos en relación a la manera de resolver un problema particular.

El consecuente es un conjunto difuso que está representado por una función de membresía, y que evalúa las características lingüísticas que se le atribuyen.

Las reglas difusas propuestas deben ser ponderadas. Esto es que debe establecerse un cierto peso, de tal manera que represente la importancia que se le asigna a cada una en el conjunto total de reglas. En general suele adoptarse igual peso para todas no obstante es posible asignar un valor determinado, en el intervalo de 0 a 1.

Esta base es utilizada como recurso en el proceso de inferencia, el cual toma decisiones sucesivas considerando cuáles reglas son las pertinentes para cada uno de los estados de operación del sistema, determina las acciones definidas por las mismas y finalmente combina éstas generando un conjunto difuso de salida [43], [44]. Básicamente, las reglas lingüísticas se utilizan para relacionar las entradas con las salidas y el procedimiento de inferencia imita el razonamiento humano para tomar decisiones y ejecutar determinadas acciones.

A.1.3 Defuzzificación

Es la etapa de salida del controlador. El defuzzificador opera como una interface que transforma el conjunto difuso resultante del procedimiento de inferencia, esto es $B \in V$, convirtiéndolo en un valor numérico concreto (*crisp*), $y_c \in V$, para ser enviado al proceso como señal de control. Existen varios métodos para obtener dicho valor numérico.

En [44] se sugiere que para la elección del método de defuzzificación deben tenerse en cuenta criterios tales como: factibilidad, o sea que resulte aceptable considerar al valor real de salida del controlador como una adecuada representación del conjunto difuso generado en el procedimiento de inferencia; la simplicidad computacional, cuestión que resulta significativa en la etapa de implementación dado que los controladores difusos operan en tiempo real; y el efecto de continuidad para que pequeñas variaciones en el conjunto difuso de salida produzcan pequeños cambios en el valor final, o nítido, de salida.

Los procedimientos habituales utilizados son

Método del centro de gravedad. Conocido como método del *centroide*, o COG¹⁶, especifica la variable de salida y_c como el centro del área total cubierta por la función de pertenencia del conjunto difuso B . Es el método de defuzzificación más conocido, sin embargo, su cálculo resulta computacionalmente complejo y por lo tanto da como resultado ciclos de inferencia más lentos, en comparación con otros procedimientos [45]. Para universos de discurso de tipo discreto el valor *crisp* de salida se obtiene mediante la expresión

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \mu_B(y_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_B(y_i)} \quad (\text{A.5})$$

donde y_i son los valores de entrada al defuzzificador, $\mu_B(y_i)$ es el grado de pertenencia respecto del conjunto difuso de salida, y n representa la cantidad de elementos considerados.

Para universos de tipo continuo se obtiene con la expresión

$$y_c = \frac{\int \mu_B(y) \cdot y \cdot dy}{\int \mu_B(y) \cdot dy} \quad (\text{A.6})$$

Como ilustración de este método se presenta el siguiente ejemplo donde el proceso de inferencia produce dos conjuntos difusos, B_1 y B_2 , con cierto grado de solapamiento entre ellos, ver Figura A.6. La defuzzificación se aplica sobre el conjunto final de salida, B , que se obtiene tomando el área total comprendida por B_1 y B_2 , pero considerando una única vez la sección determinada por su intersección.

El procedimiento consiste en dividir el área bajo la curva de B en seis sub-áreas, A_i , calcular el centroide de cada una de las sub-áreas, \bar{y}_i , y por aplicación de la ecuación (3.7) se obtiene el COG del conjunto. En la TABLA A.1 se resumen los cálculos parciales correspondientes, mientras que en el Anexo C.3 se presenta el script completo.

¹⁶ Center of Gravity

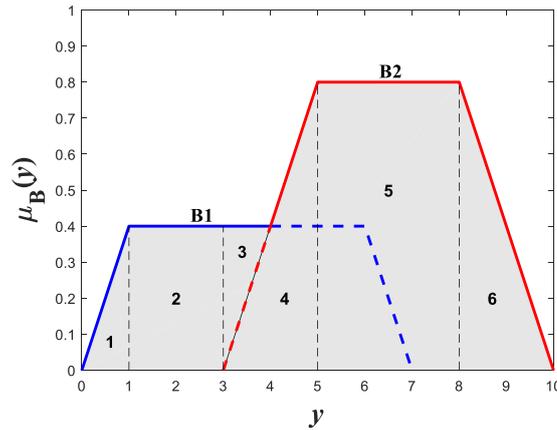


Figura A.6. Delimitación de áreas parciales para cálculo del COG.

TABLA A.1 CÁLCULOS PARCIALES PARA DETERMINACIÓN DEL COG

Sub-área	Área (A_i)	COG de Sub-área (\bar{y}_i)	$A_i \cdot \bar{y}_i$
1	0.2	0.6666	0.1333
2	0.8	2	1.6
3	0.2	3.3333	0.6666
4	0.8	4.3333	3.4666
5	2.4	6.5	15.6
6	0.8	8.6666	6.9333

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^N A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^N A_i} \quad (\text{A.7})$$

$$y_c = \frac{0.1333 + 1.6 + 0.6666 + 3.4666 + 15.6 + 6.9333}{0.2 + 0.8 + 0.2 + 0.8 + 2.4 + 0.8} \quad (\text{A.8})$$

$$y_c = 5.4615 \quad (\text{A.9})$$

Método del promedio de los centros. En este método, también conocido como *centro de sumas*, COS¹⁷, el valor escalar de la variable de salida y se determina por el promedio de los centros de los M conjuntos difusos de salida con los pesos $\mu_{B_k}(y_i)$, que es igual a la altura de los conjuntos difusos correspondientes. A diferencia del caso anterior, se computan en su totalidad cada una de las áreas de los conjuntos difusos parciales, por lo que en caso de solapamiento dichas porciones se consideran ambas veces. De esta manera el método resulta de computación más rápida, por lo que es muy utilizado para la implementación en hardware [45]. En el caso discreto se calcula con la expresión

¹⁷ Center of Sums

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{k=1}^M \mu_{Bk}(y_i)}{\sum_{k=1}^M \mu_{Bk}(y_i)} \quad (\text{A.10})$$

donde M es el número de conjuntos difusos parciales, N es la cantidad de variables difusas y $\mu_{Bk}(y_i)$ es el valor de pertenencia de y_i para el k -ésimo conjunto difuso.

Método de las áreas iguales. Se conoce con el nombre de BOA¹⁸, o método del *bisector*, y consiste en calcular el valor que divide al conjunto difuso B en dos sectores de igual área. Se expresa matemáticamente a partir de la condición

$$\int_{y_\alpha}^{y_c} \mu_{B'}(y) dy = \int_{y_c}^{\beta} \mu_{B''}(y) dy \quad (\text{A.11})$$

donde $\alpha = \min\{y\}$ y $\beta = \max\{y\} \mid y \in \text{dominio de } B$.

Método del criterio máximo. Con este procedimiento se obtiene el valor numérico real del punto donde la función de pertenencia del conjunto difuso B asume su valor máximo.

$$y_c = \text{punto de altura máxima de } B \quad (\text{A.12})$$

siendo y_c es la variable numérica de salida del controlador y B el conjunto difuso de entrada al defuzzificador.

Si el conjunto B contiene un único punto máximo, y_c queda definido de forma automática.

Si el conjunto B posee más de un punto de valor máximo, se especifican tres alternativas

Determinación del **promedio de los máximos**. En la terminología denominado MOM¹⁹, consiste en adoptar la media de entre todos los puntos de máximo valor en el conjunto difuso B .

$$y_c = \frac{\int y \cdot dy}{\int dy} \quad (\text{A.13})$$

¹⁸ *Bisector of Área*

¹⁹ *Mean of Maximun*

Determinación del **mayor máximo**. Denominado LOM²⁰, adopta el superior de los valores máximos en el dominio de B .

$$y_c = \sup\{y \in B\} \quad (\text{A.14})$$

donde $\sup\{\}$ es el superior de los máximos.

Determinación del **menor máximo**. Denominado SOM²¹, adopta el valor inferior del intervalo de máximos en el dominio de B .

$$y_c = \inf\{y \in B\} \quad (\text{A.15})$$

donde $\inf\{\}$ es el menor valor de todos los máximos.

La Figura A.7 resume los diferentes valores *crisp* calculados mediante Matlab a partir del conjunto arbitrario (B) utilizando los distintos métodos mencionados.

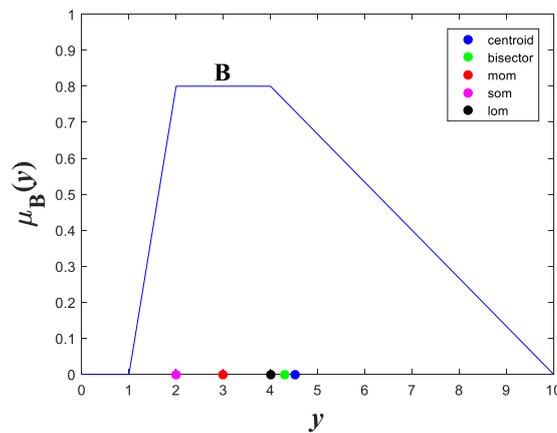


Figura A.7. Defuzzificación con diferentes métodos.

A.2 Sistema de inferencia difusa

El sistema de inferencia difusa, o FIS²², consiste en el procedimiento completo a través del cual variables o señales provenientes de un determinado proceso o sistema físico son evaluadas respecto de un conjunto de pautas que se consideran convenientes para obtener un resultado adecuado de comportamiento. Dado que un FIS funciona en el

²⁰ Largest of Maximun

²¹ Smallest of Maximun

²² Fuzzy Inference System

marco de la lógica difusa las operaciones se realizan sobre conjuntos difusos y las decisiones resultantes también producen conjuntos difusos. Por este motivo cuando son utilizados como controladores de sistemas físicos resulta necesario traducir su salida a magnitudes concretas que puedan ser aplicadas a los actuadores correspondientes.

Con estas consideraciones el proceso completo de inferencia consta de cinco pasos

a. Fuzzificación.

Como se mencionó en A.1.1 en esta etapa se obtiene un valor numérico que representa el grado de pertenencia de cada variable a un conjunto que cumple con determinadas propiedades y está caracterizado mediante una función de membresía definida en cada caso particular.

b. Aplicación de operaciones lógicas.

Una vez establecido el conjunto de reglas que suponen el comportamiento esperado para el sistema, es necesario evaluar los valores de las variables de entrada con el objeto de ponderar de qué forma impactará cada una sobre la operación total del sistema.

Cuando el antecedente de cada regla implica el efecto de más de una variable es necesario aplicar algún tipo de operación lógica para obtener un número que represente el resultado total del mismo. Como se dijo, estas operaciones están definidas en el marco de la lógica difusa, por lo tanto, la entrada a los operadores lógicos son los valores de membresía que corresponden a las variables fuzzificadas y la salida será un determinado valor de verdad.

Las operaciones son habitualmente del tipo intersección (AND) o de unión (OR). El software de cálculo Matlab® incorpora de forma nativa en el módulo *Fuzzy Logic Toolbox* que incluye funciones para aplicar los métodos *min* (mínimo) y *prod* (producto) para la operación AND, y los métodos *max* (máximo) y *probor* (probabilístico) para la operación OR [38].

c. Implicación.

Esta operación permite remodelar la función de membresía del consecuente a partir del resultado producido por la evaluación del antecedente, obteniéndose un conjunto difuso. Dicho procedimiento se aplica para cada una de las reglas definidas en la base de conocimientos. Son comúnmente empleados el método del mínimo (*min*) que produce el recorte o truncamiento del conjunto difuso, y el método del producto (*prod*) que produce un escalamiento de dicho conjunto.

d. Agregación.

Es la etapa mediante la cual los conjuntos difusos generados por la totalidad de las reglas se combinan, para obtener un conjunto global que represente todas las opciones posibles determinadas para la operación del sistema. El proceso de agregación se puede realizar utilizando los métodos del máximo (*max*), OR probabilístico (*probor*) o de suma (*sum*), dando como resultado un conjunto difuso para cada una de las salidas del sistema.

e. *Defuzzificación.*

Dado que el sistema de inferencia produce un resultado expresado en términos difusos, cuando se trata de generar una acción de control para aplicar sobre un actuador físico, dicho resultado debe convertirse en una magnitud concreta, es decir un número real que sea representativo de todo el conjunto. Esta operación corresponde a la etapa de defuzzificación y se puede realizar con los métodos descritos en A.1.2.

Existen diferentes procedimientos de inferencia, sin embargo, los más utilizados frecuentemente son el método de Mamdani, introducido por Mamdani y Assilian en 1975, y el método de Takagi-Sugeno-Kang, propuesto en 1985. La principal diferencia entre ambos radica en el formato utilizado para el planteo de las reglas difusas. En el primero, tanto el antecedente como el consecuente de las reglas están determinados por expresiones lingüísticas, mientras que en segundo método el consecuente está definido como una función lineal de las variables de entrada al sistema.

A.3 Estrategias de control difuso

Los controladores basados en técnicas difusas se han implementado con éxito en diferentes metodologías de control, aportando la ventaja de no requerir un modelo matemático preciso y de operar en base a un conjunto de reglas predefinidas, las cuales pueden ser proporcionadas a través de los conocimientos de un experto.

Uno de los conceptos es en el esquema de control directo (*direct control*) [46] en el cual el controlador difuso es insertado directamente por delante del proceso o planta a controlar, dentro del lazo de realimentación, Figura A.8. La salida del sistema es comparada con una referencia y el error entre ellas es considerado por el controlador para generar las acciones necesarias según la base de reglas con que ha sido diseñado. Con esta disposición es posible reemplazar el efecto de controladores clásicos del tipo PD o PID cuando el proceso presenta comportamiento no lineal.

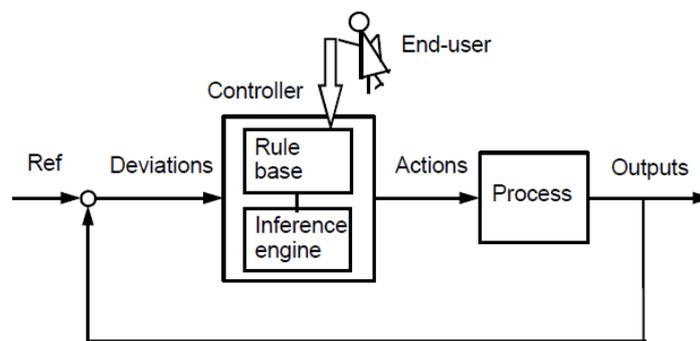


Figura A.8. Esquema de un *control directo* [46]

Los controladores difusos también son aplicados en una estrategia conocida como alimentación hacia adelante (*feedforward control*) o de prealimentación, el cual suele utilizarse para la compensación de perturbaciones que pueden ser previstas con

anticipación. Estos sistemas, por lo tanto, requieren un modelo matemático suficientemente preciso para caracterizar el compensador, motivo por el cual puede ser reemplazado por un modelo difuso que provee una acción no lineal frente a las perturbaciones externas. Figura A.9.

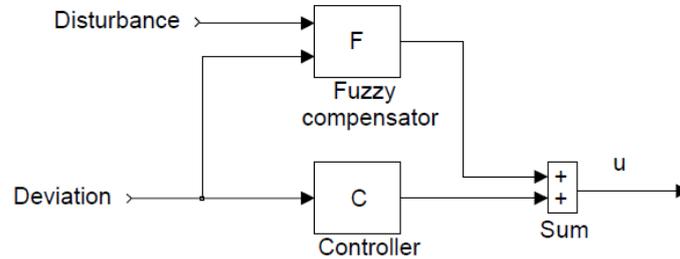


Figura A.9. Esquema conceptual de un sistema *feedforward control* [46]

Las técnicas difusas son también utilizadas para ajustar la sintonía de los parámetros del controlador en un esquema del tipo adaptativo (*adaptive control*). Figura A.10. Es particularmente útil para controlar procesos no lineales frente a variaciones en el punto de operación, en estos sistemas el controlador reajusta su ganancia automáticamente en función del punto de trabajo de la planta. Esta operación, conocida como *gain scheduling*, utiliza una tabla de ganancias predefinidas para diferentes estados operativos por lo que se requiere un conocimiento previo de la operación del sistema. En este punto resulta útil una base de reglas difusas para compensar no linealidades y variaciones de los parámetros de la planta.

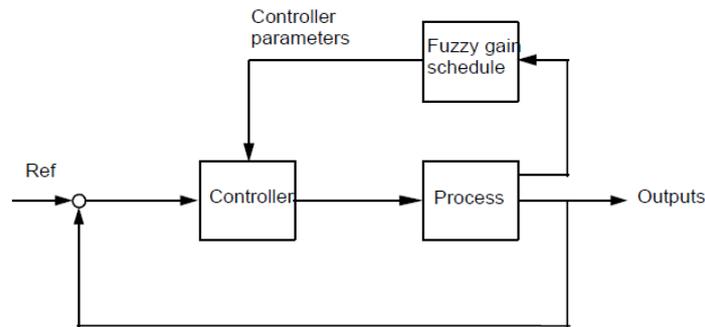


Figura A.10. Estructura de un sistema del tipo *control adaptivo* [46]

B. Modelos de simulación

En este Anexo se muestran los diagramas de bloques utilizados en Simulink® para realizar las simulaciones desarrolladas en el trabajo.

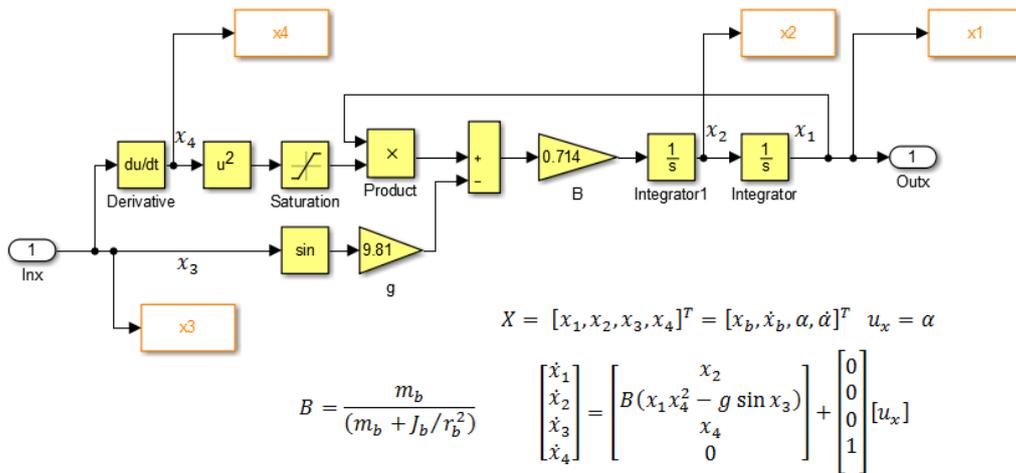


Figura B.11. Diagrama de bloques del modelo no lineal del sistema bola-plataforma (eje x)

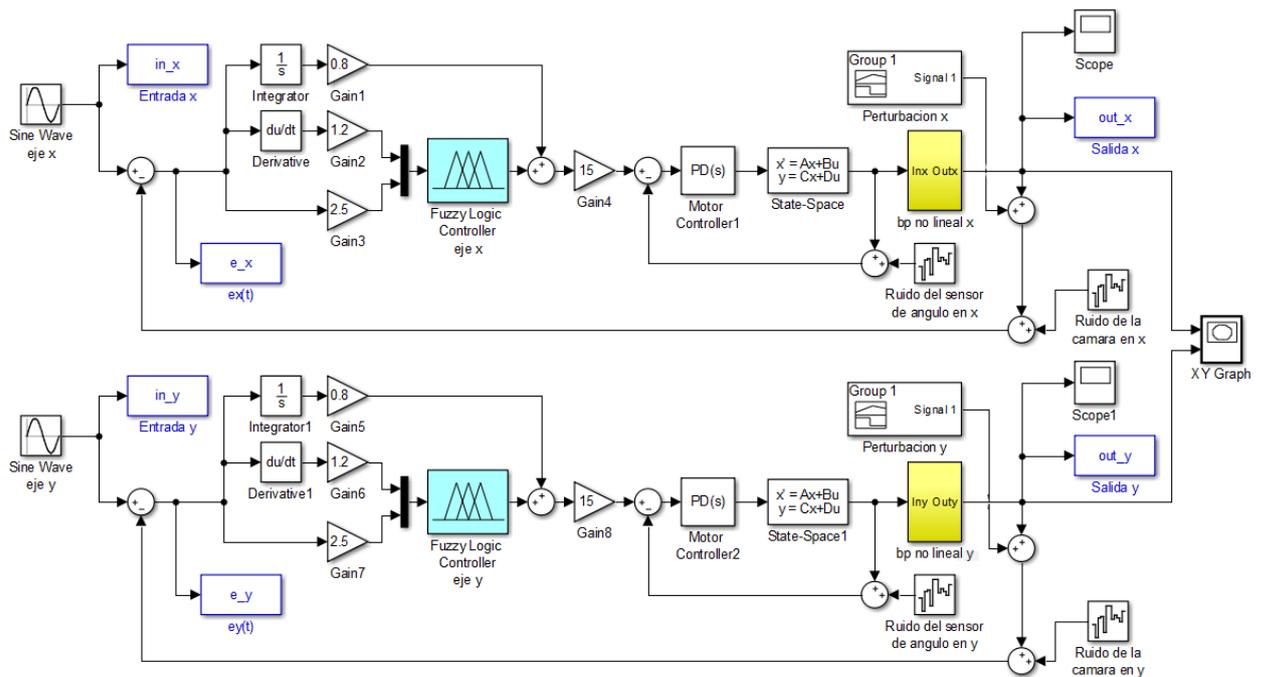


Figura B.12. Diagrama de bloques para la simulación completa con controladores Mamdani

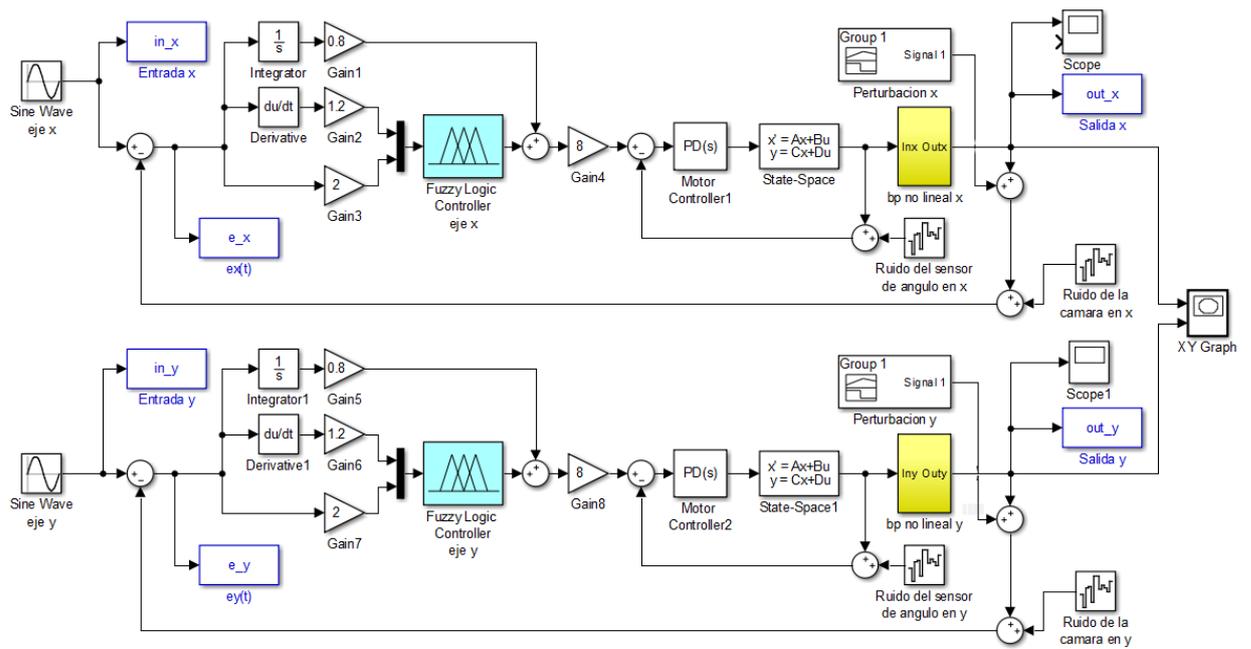


Figura B.13. Diagrama de bloques para la simulación completa con controladores TSK

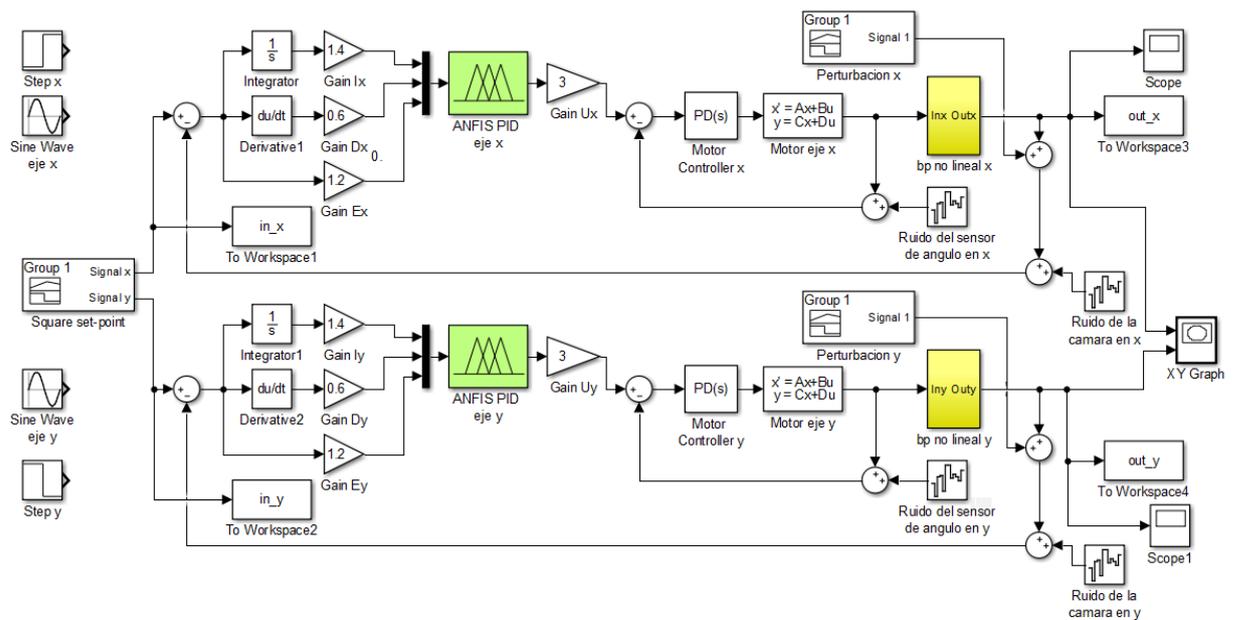


Figura B.14. Diagrama de bloques para la simulación completa con controladores ANFIS

C. Códigos de MATLAB®

Los siguientes scripts han sido utilizados en el desarrollo del presente trabajo

C.1 Curvas de respuesta de los sistemas.

```
% Comparación de respuestas
% Sistema de bola y plataforma
% Modelo no lineal
% -----

close all, clc

% NOTA: Ejecutar primero
% o bp_tesis_mamdani_controller_simu.slx
% o bp_tesis_sugeno_controller_simu.slx
% o bp_tesis_anfis_controller_simu.slx

plot(out_x,out_y,'linewidth',1)
hold on
plot(in_x,in_y,'r','linewidth',1)
hold off
axis equal
axis([-1 1 -1 1]);

xlabel('Eje x','FontWeight','bold','FontSize',12);
ylabel('Eje y','FontWeight','bold','FontSize',12);

legend('TRAYECTORIA','CONSIGNA','location','southeast')
set(legend,'FontWeight','bold','FontSize',9);
grid
```

C.2 Gráficas de las funciones de membresía

```
% FUNCIONES DE MEMBRESÍA
% -----
clear, close all, clc

x = (0:0.1:10)';

figure(1);
y1 = (0:0.1:1);
x1 = 4*ones(length(y1))';
plot(x1,y1,'b','LineWidth',2)
axis([0 10 0 1])
set(gcf, 'name', 'singleton', 'numbertitle', 'off');
grid
```

```

ylabel('\mu_A(\itx\rm\bf)', 'FontName', 'Times New
Roman', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 20)
xlabel('\itx', 'FontName', 'Times New
Roman', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 20)

title('Función de membresía "singleton"')
text(4, 0.05, '\bf\it xc', 'FontName', 'Times New
Roman', 'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', 18)

figure(2);
y2 = gaussmf(x, [1 5]);
plot(x, y2, 'LineWidth', 2)
set(gcf, 'name', 'gaussmf', 'numbertitle', 'off');

grid
ylabel('\mu_A(\itx\rm\bf)', 'FontName', 'Times New
Roman', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 20)
xlabel('\itx', 'FontName', 'Times New
Roman', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 20)

title('Función de membresía "gaussiana"')
text(5, 0.05, '\bf\itxc', 'FontName', 'Times New
Roman', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 18)
hold on
yxc = (0:0.1:1);
xxc = 5*ones(length(yxc));
plot(xxc, yxc, '--r')
hold off

figure(3)
y3 = trapmf(x, [2 3 6 8]);
plot(x, y3, 'LineWidth', 2)
set(gcf, 'name', 'trapmf', 'numbertitle', 'off');

grid
ylabel('\mu_A(\itx\rm\bf)', 'FontName', 'Times New
Roman', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 20)
xlabel('\itx', 'FontName', 'Times New
Roman', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 20)

title('Función de membresía "trapezoidal"')
text(2, 0.05, '\bf\it a ', 'FontName', 'Times New
Roman', 'HorizontalAlignment', 'right', 'FontSize', 18)
text(8, 0.05, '\bf\it d ', 'FontName', 'Times New
Roman', 'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', 18)
hold on
yb = (0:0.1:1);
xb = 3*ones(length(yb));
yc = (0:0.1:1);
xc = 6*ones(length(yc));
plot(xb, yb, '--r', xc, yc, '--r')
text(3, 0.05, '\bf\it b ', 'FontName', 'Times New
Roman', 'HorizontalAlignment', 'right', 'FontSize', 18)
text(6, 0.05, '\bf\it c ', 'FontName', 'Times New
Roman', 'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', 18)
hold off

```

```

figure(4)
y4 = trimf(x,[3 5 8]);
plot(x,y4,'LineWidth',2)
set(gcf,'name','trimf','numbertitle','off');

grid
ylabel('\mu_A(\itx\rm\bf)','FontName','Times New
Roman','FontWeight','bold','FontSize',20)
xlabel('\itx','FontName','Times New
Roman','FontWeight','bold','FontSize',20)

title('Función de membresía "triangular"')
text(3,0.05,'\bf\it a ','FontName','Times New
Roman','HorizontalAlignment','right','FontSize',18)
text(5,0.05,'\bf\it xc','FontName','Times New
Roman','HorizontalAlignment','center','FontSize',18)
text(8,0.05,'\bf\it b','FontName','Times New
Roman','HorizontalAlignment','left','FontSize',18)
hold on
yxc = (0:0.1:1);
xxc = 5*ones(length(yxc));
plot(xxc,yxc,'--r')
hold off

```

C.3 Cálculo del centro de gravedad con el método del centroide

```

% Ejemplo defuzzificación con método COG
% -----

clear, close all, clc

y = 0:0.1:10;

xB1 = [0 1 6 7];
yB1 = [0 0.4 0.4 0];
xB2 = [3 5 8 10];
yB2 = [0 0.8 0.8 0];

fill(xB1,yB1,[0.9 0.9 0.9]);
axis([0 10 0 1]);
hold on
fill(xB2,yB2,[0.9 0.9 0.9]);

plot([0 1 4],[0 0.4 0.4],'b','lineWidth',2)
plot([4 6 7],[0.4 0.4 0],'--b','lineWidth',2)
plot([3 4],[0 0.4],'--r','lineWidth',2)
plot([4 5 8 10],[0.4 0.8 0.8 0],'r','lineWidth',2)
plot([1 1],[0 0.4],'--k')
plot([3 3],[0 0.4],'--k')
plot([5 5],[0 0.8],'--k')
plot([8 8],[0 0.8],'--k')
grid

```

```

text(2.3,0.43,'B1','fontName','Times New
Roman','fontSize',14,'fontWeight','bold')
text(6.3,0.83,'B2','fontName','Times New
Roman','fontSize',14,'fontWeight','bold')
text(0.5,0.08,'1','fontSize',12,'fontWeight','bold')
text(1.9,0.2,'2','fontSize',12,'fontWeight','bold')
text(3.3,0.33,'3','fontSize',12,'fontWeight','bold')
text(4.2,0.2,'4','fontSize',12,'fontWeight','bold')
text(6.4,0.5,'5','fontSize',12,'fontWeight','bold')
text(8.6,0.2,'6','fontSize',12,'fontWeight','bold')
ylabel('\mu_B(\ity\rm\bf)','FontName','Times New
Roman','FontWeight','bold','FontSize',20)
xlabel('\ity','FontName','Times New
Roman','FontWeight','bold','FontSize',20)

```

C.4 Defuzzificación con diferentes métodos

```

% Defuzzificación con diferentes métodos

```

```

% -----

```

```

clear, close all, clc

```

```

x = -10:0.1:10;

```

```

mf1 = trapmf(x,[-10 -8 -4 7]);
Xc1 = defuzz(x,mf1,'centroid');
figure(1)
plot(x,mf1,'b',Xc1,0,'ob')
hold on

```

```

% escalamiento de mf1
mf11 = 0.2*trapmf(x,[-10 -8 -4 7]);
Xc11 = defuzz(x,mf11,'centroid');
plot(x,mf11,'g',Xc11,0,'og')

```

```

mf2 = trimf(x,[-8 0 2]);
Xc2 = defuzz(x,mf2,'centroid');
plot(x,mf2,'r',Xc2,0,'or')
hold off

```

```

% distintos métodos para la misma función

```

```

x = 0:0.1:10;
mf = 0.8*trapmf(x,[1 2 4 10]);

```

```

Xc1 = defuzz(x,mf,'centroid');
Xc2 = defuzz(x,mf,'bisector');
Xc3 = defuzz(x,mf,'mom');
Xc4 = defuzz(x,mf,'som');
Xc5 = defuzz(x,mf,'lom');

```

```

figure(2)
plot(Xc1,0,'ob','MarkerFaceColor','b') %ejecutando aquí se marca
todo el cuadro
axis([0 10 0 1])

hold on
%plot(Xc1,0,'ob','MarkerFaceColor','b') %ejecutando aquí solo se
marcan los ejes
plot(Xc2,0,'og','MarkerFaceColor','g')
plot(Xc3,0,'or','MarkerFaceColor','r')
plot(Xc4,0,'om','MarkerFaceColor','m')
plot(Xc5,0,'ok','MarkerFaceColor','k')
plot(x,mf,'b')

%grid
legend('centroid','bisector','mom','som','lom')
ylabel('\mu_B(\ity\rm\bf)','FontName','Times New
Roman','FontWeight','bold','FontSize',20)
xlabel('\ity','FontName','Times New
Roman','FontWeight','bold','FontSize',20)
text(2.8,0.84,'B','FontName','Times New
Roman','FontWeight','bold','FontSize',18)
hold off

```