Complemento Teórico

Análisis Matemático I

Recta Tangente

Recta Tangente

La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es aquella recta en $P(a, f(a))$ que posee pendiente igual a $f'(a)$, la derivada de f en x = a. Si usamos la forma punto pendiente de la ecuación de una recta, podemos escribir una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el punto $P\ (a, f\ (a))$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{y - f\,(a) = f\,'(a)\,(x - a)}$$

Siendo $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si este límite existe.

Para poder interpretar la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto observe que:

Si suponemos que *y* es una cantidad que depende de otra cantidad *x.* Entonces podemos llamarlas a "y" variable dependiente siendo "x" la variable independiente, entonces entre ellas tenemos definida una función $y = f(x)$.

Si incrementamos la variable $\boldsymbol{x = a}$ una cantidad determinada $\boldsymbol{h}$ entonces ahora $\boldsymbol{x = a + h}$, por lo tanto, el cambio en x (también conocido como **incremento** de la variable *x*) es

$$\Delta x = a + h - a = h$$

Este cambio en la variable *x* ocasionará un cambio en la variable *y*, por lo que, si queremos verlo reflejado en la función, el mismo corresponderá a un cambio de altura en la gráfica, denominado Δ*y*

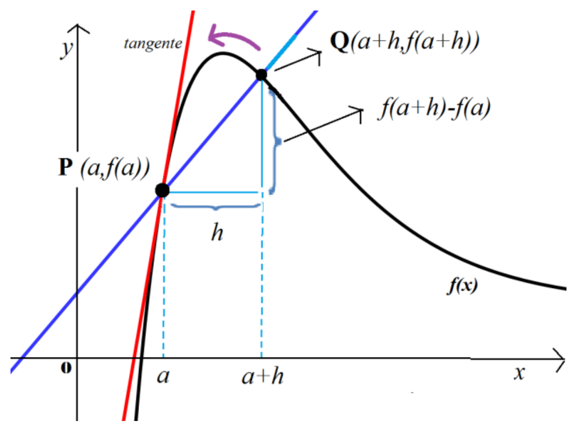

Ilustración 1

$$\Delta y = f\,(a + h) - f\,(a)$$

Si analizamos la razón entre los incrementos dados anteriormente podemos hallar la pendiente de la recta secante que contiene a los puntos P y Q de la Ilustración 1.

$$\boxed{\boldsymbol{m_{\overline{PQ}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}}$$

Ahora bien, si consideramos que el Punto Q se aproxima al punto P (*Ilustración 2*) esto ocasiona que $\boldsymbol{h} \rightarrow 0$. Entonces si existe el límite para $\boldsymbol{h} \rightarrow 0$ del cociente de incrementos podemos asegura que existe $f'(a)$ y se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f\ (x)$ en $P\ (a, f(a))$.

$$\boldsymbol{m_P = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Derivadas Laterales

Con el objeto de estudiar algunos casos especiales definimos **derivadas laterales.**

Derivada lateral izquierda: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{\boldsymbol{f(a+h)-f(a)}}{\boldsymbol{h}}$

Derivada lateral derecha: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{\boldsymbol{f(a+h)-f(a)}}{\boldsymbol{h}}$

Podemos asegurar que:

Si la función es derivable en $x{=}a \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, esto es las derivadas lateras son iguales y existe recta tangente a la curva $y = f\ (x)$ en $P\ (a, f(a))$.

Para dar una interpretación geométrica a las derivadas laterales considere las semirrectas secantes por derecha y por izquierda del punto P *(a, f(a))* estas son las semirrectas desde el punto P y que contiene al punto Q, si h >0 es la semirrecta secante por derecha, Q' si h<0 semirrecta secante por izquierda como se ve en la ilustración 2.

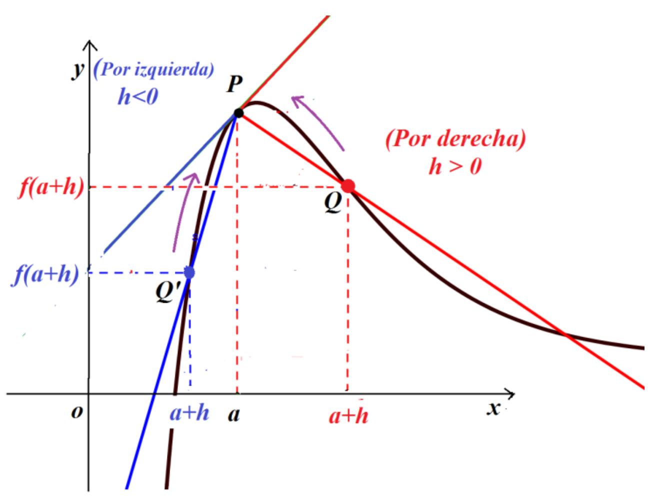

Ilustración 2

Así la derivada lateral por derecha es el valor del límite de las pendientes de las rectas secantes por derecha y la derivada lateral por izquierda es el valor del límite de las pendientes de las rectas secantes por izquierda.

Si el valor de las pendientes de las rectas secantes en el punto (por la derecha y por la izquierda) conforme h--->0 se acercan a un mismo número la curva tiene recta tangente en ese punto. En caso negativo, decimos que la función $y = f(x)$ no es derivable en $x=a$ y la curva no tiene recta tangente en P $(a, f(a))$.

Función Derivada

Hasta ahora hemos definido la derivada en un determinado punto $x= a$.
Si ahora consideramos **todos** los puntos x del dominio de una función $y = f(x)$ donde es derivable, es decir, donde $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existe, y evaluamos en dichos puntos el valor de la derivada en cada uno de ellos, se obtendrá una nueva función $\boldsymbol{f'(x)}$, llamada función derivada de $f(x)$.

Esta nueva función $\boldsymbol{f'(x)}$ tendrá como dominio el conjunto de puntos donde $f(x)$ sea derivable y el conjunto de las imágenes estará formado por las derivadas correspondientes, evaluadas en cada uno de esos puntos.

Podemos decir:

$f'(x)$ es la función derivada de $f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, si este límite existe.

A continuación, estudiaremos casos donde la función *f(x)* es continua en x=a pero no derivable en ese punto.

Ejemplo de una curva que representa una función que no tiene recta tangente en un punto

Dada $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & si \quad -1 \leq x < 2 \\ x - 2 & si \quad 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

Se muestra en la ilustración 3 la gráfica de la función y las de las rectas secantes por derecha e izquierda en el punto $x=2$

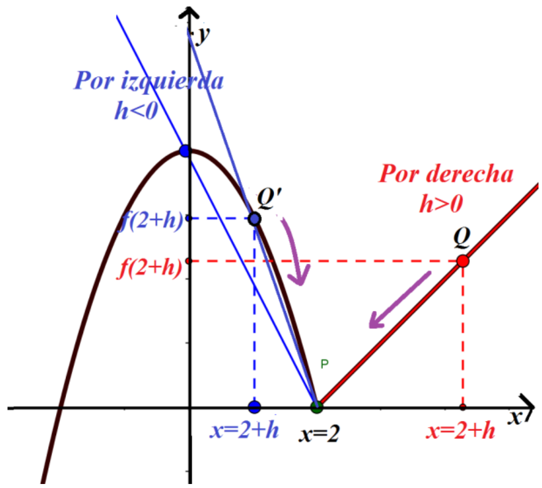

Ilustración 3

Vemos que las semirrectas secantes por la derecha y por la izquierda en $x=2$, no tienden al mismo límite conforme h--->0 con lo que no existe recta tangente en $x=2$. Por lo que las derivadas laterales, que son las pendientes de las rectas secantes por derecha e izquierda, son distintas también.

Cuando las derivadas laterales son distintas, es decir, cuando $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tendremos un caso de no existencia de límite, por lo tanto, allí la función será no derivable.

Caso Especial: Derivada Infinita, Rectas y Semirrectas Tangentes Verticales.

Cuando $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ (caso de no existencia de límite), la función f no es derivable en ese punto y, por convención, decimos que allí la función tiene derivada infinita. Veamos que ocurre con las rectas tangentes.

El caso en que las derivadas laterales por derecha e izquierda son infinitas de igual signo, está asociado al hecho de que las rectas secantes tienden por derecha y por izquierda a una recta tangente vertical x=a ver ilustración 4

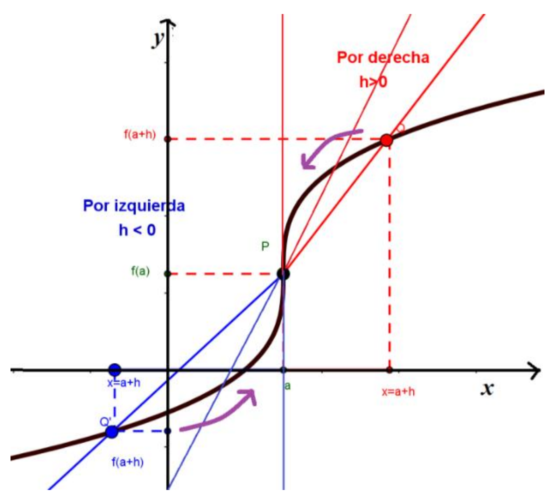

Ilustración 4

Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ o $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ en x=a, entonces existe recta tangente vertical de ecuación x=a en P (a,f(a)).

En este caso el punto P (a;f(a)) es un punto de inflexión de f.

Para el caso en que los limites laterales son infinitos de distintos signos, tenemos que conforme h-->0, por derecha y por izquierda las semirrectas tangentes tienden a la misma posición como se observa en la ilustración 5. En este caso no existe recta tangente vertical sino decimos que existe en el punto P (a,f(a)) semirrecta tangente vertical.

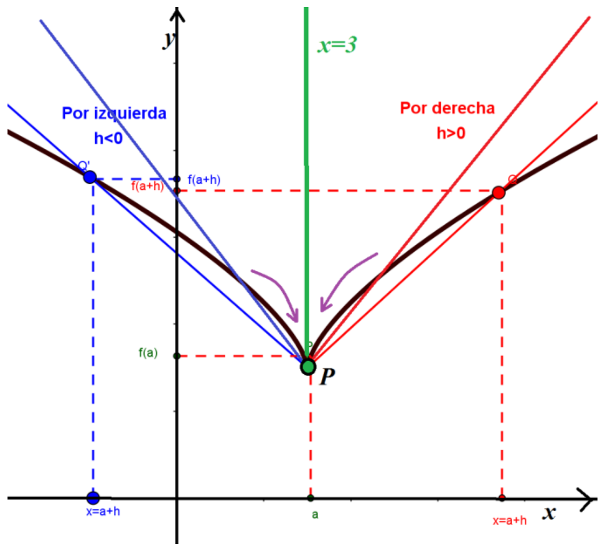

Ilustración 5

Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ o $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ en x=a, entonces existe semirrecta tangente vertical de ecuación x=a en P (a,f(a)).

Recta Normal

La recta normal a una curva en un punto es aquella recta que es **perpendicular** a la recta tangente a la curva en el punto considerado.

Si usa la forma punto pendiente de la ecuación de una recta,

$y - y_0 = m(x - x_0)$ donde m es la pendiente y P (x_0, y_0) el punto por donde pasa la recta

Considere para la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el punto $P\ (a, f\ (a))$ lo siguiente:

$$m = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$

Entonces resulta:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$

Como dijimos anteriormente, la recta normal a la gráfica en el punto P es perpendicular a la recta tangente a la gráfica en ese mismo punto.

Por la condición de perpendicularidad entre rectas resulta entonces que sus pendientes son recíprocas y de signo cambiado.

Por lo tanto, la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto $P\ (a, f(a))$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$

Bibliografía

STEWART, J. Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. Thomson Learning Publishers. 978-970-686-653-0- Edición 6ª - 2008

LARSON, R., HOSTETLER, R., EDWARDS, B. Cálculo I.970-10-5274-9 Edición 8 ª - 2006