Resolución

Análisis Matemático I

Recta Tangente

A continuación, se brinda la resolución de la secuencia recomendada para realizar el análisis y los cálculos de la situación planteada:

1. Leer el problema planteado en el Contexto.

El capitán de una nave espacial quiere llegar a una estación ubicada en el planeta Marte. La nave lleva una trayectoria dada por la función f(x)=50(2x-3) e^(-x)+3 .La posición de la estación espacial está dada por el punto (10 ; 18.06). ¿En qué momento el capitán debe apagar los motores para llegar a la estación?

2. Identificar las variables involucradas.

Variables: x [tiempo]

f(x): trayectoria de la nave espacial

P=(10 ; 18.06) coordenadas de la estación espacial ubicada en el planeta marte.

Observar que si el capitán apaga los motores la nave seguirá la trayectoria de la recta tangente de dicho punto.

3. Derivar la función trayectoria.

Dada la función posición:

$$f(x) = 50(2x - 3)e^{-x} + 3$$

Derivamos, aplicando reglas de derivación y aplicando la regla de la cadena. Obtenemos:

$$f'(x) = 50.2.e^{-x} + 50(2x - 3)e^{-x}(-1) = 50e^{-x}(5 - 2x)$$

4. Escribir la expresión de la recta tangente a la curva y=f(x) en un punto x=c.

La expresión para la recta tangente es:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Para nuestro caso particular, quedaría determinado por:

$$\mathrm{y} - (50(2c - 3)e^{-c} + 3) = 50e^{-c}(5 - 2c)(x - c)$$

5. Armar un sistema de ecuaciones que relacione la recta tangente con las coordenadas del centro espacial.

El punto $(10\,;\,18.06)$ de la estación espacial debe pertenecer a la recta tangente. Entonces reemplazamos los valores de x e y por las coordenadas del punto. Quedando la ecuación:

$$18.06 - (50(2c - 3)e^{-c} + 3) = 50e^{-c}(5 - 2c)(10 - c)$$

6. Despejar y obtener c.

Para resolverlo se necesitará un software:

Soluciones(18.06-(50*(2c-3)*e^(-c)+3)=50*e^(-c)*(5-2c)*(10-c), c)

Solution over the reals:

$c \approx 2.39999$

El valor es aproximado porque estamos trabajando con una función exponencial, cuyas imágenes son números irracionales.

7. Sustituir en la fórmula, las variables con la información dada en el problema.

Sustituimos el valor de c por 2.4 en la ecuación de la recta tangente.

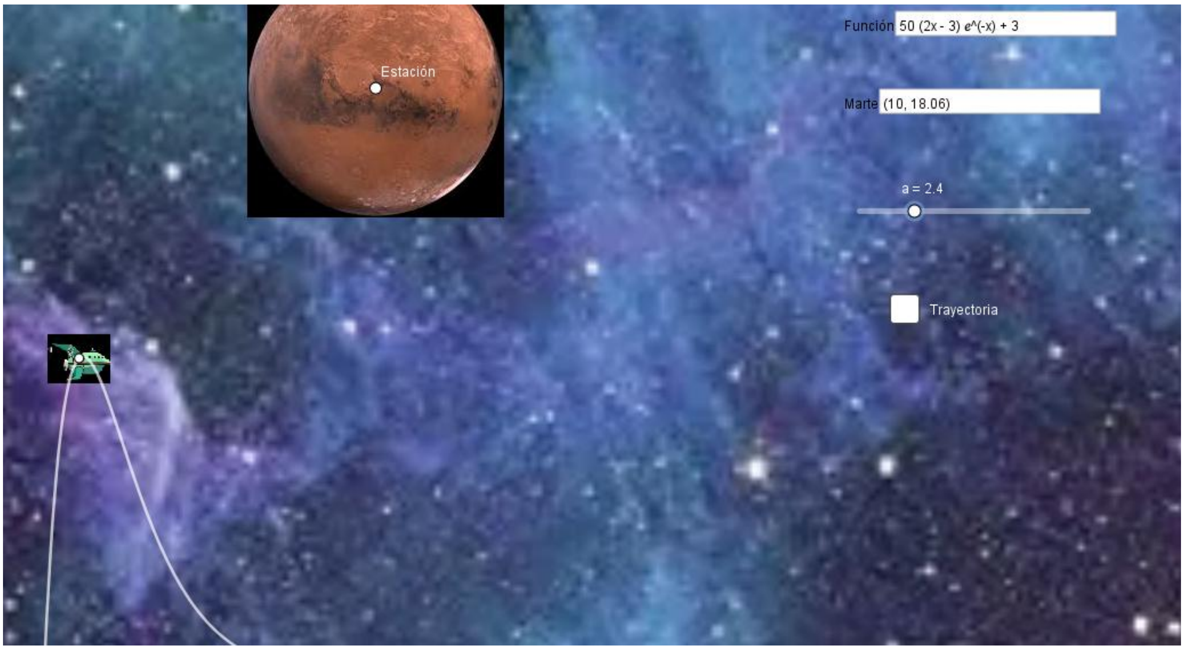
$$\mathrm{y} - (50(2\ 2.4 - 3)e^{-2.4} + 3) = 50e^{-2.4}(5 - 2\ 2.4)(x - 2.4)$$

Quedando como resultado:

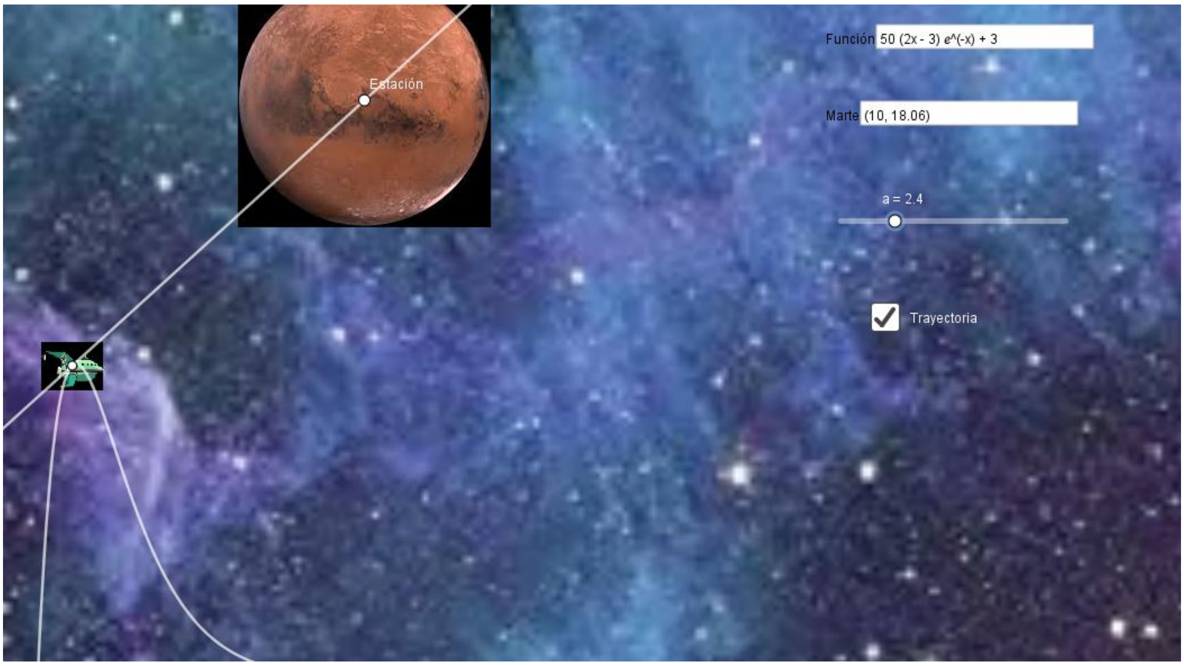
$$y = 0.91\,x + 8.99$$

8. Mediante el deslizador, simular la variación de la variable para obtener conclusiones (Situación planteada en forma dinámica).

Fajamos el deslizador en 2.4



9. Apretar el botón de trayectoria para verificar la solución hallada analíticamente.



Se pudo comprobar que si la nave apaga los motores en el instante 2.4, seguirá la trayectoria de la recta tangente y arribará a la estación espacial.