UTN SANTA FE

Complemento Teórico

Análisis Matemático I

Razón de cambio

DERIVADA

Definición

La derivada de una función f en un número a, se indica mediante f ‘(a) es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{si este límite existe}$$

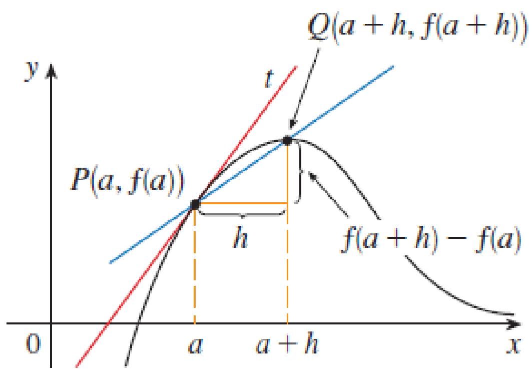

Ilustración 1

La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $P(a, f(a))$ es la que posee pendiente igual a $f\,'(a)$, la derivada de f en a.
Si usa la forma punto pendiente de la ecuación de una recta, puede escribir una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = f\,(x)$ en el punto $\boldsymbol{P}\ (a, f\ (a))$:

$$\boldsymbol{y - f\,(a) = f\,'(a)\,(x - a)}$$

RELACIONES DE CAMBIO

Suponga que *y* es una cantidad que depende de otra cantidad *x.* Entonces podemos llamarlas “y” variable dependiente *y a* “x” como variable independiente, siendo que entre ellas tenemos definida una función $y = f(x)$.

Si incrementamos la variable $\boldsymbol{x = a}$ una cantidad determinada $\boldsymbol{h}$ entonces $\boldsymbol{x = a + h}$, por lo tanto, el cambio en x (también conocido como **incremento** de la variable *x*) es

$$\Delta x = (a + h) - a = h$$

Este cambio en la variable x ocasionará un cambio en la variable y, por lo tanto, si queremos verlo reflejado en la función, el mismo corresponderá a un cambio de altura en la misma, denominado Δ*y*

$$\Delta y = f\ (a + h) - f\ (a)$$

Por lo tanto, se denomina **razón de cambio promedio** de y con respecto a x en el intervalo $[a, a + h]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante que contiene a los puntos P y Q de la Ilustración 1.

$$\boxed{\textbf{Razón de cambio promedio} = \boldsymbol{m_{\overline{PQ}}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Por analogía, con la velocidad (en un movimiento rectilíneo), consideremos la relación de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h})$ tienda a $\boldsymbol{a}$ y, por lo tanto, al hacer que **Δx** tienda a **0**.

El límite de estas relaciones de cambio promedio se llama **razón de cambio instantánea** de y con respecto a x en x = a. Como se mencionó anteriormente, ello se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva y = f (x) en P (a, f(a)).

$$\textbf{Razón de cambio instantánea } \boldsymbol{m_P} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Por lo tanto:

> La derivada $f\,'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f\,(x)$ con respecto a x cuando $x = a$.

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como la razón o el ritmo de cambio de una variable respecto a otra.

En particular, si $s = f\,(t)$ es la función posición de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta, entonces $f\,'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento *s* con respecto al tiempo *t*. En otras palabras, $f\,'(a)$ *es la velocidad de la partícula en el tiempo* $t = a$. La **rapidez** de la partícula en t=a es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|\,f\,'(a)\,|$.

DIFERENCIALES

Ya vio que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, advirtió que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor f(*a*) de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Para ello, si f es derivable en a, use la recta tangente en x=a, como una aproximación a la curva y=f(x) cuando x está cerca de a.

Una ecuación para la recta tangente es

$$\boldsymbol{y = f\,'(a).(x-a) + f(a)}$$

y la aproximación es

$$\boldsymbol{f(x) \approx f\,'(a).(x-a) + f(a)} \qquad \textbf{siendo } \boldsymbol{x = a + \Delta x}$$

Ésta última se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en $\boldsymbol{a}$.

Si $y = f(x)$ representa una función derivable en un intervalo abierto que contiene a x.

La diferencial de x (dx) se define como un número real distinto de cero. La diferencial de **y** es:

$$dy = f'(x).dx$$

El diferencial de y puede utilizarlo como aproximación del cambio en y

$$\Delta \boldsymbol{y} \approx \text{dy}$$

$$\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}\,\Delta \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{cuando}\ \Delta \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}\ \boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0}$$

Por lo tanto, el incremento y la diferencial de una función no son iguales, difieren en un infinitésimo ε. Debe considerar que se puede probar que el incremento de la variable independiente y el diferencial son iguales $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{dx}$

Entonces

$$\Delta \boldsymbol{y} \approx f'(x).dx$$

De allí puede deducir que los diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para realizar esto con respecto a y= f(x) debemos considerar entonces:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{dx}$$

Ahora bien, por notación de Leibniz, puede escribir:

$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{\Delta \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$ la razón **instantánea de y** con respecto **a x**

Considere, entonces, que siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio.

Cada una de las reglas de derivación pueden escribirse en forma diferencial. Úsela al aplicar la regla de la cadena en una función compuesta, para casos donde debemos calcular la razón de cambio instantánea para determinada variable dependiente respecto de otra variable como por ejemplo del tiempo.

Siempre que la función $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como la razón o el ritmo de cambio de una variable respecto a otra.

Bibliografía

STEWART, J. Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. Thomson learning publishers. 978-970-686-653-0- Edición 6ª - 2008

LARSON, R., HOSTETLER, R., EDWARDS, B. Cálculo I.970-10-5274-9 Edición 8 ª - 2006