

XVIII Congreso Argentino de Acústica 2023 (AdAA2023)

Algoritmo de Filtrado Adaptativo Basado en la Maximización de la Correntropía para el Control Activo Robusto de Ruido no Gaussiano

Adaptive filtering algorithm based on maximum correntropy for robust active control of non-Gaussian noise

AdAA2023-CR

Patricia N. Baldini^{†1}

[†] Grupo SITIC, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional .
11 de Abril 461, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina

¹ pnbaldi@frbb.utn.edu.ar

Resumen— Las técnicas de control activo utilizan como principio de funcionamiento la interferencia destructiva entre dos campos de sonido en regiones acotadas del espacio. Se superpone al ruido a cancelar la señal acústica generada mediante actuadores y controlada electrónicamente empleando algoritmos adaptativos dependientes del error residual medido. Los algoritmos de control tradicionales presuponen ruido Gaussiano y entornos lineales de modo que, si tales condiciones no se cumplen la convergencia puede verse comprometida llegando incluso a la inestabilidad frente a la presencia de *outliers*. En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación de una nueva metodología enmarcada en la teoría de la información, para atenuar ruido impulsivo en un sistema monocanal. Se propone y analiza el uso de un algoritmo de filtrado adaptativo robusto de baja complejidad que no requiere conocer o determinar información estadística de la señal a procesar. Los coeficientes del filtro se sintonizan recursivamente bajo el criterio de optimalidad de máxima correntropía basada en el kernel de Cauchy. Las propiedades de convergencia y la efectividad del control se verifican mediante simulación en diferentes condiciones de entornos ruidosos realistas incluyendo procesos no estacionarios y ambientes no lineales.

Palabras clave: control activo; ruido impulsivo ; kernel de Cauchy; máxima correntropía.

Abstract— Active control techniques use as operating principle destructive interference between two sound fields in limited space regions. An acoustic signal generated by actuators and electronically controlled using adaptive algorithms dependent on the measured residual error is superimposed on the noise to cancel . Traditional control algorithms presuppose Gaussian noise and linear environments so that, if such conditions are not met, convergence may be compromised, even leading to instability in the presence of outliers.

This work presents the results of the application of a new methodology framed in information theory, to attenuate impulsive noise in a single-channel system. The use of a robust, low-complexity adaptive filtering algorithm that does not require knowing or determining statistical information of the signal to be processed is proposed and analyzed. The filter coefficients are tuned recursively under the optimality criterion of maximum correntropy with convex regularization factor. The convergence properties and control effectiveness are verified by simulation in different conditions of realistic noisy environments including non-stationary processes and non-linear environments.

Keywords: word1; active control; impulsive noise; Cauchy kernel; maximum correntropy.

I. INTRODUCCIÓN

El ruido acústico provocado por la actividad humana representa un contaminante ambiental de alto impacto en la salud pública. Sus efectos nocivos afectan gravemente la calidad de vida de las personas tanto desde el punto de vista físico como psicológico de modo que resulta indispensable desarrollar metodologías eficientes para reducir la exposición a niveles sonoros excesivos, tanto en ambientes laborales como en diferentes espacios urbanos. Entre las técnicas empleadas con este fin se encuentran las enmarcadas en el denominado control activo de ruido (CAR) que han sido utilizadas con

excelentes resultados para longitudes de onda grandes dentro del espectro audible, rango donde el abordaje pasivo pierde eficiencia. Los avances en la tecnología de los procesadores digitales de señal sumados al desarrollo de eficientes algoritmos de procesamiento adaptativo permitieron la implementación de sistemas de CAR eficaces en distintas aplicaciones: conductos de ventilación, protectores auditivos, cabinas de vehículos, etc. Estas técnicas utilizan el principio de superposición para generar interferencia destructiva de las ondas de sonido no deseadas. Se crea una zona de silencio de dimensiones comparables con las longitudes de onda presentes [1]. Presenta una gran flexibilidad para adaptarse a condiciones no estacionarias tanto del entorno acústico como de la fuente de sonido.

De todos modos, la mayoría de los métodos de procesamiento considerados presuponen ruido de tipo Gaussiano. El caso de ruido de impacto o impulsivo requiere un tratamiento diferente. Este tipo de ruido se caracteriza por un número significativo de perturbaciones sonoras de gran intensidad y corta duración que ocurren al azar con una baja probabilidad. La presencia de esos valores atípicos compromete la convergencia de los algoritmos adaptativos tradicionales basados en momentos de segundo orden, pudiendo causar inestabilidad [2]-[4].

Recientemente han adquirido relevancia algoritmos de control sustentados en el aprendizaje basado en la Teoría de la Información, que no requieren conocimiento a priori de las características estadísticas del ruido a tratar. En particular, la maximización de la correntropía con función kernel Gaussiana (MCKG) es uno de los criterios de optimización más populares debido a su simplicidad y robustez, que ha sido aplicado con éxito en diversas aplicaciones [11],[12],[15].

En este trabajo se presenta un algoritmo de filtrado adaptativo basado en la correntropía con función kernel de Cauchy (MCKC), que resulta más estable en relación al ancho del kernel que el MCKG, además de presentar menor complejidad para su implementación en dispositivos electrónicos de bajo costo. Se verifica que MCKC presenta buenas características de convergencia y error de estado estacionario en situaciones de señales de ruido no Gaussiano, con alto grado de impulsividad, no estacionario, para sistemas de fase mínima y no mínima. Los resultados se

analizan comparativamente por medio de simulaciones y el empleo de índices de comportamiento usuales. El ruido impulsivo se modela mediante una distribución alfa-estable simétrica ($S_{\alpha S}$) y como mezcla probabilística de ruidos Gaussianos [2]-[4],[9],[12],[16].

I. ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE CAR

Un sistema de CAR de tipo feedforward de un solo canal (Fig. 1), comprende: un sensor de referencia para captar el ruido fuente o primario, $x(n)$; un parlante que actúa como transductor electroacústico para propagar la señal de cancelación, $y(n)$, que es generada por el filtro adaptativo con función transferencia $H(z)$, y un micrófono de error para detectar el nivel de ruido residual, $e(n)$, en la zona de silencio predeterminada [1].

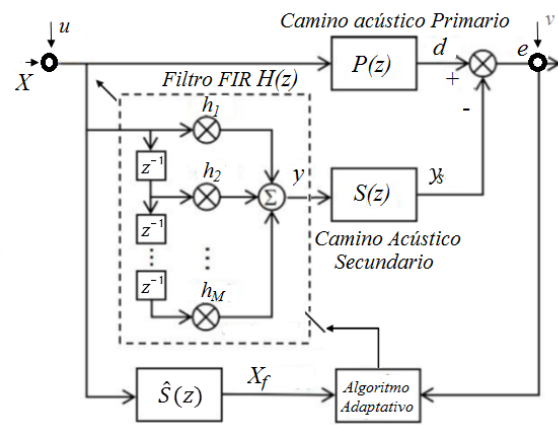


Fig. 1. Esquema del sistema de CAR monocanal de tipo feedforward.

El sistema adaptativo depende de cuatro elementos básicos: la estructura del filtro; los parámetros a ajustar que son los coeficientes que definen la función transferencia que modela el filtro; las señales que se procesan, y el algoritmo adaptativo que describe la actualización de los parámetros en cada instante de tiempo, k . Este algoritmo optimiza el control en base a una función de objetivo. El error cuadrático medio ha sido la opción más utilizada bajo la suposición implícita de que el error resultante es una variable aleatoria de tipo gaussiano, justificada por el teorema del límite central.

Para una estructura de filtro con respuesta al impulso finita (FIR) de longitud L , con vector de salida $\mathbf{y}_k = [y(k) \ y(k-1) \ \dots \ y(k-L+1)]^T$ donde $[\cdot]^T$ denota transposición, el error residual queda definido por

$$\begin{aligned}
e(k) &= d(k) - \mathbf{S}^T \mathbf{y}(k) + v(k) \\
y(k) &= \mathbf{H}^T(k) \mathbf{x}(k) \\
d(k) &= \mathbf{P}(k)^T \mathbf{x}(k)
\end{aligned} \tag{1}$$

$\hat{\mathbf{S}}$, \mathbf{S} y \mathbf{P} son los vectores de las respuestas al impulso estimada y real del camino acústico secundario, y real del camino acústico primario, modelados por las funciones transferencias, $S(z)$ y $P(z)$, respectivamente. Los procesos aleatorios $u(k)$ y $v(k)$ representan, respectivamente, ruido de medida de la señal de entrada y del error residual y $x_f(k) = \hat{\mathbf{S}}^T(k)(\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k))$ es la señal de entrada filtrada por la estimación (fuera de línea) de la respuesta impulsiva del camino secundario.

Cuando el ruido presente es de tipo impulsivo los métodos adaptativos convencionales resultan inapropiados debido a que la gran amplitud ocasional en las señales medidas produce una actualización repentina significativa de coeficientes del filtro que puede comprometer la convergencia e inestabilizar al sistema. Si bien se han propuesto distintas estrategias para superar estas limitaciones, el obstáculo común para implementarlas en la práctica es la complejidad computacional asociada y la respuesta insatisfactoria para sistemas de fase no mínima. [2]-[4].

A. *Filtado adaptativo basado en la correntropía*

En el marco del aprendizaje basado en la Teoría de la información [14] se han desarrollado algoritmos de optimización con nuevas funciones objetivo que emplean la entropía y la correntropía con kernel Gaussiano. Se comprueba que estos métodos resultan robustos y eficientes en el aprendizaje automático a partir del procesamiento de señales no gaussianas con distribuciones heavy-tailed [5]-[12], [15]-[17]. De todos modos, el caso de la entropía es poco atractivo por el alto costo computacional.

La correntropía se define mediante la expresión (2) y representa una medida no lineal de la similitud local entre dos variables aleatorias.

$$V(d, y) = E[\kappa(d - y)] = \int \kappa(d - y) dF_{dy}(d, y) \tag{2}$$

Las señales se comparan en una vecindad del espacio conjunto, dependiente del ancho del kernel.

donde κ denota un kernel de Mercer invariante al desplazamiento y F_{dy} es la función de distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias d , y ([14]). El kernel comúnmente adoptado es el Gaussiano con ancho σ (>0), ([5]-[12], [15],[18]) :

$$\kappa(d - y) = G_\sigma(d - y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(d - y)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3}$$

Como la función distribución conjunta es desconocida, el operador esperanza se reemplaza por el estimador muestral de Parzen [13] que tiene en cuenta la ventana temporal de N pares de datos disponibles (d_k, y_k) ($k=1,2,..,N$) de modo que

$$V(d, y) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N G_\sigma(d_k - y_k) \tag{4}$$

Desde el punto de vista de CAR, el vector de coeficientes del filtro FIR adaptativo, $\mathbf{H}(k)$, se actualiza maximizando la correntropía entre las señales de salida de los caminos acústicos primario, $d(k)$, y secundario, $y_s(k) = \mathbf{S}^T \mathbf{y}(k)$ mediante el método de máximo descenso del gradiente. Si $e_k = e(k) = d(k) - \mathbf{S}^T \mathbf{y}(k) + v(k)$ es el error de predicción en la iteración k -ésima, $\mathbf{X}(k)$ el vector de entradas, $x_f(k) = \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{X}(k) + \mathbf{v}(k))$ y $\mathbf{X}_f = [x_f(k) \dots x_f(k-L_s)]^T$ el vector de entradas filtradas por $\hat{\mathbf{S}}$ la regla de actualización es:

$$\mathbf{H}(k + 1) = \mathbf{H}(k) + \mu \exp\left(-\frac{e_k^2}{2\sigma^2}\right) e_k \mathbf{X}_f(k) \tag{5}$$

De todos modos, al considerarse solo las medidas actuales del error y la entrada, el desajuste estacionario resulta significativo. Por otro lado, grandes fluctuaciones en la entrada pueden afectar negativamente la velocidad de convergencia. Una alternativa posible es aproximar el vector gradiente de la correntropía usando el promedio de las últimas N muestras, a expensas de aumentar tanto el costo de almacenamiento [13].

Otro inconveniente del método es la selección adecuada del ancho del kernel, σ^2 . Un valor grande proporciona buena velocidad de convergencia con un desajuste estacionario importante. Pero si el valor es pequeño, si bien se corrige el valor estacionario, se pierde rapidez de convergencia. Para superar esta dificultad se propusieron algunas estrategias de variación recursiva del ancho del kernel como en [11], [12],

[15],[16], aunque no siempre resultan robustas para ruido fuertemente impulsivo en la entrada o en ambientes acústicos caracterizados por modelos de fase no mínima. Por otra parte pueden presentar importante desajuste en estado estacionario o incrementar el costo de cómputo. Por ejemplo, la combinación convexa de dos filtros MCKG con diferentes anchos de kernel propuesto en [17] y [18] duplica el número de operaciones.

A. Algoritmo de filtrado adaptativo propuesto

En este trabajo se propone el uso de un filtro adaptativo que pretende mejorar la dependencia de la estabilidad con el ancho del kernel adoptado y el comportamiento estacionario en ambientes de ruido desfavorables, sin incrementar los requerimientos de almacenamiento y con menor costo de cómputo que el MCKG, de modo de poder ser implementado con dispositivos electrónicos de procesamiento de bajo costo.

El algoritmo MCKC presentado, basado en la maximización recursiva de la correntopía, reemplaza el kernel clásico por el de Cauchy [19] según (6), contempla filtrado-x y actualización adaptativa del ancho de un kernel. El conjunto de ecuaciones que lo describe es el siguiente:

$$\kappa(d-y) = C_\delta(d-y) = \frac{1}{1+\frac{(d-y)^2}{\delta}} \quad (6)$$

$$V(d,y) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{1+\frac{(d-y_k)^2}{\delta}} \quad (7)$$

$$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) + \eta \sum_{n=1}^k \frac{1}{\left(1+\frac{e_n^2}{\delta}\right)^2} e_n \mathbf{X}_f(n) \quad (8)$$

Para simplificar (8), el gradiente de MCKC se reemplaza por su estimación mediante el promedio móvil ponderado, $\mathbf{P}(\cdot)$, con un factor de suavizado λ ($0 << \lambda < 1$) según (9). Esta operación equivale a un filtrado pasabajos que reduce las oscilaciones en rangos cortos de tiempo, estabilizando el comportamiento de \mathbf{P} [13].

$$\mathbf{P}(k+1) = \lambda \mathbf{P}(k) + \frac{(1-\lambda)}{\left(1+\frac{e_{k+1}^2}{\delta_{k+1}}\right)^2} e_{k+1} \mathbf{X}_{f(k+1)} \quad (9)$$

En lo que se refiere al ancho del kernel, aunque su efecto no es crítico y, en general, es menor que para el caso Gaussiano, se busca que se reduzca

recursivamente cuando el vector de coeficientes del filtro se acerca su valor óptimo para tener simultáneamente una buena velocidad de convergencia y el menor desajuste estacionario. La figura 2 muestra la variación de la reducción con las iteraciones del ruido promedio para distintos valores fijos de este parámetro.

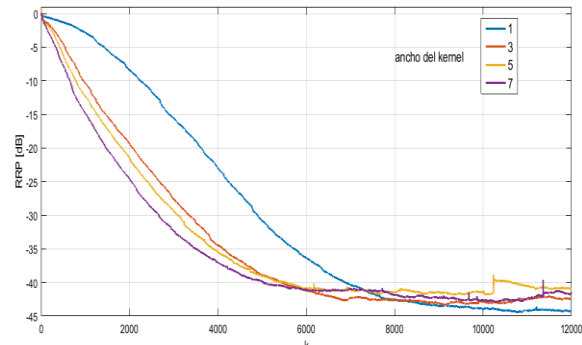


Fig. 2. Reducción de Ruido promedio para distintos anchos del kernel

Se adopta para su ajuste el promedio móvil ponderado de la magnitud del error residual:

$$\delta_{k+1} = \mu \delta_k + (1-\mu) |e_k| \quad (10)$$

donde $0 < \eta < 1$ es un factor de olvido. Finalmente, la expresión de actualización del vector de coeficientes queda expresado por

$$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) + \eta \mathbf{P}(k) \quad (11)$$

con $\mu > 0$ como paso de actualización. El método propuesto aumenta la robustez y simplifica el cómputo para su implementación en dispositivos electrónicos de bajo costo. En la Tabla I se sintetiza el procedimiento, donde se incluye la normalización del vector \mathbf{X}_f .

TABLA I
ALGORITMO MCKC

Input: $\eta, \lambda, \mu, \bar{S}$
Initialize: $\delta_0, \mathbf{P}(0), \mathbf{H}(0)$
while { $x(k), e(k)=e_k$ } available
$\mathbf{x}_f(k) = \bar{S}^{-T} \mathbf{X}(k)$
$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) + \eta \mathbf{P}(k)$
$\delta_{k+1} = \mu \delta_k + (1-\mu) e_k $
$\mathbf{P}(k+1) = \lambda \mathbf{P}(k) + \frac{(1-\lambda)}{\left(1+\frac{e_{k+1}^2}{\delta_{k+1}}\right)^2} e_{k+1} \frac{\mathbf{X}_{fk+1}}{\mathbf{X}_{fk+1} \mathbf{X}_{fk+1}^T + \varepsilon}$
end while
Output: $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}(k+1)$

II. EXPERIMENTOS DE SIMULACIÓN

Los modelos de ruido impulsivo utilizado en las simulaciones se corresponden con los reportados en la bibliografía. Por un lado, se considera al ruido como un proceso aleatorio con una distribución alfa-estable simétrica ($S_{\alpha}S$) con función característica $\varphi(x) = e^{-\gamma|x|^{\alpha}}$, $\gamma=1$, donde el grado de impulsividad será mayor con menores valores del exponente característico α . Por otro lado, también se contemple el modelo de mezcla de ruidos Gaussianos con media cero y varianzas $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$: $x = \chi N(0, \sigma_1^2) + (1-\chi) N(0, \sigma_2^2)$ y χ es una variable aleatoria discreta de Bernoulli. Los resultados de aplicar el algoritmo propuesto fueron analizados mediante simulación utilizando la plataforma Matlab. Se consideraron distintas experiencias variando el grado de impulsividad del ruido primario incluyendo casos de su variación en el tiempo. El índice de desempeño usado para medir la velocidad de convergencia fue la reducción de ruido promedio, RRP, definida por las ecuaciones (12) promediando una serie de 20 conjuntos independientes de datos de entrenamiento generados aleatoriamente, siguiendo la bibliografía [2], [3], [9], [12].

$$RRP(k) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_e(k)}{A_d(k)} \right) \quad (12)$$

$$\text{donde } \begin{aligned} A_e(k) &= 0.99A_e(k-1) + (1-0.99)|e_k| \\ A_d(k) &= 0.99A_d(k-1) + (1-0.99)|d_k| \end{aligned}$$

La estimación del camino secundario se realiza fuera de línea, previa a la aplicación del control y la longitud del filtro FIR se fija en $L=16$. En todo caso se realiza la comparación mediante la RRP, del algoritmo propuesto con el de MCKG con ancho de kernel variable según En AMCC el ancho del kernel varía según $\sigma^2 = \sigma_0^2 + e_k^2$, propuesto en [16]

A. Primera experiencia de simulación

En esta experiencia se considera tanto un ruido $S_{\alpha}S$ altamente impulsivo, con $\alpha = 1.2$ y como la mezcla de ruidos Gaussianos con $\sigma_1^2 = 300$ y $\sigma_2^2 = 0.3$, $p=0.05$.

En ambos casos, se contemplan funciones transferencia (FT) de los caminos acústicos primario y secundario de fase mínima (FM) y de fase no mínima (FNM). Las Figuras muestran la comparación de la evolución de la RRP [dB] con las iteraciones, para el método propuesto y el de MCKG con kernel variable.

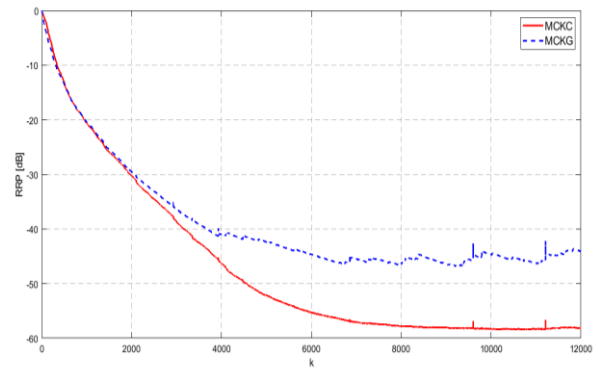


Fig. 3. RRP para ruido $S_{\alpha}S$ con $\alpha = 1.2$, caso FM

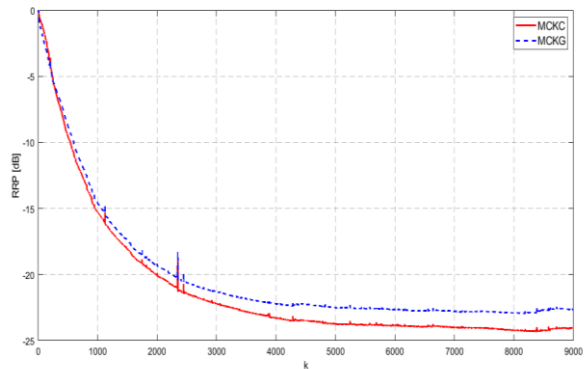


Fig. 4. RRP para ruido $S_{\alpha}S$ con $\alpha = 1.2$, caso FNM

La reducción de ruido en el caso de FT de FM es aproximadamente de 60dB, 15dB mejor que con el método de referencia (Fig. 3). Para el caso de FNM (Fig. 4), si bien se reduce a 24dB, es un valor altamente satisfactorio teniendo en cuenta la dificultad de este tipo de sistemas, y superior en un 10% a la obtenida con MCKG.

Para el modelo de mezcla de ruidos Gaussianos las atenuaciones comparativas mínimamente mejores, del orden de 30db contra 27dB para FM (Fig. 5) y de 22db contra 19dB para FNM (Fig.6) con una velocidad de convergencia levemente menor.

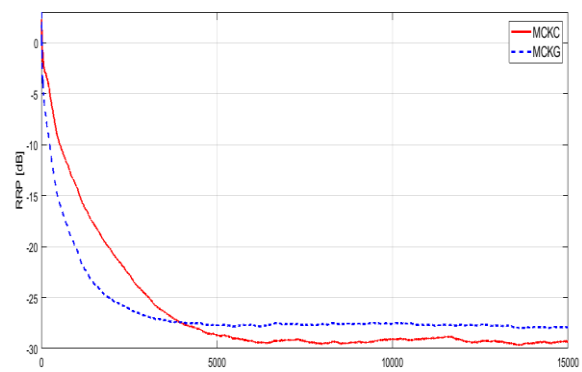


Fig. 5. RRP para mezcla de ruidos Gaussianos, caso de FM

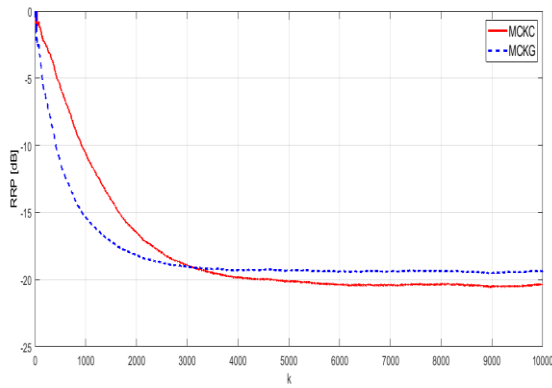
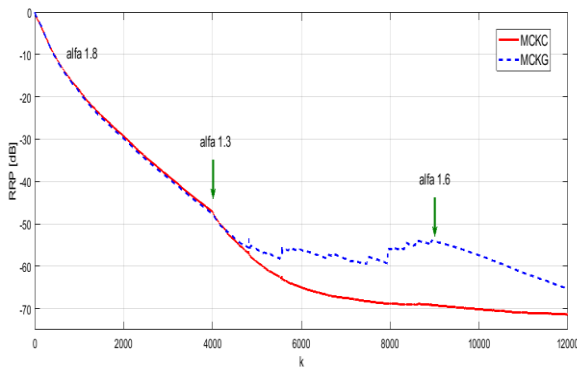
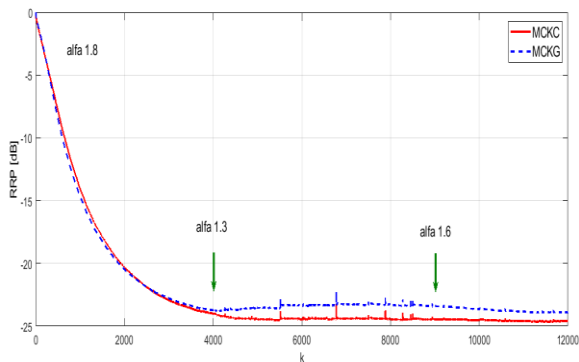


Fig. 6. RRP para mezcla de ruidos Gaussianos, caso de FNM

B. Segunda experiencia de simulación

En esta experiencia se incluye ruido impulsivo con características probabilísticas variables en el tiempo [3]. Se considera un cambio abrupto del grado de impulsividad luego de un cierto tiempo, según se indica en la expresión (13), para modelar una modificación de la probabilidad de ocurrencia de *outliers* (Fig. 7 con FT FM y Fig. 8 con FNM)

$$\begin{cases} \alpha = 1.8 & , 0 \leq k < 4000 \\ \alpha = 1.3 & , 4000 \leq k < 9000 \\ \alpha = 1.6 & , 9000 \leq k \leq 15000 \end{cases} \quad (13)$$

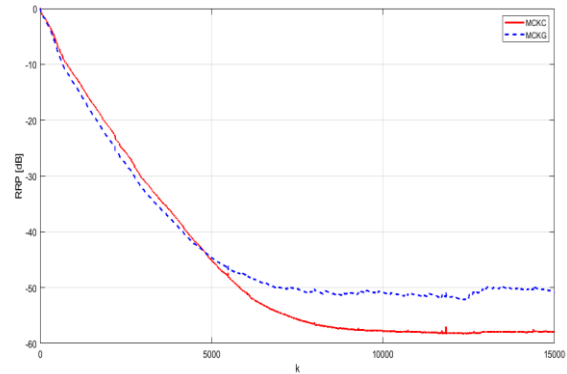
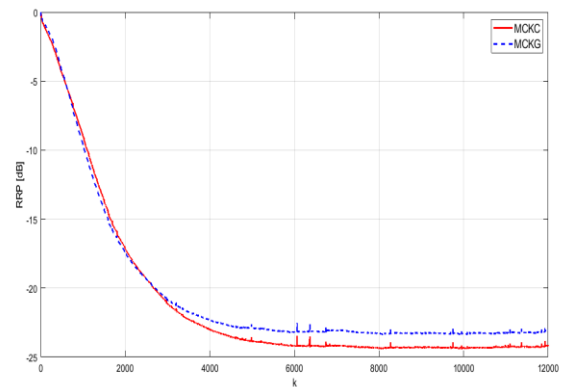
Fig. 7. RRP para ruido $S_{\alpha}S$ con impulsividad variable, caso FMFig. 8. RRP para ruido $S_{\alpha}S$ con impulsividad variable, caso FNM

También se analiza una variación suave de tipo sinusoidal según la expresión de (14) (Fig. 9 con

FT FM y Fig. 10 con FT FNM).

$$\alpha(k) = 1.3 + 0.3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{1.5 \times 10^4} k\right) \quad (14)$$

Se verifica en todas las simulaciones que el algoritmo propuesta presenta una performance igual o superior a la del método de referencia.

Fig. 9. RRP, ruido $S_{\alpha}S$ con impulsividad sinusoidal, caso FMFig. 9. RRP, ruido $S_{\alpha}S$ con impulsividad sinusoidal, caso FNM

III. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una modificación del algoritmo de filtrado adaptativo clásico basado en la correntropía del error residual y se analiza su performance para la atenuación de ruido impulsivo unidimensional. Se modifica la función kernel y se propone una aproximación del gradiente de la correntropía, empleando un promedio móvil ponderado no lineal, que mejora la robustez frente a ruido altamente impulsivo en particular en ambientes acústicos modelados con funciones transferencia de fase no mínima y situaciones no estacionarias. La metodología introducida presenta buena velocidad de convergencia con un bajo desajuste en estado estacionario gracias a la modificación recursiva del ancho del kernel en base a la magnitud del error. Los resultados de las simulaciones muestran

una atenuación del ruido de salida similar o menor a la lograda con MCKG con ancho de kernel variable, pero reduce el costo computacional de modo de facilitar su implementación con dispositivos de bajo costo. En una siguiente etapa se buscará corroborar los resultados en un prototipo de laboratorio.

AGRADECIMIENTOS

Se expresa el agradecimiento a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de las Universidad Tecnológica Nacional por la financiación del proyecto de investigación en el marco del cual se desarrolló este trabajo.

REFERENCIAS

1. S.J. Elliott, *Signal Processing for Active Control*. Academic Press, San Diego, USA, 2001.
2. M.T. Akhtar. "An adaptive algorithm, based on modified tanh non-linearity and fractional processing, for impulsive active noise control systems". *Jou. Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 37, issue 3, pg. 1–14. 2017.
3. M. Bergamasco, F. Della Rossa y L. Piroddi. "Active noise control with on-line estimation of non-Gaussian noise characteristics". *Jou. Sound and Vibration*, vol. 331, pg. 27-40. 2012.
4. T. Liang, Y. Li, Y.V. Zakharov, W. Xue y J. Qi. "Constrained least lncosh adaptive filtering algorithm". *Signal Processing*, vol. 183, 108044. June 2021.
5. H. Qu, Y. Shi y J. Zhao. "A Smoothed Algorithm with Convergence Analysis under Generalized Maximum Correntropy Criteria in Impulsive Interference". *Entropy*, vol. 21, 2019.
6. N.C. Kurian, K. Patel y N.V., George. "Robust active noise control: An information theoretic learning approach". *Applied Acoustics*. vol. 117, pg. 180-184. 2017.
7. P. Song, H. Zhao y Y. Zhu. "Filtered-s normalized maximum mixture correntropy criterion algorithm for nonlinear active noise control". en *Proceedings of Twelfth International Conference on Signal Processing Systems*; vol 11719, 11, 2021.
8. G. Qian, X. Ning, y S. Wang. "Recursive Constrained Maximum Correntropy Criterion Algorithm for Adaptive Filtering". *IEEE Tran. Circuits and Systems-II: Express Briefs*, vol. 67, no. 10, pg. 2229-2233 2020.
9. S. Radhika, A. Chandrasekar. "Convergence analysis of Maximum Correntropy Criteria based adaptive filtering algorithm based on white input". En: *11th Int. Conference on Advanced Computing (ICoAC) 2019*, pp. 158-162.
10. Y. Zhu, H. Zhao., X. Zeng, y B. Chen. "Robust Generalized Maximum Correntropy Criterion Algorithms for Active Noise Control". *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 28, pg. 1282-1292. 2020.
11. W. Wang, J. Zhao, H. Qu y B. Chen. "A correntropy inspired variable step-size sign algorithm against impulsive noises". *Signal Processing*, vol. 141, pg. 168-175. 2017.
12. L. Lu y H. Zhao. "Active impulsive noise control using maximum correntropy with adaptive kernel size". *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 87, Part A, pg.180-191. 2017.
13. H. Qu, Y. Shi, Y. y J. Zhao. "A Smoothed Algorithm with Convergence Analysis under Generalized Maximum Correntropy Criteria in Impulsive Interference". *Entropy* 21, 2019
14. J.C. Principe. *Information Theoretic Learning: Renyi's Entropy and Kernel Perspectives*. Springer, New York, 2010.
15. F. Huang, J. Zhang, y S. Zhang. "Adaptive Filtering Under a Variable Kernel Width Maximum Correntropy Criterion". *IEEE Tran. Circuits and Systems—II: Express Briefs*, vol. 64, no.10, pg. 1247-1251. 2017.
16. Y. Shi, H. Zhao y Y. Zakharov. "An Improved Variable Kernel Width for Maximum Correntropy Criterion Algorithm". *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 67, no. 7, pg. 1339-1343. 2020
17. A.I. Fontes, L.L. Linhares, J.P. Guimarães y L.F. Silveira. "An adaptive kernel width convex combination method for maximum correntropy criterion". *Journal of the Brazilian Computer Society*, pg. 27-7 2021.
18. J. Zhao, H. Zhang y G. Wang. "Fixed-point generalized maximum correntropy: Convergence analysis and convex combination algorithms". *Signal Processing*, vol. 154, pg. 64–73, 2019.
19. J. Wang, D. Lyu, Z. He, H. Zhou y D. Wang. "Cauchy kernel-based maximum correntropy Kalman filter", *International Journal of Systems Science*. 2020.