EMCI 2021

XXII Encuentro Nacional
XIV Encuentro Internacional

Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

19, 20 y 21 de mayo de 2021
Montevideo, Uruguay

LIBRO DE ACTAS

Versión actualizada, diciembre 2021

COMPILADORES
José Job Flores Godoy
María Magdalena Pagano Nachtweyh

EMCI
Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

UCU
Universidad Católica del Uruguay

EMCI 2021

XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

Libro de Actas

Versión actualizada, diciembre 2021

Universidad Católica del Uruguay
19, 20 y 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay

Compiladores:
José-Job Flores-Godoy
María Magdalena Pagano Nachtweyh

Libro de actas: XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021 / José-Job Flores-Godoy, María Magdalena Pagano Nachtweyh, compiladores.
Montevideo: Universidad Católica del Uruguay, 2021
iv, 616 p.

e-ISBN 978-9915-9435-0-3
DOI 10.22235/emci2021.2

1. Memorias congreso 2. Educación matemática 3. Carrereas de ingeniería
I. Flores-Godoy, José-Job, comp. II. Pagano Nachtweyh, María Magdalena, comp. III. Título

CDD 372.7

Diseño de Tapa:
Secretaría de Contenidos y Prensa
Dirección de Comunicaciones Institucionales (UCU)

Imagen:
Detalle vitral Aula Magna (UCU)

Autoridades

P. Dr. Julio Fernández Techera, S. I.
Rector

Dra. Cecilia Rossel
Vicerrectora de Investigación e Innovación

Dr. Marcos Sarasola
Vicerrector de Programas Académicos

Dra. Sonia Cozzano
Decana de la Facultad de Ingeniería y Tecnologías

Dr. Pablo Geille
Director del Departamento de Ciencias Exactas y Naturales

Comisiones

Comisión Permanente
Marys M. Arlettaz
Nori Cheeín de Auat
María de las Mercedes Suárez
Irma B. Ruffiner
Ana María Narváez
María Beatriz Bouciguez
Mónica Scardigli
Sandra Baccelli
Silvia Seluy
Marta Graciela Caligaris
María Mercedes Simonetti de Velázquez
Martha Rosso

Comisión Organizadora Local
Richard Eduardo Delgado Gutiérrez
María Magdalena Pagano Nachtweyh
José-Job Flores-Godoy

Miembros Honorarios
Veremundo Julio Fernández Arguiñano
Carlos Enrique Wüst
Roberto H. Fanjul
Teresa Haydée Codagnone
María Inés Lecich

Comisión Evaluadora
Eduardo Lacués
Patricia Cerizola
Gabriel Núñez
Alejandra Pollio
Gabriela Otheguy
Clara Messano
Richard Delgado
María Magdalena Pagano Nachtweyh
José-Job Flores-Godoy
Ana María Narváez
Beatriz Bouciguez
Irma Ruffiner
María Mercedes Simonetti
María de las Mercedes Suárez
Marta Caligaris
Martha Rosso
Marys Arlettaz
Mónica Scardigli
Nori Cheein
Sandra Baccelli
Silvia Seluy

Auspiciantes

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), Argentina
Universidad Tecnológica, Uruguay
Universidad ORT, Uruguay
Universidad de Montevideo, Uruguay
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Tucumán, Argentina
Universidad FASTA, Argentina
Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (SEMUR), Uruguay
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Facultad de Ingeniería Olavarría, Argentina
Universidad Nacional de Santiago del Estero, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná, Argentina
Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI), Colombia
Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Ingeniería Oberá, Argentina
Universidad Nacional de Mar del Plata, Facultad de Ingeniería, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional San Nicolás, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Villa María, Argentina
Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería, Argentina
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería, Argentina
Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ingeniería, Argentina

Tabla de contenido

EMCI 2021

Eje 1: Articulación e Ingreso a las Carreras de Ingeniería

Percepciones de los estudiantes sobre Materiales Audiovisuales para el aprendizaje de Matemática en el ingreso a las Carreras de Ingeniería

José Luis Galoppo[1], Guillermo Zaballo[2], Silvia Arias[3], Laura Cecilia Diaz Dávila[3]

[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba
Av. Vélez Sarsfield 1611, CP X5016GCA, Córdoba, Argentina
jose.galoppo@unc.edu.ar

[2] Facultad de Artes, Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria, Córdoba
guillermo.zaballo@unc.edu.ar

[3]Departamento de Computación. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba
Av. Vélez Sarsfield 1611, CP X5016GCA, Córdoba, Argentina
silvia.arias@unc.edu.ar; laura.diaz@unc.edu.ar

Resumen. El presente trabajo muestra las percepciones de los estudiantes frente a la incorporación de materiales audiovisuales en aulas virtuales de Matemática de la Modalidad No Presencial del Ciclo de Iniciación a los Estudios Universitarios (CINEU) de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNC. Se fundamenta la motivación para su inclusión, y se relatan las experiencias de los docentes involucrados. Se presentan los resultados de los instrumentos desarrollados para recoger la opinión de los estudiantes mediante encuestas; los cuales constituyen disparadores de las mejoras a incorporar. Por último, se resalta la inserción de esta experiencia en el proyecto de investigación del que forma parte, cuyo horizonte para el bienio 2020-2021 es la incorporación de cursos abiertos masivos on line en la plataforma edX.

Palabras Clave: Materiales audiovisuales, Enseñanza de Matemática, Cursos abiertos, Entornos virtuales.

1 Introducción

La Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNC, ofrece a los ingresantes la posibilidad de inscribirse al Ciclo de Introducción a los Estudios Universitarios (CINEU) en dos modalidades de cursado: Presencial y No Presencial. La cantidad de asignaturas que deben cursar es tres o cuatro, según la carrera elegida, a saber:

- Ambientación Universitaria
- Matemática
- Física, Química o Biología, según la carrera por la que optaron

La modalidad No Presencial se desarrolla en el período octubre - diciembre del año anterior al ingreso y la modalidad Presencial en los meses de enero y febrero del año de ingreso.

En la modalidad No Presencial, ámbito de este trabajo de investigación, los estudiantes cuentan con la posibilidad de acceder a aulas virtuales implementadas sobre la plataforma Moodle en el Campus Virtual de la Facultad: https://virtual.fcefyn.unc.edu.ar/login/index.php.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

A través de la participación en estas aulas, se realiza el acompañamiento por parte de docentes tutores, durante el periodo mencionado para facilitarles que atraviesen con éxito las distintas instancias de evaluación, parciales y presenciales, con el objetivo de acreditar el CINEU para continuar durante el primer semestre, conforme lo contemplan los planes de estudio, con el normal cursado de las materias correlativas del primer año de la carrera que hayan elegido [1].

En el aula virtual de Matemática los estudiantes se encuentran divididos en grupos de unos 100 alumnos-aproximadamente, acompañados por un docente tutor que interactúa con ellos, no solamente respondiendo consultas de la asignatura sino de aspectos administrativos como de temas relativos a la carrera en la que se inscribieron.

Los estudiantes disponen de recursos y actividades para lograr desarrollar las competencias establecidas por CONFEDI, que debe poseer el ingresante a las carreras de Ingeniería [2]. Éstas incluyen materiales escritos, tales como: programa de la asignatura, notas de clase para estudiar los temas de cada unidad elaborado por los docentes, etc.; actividades propuestas: cuestionarios de autoevaluación, suba de archivos, etc; materiales multimedia: videos preparados especialmente sobre algunos temas del programa y; medios de comunicación con los docentes tutores: foros, chats, mensajería, videoconferencias, etc. [3].

En particular, se describe en este artículo, el proceso de elaboración de los materiales audiovisuales, su incorporación al aula virtual y la valoración que hacen los estudiantes.

2 Justificación de la inclusión de materiales multimedia

2.1 El video como recurso educativo

En la actualidad es posible apreciar la forma en que la tecnología ha cambiado la manera en que las personas realizan muchas de las labores cotidianas, optimizando tiempo y recursos para hacerlas cada vez más sencillas y eficientes.

Un ejemplo claro de ello es cómo la interacción entre las personas, así como la búsqueda y el manejo de información, se han beneficiado por el impulso de las herramientas digitales basadas en las Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC), tales como: blogs, redes sociales, sitios de Internet donde se almacenan videos, etc., favorecidos por el desarrollo y la accesibilidad a dispositivos móviles como smartphones, notebooks y tablets.

El ámbito educativo no es ajeno a estos avances tecnológicos; sumado a que las actuales generaciones de estudiantes se encuentran cada vez más familiarizadas con su uso, los docentes afrontan un nuevo reto, el de tomar ese potencial a su favor. En tal sentido, el uso de video cobra singular relevancia. [4] [5]

Dubois y Cortés (2005) argumentan que la tecnología no puede entenderse si se analiza en forma aislada de los procesos de interacción social, y afirman que los dispositivos electrónicos contemporáneos, así como las nuevas TIC, no deben ser percibidos sólo como meros soportes técnicos de las actividades cotidianas, sino que representan nuevos lenguajes para el entendimiento humano, útiles para compartir y generar experiencias de aprendizaje, acarreando nuevos procesos y problemas educativos que merecen ser estudiados [6].

En las últimas décadas se han ido incorporando a la sociedad nuevos y mejores recursos tecnológicos que ponen de manifiesto la manera de llevar a cabo los procesos y modelos de enseñanza y aprendizaje.

Con la aparición de las computadoras portátiles e Internet, se hizo posible el intercambio y el fácil acceso a fuentes de información, trayendo consigo importantes cambios en el ámbito educativo.

Por ello la educación debe replantear sus objetivos, sus metas, sus pedagogías y sus didácticas si quiere cumplir con su misión en el siglo XXI [7].

Es importante remarcar, que el vídeo como herramienta educativa, en rendimiento, es idéntico a las situaciones usuales de aula [8].

Su utilización se puede abordar desde distintos ángulos, y existen diferentes técnicas o estilos de producción para ser aplicado en el ámbito de la enseñanza.

Empero, parece pertinente enfatizar que la eficiencia de un vídeo está vinculada especialmente con la manera en la que se encamine la utilización en el contexto de la clase y la relación entre sus contenidos, el programa de la asignatura y quienes lo imparten.

2.2 Ventajas de la utilización de videos en el aula virtual de Matemática

La incorporación de los recursos multimediales, como los videos, al desarrollo de aulas virtuales, fue analizada por nuestro equipo de investigación en proyectos anteriores [9] destacándose algunas ventajas por sobre los materiales escritos que se pueden resumir en las siguientes:

- *Ofrece variedad*: intercalar un fragmento de un vídeo entre los materiales y/o actividades propuestas en el aula virtual, puede romper con la monotonía del uso exclusivo de un libro de curso. El hecho de ser un soporte de uso esporádico hace que los estudiantes presten más atención y estén más motivados en visualizarlo.
- *Facilita la comprensión*: Ofrece la posibilidad de que el estudiante detenga el mismo, lo retroceda para volver a escuchar lo que no entendió bien y/o lo reproduzca nuevamente para estar seguro de lo que aprendió.
- *Favorece las simulaciones:* en los videos se pueden incluir imágenes en movimiento, lo que facilita las simulaciones, que en otros formatos sería muy difícil de lograr.
- *Predispone favorablemente al alumnado:* ya que es un soporte muy cercano para los estudiantes: en general, los más jóvenes están hoy en día menos acostumbrados a leer que a recibir información a través de imágenes (cine, vídeo, Internet, televisión). Tienen una predisposición muy positiva hacia todo lo visual.
- *Sustenta el aprendizaje asíncrono*: posibilita que el estudiante acceda a los materiales en cualquier tiempo y lugar que lo desee, que recurra a ellos en caso de que le surjan dudas mientras está estudiando y que los repita cuantas veces sea necesario. Independientemente de la masividad, puede acceder en cualquier momento al material embebido en el aula virtual, posibilitando así una amplitud de horario que en el sistema puramente presencial es restringido a un tiempo y espacio específicos. A su vez, el docente puede alojar el material para acceso y responder atemporalmente.

2.3 Proceso de creación de los videos

En el proceso de creación de los videos para su incorporación al aula virtual de Matemática del CINEU, los docentes tutores que participaron cumplieron una serie de pasos, los cuales enumeramos a continuación:

- *Detección de los temas más dificultosos de comprender*: a través del análisis de los ejercicios mal resueltos en los parciales, se elaboró un diagrama de Pareto [10] donde se pusieron en evidencia las deficiencias más significativas que presentaban los estudiantes para la resolución de ejercicios en algunos de los temas.
- *Elaboración de los guiones*: previo a la filmación de los videos, se elaboraron los guiones con las ideas más importantes a resaltar en ellos, ya sea mediante figuras o animaciones; o mediante la inclusión de fórmulas escritas sobre el fondo de pantalla.
- *Elección del tipo de formato del video*: En todos los videos hay un docente tutor que presenta los temas y a continuación, para el desarrollo, se va combinando el relato con variaciones en los planos elección de los planos de imágenes utilizados se seleccionaron desde el primer momento de la realización del guion, teniendo en cuenta el formato adónde iba a ser reproducido, como así también con la combinación de otros recursos de imágenes y de animación. Por ejemplo, se incluyeron en las producciones recursos tales como: letras resaltadas sobre un fondo, animaciones, las fórmulas, etc.
- *Determinación de su duración*: dispusimos que los videos debían ser cortos, entre 5 y 7 minutos sobre un tema específico y acotado. Basado en definiciones de experiencias previas aplicadas en las que indagábamos acerca del tiempo adecuado del producto final, más allá del tiempo de producción
- *Postproducción*: en la etapa final se le agregó música, gráficos, etc.

La experiencia de los docentes que participaron en la elaboración de los videos fue muy positiva. Mejoraron la forma de presentar los temas, hicimos varias tomas cuando ello fue necesario, surgieron nuevas formas de explicar algunos temas y se adaptó su lenguaje a uno más próximo al de los alumnos a los cuales debía llegar el material, más apropiado.

2.4 Inclusión de los videos en las aulas virtuales

Antes de utilizar el vídeo como recurso educativo en un aula virtual, es necesarios planificar muy bien su uso, ya que la incorporación de la tecnología en la educación no se trata de una moda, sino de un medio para mejorar el proceso de aprendizaje, por lo tanto, se debe escoger cuidadosamente dónde, cómo y por qué utilizarlo. Por ejemplo, revisar si el contenido que aparece en el vídeo se adapta a los objetivos propuestos.

Una vez chequeado el cumplimiento de los objetivos, entonces es necesario establecer en qué momento vamos a utilizarlo, valorando la adecuación del recurso tanto desde el punto de vista del contenido, como de la forma de presentarlo.

Es importante resaltar que el uso de las imágenes debe hacerse con mesura, en una solución de compromiso que no abrume al alumno con impactos visuales exagerados, impactando negativamente en su aprendizaje.

Por lo tanto, es aconsejable hacer una planificación detallada sobre el tiempo que vamos a dedicar al uso y visualización del video dentro del conjunto de materiales ofrecidos en el aula virtual.

Como lo comentáramos en el párrafo anterior, los videos fueron incluidos en el aula virtual de Matemática del CINEU, focalizados en reforzar las competencias de los estudiantes en algunos temas particulares. Así, los docentes tutores elaboraron una serie de preguntas que los estudiantes debían leer, previo a la visualización de los videos, para orientarlos en los logros de aprendizaje esperados. Al finalizar el video, contaban con una evaluación como una forma de mantener al grupo activo.

Todos los videos fueron subidos a la plataforma youtube: https://www.youtube.com. Para acceder a su visualización, se crearon hipervínculos, de tal forma que quedaran enlazados al aula virtual; con esto se logra que no exista problema en el ancho de banda necesario para su reproducción.

A modo de ejemplo, se presenta uno de ellos:

https://www.youtube.com/watch?v=UY4FwrDRzO4&feature=youtu.be

La posibilidad de acceder a través de la plataforma de video permite ser reproducido las veces que requiera el usuario. El intercalado en imágenes del profesor con los gráficos insertados también posibilita que el tamaño de la imagen funcione en un "diseño responsivo" esto es, que pueda ser visto no solamente en computadoras de escritorios y notebooks, sino también en dispositivos móviles como teléfonos celulares.

Finalizado el video se invitaba al estudiante a realizar actividades, resolver ejercicios, subir archivos, etc., de la temática abordada y además, a contestar una encuesta con la finalidad de mejorar las producciones audiovisuales que realizamos.

3 Percepciones de los estudiantes acerca de las producciones audiovisuales

A los fines de indagar la respuesta de nuestros estudiantes a la oferta de producciones audiovisuales, elaboramos encuestas para que respondan en formularios de Google, con opciones múltiples, tanto previas como posteriores a cada uno. Se obtuvo en general un número escaso de respuestas, que varía según el video, frente al total de participantes en el aula que superó la centena.

Consideramos que este bajo nivel de respuestas es uno de los disparadores para ofrecer estrategias de mejora para motivar hacia una mayor participación.

De cualquier modo, estos resultados preliminares ya proporcionan información útil para conocer acerca de sus percepciones.

Se muestran a continuación algunas de las preguntas de algunos de los videos cuyos resultados consideramos relevantes para enriquecer la nueva propuesta a implementar en 2021.

Repuestas a algunas de las preguntas formuladas en instancia previa a la visualización de video:

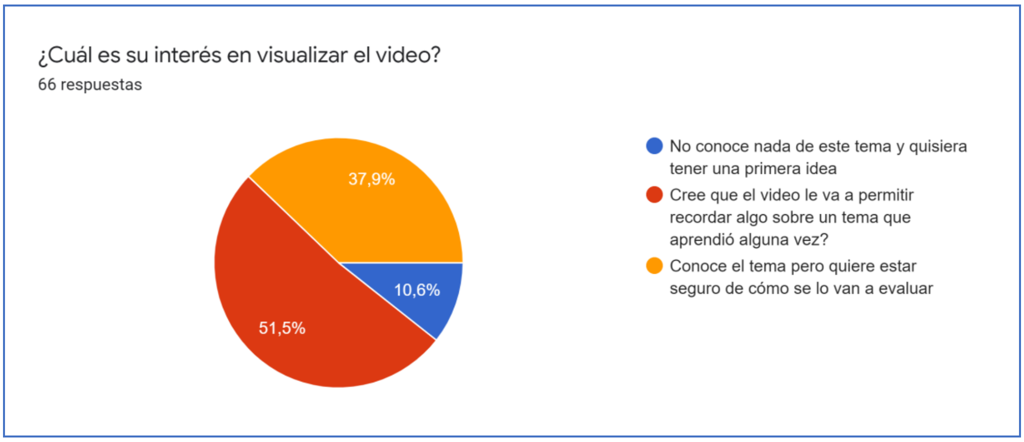


Fig. 1. Pregunta N°1.

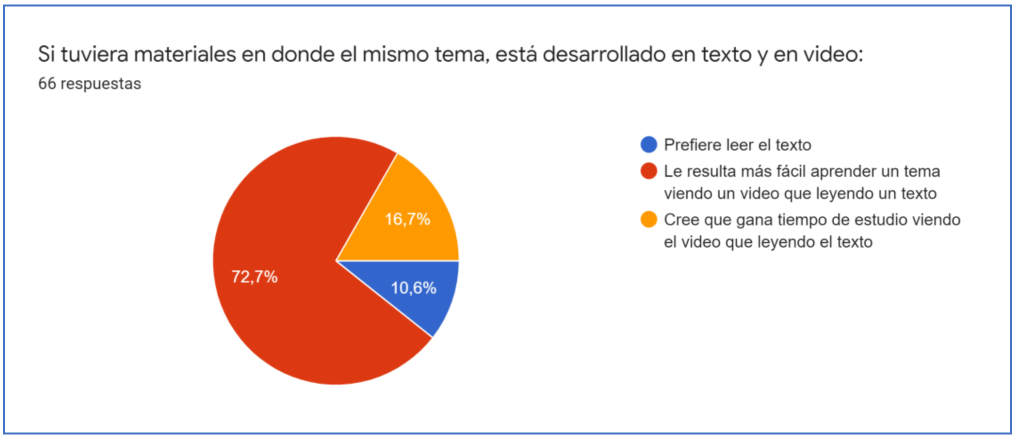


Fig. 2. Pregunta N°2. En las respuestas se advierte el interés por estudiar de producciones audiovisuales por sobre las de texto plano.

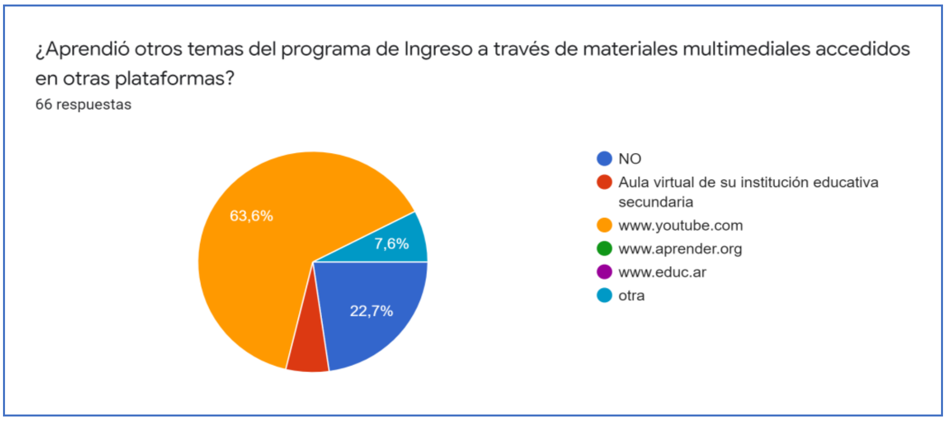


Fig. 3. Pregunta N°3.

Resultados de las encuestas tomadas con posterioridad a la visualización del video:

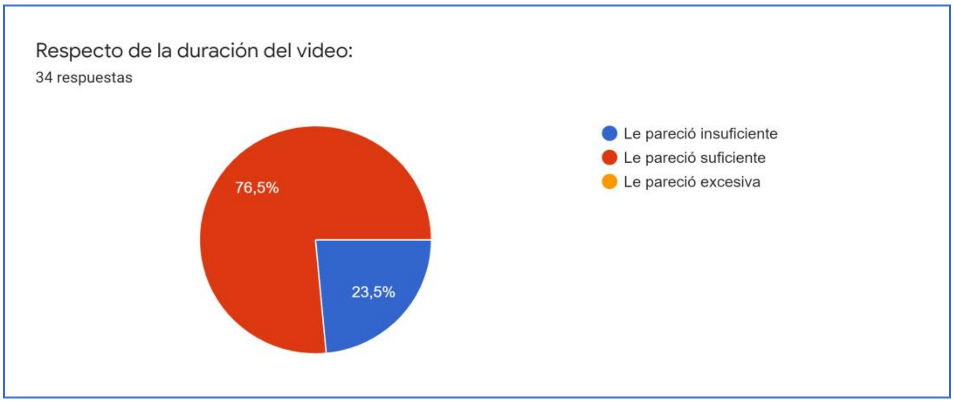


Fig. 4. Pregunta N°4 (duración: 5 minutos 5 segundos).

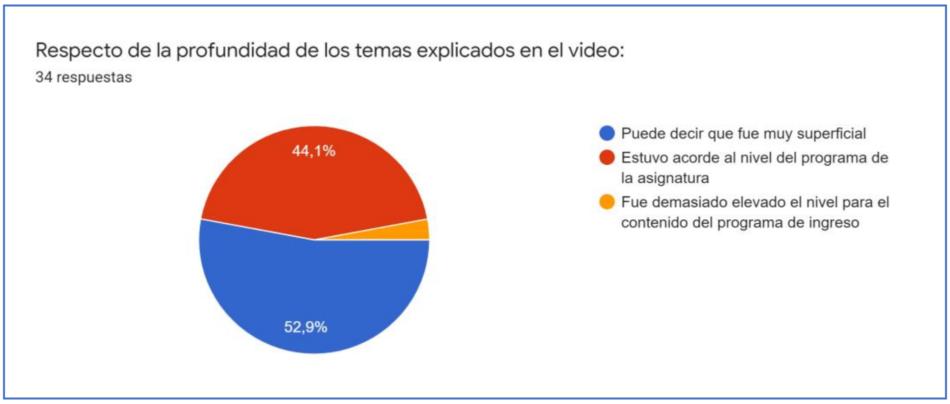


Fig. 5. Pregunta N°5. Emerge de estas percepciones que es necesario mejorar en aspectos alrededor del guion y de sus contenidos.

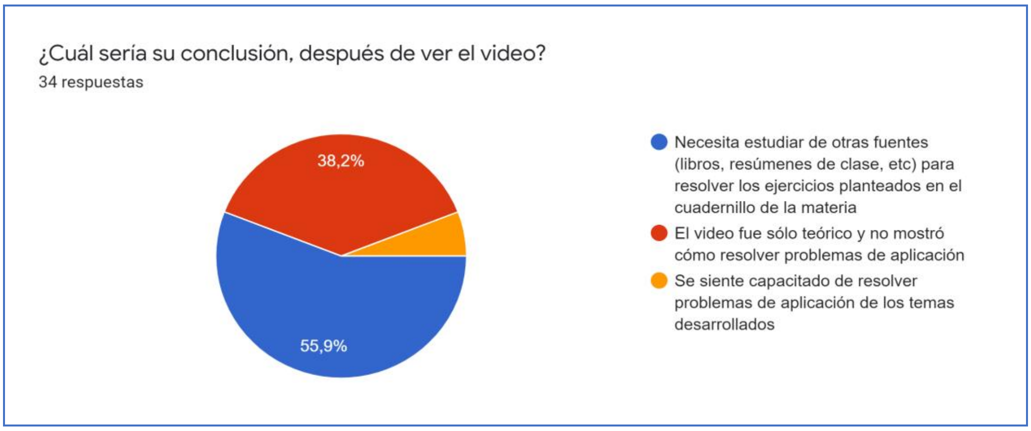


Fig. 6. Pregunta N°6.

En la comunicación con sus docentes tutores los alumnos manifestaron que necesitaban estudiar de otras fuentes. Esto motivó la edición de nuevos videos para completar este.

4 Conclusiones y acciones de mejora propuestas a futuro

La respuesta por parte de los estudiantes a la preparación de materiales audiovisuales realizadas por sus docentes tutores y el equipo de especialistas, integrantes de este grupo de investigación, constituye un disparador que alienta a continuar desarrollando acciones en esta línea de investigación. Nos motivan a construir cursos abiertos on-line orientados a la masividad (MOOC) para los cuales actualmente se está trabajando en el seno del proyecto de investigación, del que forman parte los autores de esta publicación, avalado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba para el período 2018-2021 [11].

Por otra parte, observamos que la planificación de la producción audiovisual como recurso de clase logra mayor eficacia cuando se toma la unidad a tratar del plan de estudio y se la puede volcar al guion en un trabajo articulado entre profesores y realizadores expertos en el diseño, lo cual constituye un trabajo en equipo interdisciplinario. Esto posibilita una mayor optimización de los recursos.

Estos cursos, contribuyen a paliar las dificultades de la articulación entre el nivel medio y la universidad en Matemática para Ingeniería, ofreciendo una mayor y mejor accesibilidad si se alcanza el objetivo de ser verdaderamente abiertos, lo cual favorecería la mejora en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes de nivel medio que quieran ingresar a esta Casa de Estudios, independientemente de su lugar de residencia o de origen y de la disponibilidad de horarios estructurados; manteniendo los estándares de calidad. En otras palabras, contribuiría con la misión de las universidades públicas de ser verdaderamente "para todos",

Por último, la propuesta de cursos MOOC contempla un efecto multiplicador abrevando recursos humanos no sólo en ingeniería sino en otras especialidades, desarrollando actividades interdisciplinarias que posibilitan mejores servicios a la sociedad.

Agradecimientos. Para la filmación y edición de los materiales audiovisuales, además de los recursos físicos y humanos de nuestro equipo de investigación, se contó con la colaboración del Campus Virtual que la Facultad, *"Aulas Virtuales y Tecnologías Digitales en nuestros procesos de enseñanza en la FCEFyN", Programa* de Mejoramiento de la Enseñanza de Grado – PAMEG 2019/20.

Referencias

1. Galoppo, J. L.; Gallardo, F.; Sandín, D.; Taboada, R.: MODALIDAD NO PRESENCIAL DEL CICLO DE INTRODUCCIÓN A LOS ESTUDIOS UNIVERSITARIOS DE LA FCEF y N – UNC. *I JORNADA DE EXPERIENCIAS E INVESTIGACIONES EDUCATIVAS EN CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES*. Córdoba (2019)
2. CONFEDI (2014): "Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina" Editorial de la universidad FASTA: http://redi.ufasta.edu.ar:8080/xmlui/handle/123456789/409. Accedido el 07/03/2020
3. Galoppo, J. L.; Vignoli, L. A.; Díaz Dávila, L. C.: Utilización de Aulas Virtuales para la consolidación de competencias específicas de ingreso a las carreras de Ingeniería. *IV Congreso Argentino de Ingeniería – X Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería.* 19 al 21 de septiembre de 2018 – Córdoba
4. Rodríguez, R. A., López, B. S. y Mortera, F. J. "El video como Recurso Educativo Abierto y la enseñanza de Matemáticas". *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19*(3), 92-100. (2017). https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.3.936. Accedido el 12 de marzo de 2020.
5. Britos, J.; Arias, S.; Hirschfeldb, G.: Los MOOC un desafío para Latinoamérica. X Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología pp 418-425 (2015)
6. Dubois, A. y Cortés, J. (2005). *Nuevas Tecnologías de la Comunicación para el Desarrollo Humano*. Bilbao, España: Heoga. https://biblio.flacsoandes.edu.ec/libros/digital/55696.pdf. Accedido el 12 de marzo de 2020.
7. Bautista Sánchez, M. G., Martínez Moreno, A.R., Hiracheta Torres, R.: "El uso de material didáctico y las tecnologías de información y comunicación (TIC's) para mejorar el alcance académico" (2014). https://www.palermo.edu/ingenieria/pdf2014/14/CyT_14_11.pdf. Accedido el 12 de marzo de 2020.
8. BRAVO RAMOS, J. L.: ¿Qué es el vídeo educativo? ICE de la Universidad Politécnica de Madrid, (1994) http://www.ice.upm.es/wps/jlbr/Documentacion/QueEsVid.pdf. Accedido el 12 de marzo de 2020.
9. Galoppo, J., Sandín, D., Taboada, R, Gallardo, F: Proyecto de Investigación: "Utilización de TIC para favorecer la formación de competencias específicas de Matemática en los ingresantes a las carreras de Ingeniería", financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica (SECyT) de la UNC, para su desarrollo en el bienio 2018-2019.
10. Barroso Tanoira, F. G.: "La Regla 80/20 (Pareto)". *Management Today en español 33, 12-14* (2007). https://www.researchgate.net/publication/315767915_La_regla_80-20_Pareto. Accedido el 12 de marzo de 2020.
11. Díaz Dávila, L.C. y otros: Programa de investigación: "UN ENFOQUE INTEGRAL PARA PROPICIAR CURSOS ABIERTOS ON LINE DESDE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA" financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica (SECyT) de la UNC, para su desarrollo en el período 2018-2021.

El sistema de ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán en tiempo de pandemia

Nicolás Nieva[1], María I. Giannini[2], Fernando A. Miranda Bonomi[2], María. F. Guzmán[3]

[1] LAFISO-INFINOA, Departamento de Física, FACET-UNT
Avenida Independencia 1800 (4000), S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
nnieva@herrera.unt.edu.ar

[2] Área Ingreso, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán (FACET-UNT)
Avenida Independencia 1800 (4000), S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
{migianinni,fmirandabonomi}@herrera.unt.edu.ar

[3] Secretaría Académica, FACET-UNT
Avenida Independencia 1800 (4000), S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
mferguzman@herrera.unt.edu.ar

Resumen. Frente a la irrupción de la pandemia de Covid-19 en marzo de 2020, el Área Ingreso de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán adoptó la modalidad virtual completa para sus cursos de nivelación en matemática y pruebas de suficiencia para dar continuidad pedagógica a esta etapa vital de la articulación con los alumnos provenientes del nivel medio. Se mantuvo el contenido curricular de los cursos de nivelación del programa de ingreso del 2020 y se adaptó el Aula Virtual de la plataforma Moodle Facet Virtual de la Facultad. Se presentan detalles de la estrategia y forma de trabajo adoptada para cumplir con el espíritu del programa de ingreso a la FACET. Los resultados fueron altamente positivos, desde lo académico y de lo organizativo, lo que permitió atender una demanda de ingresantes que casi duplicó a la del año anterior 2020.

Palabras Clave: Sistema de ingreso virtual, Estrategias de enseñanza, Matemáticas.

1 Introducción

La Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán (FACET-UNT) incluye en su oferta académica cuatro carreras de pregrado, dieciséis de grado y catorce titulaciones de posgrado, todas estas carreras requieren de los aspirantes una base de conocimientos matemáticos lo suficientemente sólida. En las condiciones normales previas a la pandemia de Covid-19 la Facultad ofrecía a los aspirantes al pregrado y al grado un programa de ingreso consistente en cursos de nivelación en matemática y actividades complementarias. Entre los objetivos principales de este programa se busca que los aspirantes refuercen o adquieran conocimientos necesarios para facilitar el cursado de primer año de las carreras de la Facultad. Se busca desarrollar habilidades y criterios para estudiar, que adquieran información necesaria para incorporarse a la vida universitaria, que seleccionen los procedimientos que mejor se adecuarán a las situaciones planteadas y que se conduzcan con mayor seguridad. El sistema de ingreso de la FACET-UNT es provisto por su Área Ingreso, articulando acciones con: las Secretarías Académica y de Bienestar Estudiantil, el Área de Comunicaciones, el Gabinete de Tutorías y distintas cátedras y laboratorios de docencia, de investigación y de extensión. El Área Ingreso cuenta con dos coordinadores y un equipo docente asignado especialmente a las tareas docencia y tutoría del programa de ingreso.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

La articulación con el nivel de enseñanza media es un pilar fundamental dentro de la política educativa de nuestra institución. Con este horizonte, desde principios de 2019 se propusieron desafíos y modificaciones en el sistema de ingreso de la FACET, procurando llegar a la población en una forma lo más homogénea e inclusiva posible [1]. La amplitud en la oferta académica y la extensión del área geográfica de influencia de la FACET implicaban un desafío a la hora de hacer más accesible esta etapa de transición y articulación. En este sentido, entre otras medidas, desde el mismo 2019 se avanzó en llegar con presencia territorial a cuatro lugares de la provincia de Tucumán: sede Capital (zona centro), sede Aguilares (zona sur), sede Trancas (zona norte) y Tafí del Valle (zona oeste de montaña), brindando en cada una de ellas el curso de nivelación. También se diseñó y concretó por primera vez un formato semipresencial de ingreso, de diciembre de 2019 a febrero de 2020 usando los servicios del Centro de Educación a Distancia de la Facultad (CEDITE-FACET), siempre con el propósito de abolir la brecha geográfica y de facilitar el acceso de ciudadanos de toda el área de influencia de la institución.

Otra modificación importante introducida para el sistema de ingreso 2020 fue la reformulación del programa de nivelación en matemática y de actividades complementarias para su adecuación al enfoque por competencias, sumado a la implementación de un proceso de mejora continua. Entre las competencias de egreso citadas en la propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) (Libro rojo) [2] se pueden referir algunas cuyas bases pretendieron ser provistas al ingresante desde y durante el proceso mismo de ingreso. Es así como competencias tecnológicas básicas como "utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería" o competencias sociales, políticas y actitudinales como "Comunicarse con efectividad", "Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global", "Aprender en forma continua y autónoma" fueron incluidas como estrategia pedagógica complementaria en el programa de ingreso. La aplicación de un modelo de formación por competencias en la instancia de articulación y nivelación para el ingreso a la FACET significó también la formación y capacitación de los recursos humanos que conforman el equipo docente. Este equipo está conformado por egresados de la UNT con diversa formación de grado, lo que constituye una fortaleza por el aporte de diferentes experiencias del ámbito profesional, pero a su vez se necesita la guía de especialistas que contribuyan en la capacitación en aspectos pedagógicos.

En conjunto, estos cambios permitieron ayudar a la igualdad de oportunidades al llegar a otros territorios, tanto en forma presencial como remota digital, se logró hacer un abordaje más estructurado en la formación del alumnado e instrumentar un proceso de sintonía con los requerimientos del primer año de cursado de las carreras de la FACET en cuanto a las capacidades de sus estudiantes. Los primeros resultados fueron alentadores [3].

Pero un día de marzo de 2020 la pandemia de Covid-19 impactó de lleno en la República Argentina y produjo una disrupción en la educación superior. Los cierres obligatorios de los lugares habituales de encuentro presencial de alumnos, docentes y administrativos como medida para evitar la propagación de la enfermedad llevaron a tomar acciones prontas para la continuidad pedagógica. Los obstáculos desde el principio fueron tecnológicos, financieros, pedagógicos y administrativos, amén de los graves problemas sociales, culturales, económicos y sanitarios generados por la pandemia en la población.

Para otro momento queda la discusión si el sistema universitario argentino estaba bien preparado para un evento de este tipo. En la FACET se apostó desde el principio a la continuidad pedagógica en forma de educación remota de emergencia como una manera de garantizar la educación como un derecho humano, un bien público y social y de responsabilidad como institución pública de gestión estatal.

En el caso del programa de ingreso, bajo las condiciones de la Resolución N° 0145/2020 del Honorable Consejo Superior de la UNT y posteriores [4], el Área Ingreso modificó su estrategia de trabajo adoptando la modalidad virtual completa para los cursos de nivelación y las pruebas de suficiencia, tanto en el dictado como en la evaluación.

El objetivo del presente trabajo es mostrar en forma sintética la estrategia y forma de trabajo adoptada para aplicar dentro del contexto de excepción suscitado el espíritu del programa de ingreso a la FACET, los resultados académicos obtenidos y las conclusiones finales de un año académico atípico.

2 Metodología

2.1 Decisiones, actividades y estrategia para el programa de ingreso 2021 a la FACET.

Para afrontar la contingencia de la participación remota de los alumnos considerados como ingresantes de la FACET en el año 2021, se tomaron decisiones y se implementaron actividades y estrategias entre las cuales se destacan:

- Se mantuvo el contenido curricular del curso de nivelación en Matemática similar al del Ingreso 2020, abarcando los siguientes temas generales: 1) Números Reales, 2) Expresiones Algebraicas, 3) Funciones y Ecuaciones, 4) Geometría, 5) Trigonometría. [3]
- Se realizó un proceso de capacitación del equipo de trabajo. Las nuevas condiciones laborales exigidas requirieron la preparación especial de los docentes del equipo del Área Ingreso. Se contó con el asesoramiento y acompañamiento permanente del CEDITE y de la Secretaría Académica de la FACET.
- Desde la Coordinación se adaptó el Aula Virtual a la nueva modalidad de cursado y de evaluación, ambas completamente virtuales, del programa de ingreso 2021. Se diseñaron para este objetivo las diferentes instancias de nivelación y pruebas de suficiencia. Los alumnos tuvieron la oportunidad de familiarizarse con las metodologías de evaluación a través de controles de estudio con la misma modalidad al finalizar cada unidad.
- Se concretaron reuniones virtuales de trabajo con el equipo docente del Área Ingreso para establecer la estrategia pedagógica, la metodología de trabajo, el monitoreo continuo del avance del programa y la evaluación de los resultados obtenidos en cada instancia. El monitoreo incluyó un análisis de dificultades y propuestas de mejora. Estas acciones se engloban en sostener la consigna de mejora continua a pesar de las circunstancias a priori tan desfavorables.

2.2 Instancias de nivelación para el ingreso 2021

Durante el periodo abril 2020 a febrero 2021 se realizaron tres instancias de curso de nivelación y tres pruebas de suficiencia, todos en modalidad a distancia. La inscripción y recolección inicial de datos de los interesados se implementó mediante formularios de Google. La información de cada instancia se publicó en el sitio web del Área Ingreso de la FACET [https://www.facet.unt.edu.ar/ingreso-facet/]. La difusión de noticias, novedades y llamados se llevó a cabo por las redes sociales del Área Ingreso y de la Facultad. Siempre se trabajó para todos estos propósitos en forma coordinada con la Secretarías Académica y de Bienestar Estudiantil, con el Área Comunicaciones y con el CEDITE.

A continuación, se presentan algunos detalles y particularidades de cada dictado y evaluación. Las cambiantes condiciones fueron adaptaciones a las restricciones establecidas por las autoridades superiores de la UNT:

Curso abril-agosto (2020-04-CUR): El curso inició el 15/04/20 y finalizó con su última actividad de recuperación el 12/08/20. Para el cursado se utilizó el Aula Virtual de Facet Virtual y dos clases semanales virtuales sincrónicas a través de Google Meet en tres turnos a elección: uno matinal y dos vespertinos. El Aula Virtual se organizó según unidades temáticas y con una presentación que facilitó el acceso ordenado y coordinado con las clases virtuales. Se incluyó un Contrato Pedagógico del curso y una guía didáctica detallando el contenido y proceso de enseñanza en cada unidad. Para cada unidad el Aula Virtual incluyó un foro de consulta a cargo de tutores docentes, material de estudio, ejercitación, una selección de videos recomendados sobre cada tema y una evaluación de seguimiento con calificación y realimentación automáticas. A nivel global se incluyeron, además de los exámenes parciales y sus recuperaciones, un foro de anuncios y un menú de acceso a grabaciones de las clases virtuales, que fueron editadas y subidas al canal de YouTube asociado a la cuenta institucional del Área Ingreso. Las tareas se distribuyeron entre los integrantes del equipo docente; las mismas fueron asignadas en función de la carga horaria y necesidades del Área e incluyeron dictado de clases, atención de foros de consulta y revisión del material de estudio. Se brindaron, dentro del tiempo para el dictado, talleres de introducción a la vida universitaria en modalidad virtual a cargo del Gabinete de Tutorías de la FACET.

Una breve acotación respecto al Aula Virtual. En presencialidad se les brindaba a los alumnos del Curso de Nivelación un taller para el registro en Facet Virtual y su matriculación en el Aula del curso, que se utilizaba como aula extendida. Para el dictado semipresencial de diciembre 2019 - febrero 2020, el Área Ingreso preparó videotutoriales para que los alumnos pudieran autogestionar su registro y matriculación. Este material fue aprovechado en la modalidad de dictado plenamente virtual, donde el Aula pasó a ser un elemento fundamental en el dictado. Además, el uso de Aula Virtual en la plataforma Facet Virtual es frecuente en las asignaturas de primer año y la mayoría de las mismas en los siguientes años. Así, los nuevos alumnos ingresan ya familiarizados con este recurso tecnológico, contribuyendo a lograr nuestro objetivo de que se conduzcan con seguridad.

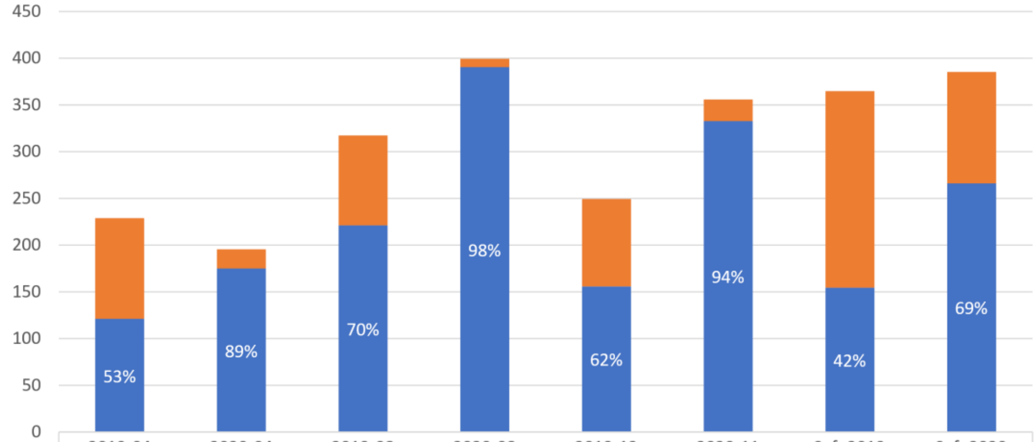
Curso agosto-octubre (2020-08-CUR): El curso inició el 19/08/20 y finalizó con su última actividad de recuperación el 30/10/20. Para el cursado se utilizó el Aula Virtual y tres clases virtuales sincrónicas a través de Google Meet en tres turnos: uno matinal y dos vespertinos. El uso del Aula Virtual fue similar al curso anterior. Los alumnos participaron de las charlas de presentación de las carreras de la Facultad, organizadas por el Gabinete de Tutorías de la FACET. Ésta fue la herramienta que la Facultad pudo brindar a los aspirantes para que adquieran información sobre la oferta académica mediante videoconferencias con el testimonio de los directores de carrera, docentes, graduados y alumnos de las mismas.

Curso noviembre - diciembre 2020 (2020-11-CUR): El curso inició el 03/11/20 y finalizó su última actividad de recuperación el 23/12/20. Se trató de un curso de dictado intensivo con clases sincrónicas diarias con dos comisiones en cada uno de los tres turnos (6 clases diarias). El Aula Virtual mantuvo el formato de los dos cursos anteriores. Como en el curso anterior, se invitó a los alumnos a participar de las charlas de presentaciones de carreras que se dieron.

Pruebas de suficiencia febrero 2021 (2021-10-02-SUF, 2021-17-02-SUF y 2021-24-02-SUF): Se habían planificado tres pruebas de suficiencia, una en agosto 2020, otra en diciembre 2020 y otra en febrero 2021. Por las consabidas cambiantes condiciones en las restricciones debieron suspenderse las pruebas de suficiencia de agosto y de diciembre de 2020. Las tres pruebas planificadas se tomaron en el mes de febrero de 2021, los días 10, 17 y 24, todas en forma virtual utilizando un aula especialmente diseñada para tal fin en la plataforma Facet Virtual. Mediante trabajo coordinado con las Secretarías Académica y de Bienestar Estudiantil, junto al Área Comunicaciones y el CEDITE se llevó adelante esta actividad inédita en nuestra Facultad. En el sitio web del Área Ingreso se publicó la información necesaria para tomar esta instancia, además de material de estudio elaborado por el Área Ingreso y una selección de videos tutoriales disponibles en YouTube sobre todos los temas a evaluar. El Área Ingreso preparó un video tutorial con los pasos necesarios para acceder y responder a la evaluación en la plataforma Facet Virtual.

3 Resultados y discusión

La Fig. 1 presenta los resultados académicos globales del programa de ingreso 2021 discriminados por instancia en cuanto a cantidad de aprobados, desaprobados y porcentaje de aprobación. Se muestran los datos de los tres cursos virtuales (2020-04-CUR, 2020-08-CUR, 2020-11-CUR) y los resultados consolidados de las tres instancias de prueba de suficiencia de febrero de 2021: Suf.2020 (2021-10-02-SUF+2021-17-02-SUF+2021-24-02-SUF). Los resultados corresponden a los alumnos que fueron evaluados efectivamente en cada instancia. En la misma gráfica se muestran, a modo de comparación, los resultados obtenidos en las instancias correspondientes del programa de ingreso 2020, en donde 2019-04-CUR y 2019-08-CUR fueron cursos presenciales y 2019-11-CUR fue la instancia semipresencial. Se incluyen también los datos consolidados de las dos pruebas de suficiencia de este año 2020 de ingreso: Suf.2020 (2019-12-SUF+2020-02-SUF).



	2019-04	2020-04	2019-08	2020-08	2019-12	2020-11	Suf. 2019	Suf. 2020
Desaprobados	108	21	96	8	94	23	210	120
Aprobados	121	175	221	391	156	333	155	266

Fig. 1. Resultados académicos globales de las distintas instancias del ingreso 2020 y 2021 de la FACET-UNT. Las instancias de 2019-04, 2019-08 y 2019-12 corresponden a los cursos de ingreso para el ciclo 2020. Las instancias 2020-04, 2020-08 y 2020-11 corresponden a los cursos de ingreso para el ciclo 2021. Suf. 2019 corresponde a los resultados agregados de las pruebas de suficiencia para el ingreso 2020 y Suf. 2020 corresponde a los resultados agregados de las pruebas de suficiencia para el ingreso 2021. El total de aprobados en el ingreso 2020 fue 653 (56%) y el total de aprobados en el ingreso 2021 fue 1165 (87%).

Respecto a las instancias de cursado y evaluación virtual, el porcentaje de aprobación del curso de la instancia de abril 2020, 2020-04-CUR**,** es menor al resto de las instancias (comportamiento similar a lo observado para el curso presencial 2019-04-CUR). Al igual que en el 2019, esto puede deberse a que los alumnos que tomaron esta instancia están en su mayoría en el comienzo del cursado del último año de secundaria y también a que en esta instancia, en el 2020, se estaba viviendo la primera etapa de la cuarentena oficial y toda la población estaba acomodándose a esta "nueva normalidad". El mayor porcentaje de aprobación se observa en la instancia 2020-08-CUR (comportamiento similar a lo observado para el curso presencial 2019-08-CUR) que es cuando se considera que los alumnos ya se acomodaron a la vivencia del último año de secundaria (que también fue modalidad virtual) y probablemente también se acostumbraron a la nueva realidad que estaban transitando. Tampoco hubo la "distracción" de los viajes de egresados. Un porcentaje de aprobación intermedia en las cursadas se observa en la instancia 2020-11-CUR**.** Se atribuye esta leve disminución respecto a la instancia inmediata anterior, principalmente al hecho de que esta fue un curso más comprimido en tiempo. No se compara esta tercera instancia con la correspondiente del año anterior por haber sido aquella una circunstancia especial, en el sentido de que era la primera vez que se dictaba en formato semipresencial y que se desarrollaba su parte virtual durante el receso estival 2020. Los resultados de las pruebas de suficiencia en formato virtual también mostraron una similitud cualitativa respecto a las pruebas de suficiencia presenciales del programa de ingreso anterior en el sentido que los porcentajes de aprobación fueron sensiblemente más bajos que los resultados de las cursadas. Sin embargo, los resultados de 2021 son mejores que los de 2020 en las pruebas de suficiencia (Suf.2020 vs Suf.2019).

Se considera que los resultados académicos fueron altamente positivos al comparar en general los porcentajes de aprobación del programa de ingreso 2021 con el del ingreso 2020. El nivel y la rigurosidad de los contenidos y las evaluaciones no fueron diferentes a los del año anterior. Las diferencias introducidas fueron dos: las clases fueron virtuales mediante video conferencias sincrónicas y las evaluaciones también fueron virtuales mediante el Aula Virtual. Hubo una mejora ostensible del rendimiento académico de los alumnos. El impacto inmediato es que prácticamente se duplicó el número de ingresantes que estarían en condiciones de cursar completo el primer año de las carreras de pregrado y grado en nuestra Facultad. También se observó que alumnos que no lograron aprobar los cursos de nivelación en 2020 recibieron una formación suficiente para, con una dedicación adicional, superar las pruebas de suficiencia de febrero 2021.

Tabla 1. Algunos resultados de la encuesta de calidad educativa del ingreso 2021 de la FACET-UNT.

Instancia evaluada	*2020-04-CUR*	*2020-08-CUR*	*2020-11-CUR*
Número de respuestas registradas.	118	203	226
Realizó cursos virtuales	25	95	132
Realizó cursos semi-presenciales	43	60	49
Encuentra útil el aula virtual.	75%	76%	86%
Encuentra adecuado el cronograma.	70%	70%	63%
Indica dificultad en manejo del tiempo personal.	45%	52%	51%
Indica desconocimiento de los temas tratados.	40%	26%	38%

Al igual que en el programa de ingreso 2020, en el programa de ingreso 2021 se realizaron encuestas de calidad educativa. Las mismas se suministraron al final de las diferentes instancias de cursada. Los cuestionarios se modificaron sensiblemente comparando con las encuestas correspondientes del año anterior, habida cuenta de las diferentes estrategias y dinámicas docentes adoptadas. En la tabla 1 se indican los resultados de una parte de los cuestionarios. Se exponen preguntas realizadas, cantidad de alumnos que respondieron, las respuestas mayoritarias, su porcentaje de satisfacción para cada instancia. Las encuestas se realizaron mediante el recurso Encuestas de la plataforma Moodle de Facet Virtual.

En general el grado de aceptación en cuanto a la organización, modalidad y temas abordados en el dictado virtual, extraído de la Tabla1, ha sido relativamente alto, mejorando desde la primera hasta la tercera instancia; excepto en el cronograma de estudio que en la tercera instancia fue más comprimido en tiempo. Respecto a las dificultades encontradas los datos indicarían que los alumnos cuentan con niveles relativamente bajos de la competencia de autorregulación y disciplina, imprescindibles para la estrategia de educación a distancia.

Otra parte de la encuesta estuvo referida a la satisfacción al final de cada una de las instancias de cursado sobre el material y herramientas brindadas en la virtualidad (promedio de respuestas con 4 o 5 / 5 puntos máxima calificación), consultando a los alumnos sobre apartados tales como: Guía didáctica, Foros de consulta, Material de estudio, Clases *online*, Videos, Material adicional, Ejercitación, Cuestionarios y Aula Virtual. Notamos un alto porcentaje de satisfacción general, siendo lo mejor valorado en la primera instancia el material de estudio y las Clases *online* (porcentajes de satisfacción por arriba del 80%) y evolucionando hacia un porcentaje de satisfacción por arriba del 80% en todos los apartados para la tercera instancia de cursado, excepto en los apartados Foros de consulta y Guía didáctica. Atribuimos esta mejoría a las acciones tomadas en el proceso de mejora continua. Un parámetro que sí se puede discutir comparativamente es el grado de satisfacción respecto al Aula Virtual. En el programa de ingreso 2020 el Aula Virtual se utilizó en las dos primeras instancias presenciales como elemento complementario de la estrategia docente y como herramienta preponderante en la instancia semipresencial. En aquella encuesta de satisfacción final a los alumnos, se obtuvo un porcentaje relativamente alto (64% de promedio de las tres instancias de cursado) pero insuficiente para los estándares autoimpuestos para el equipo de ingreso. En cambio, en esta parte de la encuesta del ingreso 2021 el Aula Virtual llegó a obtener para la última instancia un porcentaje de satisfacción del 90%. Esto, consideramos se atribuye a diversos parámetros tales como: el crecimiento de la experticia del equipo docente en el entorno virtual, las mejoras en el servicio de la plataforma Facet Virtual de la Facultad y también, por qué no, al acomodamiento de los alumnos a este nuevo paradigma educativo.

También se requirieron comentarios a los alumnos en las distintas instancias de cursado y desde la conducción del Área Ingreso se solicitó una reflexión y autoevaluación a los mismos docentes de los cursos. Las respuestas de unos y otros fueron un insumo valioso para progresar en la mejora del sistema de ingreso virtual. Independientemente de todos los parámetros y datos expuestos, la lectura de comentarios de los alumnos lleva a los docentes del Área Ingreso y a los docentes que conducen la

Facultad a tener la sensación revitalizante de un buen trabajo cumplido en un marco de condiciones excepcionales. Como muestra se transcribe uno de los comentarios positivos de los alumnos: *"Me encantó! fue una linda experiencia, me encanta estudiar y la forma en que enseñaron. Todos tenemos distintas formas de aprender y en el curso los profesores tanto como el material del aula virtual se puede aprender muy bien. Muchas gracias."*

4 Conclusiones

Se considera que los resultados académicos fueron muy satisfactorios, más en las instancias de cursado virtual que en las pruebas de suficiencia. Esto permitió la nivelación e ingreso directo a las actividades completas de primer año a un número muy importante de alumnos.

El cursado virtual de las actividades de ingreso debiera impactar positivamente en estos alumnos que enfrentan primer año en 2021 en modalidad virtual.

La etapa semipresencial del programa de ingreso 2020 ayudó notablemente a la formación de una parte sustancial del equipo docente del Área Ingreso en el uso de la plataforma virtual de la Facultad. Esta familiaridad previa fue vital para la etapa inicial del dictado virtual del programa de ingreso 2021.

A pesar de limitaciones iniciales en la conectividad o de la falta de un conocimiento más extendido en la operación de plataformas y recursos digitales, se notó un crecimiento progresivo y colectivo (docentes y alumnos) de la pericia virtual y un enriquecimiento de las estrategias pedagógicas en este marco de excepción.

Al ser acciones de contingencia las implementadas, no hubo tiempo de adecuar en forma completa el espíritu del programa de ingreso 2021 con un enfoque basado en ciertas competencias, tal como el que se llevó adelante en el programa de ingreso 2020. Con un año completo de "vivencia a distancia" de la etapa de articulación e ingreso y con la experiencia ganada en este trayecto, el Área Ingreso se propone avanzar en este desafío de abordar el tema competencias en el entorno virtual para el programa de ingreso 2022.

El aprovechamiento de las TIC aplicadas a la educación y a la gestión permitió la respuesta rápida y flexible para que las actividades académicas del Área Ingreso tuvieran continuidad. Esta respuesta se basó claramente en la gran responsabilidad de los docentes, en el entusiasmo de los estudiantes y el acompañamiento de las áreas administrativas y complementarias de la educación. Este es un valor compartido con todo el sistema universitario argentino [5].

Referencias

1. Consejo Directivo, FACET UNT: Resolución N° 1002/19. https://www.FACET.unt.edu.ar/resoluciones/
2. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina "Libro Rojo de CONFEDI",* Universidad FASTA Ediciones, 2018.
3. EMCI 2021, "*El Modelo de Formación por Competencias en las Diversas Instancias de Ingreso a la FACET-UNT",* M.I. Giannini, F.A. Miranda Bonomi, N. Nieva.
4. Resoluciones Rectorales UNT Nº 145/2020, Nº 148/2020, N° 150/2020, N° 151/2020, N° 153/2020.
5. La universidad entre la crisis y la oportunidad: reflexiones y acciones del sistema universitario argentino ante la pandemia / Alberto E. Barbieri ... [et al.]; compilado por Paulo Falcon. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Eudeba ; Córdoba : Editorial de la Universidad Nacional de Córdoba, 2020. Libro digital, PDF, ISBN 978-950-23-3121-8.

EMCI
Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

UCU Universidad Católica del Uruguay

Comparación de los resultados obtenidos en una prueba de diagnóstico administrada a ingresantes en carreras de Ingeniería en períodos pre-post pandemia.

Richard Eduardo Delgado Gutiérrez, José-Job Flores-Godoy, María Magdalena Pagano Nachtweyh

Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Católica del Uruguay
Av. 8 de Octubre 2738, Montevideo Uruguay
{richard.delgado, jose.flores, mapagano}@ucu.edu.uy

Resumen. Durante los últimos veinte años, el Departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Católica del Uruguay, ha venido trabajando en el perfil académico de los ingresantes en carreras de Ingeniería. Se ha investigado la relación entre el desempeño en la prueba de diagnóstico con el rendimiento académico en los primeros años de la carrera. Se ha validado psicométricamente el instrumento utilizado como un predictor de éxito académico. En este momento, con un instrumento ya consolidado, parece pertinente comparar los resultados obtenidos en los diagnósticos 2020 y 2021, para describir, si las hubiere, las diferencias en los aprendizajes matemáticos de los estudiantes preuniversitarios, luego de un año atípico en el dictado de los cursos de enseñanza media. Este trabajo detalla los resultados obtenidos en las diferentes cohortes e intenta explicarlos a la luz del conocimiento de la población de estudio y el resultado de otras investigaciones.

Palabras Clave: Diagnóstico, Matemática, Ingresantes a carreras de Ingeniería, Pandemia.

1 Introducción

Este trabajo comienza describiendo la realidad de la educación media en Uruguay durante el año 2020, esbozando cómo ha sido la implementación de los cursos a distancia en las diferentes instituciones. Diversas investigaciones señalan que el acceso a una enseñanza de calidad en el formato virtual continúa reproduciendo la desigualdad social de origen de los estudiantes sin agregar valor y con ineficiencia como ya era señalado en [1] hace más de una década y en contextos de enseñanza presencial.

Continúa luego con dos secciones, una de ellas describe someramente el instrumento utilizado para diagnosticar a los ingresantes y la otra reporta los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas de diagnóstico 2020, 2021.

En la cuarta sección se detallan las herramientas estadísticas utilizadas para medir las diferencias y/o semejanzas entre ambas cohortes.

Finalmente se discuten los resultados hallados y se proponen algunas hipótesis acerca de sus causas.

2 La educación media en Uruguay durante la emergencia sanitaria en 2020

El año 2020 fue marcado por las circunstancias excepcionales de la pandemia, Uruguay y su sistema educativo no fueron ajenos a estas. La emergencia sanitaria en Uruguay fue decretada el 13 de marzo de 2020 [2] y en ese marco, la Administración Nacional de Educación Pública determinó la suspensión de las clases presenciales. Esta suspensión se prolongó para la educación media hasta el mes de junio, en el que el regreso a la presencialidad se dio en tres etapas. El 1ero. de junio se reintegraron los centros de educación media rural y los estudiantes del último año de la educación media superior, excepto en

Montevideo y el área metropolitana. El 15 de junio se incorporaron todos los centros de educación media, excepto los de Montevideo y área metropolitana, además de los estudiantes del último año en estas dos regiones. El 29 de junio se incorporó el resto de los estudiantes de educación media. Sin embargo, este retorno a la presencialidad no fue uniforme. La necesaria contemplación de protocolos sanitarios determinó que en algunas zonas del país hubiera que suspender nuevamente las clases presenciales, y que en muchas instituciones la asistencia a los centros educativos se diera en forma alternada. Esto implicó que un importante porcentaje de estudiantes cumplieran el 50% de su carga horaria y en muchas ocasiones, solo el 33%.

En el comienzo de todo este proceso, Uruguay contaba con una alta disponibilidad tecnológica: “es uno de los países que han liderado durante la última década muchos de los principales índices de conectividad e inclusión digital en la región.” [3]. Plan Ceibal ya tenía implementado un sistema de gestión de aprendizaje (LMS por su sigla en inglés) denominado CREA que permitió un rápido acceso de docentes y estudiantes a este tipo de herramientas. Sin embargo, el intercambio de entre docentes y estudiantes se produjo también a través de otras modalidades, fundamentalmente vía WhatsApp y mensajes de texto y/o de audio [4].

Aún en este contexto relativamente favorable, como se da cuenta en este mismo documento, la percepción de los docentes es que hubo múltiples obstáculos para que los aprendizajes se pudieran dar de manera adecuada. Se señala especialmente la conectividad y poco acceso a equipos, así como la dificultad de los docentes para enseñar sin contacto cara a cara. Estas percepciones de los docentes tienen sustento además en otras investigaciones: “Según datos de la última Encuesta Continua de Hogares disponible [5], la cantidad de hogares que declaran no tener conexión a internet por banda ancha fija sigue siendo elevada en los primeros deciles (de ingresos)”. A su vez, en el primer decil únicamente el 12% de los hogares tiene una computadora que no sea del Plan Ceibal [6].

Una última consideración que es necesario realizar refiere a los cambios en el régimen de evaluación que se produjeron en el año 2020 y que determinaron una flexibilización de los requerimientos para la aprobación de cursos y ciclos [7].

3 Sobre el instrumento

El camino transcurrido a lo largo de 20 años de aplicación del instrumento de diagnóstico permite utilizar el mismo, ya consolidado, con otros fines. En este caso particular, se pretende evaluar el impacto en los conocimientos previos de los estudiantes ingresantes a la universidad, luego de un año atípico en asistencia y modalidad en los cursos de bachillerato.

Por tal razón se ha utilizado el mismo cuestionario que en los años 2019 y 2020. Se le realizaron ligeras variaciones para evitar que el hecho de tratarse de ítems ya propuestos distorsione los resultados obtenidos.

En los próximos párrafos, se hará un poco de historia sobre el instrumento utilizado y su validación, así como un relato de resultados y conclusiones que se han obtenido a lo largo de todos estos años.

3.1 Construcción y validación del instrumento

La aplicación y análisis de los resultados obtenidos a lo largo de los años ha permitido en una primera instancia caracterizar a la población de estudio en cuanto a sus conocimientos al ingreso a la universidad y su evolución durante el primer año [8], [9]. Estudios posteriores han logrado evaluar la calidad del instrumento a la interna de la institución y extrapolar los resultados obtenidos a otras poblaciones [10], [11]. Se ha realizado una evaluación psicométrica del instrumento como se reporta en [12].

Los estudios mencionados nos permiten confiar en que el instrumento utilizado es idóneo para evaluar los conocimientos previos de los ingresantes, así como vincularlos con sus rendimientos académicos durante los primeros años de su carrera.

A partir del año 2018 la prueba de diagnóstico fue de realización obligatoria y condicionó los recorridos académicos a seguir por los estudiantes como se reporta en [13]. Esta decisión modificó el diseño del instrumento para atender a tres posibles recorridos de los ingresantes. Dichos recorridos estaban vinculados con el desempeño obtenido en tres secciones de prueba de diagnóstico. Estas secciones evalúan diferentes estadios de conocimientos y capacidades.

A partir del año 2021, la institución pone en marcha un nuevo plan de estudios que deja sin efecto los trayectos alternativos antes mencionados, pero desde el momento en que vamos a comparar resultados obtenidos en esta prueba, utilizaremos el mismo cuestionario.

3.2 Breve descripción del cuestionario utilizado

Se trata de un cuestionario de múltiple opción compuesto por treinta ítems, distribuidos en tres secciones, cada una de ellas compuesta por diez ítems y ordenadas de menor a mayor en cuanto a nivel de dificultad, tanto por los contenidos como por la demanda cognitiva requerida para responder los ítems de cada una de las secciones.

La primera parte (nivel I) está compuesta por 10 ejercicios que indagan sobre a capacidad de los estudiantes de realizar procedimientos de cálculo aritmético o algebraico. La mayor parte de los contenidos evaluados en este nivel corresponde al ciclo básico de la enseñanza media y/o se evalúan capacidades básicas como ejecutar algoritmos o aplicar conceptos matemáticos. Las fallas en estos procedimientos constituyen una de las principales causas de fracaso en los cursos de primer año, de acuerdo con las observaciones efectuadas en los resultados de las diferentes instancias de evaluación realizadas en esta etapa.

La segunda parte (nivel II) interroga sobre funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas, desde una perspectiva centrada en lo algebraico. Estos contenidos corresponden al primer año común de bachillerato. En esta parte se incorporan preguntas que refieren a otro nivel en la demanda cognitiva requerida para resolverlos, como pueden ser el manejo del lenguaje simbólico específico, estructuras de razonamiento o sistemas de representación.

La tercera parte (nivel III) se concentra en temas de Cálculo Diferencial y de Geometría, cuya presencia en el currículo ocurre en Uruguay en el último año de bachillerato.

Más detalles sobre el tipo de ítems de cada nivel y ejemplos de éstos pueden consultarse en [13]. La pertinencia de los detalles antes expuestos está justificada pues las pruebas administradas en los años 2020-2021 corresponden a este diseño y sobre ellas ser realizará la comparación de resultados obtenidos.

4 Reporte de resultados

Los datos de las pruebas diagnóstico para los años 2020 y 2021 se dan a continuación. Se diferencia entre estudiantes que obtuvieron 60% o más de respuestas correctas y los que obtuvieron menos de 60%. Este corte responde al hecho que 60% es el porcentaje de suficiencia necesario para la aprobación de un curso en la institución de referencia.

Tabla 1. Resultados de las pruebas diagnóstico de los años 2020 y 2021

Año	Total	≥60%	<60%
2020	67	18	49
2021	103	24	79

Utilizando la proporción de estudiantes que obtuvieron 60% o más de respuestas correctas cada año se utiliza una prueba de hipótesis para comparar dichas proporciones y evidenciar si las proporciones son estadísticamente diferentes. Se utiliza una prueba exacta de Fisher [14], [15]. Esta prueba, a diferencia de la prueba χ^2, no usa aproximaciones de las distribuciones de las proporciones involucradas. La prueba exacta de Fisher es una prueba de hipótesis para proporciones p_1, p_2 de muestras diferentes descritas por distribuciones binomiales independientes. La hipótesis nula $H_0\colon p_1 = p_2$, se contrasta con la hipótesis alternativa $H_0\colon p_1 \geq p_2$ y se utiliza una distribución hipergeométrica para calcular el valor-p con el que se concluye que se rechace o no se rechace la hipótesis nula. Los cálculos del valor-p fueron hechos con el paquete *EnvStat* del lenguaje de programación R [16], [17].

Tabla 2. Resultados de prueba exacta de Fisher entre los años 2020 y 2021

	Año		Valor-p	Conclusión
	2020	2021		
Proporción de Aprobados	0.2687	0.2330	0.36	No se rechaza H_0

El resultado de la prueba exacta de Fisher nos indica que no se tiene evidencia para pensar que las proporciones de los estudiantes que obtuvieron 60% o más respuestas correctas en los años 2020 y 2021 sean estadísticamente diferentes.

Ante este resultado procedemos a desagregar a la población de la siguiente manera. Se han clasificado los resultados en dos categorías: los ingresantes de Colegios privados y los ingresantes de Liceos públicos. En cada categoría se diferencia entre los que obtuvieron 60% o más de respuestas correctas y los que obtuvieron menos de 60%.

Tabla 3. Resultados de las pruebas diagnóstico de los años 2020 y 2021

Año	Total	Colegios Privados		Liceos Públicos		Sin Información
		≥60%	60%<	≥60%	60%<	
2020	67	42		25		0
		16	26	2	23	
2021	103	68		30		5
		21	47	3	27	

A partir de los datos recabados se procede cuantificar si las proporciones de estudiantes que obtuvieron 60% o más son estadísticamente diferentes para los siguientes casos:

a) Para un año dado la diferencia de proporciones de estudiantes que obtuvieron 60% o más entre los Colegios privados y los Liceos públicos.

b) La diferencia de proporciones de estudiantes que obtuvieron 60% o más para un tipo de institución entre años.

Tabla 4. Resultados de la prueba exacta de Fisher comparando desempeños entre Colegios privados y Liceos públicos.

Caso	Año	% Colegios Privados	% Liceos Públicos	Valor-p	Conclusión
a)	2020	0.3809	0.08	0.006	Se rechaza H_0
a)	2021	0.3088	0.10	0.021	Se rechaza H_0

Para el caso a) en ambos años se concluye que la diferencia entre las proporciones de estudiantes que obtiene 60% o más son estadísticamente distintas si consideramos un nivel de significancia del 5%.

Tabla 5. Resultados de la prueba exacta de Fisher comparando desempeños entre años de Colegios privados y Liceos públicos.

Caso	Tipo de Institución	Año 2020	Año 2021	Valor-p	Conclusión
b)	Colegios Privados	0.3809	0.3088	0.2831	No se rechaza H_0
b)	Liceos Públicos	0.08	0.1	0.7620	No se rechaza H_0

En ambos casos no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula.

A partir de estos resultados podemos concluir que existe una diferencia entre el desempeño en la prueba diagnóstico entre los estudiantes de Colegios privados con respecto a los estudiantes de Liceos públicos. Por otro lado, si comparamos a los estudiantes de Colegios privados o Liceos públicos entre los años 2020 y 2021 no encontramos evidencia de que el desempeño haya cambiado de una generación a la otra.

5 Discusión y trabajo futuro

Los datos analizados no permiten inferir una diferencia estadísticamente significativa entre los resultados de los años 2020 y 2021. Si bien, en función del contexto de emergencia sanitaria en el que se desarrollaron los cursos en 2020, era esperable una desmejora en los resultados, hay algunas explicaciones posibles para este comportamiento.

En la búsqueda de explicaciones a la escasa diferencia observada entre los resultados obtenidos en la prueba de diagnóstico post–pre-pandemia, corresponde analizar la situación de Uruguay en cuanto a la disponibilidad de recursos para sostener un adecuado sistema de educación a distancia y cómo estos recursos varían dentro de los diferentes estratos sociales.

Informes sobre educación en pandemia en Uruguay dan cuenta de la situación disímil en las condiciones de trabajo entre instituciones públicas y privadas. "Cuando comenzó la presencialidad vimos que el proceso de apertura paulatina no se dio de la misma manera: en el ámbito público hizo meseta, porque hay un desbalance entre el protocolo que vos pedís y lo que se hizo de infraestructura para habilitarlo" [18]. Esta condición profundizó una brecha ya existente. Betancur y Fernández [1] señalan que "existe una fuerte segmentación académica entre la Secundaria General Pública, la Secundaria Técnica Pública y la Secundaria General Privada". Y que esta segmentación es fundamentalmente atribuible a una profunda segmentación sociocultural.

Esta segmentación vuelve a presentares en el contexto de enseñanza virtual, como lo señalan [6], solo los estudiantes provenientes de hogares ubicados a partir del 5to decil cuentan en su mayoría con una conexión de banda ancha y es de presumir que también se encuentre en una situación ventajosa con respecto a las otras variables enunciadas como favorecedoras del aprendizaje en contextos virtuales, entre las cuales se destacan el acceso a una computadora personal, disponibilidad de espacios físicos apropiados para el seguimiento de las clases y acompañamiento familiar.

En este último punto, es una realidad que en los hogares de los quintiles superiores los adultos del núcleo familiar han estado afectados al teletrabajo y este hecho ha permitido acompañar el proceso de formación de los menores a cargo, tanto desde la cohabitación como desde la disponibilidad de elementos de formación superior que los habiliten para el acompañamiento académico.

Atendiendo a las propias especificidades de los ingresantes a la institución objeto de este análisis, corresponde puntualizar que como se ha especificado en la sección anterior, el contexto de procedencia del universo de estudio. Más del 60% de los estudiantes ingresantes a la Universidad Católica provienen de instituciones privadas y cerca de un 30% de los estudiantes proviene del interior del país. Esto hacen pensar que nos encontramos frente a una población que no se encuentra entre los sectores más afectados negativamente por la segmentación educativa y por lo tanto no ha sufrido mayores diferencias en sus logros de aprendizaje respecto a las generaciones anteriores.

Referencias

1. Bentancur, N y Fernández, T.: La enseñanza media en Uruguay: cuatro problemas estructurales y tres líneas de política para su rediseño institucional. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, Vol. 6 N°4. Pp 99-126, (2008)
2. Decreto 93/020, Pub. L. No. 93/020 (2020).
3. Alarcón, A., Méndez, G.: Seguimiento del retorno a las clases presenciales en centros educativos en Uruguay. *UNICEF,* Uruguay. (2020).
4. ANEP. Situación educativa en el contexto de la emergencia sanitaria. Encuesta Docente, 15 de julio de 2020, https://www.anep.edu.uy/sites/default/files/images/2020/noticias/agosto/200825/1598288296799_Informe%20Encuesta%20Docente%20ANEP%20-%2015%20de%20julio.pdf (2020). Accedido el 30 de marzo de 2021.
5. Instituto Nacional de Estadística: Encuesta continua de hogares 2018, https://www.ine.gub.uy/c/document_library/get_file?uuid=fbf4b646-c8ca-4499-b101-d046da80faac&groupId=10181 (2019). Accedido el 30 de marzo de 2021.
6. Failche, E.; Katzkowicz, N.; Machado, A.: La educación en tiempos de pandemia y el día después: El caso de Uruguay. *Revista Internacional de Educación para la Justicia*, vol. 9, No. 3. (2020)
7. Consejo de Educación Secundaria. Actividades relacionadas con la culminación de los cursos: Instancias de evaluación y acreditación. https://www.ces.edu.uy/files/22-3.PDF (2020). Accedido el 30 de marzo de 2021.

8. Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M.: Determinación del perfil de los ingresantes a la universidad, en relación con las estructuras lógicas que manejan, la capacidad que poseen en el uso del lenguaje simbólico y los conocimientos previos que tienen de Cálculo Diferencial. *Reporte de investigación RELME XV*. https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf. (2020)
9. Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M.: Evolución de los estudiantes de primer año universitario, en relación con las estructuras lógicas que utilizan, el nivel de uso del lenguaje simbólico que alcanzan y su adquisición de conceptos de Cálculo Diferencial; *Reporte de investigación en VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur* (2021)
10. Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M.: Diseño y validación de un instrumento predictor del éxito académico de alumnos ingresantes a la universidad, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 17, pp. 116–129, (2004)
11. Álvarez, W; Czerwonogora, A; Gisolabella, G; Lacués, E; Leymonié, J; Pagano, M.: La matemática al ingreso en la universidad. Un estudio comparativo de cuatro Facultades en el Uruguay. *Revista Iberoamericana de Educación*, No. 42, Madrid, OEI, http://www.rieoei.org/deloslectores/1636Villar.pdf, (2007)
12. González-Espada, W; Lacués, E; Otheguy, G; Pagano, M; Pollio, A; Pérez, R; Sarasola, M.: Identifying academically at-risk incoming freshmen at a private university in Uruguay: Psychometric evaluation of a mathematics diagnostic test. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. (2019)
13. Flores, J; Lacués, E; Pagano, M.: El diagnóstico al ingreso y su impacto en los resultados académicos de los estudiantes. *EMCI XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*. (2018)
14. Freeman, J. V., Campbell, M. J.: The analysis of categorical data: Fisher's exact test. *Scope*, *June*, 11–12, (2007)
15. Lehmann, E. L., Romano, J. P.: Testing statistical hypothesis. *Springer*, (2005).
16. Millard, Steven P.: *Package EnvSats* (2.4.0) [Computer software]. https://cran.r-project.org/web/packages/EnvStats/EnvStats.pdf. (2020). Accedido el 30 de marzo de 2021.
17. Millard, S. P.: EnvStats: An R package for environmental statistics. Springer, (2013)
18. Garrido, G.: La pandemia profundizó las brechas entre las condiciones educativas y laborales entre el sector público y el privado, y el tema está lejos de resolverse / Entrevistada por Amanda Muñoz. *La Diaria* https://ladiaria.com.uy/salud/articulo/2020/11/la-pandemia-profundizo-las-brechas-entre-las-condiciones-educativas-y-laborales-entre-el-sector-publico-y-el-privado-y-el-tema-esta-lejos-de-resolverse/, (2020, noviembre 10). Accedido el 30 de marzo de 2021

Una experiencia educativa en entornos virtuales con estudiantes ingresantes a carreras de Facultad de Ingeniería

Estefanía Laplace[1], Ana Mabel Juárez[2], María José Bouciguez[2]

[1] GIASU, Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Av. Del Valle 5731, Olavarría, Buenos Aires, Argentina
elaplace@fio.unicen.edu.ar

[2] GIDCE. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Av. Del Valle 5731, Olavarría, Buenos Aires, Argentina
{mjuarez, mjbouci}@fio.unicen.edu.ar

Resumen. El presente trabajo describe una experiencia educativa en entornos virtuales con los estudiantes ingresantes que eligen continuar sus estudios en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Se trata de la implementación del Programa Institucional para Ingresantes en modalidad virtual. Los objetivos de este Programa son acompañar a los estudiantes en la adaptación al ámbito universitario, acercarlos a la realidad de la carrera elegida como así también ofrecerles espacios de trabajo presenciales y virtuales para desarrollar actividades de matemática, de resolución de problemas, de lectura-escritura y oralidad, con el acompañamiento de docentes de distintas áreas de conocimiento y otros profesionales de la institución. Al finalizar la experiencia se recabó información sobre las percepciones de los estudiantes y docentes sobre el aprendizaje y la enseñanza en la modalidad virtual.

Palabras Clave: Programa para Ingresantes, Virtualidad, Enseñanza, Aprendizaje

1 Introducción

El Programa Institucional para Ingresantes (PII) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN) es una propuesta innovadora que pretende contribuir a que los estudiantes desarrollen las capacidades necesarias para afrontar las exigencias de este nivel tanto en el plano académico como socio-personal, con la participación de distintos actores de la comunidad de la Facultad quienes comparten la idea de que el PII es una parte sustantiva de la formación de los futuros profesionales. Es un programa que plantea diferentes actividades a los estudiantes con la intención de acercarles información sobre las carreras en las que se inscribieron, de ofrecerles espacios de trabajo presenciales y virtuales para revisar temas de matemática, desarrollar algunas estrategias básicas de resolución de problemas y de lectura-escritura y oralidad. En estas actividades participan docentes de distintas áreas de conocimiento y de todos los años de formación de las carreras y otros profesionales de la institución. Esta característica del Programa lo transforma, institucionalmente, en un espacio interdisciplinario de trabajo propicio para generar y alimentar la reflexión sobre la práctica docente [1].

Los objetivos generales del Programa son:

- Fortalecer competencias básicas para el desempeño como estudiantes universitarios.
- Mejorar las condiciones de acceso y de permanencia de los estudiantes.

- Generar y consolidar equipos interdisciplinarios de docentes y otros profesionales de todos los Departamentos de la Facultad.

En el marco del Programa se trabaja en dos ejes cada uno de los cuales se organiza y desarrolla a través de distintos espacios.

a) Eje Introducción a la vida universitaria y a las carreras de la FIO. Este eje está integrado por el Espacio de Orientación y Ambientación (EOyA) y el Espacio de Introducción a las Carreras (EIC).

Los objetivos de cada espacio son:

EIC: Reconocer el campo profesional de la carrera elegida y sus aplicaciones, identificar los problemas propios de la profesión, disponer de herramientas para el abordaje de problemáticas sencillas, identificar la implicación profesional en el desarrollo económico y social del país.

EOyA: Conocer las trayectorias sociales y educativas anteriores de los jóvenes. Revisar, construir y anticipar biografías, proyectos, roles y potencialidades estudiantiles para el inicio de un proyecto educativo. Aproximarse, a través del contacto con sus pares, a la vida universitaria en relación con el conocimiento de los espacios de participación de los estudiantes.

b) Eje Conocimientos específicos. Este eje está integrado por el Espacio de Formación Matemática (EFM), el Espacio de Formación en Resolución de Problemas (EFRP) y el Espacio de Formación en Lectura-Escritura- Oralidad (EFLEO).

Los objetivos de cada espacio son:

EFM: Ofrecer a los estudiantes un espacio adecuado de revisión ordenada, consolidación del conocimiento y aprendizaje de los fundamentos matemáticos imprescindibles para desarrollar otros nuevos. Brindar a los estudiantes un espacio para continuar desarrollando capacidades de pensamiento (razonar lógicamente, resolver problemas, mejorar la lectura e interpretación de las consignas de trabajo) y adquirir estrategias para aprender a estudiar, acercándose a las formas de trabajo en la Universidad.

EFRP: Ofrecer a los estudiantes un espacio adecuado para revisar y ampliar la propia concepción de lo que es un problema y de lo que significa resolver un problema. Resolver problemas sencillos aplicando estrategias variadas.

EFLEO: Instalar la comunicación como herramienta de trabajo académico. Desarrollar hábitos que enriquezcan las capacidades de los estudiantes para la lectura, la escritura y la oralidad. Estimular el espíritu crítico y la posibilidad de defender las ideas propias.

Este Programa está pensado para un estudiante presente, bien predispuesto a participar activamente de las actividades planteadas en el aula, que se siente motivado, que elige estar y tiene ganas de aprender. Esto conlleva

que los docentes se comprometan por conseguir que el estudiante tenga un rol activo en el desarrollo de todas las actividades de aprendizaje, en momentos presenciales y no presenciales, y un compromiso personal indelegable con su propio aprendizaje. La propuesta pedagógica y metodológica que se adopta apunta a que todas las instancias se transformen en oportunidades de aprendizaje para que los estudiantes desarrollen las que se consideran competencias adecuadas para lograr un buen desempeño en la carrera elegida.

Desde el año 2015 se viene implementando el PII *en forma presencial con apoyo de su propia aula virtual*. Todos los espacios de trabajo cuentan con aulas virtuales en Facultad de Ingeniería Virtual con el fin de ofrecer a los estudiantes un espacio de oportunidades que ayuden a mejorar los aprendizajes, favorecer la comunicación entre ingresantes – docentes - materiales, considerando que dicha vinculación contribuye en la construcción social del conocimiento y disponer de un lugar donde se proponen actividades, autoevaluaciones y encuestas que dan información inmediata para realimentar la enseñanza y el aprendizaje.

La pandemia causada por el COVID-19 impactó en la forma en la cual se desarrollaban todas las actividades de nuestras vidas y, en especial, el sistema educativo fue uno de los ámbitos más afectados. Las condiciones en las que los estudiantes estuvieron aprendiendo durante el ciclo 2020 han cambiado radicalmente. También, la tarea pedagógica fue compleja y desigual.

En este marco, de aislamiento social e interacción mediada por la virtualidad, organizar y llevar adelante el PII 2021 implicó enfrentar un gran desafío. Conllevó pensar de qué manera y con qué herramientas pedagógicas-tecnológicas asumir un cambio de modalidad puramente virtual en el proceso de enseñanza y aprendizaje, qué modificaciones debían realizarse en dirección de los objetivos del Programa, cómo atender el perfil de los nuevos ingresantes, sus expectativas, intereses, sus experiencias previas y sus nuevos modos de aprender. Se debía repensar el rol docente, cuáles serían las estrategias de trabajo más convenientes, qué recursos serían los más apropiados para motivar a los ingresantes y, así, contribuir de manera favorable al desarrollo de las actividades y por lo tanto del aprendizaje. Si bien el PII ya tenía su propio espacio virtual en la plataforma institucional Facultad de Ingeniería de Olavarría Virtual (FIO Virtual), implementarlo exclusivamente a través del mismo requería capacitación y formación de todos los responsables en el uso y gestión de los recursos tecnológicos para garantizar los procesos educativos y contribuir a la adaptación de los estudiantes al ámbito universitario.

La primera acción fue solicitar apoyo institucional, al equipo que se ocupa de la operatividad de la Plataforma FIO Virtual, a los integrantes del Programa Institucional Educación y Comunicación con Tecnologías (EDU.COM), quienes asesoran y capacitan sobre: uso de herramientas digitales y de la plataforma FIO Virtual (considerando utilidades y configuraciones de moodle que no habían sido utilizadas años anteriores). Este equipo se ocupó del seguimiento y supervisión de las tareas a través de reuniones virtuales, asistencia técnica, entre otras.

En este trabajo se describe la puesta en práctica del PII en modalidad virtual. Se comparten las principales acciones y algunos resultados obtenidos de una encuesta de opinión administrada a estudiantes y docentes al finalizar el Programa.

2 Fundamentos teóricos

En forma sintética, presentamos algunos de los fundamentos teóricos que guiaron el diseño y orientan el desarrollo del PII. Se adopta una postura de enseñanza y de aprendizaje constructivistas, según la cual la enseñanza debe centrarse en los estudiantes para que se sientan parte de un grupo o una comunidad en el ámbito universitario. Si bien aprender es un trabajo personal que requiere disponibilidad, compromiso y entusiasmo, se trata de un proceso que se inicia en el plano interpersonal y se enriquece fuertemente cuando se aprovecha la potencialidad del grupo. contando con la guía permanente de los docentes.

La evaluación de los aprendizajes es entendida en este Programa como una parte fundamental del proceso de aprendizaje, que ayuda a los docentes a conocer en qué medida se cumplen los objetivos propuestos, esto es: que los estudiantes cuenten con los conocimientos básicos para transitar en su carrera universitaria y por otra parte, que los estudiantes sepan cuáles son aquellos aspectos que han desarrollado adecuadamente y cuáles aún deben continuar revisando. El trabajo continuado de evaluación que sea posible realizar durante el desarrollo del programa apunta también a la autoevaluación y a desarrollar la metacognición [2]. En tal sentido es indispensable que los instrumentos de evaluación sean adecuados a dicho fin y que exista una instancia posterior a la evaluación en la que se comparta con todos los estudiantes involucrados la información surgida, que les sirva para conocer sus fortalezas y debilidades a la hora de iniciar su formación en la Universidad [3].

Con respecto a las condiciones que se espera hayan desarrollado los ingresantes para iniciar estudios en la universidad, una importante guía son las competencias de ingreso a las que el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) [4] ha adherido. Además, CONFEDI recomienda un enfoque de enseñanza centrada en el estudiante, sugiere capacitación docente para mejorar las acciones en ese sentido y plantea el papel del docente en el aula, no dictando una clase magistral sino un grupo de estudiantes y docentes trabajando colaborativamente en una tarea de proyecto y/o diseño, similar a lo harán en un futuro como profesionales.

Paralelamente, los ingresantes actuales tienen características propias que los docentes debemos reconocer para adoptar e implementar estrategias de enseñanza que permitan favorecer el aprendizaje. Siguiendo a [5], existe una nueva generación de estudiantes que crece rodeada de laptops, WiFi, videojuegos, mensajes de texto, tabletas y celulares. Es una generación que tiene la posibilidad de acceder a una cantidad significativa de información en segundos. [6] resumen las características de esta generación considerándolos abiertos al uso de la Tecnología de la Información y Comunicación (TIC); rápidos, impacientes, fuertes e interactivos, intuitivos y creativos.

Para tener éxito en el proceso enseñanza-aprendizaje con estos nuevos estudiantes, el docente necesita conocer sus fortalezas, debilidades, retos e intereses ya que es el responsable de crear las condiciones para garantizar el proceso educativo [7]. [8] afirma que el docente debe disponer de competencias digitales pero sobre todo una intensa mirada creativa para convertir los espacios virtuales en verdaderas comunidades de aprendizaje. Concibe al docente como diseñador de escenarios flexibles de enseñanza y aprendizaje.

A partir de esta visión el PII tiene su aula virtual como un espacio creado con la intencionalidad de que los estudiantes tengan experiencias de aprendizaje mediadas por recursos tecnológicos con materiales y propuestas de actividades formativas digitales bajo la supervisión e interacción de un profesor [9]. Es necesario agregar que la selección de los recursos y las acciones que se lleven a cabo deben fundamentarse acorde a un modelo de enseñanza y aprendizaje para alcanzar los objetivos propuestos de aprendizaje.

3 La experiencia

La experiencia educativa en entornos virtuales se realizó en el marco del Programa para Ingresantes de la Facultad de Ingeniería de la UNICEN. Participaron 203 estudiantes ingresantes a las carreras de Ingeniería, Profesorado en Química, Licenciatura en Tecnología de los Alimentos y Tecnicatura Universitaria en Electromedicina.

Para trabajar con los estudiantes se utilizaron la Plataforma FIO Virtual (con tecnología Moodle) y las aplicaciones Zoom y Google Meet. Los integrantes del Programa Institucional EDU.COM participaron en la etapa previa de preparación del PII y durante su desarrollo asistiendo, capacitando y solucionando todos los inconvenientes que surgían en la dinámica diaria.

La primera decisión estuvo relacionada con la incorporación de los estudiantes a la plataforma FIO Virtual con la anticipación necesaria para realizar actividades de aprestamiento de acceso y uso de la plataforma antes del inicio de las clases.

Otra participación importante e imprescindible fue la del Programa Institucional de Tutorías. Los docentes y alumnos tutores intervinieron y acompañaron a los ingresantes atendiendo sus consultas y asistiendo a quienes presentaban dificultades de conexión o escaso manejo de recursos tecnológicos.

3.1 Organización general. Trabajo con los ingresantes

El Programa se desarrolló durante 5 semanas a través de sus diferentes espacios en encuentros sincrónicos y asincrónicos. Se utilizaron las aplicaciones Zoom o Google Meet para las reuniones sincrónicas. Todas las actividades asincrónicas se dieron a través de la Plataforma FIO Virtual (comunicaciones a través de foros y mensajería privada, entrega de trabajos, presentación de materiales digitales, etc.). Algunos espacios usaron, además, las redes sociales o grupos de WhatsApp para la interacción entre docentes y estudiantes, entre grupos de estudiantes y entre equipos docentes para organizar el trabajo.

La carga horaria se distribuyó de la siguiente manera: tres encuentros sincrónicos semanales para el EFM que demanda mayor tiempo la revisión de los contenidos y un encuentro por semana para los espacios restantes.

Para que el proceso educativo resulte exitoso y fortalecer la comunicación con los estudiantes, se organizaron 10 comisiones con un número reducido de estudiantes, alrededor de 25, para trabajar en los Espacios de Formación. A su vez, cada comisión disponía de un equipo formado por 2 o 3 docentes para los encuentros sincrónicos, atender las consultas en los foros, corregir actividades, etc.

Los estudiantes debían asistir como mínimo al 80% de los encuentros sincrónicos programados de cada espacio.

En el Espacio de FM el equipo se ha conformado, en su mayoría, por docentes de los dos primeros años de las carreras. En los Espacios de formación en LEO y RP participaron profesionales que se desempeñan en el ciclo superior de las carreras, que hacen aportes interesantes por sus experiencias con estudiantes avanzados. Completan los equipos docentes de cada espacio y comisión de trabajo estudiantes avanzados que se desempeñan como auxiliares alumnos de esta Facultad.

En el espacio de IC las comisiones se conformaron según la carrera que eligieron cursar. Estos grupos fueron más numerosos en la mayoría de las carreras y los equipos docentes utilizaron diversas y variadas estrategias que consideraron adecuadas para alcanzar los objetivos del espacio. Los grupos docentes estuvieron conformados por los coordinadores de carrera y otros docentes del área. Los contenidos de este espacio forman parte del Seminario de introducción a la ingeniería, un requisito del plan de estudios, lo que suma un ingrediente adicional a la motivación de los ingresantes a estas carreras.

El espacio de OyA propuso un tema de discusión y reflexión diferente por encuentro semanal, en tres horarios, con las profesionales del Departamento de Orientación y Bienestar de la Facultad. Los estudiantes eligieron unirse a las clases sincrónicas en distintos momentos, según su conveniencia, por lo que la conformación de los grupos fue desigual pero interesante para trabajar.

3.2 Rediseño del aula virtual

El aula virtual del Programa se pensó como *la puerta de entrada* al PII; los ingresantes podían acceder y navegar antes del comienzo del Programa. Esto llevó a tomar decisiones importantes relacionadas con el diseño de este espacio y qué recursos elegir para la comunicación. Se usaron documentos PDF e imágenes para transmitir información sobre la conformación de las comisiones, horarios de los encuentros sincrónicos de los distintos espacios, material disponible, entre otros. Para enriquecer el aula virtual se agregaron videos tutoriales para la presentación del Programa, sus objetivos y su dinámica de trabajo en general. También se usaron videos para describir de forma minuciosa la modalidad de trabajo especialmente en el EFM, los diversos recursos y las actividades propuestas (integradoras y de evaluación).

El EIC tuvo su propia aula virtual para organizar el trabajo con los ingresantes ya que como participantes estaban agrupados de acuerdo a la carrera en la que estaban inscriptos.

3.3 Rediseño y elaboración de materiales

Para trabajar en el EFM se elaboró un material con temas de Matemática en formato digital interactivo formado por notas teóricas, ejemplos ilustrativos, applets en GeoGebra, actividades virtuales, links al software GeoGebra, entre otros. Este material ha permitido llevar al aula una modalidad de trabajo diferente, más dinámica e integradora. También se han digitalizado los trabajos prácticos con ejercicios y problemas que incluyen sus respectivas soluciones y algunas resoluciones, con el fin que los estudiantes pueden ejercer el control sobre su propio trabajo, ayudándolos a la vez a desarrollar la autonomía en sus aprendizajes y avanzar en el estudio.

En los espacios de formación en LEO, RP, y en los de espacios de OyA y de IC, los materiales de trabajo (cronogramas, textos, las guías de actividades, las guías de problemas, los planes de estudio de cada carrera) fueron digitalizados y dispuestos en el aula virtual. También estos espacios integraron diversidad de recursos multimedia para el desarrollo de las clases.

3.4 Las estrategias de trabajo de los espacios de formación

En el espacio de FM la estrategia pedagógica virtual fue el *aula invertida* (flipped learning). Antes de cada encuentro sincrónico, los estudiantes consultan recursos multimedia y en los encuentros sincrónicos los docentes organizan creativas actividades individuales y colaborativas que facilitan el rol activo de los estudiantes. De este modo se busca con este modelo pedagógico favorecer la participación activa del estudiante antes, durante y después del encuentro sincrónico [10].

Para organizar la tarea con los ingresantes, en los encuentros sincrónicos y asincrónicos, se preparó un cronograma con la distribución diaria de los contenidos de las unidades temáticas, se usaron *Guías de trabajo* especialmente elaboradas con orientaciones para las lecturas del material digitalizado de Matemática, indicaciones de los ejercicios de cada trabajo práctico que se podían resolver asociados a la teoría y una selección de esos ejercicios propuestos para discusión y control en los encuentros sincrónicos. Los ejercicios o problemas restantes se consultaban en los foros monitoreados por los docentes en otros horarios. Esto posibilitó, a la vez, un seguimiento de la participación de los estudiantes. La metodología de trabajo pautada con los equipos docentes consistió en tres momentos para los encuentros sincrónicos. Inicialmente, indagación sobre la comprensión de los contenidos matemáticos, luego discusión de ejercicios propuestos propiciando la participación activa de los estudiantes. Finalmente, se daban orientaciones anticipando las lecturas previas propuestas en las Guías de trabajo.

Parte de la tarea asignada a los estudiantes fue la resolución de autoevaluaciones de opción múltiple y retroalimentación inmediata al finalizar cada unidad. Estas permitieron, a los estudiantes, ver los aciertos y fallos en tiempo real y ayudarlos en la construcción de un aprendizaje más sólido y autorregulado.

El EFRP propuso la resolución de un conjunto de problemas para que los ingresantes trabajen en pequeños grupos en los encuentros sincrónicos y asincrónicos. Para ello, se utilizó la herramienta de crear grupos en las aplicaciones Google Meet y Zoom. En la primera clase se presentó el espacio y se conformaron los grupos que se mantuvieron a lo largo de los 5 encuentros.

La estrategia metodológica en los encuentros sincrónicos consistió en la asignación de un problema por grupo para trabajar en sesiones/grupos separados; así pudieron interactuar entre los participantes y elaborar de forma colaborativa la resolución del problema para luego compartir los distintos abordajes y estrategias de resolución. También se propuso la resolución de problemas en forma grupal como tarea para las clases siguientes. Se crearon foros de intercambio para las consultas y debates entre alumnos y docentes. De manera similar se planteó la evaluación final del espacio, con defensa oral sobre lo realizado con el objetivo de contribuir a desarrollar y fortalecer habilidades de comunicación. La producción grupal debía incluir un protocolo justificando los procedimientos utilizados en la resolución de la problemática y enviarse a través de la plataforma.

Para el EFLEO fue un gran desafío abordar la comunicación en la virtualidad. Cada docente utilizó distintas estrategias de acuerdo al grupo de estudiantes. Se plantearon actividades de producción y análisis de textos [11]. Para la evaluación del espacio se solicitó la elaboración de un ensayo final con entrega a través de la plataforma.

4 Algunos resultados y discusión

Si bien los resultados de la implementación del Programa en entornos virtuales admiten diversos y variados análisis, para este trabajo centraremos la atención en las valoraciones que manifestaron los estudiantes y docentes en una encuesta de opinión aadministrada luego de haber participado de esta experiencia.

La encuesta a los estudiantes estuvo constituida por 3 o 4 ítems (según el espacio) sobre distintos aspectos que tienen que ver con el aprendizaje, las estrategias de enseñanza y las relaciones que se establecieron entre las personas (docentes-estudiantes, estudiantes entre sí) en los distintos espacios de trabajo. También se les consultó sobre la organización del Programa en general. Respondieron 199 ingresantes.

Finalmente se comparten resultados de una evaluación integradora realizada en el último encuentro del EFM.

4.1 Resultados de la encuesta a los ingresantes

La Figura 1 muestra los resultados obtenidos en la encuesta a los estudiantes en relación con el EFM, reportando la distribución de frecuencias en porcentaje en cada ítem y en cada categoría de respuesta.

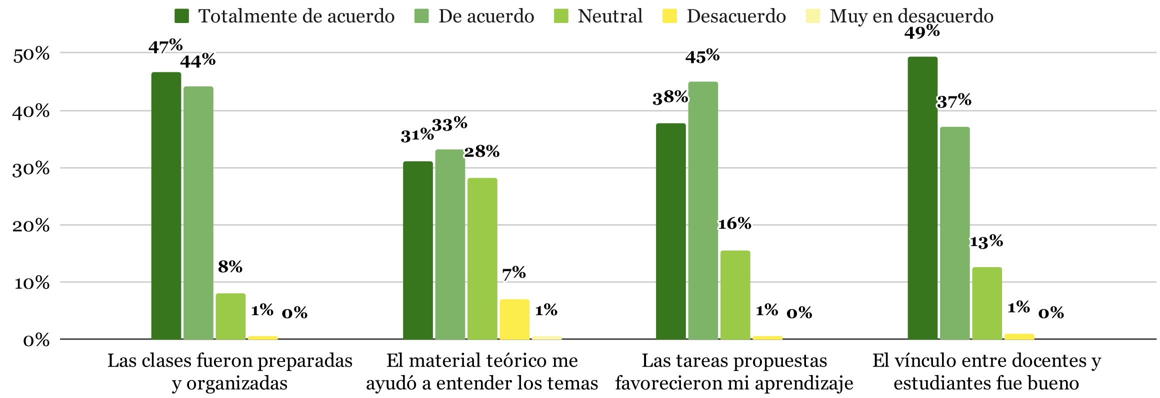


Fig. 1. Resultados de la encuesta en EFM

La mayoría de los estudiantes valoran positivamente la organización de las clases, las tareas propuestas y el buen vínculo entre docentes y estudiantes y estudiantes entre sí. Con respecto al ítem "El material teórico me ayudó a entender los temas" se interpreta, luego de analizar las respuestas dadas, que los estudiantes tuvieron que esforzarse para realizar las lecturas pautadas. Posiblemente, la lectura no es una práctica habitual. Los estudiantes manifestaron que prefieren las explicaciones tradicionales de los docentes desarrollando los temas en un pizarrón.

La Figura 2 presenta la distribución de frecuencias en porcentaje en cada ítem y en cada categoría de respuestasobre las consultas en relación con el trabajo realizado en el EFRP.

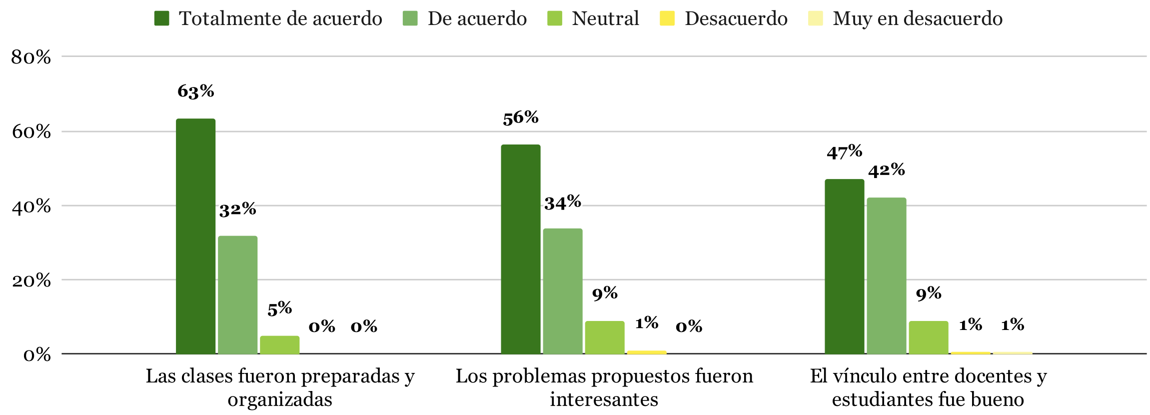


Fig. 2. Resultados de la encuesta en EFRP

En este espacio, las actividades y la metodología de trabajo fueron muy bien aceptadas por la mayoría de los estudiantes. También fue de su agrado la selección de problemas y la relación establecida entre los participantes.

La Figura 3 permite visualizar los resultados de la encuesta sobre aspectos relacionados con el trabajo en el EFLEO.

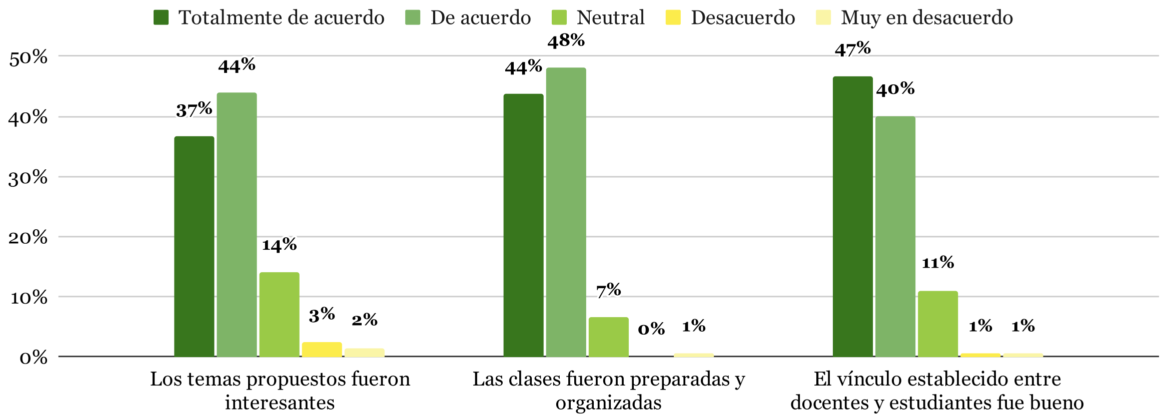


Fig. 3. Resultados de la encuesta en EFLEO

Del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, el EFLEO les genera posibilidades para aprender a discutir, expresarse en forma oral y hasta incursionar en cómo escribir un informe en el contexto de la Facultad. Al igual que en la presencialidad, se establecieron muy buenas interacciones entre los docentes y estudiantes.

La Figura 4 presenta los resultados de la encuesta en relación con el trabajo realizado en el EIC.

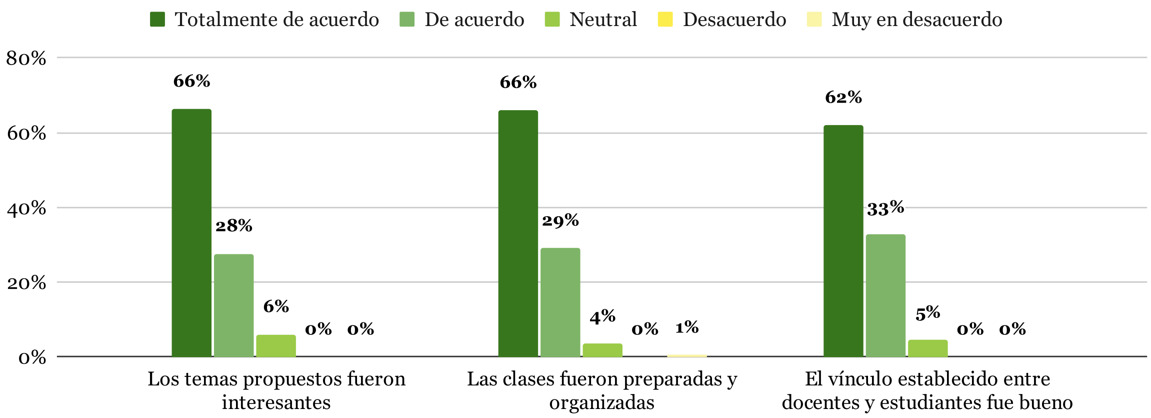


Fig. 4. Resultados de la encuesta en EIC

Los resultados revelan que la mayoría de los estudiantes están muy satisfechos con la propuesta de este espacio. Ellos manifiestan que les ayuda a confirmar la elección de la carrera y les resulta muy interesante intercambiar con profesionales de la especialidad.

Finalmente, en la Figura 5 se presentan los resultados de las consultas en relación con el EOyA.

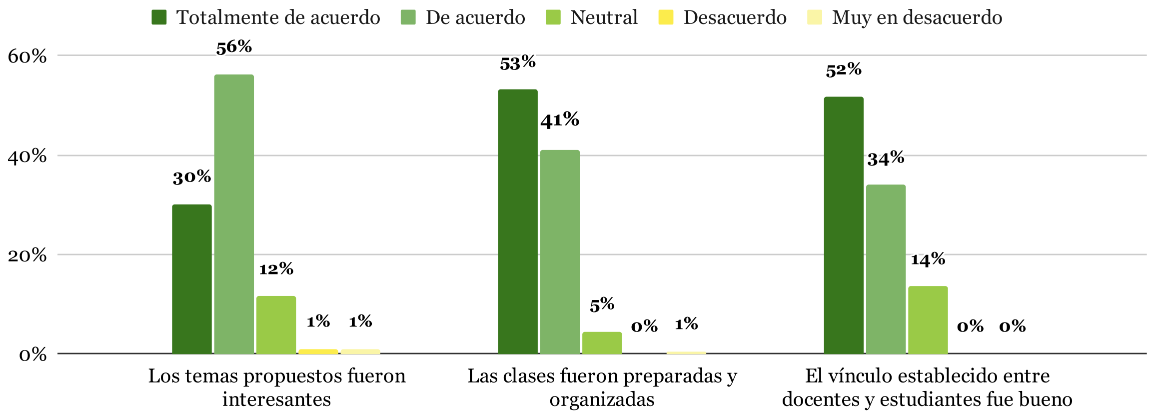
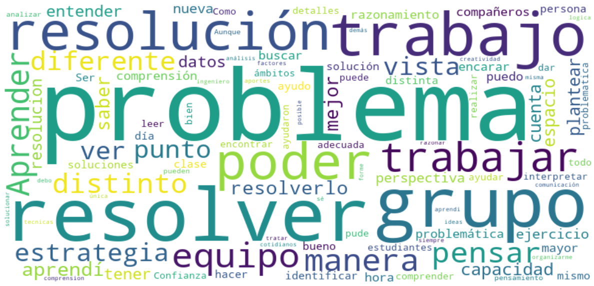


Fig. 5. Resultados de la encuesta en EOyA

La mayoría de los estudiantes valoran positivamente la dinámica planteada y el buen vínculo logrado entre los participantes. Del análisis de las respuestas dadas, los estudiantes expresan que el EOyA les aporta estrategias de estudio, conocimiento acerca de la organización de la Universidad, un espacio para socializar, recomendaciones para la adaptación a la vida universitaria, entusiasmo para estudiar, confianza y motivación, entre otras opiniones.

Con respecto al ítem de la encuesta sobre la organización del Programa en general, la mayoría de los estudiantes manifestaron haber estado muy satisfechos. Interpretamos que la planificación anticipada y el acompañamiento del Programa EDU.COM han favorecido su implementación virtual.

En la misma encuesta, se solicitó a los estudiantes que enumeren dos aportes obtenidos en cada uno de los espacios. Se puede ver, en cada nube de palabras, aquellos que aparecieron con mayor frecuencia en las respuestas de los ingresantes.



a) Espacio de Formación en Resolución de Problemas

b) Espacio de Formación en Lectura, Escritura y Oralidad

c) Espacio de Formación en Matemática

d) Espacio de Introducción a las Carreras

e) Espacio de Orientación y Ambientación

Fig. 6. Respuestas de los estudiantes sobre los aportes obtenidos en cada espacio del Programa.

Puede observarse en la Figura 6 que en cada nube de palabras se destacan aquellas que son más significativas en cuanto a los objetivos que describen cada uno de los espacios que conforman este Programa.

4.2 Resultados de la encuesta a los docentes

Los docentes fueron consultados sobre los puntos débiles y fuertes del desarrollo de su espacio de trabajo en la virtualidad. Contestaron la encuesta el 30% de los que participaron del Programa.

Se destacan como aspectos positivos: "Los estudiantes tuvieron más tiempo para realizar las actividades y asistir a las clases sincrónicas con consultas"; "Es una innovadora y nueva posibilidad para trasmitir conocimientos, mediante imágenes, textos, sonido"; "El ritmo de estudio se amolda de acuerdo a los horarios que más le conviene al estudiantado"; "... permitió entrevistas con graduados o estudiantes que no estaban residiendo en Olavarría"; "Los estudiantes aprendieron a compartir un vídeo por YouTube o drive"; "Fue posible una interacción directa con cada uno de los grupos de trabajo de la comisión"; "Una experiencia de trabajo en equipo entre docentes para pensar estrategias para motivar la participación de los estudiantes", entre muchas otras.

Entre los aspectos débiles la mayoría de los docentes manifiesta que: "Los estudiantes mantuvieron sus cámaras apagadas siendo un obstáculo para conocerlos, disminuyendo las posibilidades para acompañarlos en el proceso de aprendizaje y motivarlos en las actividades"; "La falta de contacto que caracteriza la presencialidad"; "El acompañamiento individual se hace dificultoso";"Poca participación en los foros de consultas"; "Muchos estudiantes no prendían sus cámaras y no tenían interacción fluida aunque esto se revertía cuando se los dividía en grupos"; "Timidez a la hora de participar en la clase"; “La duda si prestan atención todo el desarrollo de la clase”, entre muchas otras.

4.3 Evaluación del Espacio de Formación Matemática

Al finalizar la revisión de los temas de Matemática los ingresantes desarrollaron una evaluación final. Uno de los objetivos de esta evaluación fue delinear un diagnóstico de las fortalezas y debilidades de los ingresantes previo al cursado de las primeras asignaturas.

En este nuevo contexto fue necesario repensar la estrategia de evaluación habitual (en tiempos de presencialidad) teniendo en cuenta que los estudiantes disponían de aplicaciones para resolver ejercicios tradicionales de Matemática y podían couminarse con los compañeros en las redes sociales.

Se diseñó un cuestionario con 6 problemas/preguntas conceptuales de opción múltiple intentando que las aplicaciones como Photomath o GeoGebra no les devolviera la respuesta inmediata. Planteamos actividades con enunciados muy sencillos, tomadas de un amplio banco de preguntas elaborado especialmente, para que realizaran algunos procedimientos elementales. Estos desarrollos se enviaron luego por el recurso tarea de la Plataforma FIO Virtual.

En la evaluación final estuvieron presentes 201 estudiantes. Los resultados inmediatos, obtenidos de las respuestas del cuestionario, se muestran a continuación. Aún falta analizar las producciones de los estudiantes enviadas por la plataforma.

En el siguiente gráfico se muestran los resultados de la evaluación final.

El 58% de los ingresantes ha logrado un nivel aceptable de respuestas correctas (61/100 puntos o más) a los ejercicios propuestos, como lo muestra la Figura 7.

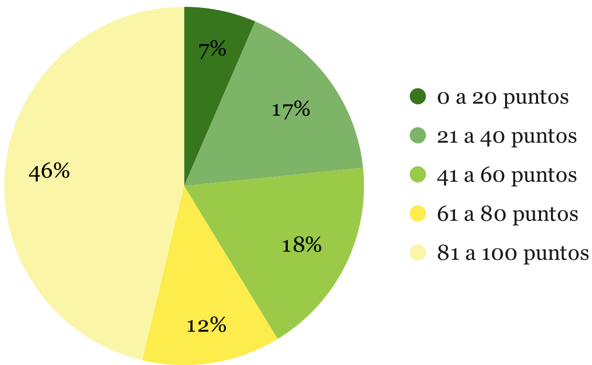


Fig. 7. Resultados de la Evaluación Integradora en EFM

Para interpretar los resultados del nivel aceptable de respuestas correctas debería analizarse y contrastar con las producciones de los estudiantes enviadas por la plataforma, trabajo que será elaborado y presentado en otra oportunidad.

5 Conclusiones

A modo de reflexión final se puede decir que esta experiencia educativa en entornos virtuales, obligada por el contexto de pandemia, llevó a modificar las prácticas de enseñanza y aprendizaje, en relación con la modalidad presencial; incorporar nuevos enfoques y abordajes acerca de cómo enseñar y aprender; pensar en cómo mejorar el vínculo entre docentes y estudiantes mediados por la virtualidad, resignificar el rol del docente y también de los estudiantes, valorar y usar las herramientas tecnológicas que ya teníamos disponibles y que hoy estamos convencidos nos permiten acceder a la educación, desarrollar estrategias colaborativas para producir conocimiento e innovar en las prácticas de evaluar.

Finalmente, concluimos que la educación va hacia la virtualidad. Nuevas modalidades de desarrollo de los procesos educativos van a plantear, no solo la presencialidad como requisito sino también, el diseño de nuevas estrategias de enseñanza con herramientas tecnológicas que impacten optimizando el aprendizaje de conocimientos específicos de matemática y otros relacionados con la carrera.

Referencias

1. Juárez, A.M.; Rocha, A.; Bouciguez, B.: Un Programa Integrador para Estudiantes Ingresantes y Docentes. *VII Jornadas Nacionales y III Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico - Tecnológicas* (2020)
2. Palou de Maté, M.: La evaluación de las prácticas docentes y la autoevaluación. Camilloni, A.; Celman, S.; Litwin, E. y Palou de Maté, M.: *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico*. Editorial Paidós, pp. 93-132 (1998)
3. Camilloni, A.: La calidad de los programas de evaluación y de los instrumentos que los integran. Camilloni, A.; Celman, S.; Litwin, E. y Palou de Maté, M.: *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico*. Editorial Paidós, pp. 67-92 (1998)
4. CONFEDI: Competencias en Ingeniería. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf (2014). Accedido el 3 de Marzo de 2020
5. Kapil, Y.; Roy, A.: A critical evaluation of generation z at workplaces. International Journal of Social Relevance & Concern, Vol. 2, No. 1, pp. 10-14 (2014)
6. Fernández-Cruz, F. J.; Fernández-Díaz, M. J.: Generation z's teachers and their digital skills. Comunicar. https://www.revistacomunicar.com/index.php?contenido=detalles&numero=46&articulo=46-2016-10. Accedido el 15/10/2018
7. Gúzman, J. C.: ¿Qué y cómo evaluar el desempeño docente? Una propuesta basada en los factores que favorecen el aprendizaje. Propósitos y Representaciones. http://revistas.usil.edu.pe/index.php/pyr/article/view/124. (2016). Accedido el 30 de Noviembre de 2020
8. Ruiz Díaz, F.; Parrilli, M.L.: Sobre flexibilidad Educativa y el Rol Docente. Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales. http://laboratorios.fi.uba.ar/lie/Revista/articulos.htm (2015). Accedido el 30 de Noviembre de 2020
9. Area Moreira, M.; Adell, J.: E-Learning: Enseñar y aprender en espacios virtuales. De Pablos. J.: Tecnología Educativa. La formación del profesorado en la era de Internet. Aljibe, Málaga, pp. 391- 424 (2009)
10. Aguilera-Ruiz, C.; Manzano-León, A.; Martínez-Moreno, I.; Lozano-Segura, M.C.; Casiano Yanicelli, C.: El Modelo Flipped Classroom. International Journal of Developmental and Educational Psychology. https://www.redalyc.org/pdf/3498/349853537027.pdf. (2017). Accedido el 30 de Octubre de 2020
11. Carlino, P.: Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica. Buenos Aires: Fondo de cultura económica. https://www.aacademica.org/paula.carlino/3. (2005). Accedido el 30 de Noviembre de 2019

Articulación Escuela-Universidad: Prácticas de Lectoescritura como Andamiaje Cognitivo para el Desarrollo de Competencia Matemática

Graciela E. Yugdar Tófalo, María Alicia Gemignani, Magalí J. Soldini, Gustavo de Dios Pita

Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional
Almafuerte 1033, Paraná, Entre Ríos, Argentina
gyugdar@frp.utn.edu.ar, alicia.gemignani@frp.utn.edu.ar, magali.soldini@gmail.com.ar, gdpita@frp.utn.edu.ar

Resumen. Las dificultades de los estudiantes relativas al desarrollo de la competencia matemática en los últimos años de la escuela secundaria y al momento del ingreso a la universidad ponen de manifiesto la necesidad de recurrir a diferentes marcos teóricos o abordajes metodológicos de otros campos que puedan proporcionar caminos alternativos para superar la problemática. En este sentido, la implementación de prácticas de lectura y escritura dentro de la clase de Matemática pueden no sólo mejorar estas prácticas en sí, sino también actuar como mediadoras de la actividad cognitiva de los estudiantes. La presente ponencia presenta un abordaje metodológico centrado en la teoría de la Enseñanza para la Comprensión, el Aprendizaje Basado en Problemas y las prácticas de lectura y escritura como herramientas de mediación cognitiva para el desarrollo de la competencia matemática.

Palabras Clave: Enseñanza para la Comprensión, Aprendizaje Basado en Problemas, Prácticas de lectura y Escritura.

1 Introducción

Tanto en la escuela secundaria como en la universidad, la clase de Matemática suele ser un espacio cargado de ansiedad y obstáculos de diferente naturaleza que resultan en bajos niveles de desempeño en los estudiantes. En la escuela secundaria, los últimos resultados de la Prueba APRENDER en Entre Ríos informan que en Matemática "el 29,7% de los estudiantes alcanzan niveles de desempeño Satisfactorio/Avanzado, y el 40,6% de los estudiantes se encuentra por debajo del nivel básico" [1]. En la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Paraná (UTN-FRP) existe una deserción inicial del 25 % de los estudiantes en general para luego pasar a un abandono del 53% en Álgebra y Análisis Matemático durante el primer año de cursado de las carreras en ingeniería. Esta situación no se limita al contexto local y es ampliamente discutida en la literatura, en la que se ponen de manifiesto las diferentes acciones de articulación entre los dos niveles y los dispositivos de ingreso, permanencia y egreso de la Universidad.

La UTN-FRP y el Consejo General de Educación de la Provincia de Entre Ríos vienen realizando actividades de articulación desde el año 2004, que se han visto profundizadas a través de la presentación conjunta de proyectos de articulación para las convocatorias 2017, 2018 y 2019 de la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) de la Nación al Programa NEXOS: Proyectos de Articulación Escuela Secundaria–Universidad. Una de las actividades realizadas se centra en el desarrollo de una propuesta didáctica que permita un abordaje de la enseñanza de la Matemática dentro del marco de la Enseñanza para la Comprensión y el Aprendizaje Basado en Problemas, en la que las prácticas de lectura y escritura son introducidas no sólo por la necesidad de abordar estas prácticas desde toda disciplina [2], sino como mediadoras de la actividad cognitiva de los estudiantes y así favorecer un currículum para desarrollar el pensamiento.

La propuesta intenta abordar la problemática por parte de los docentes desde el lugar real en el que los estudiantes, tanto de escuela secundaria como de universidad, se encuentran al momento de acceder a un determinado nivel y así dejar de lado el argumento "ya lo tendrían que saber", que solamente logra desligar de responsabilidades a quien lo emite, sin aportar un avance hacia prácticas genuinas que redunden en aprendizaje para los estudiantes. Resnick y Klopfer [3] señalan que "las habilidades de pensamiento están íntimamente vinculadas con el aprendizaje exitoso incluso de los niveles más elementales de lectura, matemática y otras materias. La investigación cognitiva sobre el aprendizaje de habilidades básicas como la lectura y la aritmética revela que el cultivo de los aspectos claves de estos procesos de pensamiento debe ocupar todo el currículum escolar, para todos los alumnos, desde los primeros grados". A través de las prácticas de lectura y escritura en el marco propuesto, los estudiantes son acompañados en los procesos de pensamiento que caracterizan a la competencia matemática ya sea, profundizando el nivel de desempeño de aquellos estudiantes que han recibido ese tipo de andamiaje, o incorporando a aquellos estudiantes que no han transitado los aspectos claves que dan lugar a mayores niveles de actividad cognitiva.

2 Marco teórico: de competencia matemática a prácticas de lectura y escritura

El desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes no resulta una tarea sin desafíos puesto que demanda un alto nivel de esfuerzo y de tolerancia a lo desconocido por parte de los estudiantes desde temprana edad. Resnick y Klopfer [3] señalan que "la tarea del docente consiste en ayudar a los niños a aceptar el desafío, a construir un aula donde el encarar lo no familiar no resulte demasiado amenazador y ayudar a los niños a que quieran resolver problemas matemáticos a pesar del esfuerzo y, quizá, de las dificultades que impliquen". Si a estos aspectos señalados, de carácter principalmente afectivo, se le suma el hecho de que no todos los estudiantes han sido acompañados a lo largo de su trayectoria escolar para desarrollar lo que la competencia matemática involucra, la tarea del docente y de los estudiantes en los últimos años de la secundaria y en los primeros de la Universidad se vuelve de alta complejidad.

Ahora bien, ¿qué involucra la competencia matemática? Para Niss [4] poseer competencia matemática significa comprender, hacer, usar Matemática, a la vez que se tienen opiniones bien fundadas y se tiene conocimiento sobre la misma, en una variedad de situaciones y contextos en los que la Matemática juega o puede jugar un rol. Asimismo, Niss sostiene que la competencia matemática (como concepto amplio) está conformada por diferentes competencias (o sub-competencias, capacidades) que son partes constitutivas de la competencia matemática general. En esta distinción de sub-competencias dentro de la competencia general, Niss describe dos grandes grupos de competencias que, a su vez, contienen cuatro sub-competencias cada uno:

1. La habilidad para preguntar y responder preguntas en y con la Matemática:

- *Competencia de pensamiento matemático* (comprender la génesis, alcance, y limitaciones de ciertos conceptos; abstraer conceptos, generalizar resultados; distinguir diferentes objetos matemáticos; reconocer los tipos de preguntas que son características en la matemática y visión del tipo de respuestas que se esperan)
- *Competencia para formular y resolver un problema matemático* (detectar, formular, delimitar y especificar problemas matemáticos, puros o aplicados, abiertos o cerrados; poseer habilidad para resolver problemas propuestos por uno mismo u otros y, de ser posible, en diferentes formas).
- Competencia para analizar y construir modelos matemáticos relativos a otras áreas (analizar las bases y propiedades de modelos existentes y evaluar su alcance y validez; realizar modelado activo en diferentes contextos, es decir, estructurar y matematizar situaciones, manejando el modelo resultante en torno a su análisis crítico, comunicación sobre el mismo, monitoreo y control del proceso completo).
- *Competencia para razonar matemáticamente* (comprender lo que una prueba (no) es y diferenciarla de otro tipo de razonamientos; comprender la lógica detrás de un contraejemplo; descubrir las ideas principales en una prueba; idear y formular argumentos formales e informales).

2. La habilidad para hacer uso correcto del lenguaje matemático y trabajar con conceptos propios de la disciplina:

- *Competencia para representar y operar con diferentes objetos matemáticos* (comprender, decodificar, interpretar, distinguir; utilizar diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos; interpretar las relaciones entre diferentes representaciones del mismo objeto; elegir, hacer uso y alternar entre diferentes representaciones).
- *Competencia para emplear el lenguaje simbólico y sistemas matemáticos formales* (decodificar lenguaje simbólico y formal; aplicar bidireccionalmente lenguaje simbólico y lenguaje natural; manejar y utilizar declaraciones simbólicas y expresiones, incluyendo fórmulas; comprender la naturaleza de sistemas matemáticos formales).
- *Competencia para comunicar en, con y sobre la Matemática* (comprender, examinar e interpretar diferentes tipos de expresiones o textos matemáticos escritos, orales o visuales; expresarse de diferentes maneras y a diferentes niveles de precisión sobre asuntos matemáticos y a diferentes audiencias).
- *Competencia para hacer uso de los recursos y material de apoyo de la matemática,* lo que implica tener conocimiento del amplio acervo matemático (material de apoyo, bibliografía actualizada, publicaciones, software específico); desarrollar intuición y percepción acerca de las posibilidades y limitaciones de dichos recursos y utilizarlos criteriosamente.

El abordaje metodológico propuesto para llevar adelante una secuencia áulica en la que los estudiantes sean expuestos a las diferentes competencias matemáticas especificadas anteriormente se sustenta en la Enseñanza para Comprensión de David Perkins. Este autor explora la comprensión como meta a ser alcanzada por nuestros estudiantes puesto que involucra más que la simple posesión de conocimientos o su utilización de manera automatizada, orientando hacia prácticas en las que los estudiantes puedan utilizar el conocimiento de manera flexible en situaciones nuevas de aprendizaje [5]. Es de destacar que esta visión no desestima la importancia de la construcción de representaciones en el aprendizaje y del rol de las rutinas y la memorización, puesto que son esenciales para que posteriores construcciones tomen lugar. En este sentido, Resnick y Klopfer [3] sostienen que si bien el aprendizaje requiere de conocimiento, éste no debería ser proporcionado directamente puesto que "antes de que el conocimiento se vuelva verdaderamente generativo (conocimiento que puede usarse para interpretar nuevas situaciones, resolver problemas, pensar y razonar y aprender), los alumnos deben elaborar y cuestionar lo que se les dice, examinar la nueva información en relación con otra información y construir nuevas estructuras de conocimiento (...) para que los conceptos esenciales y las estructuras de conocimiento organizativas se vuelvan generativas hay que evocarlas una y otra vez como formas de vincular, interpretar y explicar la nueva información".

La comprensión no se presenta de manera espontánea sino que se va desarrollando en diferentes niveles: contenidos, resolución de problemas, epistémico e investigación. La educación formal se ha focalizado por mucho tiempo en los dos primeros niveles de comprensión sin proponer instancias en las que los estudiantes puedan aprender a moverse desde la lógica que cada asignatura impone y desde su propio bagaje de conocimientos. Estos niveles parten de los elementos que hacen a las bases de una disciplina hasta los niveles más altos, que tienen que ver con cómo la disciplina se piensa y se construye a sí misma. Las clases no suelen explorar los dos últimos niveles, en los que los estudiantes aprenden a desempeñarse desde la lógica y la actividad cognitiva y meta-cognitiva que se produce dentro de una disciplina. Desde esta visión en niveles a ser profundizados, el argumento 'no sabe nada, no aprendió nada' es reemplazado por la idea de 'se encuentra en un nivel, avanzando hacia el siguiente'.

El aprendizaje como comprensión nos obliga a replantear la configuración del momento didáctico para que los estudiantes tengan oportunidad de utilizar el conocimiento flexiblemente. Resnick y Klopfer [3] consideran que "saber algo no es sencillamente haber recibido la información sino también haberla interpretado y relacionado con otros conocimientos. Ser experto no es sólo saber cómo desempeñar una acción sino también saber cuándo desempeñarla y adaptar el desempeño a las siguientes circunstancias. La mera resolución de actividades en los dos primeros niveles propuestos por Perkins no garantiza este desempeño.

Para poder dar cuenta de este estado de capacitación, resulta pertinente apropiarnos de las pautas de seguimiento o evaluación propuestas por Pozo y Pérez Echeverría [6], que pueden orientar prácticas conducentes a la comprensión progresiva con diferentes niveles de profundidad: evitar preguntas que llevan a los estudiantes a respuestas automáticas o memorizadas; diseñar actividades en las que la utilización de materiales esté permitido (apuntes, libros, etc.); proponer diferentes momentos de evaluación que abarquen una instancia diagnóstica seguida de oportunidades para que los estudiantes puedan obtener retroalimentación sobre su rendimiento; propiciar y valorar las respuestas de los estudiantes; diseñar tareas abiertas, que no lleven a una misma respuesta o que se pueda llegar a la solución de diferentes maneras.

Una estrategia metodológica que pone al estudiante en el centro de la escena para que alcance crecientes niveles de comprensión es el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), que no sólo se la reconoce para el campo de la Matemática. La situación problemática a resolver debe despertar el interés de los estudiantes, quienes deberán plantear los pasos a seguir para poder resolverla. En este sentido, Litwin [7] sostiene que "el mayor desafío para los docentes es encontrar la adecuación del problema a las posibilidades cognitivas de sus estudiantes: ni tan simple como para que lo desechen, ni tan complejo para desanimarlos". Según la autora los pasos a procurar son: "comprensión del problema, elaboración de un plan, puesta en marcha y reflexión o evaluación".

Pozo y Pérez Echeverría [6] consideran que los estudiantes pueden presentar diferentes dificultades al momento de abordar una situación problemática: "los estudiantes pueden no saber qué hacer, o no saber hacerlo o no saber cuándo y cómo hacerlo". Es decir, los estudiantes pueden no poseer los conocimientos declarativos o conceptuales, procedimentales o qué procedimientos aplicar para llevar adelante la situación por lo que los docentes deben estar atentos a las necesidades de los estudiantes para ayudarlos a transitar las diferentes etapas de manera efectiva a través del diseño de actividades de andamiaje que hagan visibles los procesos cognitivos que se deben atravesar para resolverlas favorablemente.

Tanto en el marco de la Enseñanza para la Comprensión como en el ABP la incorporación de la lectura y la escritura como prácticas integradas en las actividades de la clase resultan imprescindibles para alcanzar crecientes niveles de razonamiento y abstracción. Estas prácticas actúan como mediadoras de la actividad cognitiva de los estudiantes, utilizándose no como un fin en sí mismas sino como recursos que dan lugar a la captación, procesamiento y almacenamiento de saberes que llevan a niveles más profundos de comprensión [3].

En lo que a la lectura respecta, es imprescindible entender que cada disciplina tiene su manera de comunicarse y cabe en cada docente hacerse cargo de acompañar a sus estudiantes en las lecturas que circulan en su materia. En este sentido, Carlino [2] nos dice que "la necesidad de que los profesores nos ocupemos de orientar la lectura de los universitarios podrá ser reconocida si se toma conciencia de que esta lectura no es natural sino propia de las culturas disciplinares". Esta afirmación bien puede ser extendida a los estudiantes de escuelas secundarias para comenzar con el afianzamiento en esta práctica aún antes de comenzar los estudios superiores.

En relación con la escritura, los estudiantes deben contar con los rudimentos necesarios para poder expresar las ideas de manera fluida, dando lugar a la expresión de lo que se piensa, es decir, hacer utilización de la escritura como herramienta epistémica [2]. Se espera no sólo que los estudiantes puedan, en términos de Scardamalia and Bereiter [8] "decir el conocimiento" sino que también puedan "transformar el conocimiento". Es decir, una propuesta de escritura debe acompañar a los estudiantes en el pasaje de simplemente replicar lo que han leído a poder generar un texto nuevo que incorpore los elementos de textos estudiados (o de la situación planteada) en una producción propia. Lejos de ser una tarea sencilla, Hull [9] entiende a la escritura como "un proceso de resolución de problemas" en sí misma que debe ser considerada "un conjunto de conductas cognitivas y lingüísticas conscientes como planificar, organizar, estructurar y revisar", que se construyen socialmente, en un contexto particular, al igual que la lectura. El rol del docente en estas prácticas es esencial para acompañar al estudiante en cómo debe abordar la lectura o producción de un texto de las Ciencias Sociales o de la Matemática.

3 Propuesta didáctica

Dentro del marco teórico presentado, la propuesta didáctica que se propone incorpora actividades de lectura y escritura en diferentes momentos de un encuentro áulico. Las clases pueden comenzar con la lectura de un texto o la visualización de un video que propicia la activación de conocimientos previos y la expresión de ideas y relaciones por parte de los estudiantes. En esta etapa, el docente capta la atención de los estudiantes, recupera los saberes que se pondrán en juego en las actividades posteriores a la vez que evalúa las necesidades que se puedan presentar relativas a la revisión o enseñanza de conocimientos base. En este momento de la clase el docente busca explorar los elementos característicos del texto (en el formato que sea) para acompañar el desarrollo de la lectura, a la vez que explota su contenido para una mejor preparación de los estudiantes frente a las tareas que realizarán posteriormente.

Una vez que el contexto ha sido explorado, se presenta el problema o la situación con la que se trabajará. El docente acompaña en la lectura y "piensa en voz alta" [2], transparentando los posibles procesos cognitivos a transitar. Como alternativa para proveer un andamiaje en esta primera etapa de comprensión del problema, la lectura del problema puede ser acompañado por:

- una actividad con opciones de verdadero o falso, con justificación o la explicación de por qué todas las declaraciones propuestas son falsas
- diseño de una tabla en la que la información del texto original se transfiere a un formato nuevo
- selección de las figura o escenas que están representadas en el problema o aquellas que no son componentes del problema con su posible justificación

El valor en estas actividades de comprensión del problema está principalmente en los textos que el docente elabora para las consignas, a través de los cuales deja visible los procesos mentales subyacentes a ser desplegados y modela la manera en que la disciplina se comunica. A través de sus textos, ya sean orales o escritos, el docente modela los dos grupos de competencias matemáticas especificadas por Niss, asegurando una exploración de las mismas que ayuden a los estudiantes a alcanzar mayores niveles de comprensión. El docente redacta de manera cuidadosa posibles razonamientos, interpretaciones o justificaciones transparentando la manera en que se debería estar pensando en ese preciso momento. Asimismo, la discusión que se presenta al revisar las respuestas de los estudiantes a estas actividades representa una nueva oportunidad para hacer visibles los procesos cognitivos de manera oral en esta instancia.

Para el segundo paso propuesto por Litwin, la elaboración de un plan, los estudiantes se disponen a trabajar en pequeños grupos. Si la exploración realizada al principio de la clase muestra ciertos "gaps" o vacíos en el bagaje de saberes en los estudiantes, esta etapa puede estar acompañada por una o más actividades que demandan un creciente nivel de comprensión. Para ejemplificar:

- poner diferentes pasos a seguir en orden;
- frente a una serie de pasos propuestos, elegir y justificar cuáles procedimientos serían redundantes, innecesarios o inapropiados;
- de tres opciones con pasos a seguir, elegir cuál es la más adecuada, más eficaz, más directa;
- de dos planteos conocidos y desarrollados, que los estudiantes generen un plan de trabajo alternativo.

A través de estas instancias de lectoescritura, los docentes pueden acompañar la totalidad de los razonamientos, pasos o procedimientos requeridos para la resolución del problema, o bien concentrarse en algún aspecto recurrente a mejorar que haya sido detectado en otras instancias de práctica, dependiendo del nivel de comprensión en el que los estudiantes se encuentran. De esta manera, las actividades propuestas acompañan a los estudiantes en su actividad cognitiva a la vez que presentan diferentes formas de encarar una misma situación problemática.

Durante la tercera etapa de la situación problemática, los estudiantes trabajan sobre el plan diseñado por ellos mismos o sobre el trabajado a partir de las propuestas del docente. En este momento de la resolución, el docente se mueve entre los grupos eliminando los posibles obstáculos a través de preguntas que guían al estudiante a pensar utilizando los recursos disponibles. En este sentido, la modalidad de pregunta con tres opciones resulta una estrategia de superación de obstáculo que promueve mayor comprensión. Asimismo, en esta etapa es importante no desestimar como inapropiadas o incorrectas las alternativas de resolución que los estudiantes proveen. En este sentido, el docente primero escucha la explicación de los estudiantes y luego provee una idea disparadora o pregunta que pueda agilizar la resolución. Siguiendo la misma modalidad de acompañamiento a aquellos estudiantes que pueden necesitarla, en esta etapa el docente también puede diseñar actividades que ayudan a poner el plan en marcha:

- unir gráficos, fórmulas, ecuaciones, con una descripción de la misma;
- completar un gráfico, fórmula o ecuación en base a un texto que lo acompaña;
- completar un texto explicativo de un gráfico, fórmula o ecuación;
- frente a tres resoluciones incompletas propuestas por tres estudiantes ficticios, proponer una nueva resolución que incorpore los aspectos positivos de los tres estudiantes.

En la redacción de este tipo de actividades siempre es importante no proponer respuestas que presentan errores recurrentes que los estudiantes cometen. Es decir, las alternativas deben presentar razonamientos que no son posibles, convenientes o resultan incompletos frente a los problemas presentados, pero no incorrectos en torno a conceptos, procedimientos y razonamientos matemáticos.

Finalmente, para la etapa de reflexión o evaluación, la clave está en propiciar el espacio para socializar, comentar y criticar no sólo las opciones de resoluciones a las que los estudiantes arriban sino el proceso llevado a cabo para lograr esos resultados. En esta reflexión sobre la cognición, la metacognición, se revelan rutas de razonamiento posibles más allá de las convencionales, atajos tomados por los más expertos, modos de encarar los obstáculos y de maximizar los facilitadores, entre otros. En otras palabras, los estudiantes caminan hacia la autorregulación del aprendizaje atravesando las diferentes etapas ya sea a partir de la propia experiencia o través de la experiencia del otro.

4 Impacto pedagógico

La propuesta ha revelado resultados de aprendizaje alentadores que impulsan el trabajo colaborativo realizado hasta el momento. Las actividades de activación de conocimientos previos propician la participación de estudiantes que pueden aportar conocimientos no específicos a las asignaturas, lo que genera un sentimiento de capacidad que impulsa su participación en etapas posteriores. En relación a las actividades de andamiaje para las diferentes etapas en la resolución de problemas, se ha podido observar que las mismas garantizan la participación activa de todos los estudiantes ya que proveen rutas de acceso a la manera en que se debe pensar en cada etapa.

En esta misma dirección, los textos elaborados por los estudiantes dan cuenta de niveles de comprensión más profundos de los que alcanzarían si no tuviesen dichas actividades, en especial los estudiantes que usualmente no participan en las clases. Asimismo, las producciones escritas de los alumnos tienen las marcas características de las disciplinas en las que se generan, indicando que el diseño cuidadoso de actividades por parte de los docentes es una fuente de información para los estudiantes, que favorece la producción de textos que, si bien pueden tener referencias a los modelos de los docentes, es la base para una autonomía intelectual del estudiante. La situación de trabajo en grupos mediada por consignas claras y hacia la búsqueda de una respuesta a un problema despierta un interés común a todos los miembros, aportando contenido desde sus propios marcos de referencia, activados al principio de la clase. Es de destacar que estos estudiantes en otro tipo de propuestas áulicas no han mostrado el mismo nivel de desempeño en este aspecto. Por último, se ha podido observar un alto nivel de motivación y de predisposición en los estudiantes para resolver las consignas en tiempo y forma a pesar del esfuerzo requerido.

5 Conclusión

Si bien la estrategia presentada es una propuesta en progreso y en permanente modificación, el trabajo realizado hasta el momento muestra los resultados que se pueden obtener cuando los docentes trabajan colaborativamente con un mismo objetivo, optimizando el trabajo áulico de los estudiantes para acompañarlos en los procesos cognitivos que llevan a mayores niveles de comprensión. En el contexto actual, cada vez más demandante, especializado y en búsqueda de los más competentes, la actividad de los docentes se debe centrar en garantizar que los estudiantes puedan participar activamente de ese contexto, poniendo en funcionamiento propuestas concretas que han sido gestadas desde las dificultades y potencialidades de los niveles medio y superior.

Referencias

1. Secretaría de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación y Deportes Presidencia de la Nación. Aprender 2017. Informe de Resultados. Entre Ríos 6° Año Secundaria. p. 31 (2018) https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/informe_entre_rios_secundaria_2017_1.pdf. Accedido el 15 de mayo de 2019
2. Carlino, P.: Capítulo 2: La lectura en el nivel superior. *Escribir, leer y aprender en la universidad*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica. pp. 72 (2005)
3. Resnik, L.; Klopfer. L. Capítulo 1: Hacia un currículum para desarrollar el pensamiento: una visión general. Editores Resnik, L.; Klopfer. L.: *Currículum y cognición*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. pp.16, 25, 21-22, 19 (2007)
4. Niss, M. The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. Presentado. *XIII CIAEM, Recife, Brasil*. pp. 17-19 http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6957/6643. (2011)Accedido el 20 de mayo de 2019
5. Perkins, D. La escuela inteligente. Del adiestramiento de la mente a la educación de la mente. Barcelona: Gedisa pp. (2003).
6. Pozo, J.I., Pérez Echeverría, M. del P. Capítulo II: Nuevas formas de aprender en la universidad. *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*. Madrid: Ediciones Morata S.L. pp. 39-41, 51 (2009)
7. Litwin, E. *El oficio de Enseñar*. *Condiciones y contextos*. Buenos Aires: Paidós. pp. 99, 100 (2013).
8. Scardamalia, M.; Bereiter, Dos modelos explicativos de los procesos de composición escrita. *Infancia y Aprendizaje*, volumen 58, pp 43-64. (1992)
9. Hull, G.A. (2007). Capítulo 6: La investigación en escritura: La construcción de una comprensión cognitiva y social de la composición. Editores Resnik, L. y Klopfer. L.: *Currículum y cognición*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. pp.175 (2007)

EMCI 2021

Eje 2: Extensión

Estudio y capacitación en estructuras matemáticas de Data Science: Aplicaciones de Series de Taylor. Optimización con Descenso de Gradiente

Sara E. De Federico, Mariela A. Avogradini

Departamento Ciencias Básicas, Facultad Regional Rosario, Universidad Tecnológica Nacional
Zeballos 1341 Rosario,
{sdefederico,mavogradini}@frro.utn.edu.ar

Resumen. La función investigación tecnológica en ingeniería apunta a la creación, actualización y perfección de tecnologías. De estos desarrollos se generan nuevos productos y campos laborales, surgiendo carreras como la de Data Scientist. Los integrantes docentes y alumnos de proyectos de investigación en Data Science de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario, utilizan estructuras matemáticas para el análisis de Big Data, adquiriendo competencias importantes de esta novel carrera. Para abordar el desafío que esto significa, se provee una capacitación intensiva en temas específicos, con clases taller y actividades dinámicas personalizadas, cuyo objetivo es perfeccionar las capacidades analíticas y de modelado de procesos de selección, agrupamiento, calificación y comparación de datos. En este trabajo se muestran las herramientas de enseñanza utilizadas en el estudio del tema Aplicaciones de Taylor, su uso en diferentes campos, y su aplicación en el método de optimización Descenso de Gradiente usado en Machine y Deep Learning.

Palabras Clave: Data Science, Data Scientist, Capacitación, Matemática, Taylor, Descenso de Gradiente

1 Introducción

La participación por parte de docentes y alumnos en proyectos de investigación es una propuesta permanente de la Universidad, que proporciona a sus integrantes capacidades especiales a un nivel más profundo y complejo, jerarquizando su perfil profesional. Es fundamental un conocimiento exhaustivo de la matemática. Por ello, en las universidades se trata de proveer a los docentes y alumnos además de los formatos curriculares comunes, un conjunto de cursos y talleres de especialización en temas específicos, sobre todo para aquellos que participen en la investigación. La búsqueda permanente se enfoca en encontrar medios que aumenten y enriquezcan al conocimiento matemático de los asistentes [1]. Es también muy importante la selección adecuada del tema que se desea exponer, escogiéndose en general los considerados más complejos de comprender por el alumnado. En el seno de los estudios de investigación realizados en la cátedra de Fundamentos de Informática del Departamento Ciencias Básicas de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario, se propone añadir al cronograma de talleres, el aprendizaje de temas complejos que deben abordarse en la investigación. Series de Taylor es un tema fundamental en el cálculo, sobre todo en su uso extendido en el núcleo de los entornos informáticos especializados en matemática. Por ello se planificaron talleres de presentación del estudio cálculo de diferencias finitas realizado por Taylor, con el apoyo de simulaciones interactivas creadas en software de cálculo simbólico. A través de esta forma de trabajo los alumnos afianzan y amplían efectivamente sus conocimientos de Matemática, y exploran nuevas ramas de aplicación del tema. En este trabajo se expone el taller organizado para el tema, comenzando con los materiales y métodos de trabajo para el dictado del taller en la sección 2, en 3 se muestra la estructura de la exposición teórica de introducción. En la sección 4 se muestran simulaciones y animaciones para reforzar la teoría. En la sección 5 se muestran aplicaciones a distintos problemas, en la sección 6 se aborda el tema de Descenso de gradiente en Machine Learning, finalmente en la sección 7 se describen las conclusiones.

2 Materiales y métodos de trabajo

La metodología utilizada en el taller engloba un conjunto de enfoques que, aplicados en forma secuencial proveen un camino en donde el conocimiento se va presentando en forma natural y es fácilmente aprendido por los alumnos. De esta forma se crea un taller que tiene varias etapas, en donde se logra abordar el tema en forma completa. Las estrategias más importantes utilizadas incluyen la clase interactiva, la enseñanza orientada a los problemas, el uso de herramientas informáticas, en este caso simulaciones y animaciones para el análisis conceptual e interpretación de comportamientos extendidos en el tiempo y con múltiples variaciones [2]. Además, se crearon conjuntos de preguntas especialmente formuladas para profundizar el razonamiento e incentivar la actitud analítica en el alumno.

Además, para brindar un curso de excelencia, se tomaron las premisas del Knowledge Quarter, donde el compromiso del docente es esencial para la transmisión del conocimiento exitoso [3]. El Knowledge Quarter identifica tres categorías de situaciones en las que el conocimiento en matemática previo de los docentes se revela en el aula. Consiste en enseñar a través de tres acciones llamadas categorías de situaciones: transformación, conexión y contingencia. En el cuarto lugar se encuentra la base, que comprende el conocimiento del contenido matemático del profesor y el conocimiento teórico de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, apoyando a cada una de estas categorías de situaciones [4].

3 Cálculo de diferencias finitas de Brook Taylor

El taller comienza con la demarcación de los conceptos básicos en una clase introductoria de repaso, haciendo hincapié en el desarrollo formal de la obtención de la Fórmula de Taylor, quien era discípulo de Newton y tenía un gran interés en el problema del desarrollo de funciones usando otras más sencillas [5]. Era entonces conocido que una función polinómica f(x) de grado n,

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n \qquad \textbf{(1)}$$

Se puede escribir como

$$f(a+h) = c_0 + c_1\, h + \cdots + c_n\, h^n \qquad \textbf{(2)}$$

Para todo par de números a y h, y los coeficientes $c_{k,}\ \ 0 \leq\ k \leq n$ obedecen a la relación

$$c_k\ \ = \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(a) \text{ con } 1 \leq\ k \leq n,\ c_0 = f(a)\ \ (3) \qquad \textbf{(3)}$$

Taylor, usando algunas ideas del "cálculo de diferencias finitas" y, persiguiendo una generalización de lo anterior, descubrió la célebre "fórmula de Taylor":

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots \qquad \textbf{(4)}$$

válida bajo ciertas condiciones sobre la función f, como veremos más adelante.
Es interesante mostrar, de manera heurística, cómo se cree que llegó Taylor a tal fórmula (anunciada por él mismo en 1712) [6].

Sea $f\,:\ R \to R$ una función y r un número positivo fijo. Se define:

$$\begin{array}{ll} \Delta f(x) = f(x+r) - f(x), & \forall x\ \in R \\ \Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)), & \forall x\ \in R \end{array} \qquad \textbf{(5)}$$

Y así sucesivamente. Si la variable x pasa del valor x al valor x+nr, para $n \in N$, entonces *f(x)* pasa a valer *f(x+nr)* y se tiene:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1\,.2}\Delta^2 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\,.2\ldots n}\Delta^n f(x) \qquad \textbf{(6)}$$

Los coeficientes de f(x),Δf(x), Δ^2 f(x) se forman de la misma manera que los coeficientes del binomio $(a+b)^n$. Dichos coeficientes son 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1\,.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.2\,.3}$, …

A (6) se le conoce como Fórmula de Interpolación de Newton.

Si h es un número dado positivo, tomando n y r tales que nr=h, entonces r tiende a 0 cuando n tiende a infinito y recíprocamente. Escribiendo (6) de la forma:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1}\frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1.2}\frac{\Delta^2 f(x)}{r^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1r^n}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n f(x)}{r^n} \qquad \textbf{(7)}$$

Ahora según lo expuesto arriba, si $nr=h$ y:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots \qquad \textbf{(8)}$$

De manera informal, se puede decir que la fórmula se obtuvo a partir de la fórmula de interpolación de Newton.

3.1 Conceptos fundamentales del cálculo de diferencias finitas de Taylor

Por el teorema de la diferenciación término a término [7], sabemos que la suma de una serie de potencias es una función continua con derivadas de todos los órdenes dentro de su intervalo de convergencia. Pero ¿qué puede decirse del recíproco? Si una función *f (x)* tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo I, ¿se podrá expresar como una serie de potencias en I? Si esto es posible, ¿cuáles serán sus coeficientes? Podemos responder fácilmente la última pregunta si suponemos que *f (x)* es la suma de una serie de potencias.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \qquad \textbf{(9)}$$

con un radio de convergencia positivo. Al derivar repetidamente, término a término, dentro del intervalo de convergencia I, obtenemos una suma de k-ésimas derivadas, siendo la n-ésima derivada, para toda n, $f^{(n)}(x) = n!\,a_n$ + una suma de términos con $(x-a)$ como factor. Puesto que todas estas ecuaciones son válidas cuando $x=a$, tenemos

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n \qquad \textbf{(10)}$$

Estas fórmulas revelan un patrón en los coeficientes de cualquier serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ que converge a los valores de *f* en *I* (decimos "que representa a *f* sobre *I*"). Si esa serie existe (aún no lo sabemos) entonces sólo hay una de tales series y su n-ésimo coeficiente es

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \textbf{(11)}$$

Si *f* tiene representación como serie de potencias, ésta debe ser

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \qquad \textbf{(12)}$$

Pero si empezamos con una función arbitraria *f*, infinitamente diferenciable en un intervalo *I* centrado en $x=a$, y la usamos para generar la serie de la ecuación (9), ¿convergerá la serie a $f(x)$ en cada x del interior de *I*? La respuesta es: quizá; para algunas funciones sí, pero para otras no será así, como veremos más adelante. Entonces, sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga a como un punto interior. La serie de Taylor generada por f en $x=a$ es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \qquad \textbf{(13)}$$

Por otro lado, la linealización de una función diferenciable f en un punto a, es el polinomio de grado uno dado por

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \textbf{(14)}$$

Si f tiene derivadas de orden mayor en a, también tiene aproximaciones polinomiales de orden mayor, una para cada derivada disponible. Estos polinomios se llaman polinomios de Taylor de f.

Sea f una función con derivadas de orden k para $k = 1, 2, \ldots, N$ en algún intervalo que contenga a como un punto interior. Entonces, para cualquier entero n, de 0 a N, el **polinomio de Taylor de orden n** generado por f es el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{15}$$

Decimos que un polinomio de Taylor es de orden n y no de grado n porque $f^{(n)}(a)$ puede ser cero. Por ejemplo, los dos primeros polinomios de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $x = 0$ son$P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = 1$. El polinomio de primer orden tiene grado cero, no uno.

Del mismo modo que la linealización de f en ofrece la mejor aproximación lineal de f en la vecindad de a, los polinomios de Taylor de orden mayor brindan las mejores aproximaciones polinomiales de sus respectivos grados.

***3.2.1 Teorema de Taylor**:* Si f y sus primeras n derivadas f', f'',..., $f^{(n)}$ son continuas en el intervalo cerrado entre a y b y si$f^{(n)}$ es diferenciable en el intervalo abierto entre a y b, entonces existe un número c entre a y b, tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \; (13) \tag{16}$$

El Teorema de Taylor es una generalización del Teorema del Valor Medio. Cuando aplicamos el teorema de Taylor, generalmente queremos mantener fija a a y usar a b como variable independiente. La fórmula de Taylor es más fácil de utilizar en esas circunstancias si cambiamos b por x. Ésta es la versión del teorema con este cambio.

***3.2.2 Fórmula de Taylor**:* Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I que contiene a a entonces para cada entero positivo n y para cada x en I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{para alguna } c \text{ entre } a \text{ y } x \tag{17}$$

Cuando lo expresamos de esta forma, el teorema de Taylor dice que, para cada $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{18}$$

La función $R_n(x)$ está determinada por el valor de la $(n+1)$-ésima derivada, $f^{(n+1)}$en el punto c, el cual depende tanto de a como de x y se encuentra entre ellos. Para cualquier valor de n que elijamos, la ecuación nos da una aproximación polinomial de f de ese orden y también una fórmula para el error cometido al usar esa aproximación sobre el intervalo I.

La ecuación (17) se conoce como **fórmula de Taylor**. La función $R_n(x)$ se llama **residuo de orden n** o **término de error** para la aproximación de f por $P_n(x)$sobre I. Si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para toda$x \in I$ decimos que la serie de Taylor generada por f en $x = a$ converge a f en I, y escribimos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{19}$$

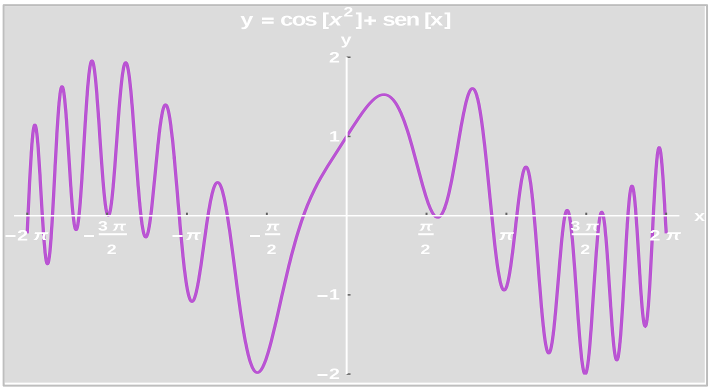
Con frecuencia es posible estimar R_n sin conocer el valor de c.

Se añade como corolario, la definición de convergencia de una serie, ya que si bien en el taller se toman postulados ya demostrados dentro de los intervalos de convergencia convenientes, y en los ejercicios se hace hincapié en el aporte de esta teoría como apoyo e instrumento de demostración de muchas otras de ramas muy diversas, se ha agregado en el taller teórico y en de ecuaciones características, un análisis de la convergencia de las series obtenidas.

3.2.3 Convergencia de una serie de potencias: Teorema: Si la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para x = c ≠ 0 entonces converge absolutamente para toda x con $|x| < |c|$. Si la serie diverge para x = d, entonces diverge para toda x con $|x| > |d|$. En el caso de series de la forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ podemos hacer $(x-a) = x'$ y aplicar el teorema para x'.

4 Taller teórico con apoyo de simulaciones y animaciones

El Taller de teoría hace énfasis en el concepto de series de potencias conocidas como series de Taylor. En muchos casos, las aproximaciones polinomiales de las funciones son muy útiles, sobre todo para su uso en software y en métodos de cálculo numérico. El taller muestra los conceptos de la serie de Taylor, en una clase teórica apoyada con animaciones para reforzar los conceptos. Inicialmente se hace un estudio de la estructura teórica que acompaña al razonamiento que concluye en la construcción del polinomio de Taylor y se analizan los intervalos de convergencia. El taller se lleva a cabo en gabinete con computadoras para todos los participantes. Se provee un archivo generado en software de cálculo simbólico [8] para trabajar en forma dinámica y poder modificar y crear nuevas animaciones en tiempo real. La serie utilizada es divergente, para lograr una observación más acentuada del ajuste de la curva a medida que se incrementa el número de términos. En la Fig. 1 se puede observar la gráfica y el código para la construcción de un polinomio por series de Taylor y la función representada visualmente, junto con el análisis de su convergencia, haciendo la suma infinita y aplicando el criterio de la razón, dando como resultado la divergencia tal como se preveía. Se puede observar la forma caótica que toma la onda al alejarse del 0. La aproximación de esta ecuación requerirá de varios términos por lo que la potencia de la animación se podrá apreciar más claramente.



Algoritmo 1. polinomio de Taylor de 20 términos para la misma y su análisis de convergencia.

```
polinomios=Table[Normal[Series[Cos[x^2]+Sin[x],{x,0,a}]],{a,1,20,2}];
suma=Sum[Cos[x^2]+Sin[x],{x,0,Infinity}];
Sum::div: Sum does not converge.
Limit[Abs[(Cos[(x+1)^2]+Sin[x+1])/(Cos[x^2]+Sin[x])],x->Infinity]//N
Interval[{-2.22507*10^-308,\[Infinity]}]
```

Fig. 1. Gráfica de la función *f(x) = cos (x^2) + sen (x)*

En la Fig. 2 se observa una animación con controles de manipulación de términos, cada curva en línea punteada es una aproximación con diferencia de un término más que la anterior, hasta lograr en forma totalmente ajustada la curva de la función real en el intervalo deseado, con el uso de 148 términos del polinomio, y debajo el código de la misma. El trabajo con las animaciones permite reforzar los conceptos, y comprender mejor la importancia del tema. Además, la programación del código para la realización de las animaciones constituye un entrenamiento que servirá de base para la programación de estructuras matemáticas para el análisis de Big Data, ya que para ello se necesita no solamente saber programar, sino también un manejo fluido de las estructuras por pasos, iterativas y recursivas del cálculo numérico.

5 Aplicaciones de la fórmula y polinomio de Taylor para la resolución de problemas

En esta sección se muestran aplicaciones en las se utilizan los métodos de Taylor para la obtención de la ecuación resultante. Acompañados de gráficos y animaciones generados especialmente para el dictado del taller, la consigna de estos talleres es mostrar la aplicación de los postulados de Taylor y que los participantes observen y practiquen con los resultados obtenidos, enriqueciendo con el manejo de las simulaciones su nivel matemático, ya que para el uso del software es necesaria una profunda comprensión de los temas. Además, son un estímulo para la investigación y la búsqueda constante del conocimiento.

Por todo lo expuesto, el taller se destaca por la ejercitación orientada a la manipulación del software de cálculo simbólico. Las demostraciones teóricas de cada aplicación se entregan como un Anexo impreso, para su análisis y estudio previo.

Como ejemplo inicial se muestran los talleres de solución para ecuaciones características, su aplicación en camino aleatorio y aplicaciones de la óptica. Finalmente se muestra el desarrollo del algoritmo Descenso de Gradiente con Taylor.

5.1 Ecuaciones características de variables aleatorias

Dada una variable aleatoria (va) X, tomando su valor medio como base, se dice que se puede caracterizar dicha variable si se obtienen todos los valores posibles que pueda asumir [9]. El conocimiento del valor medio permite, muchas veces, facilitar enormemente el análisis estadístico de una variable. Se define a la función característica, que toma valores complejos y argumento real.

Definida a partir de una variable aleatoria *X*, caracteriza a la distribución de la acumulada *F(x)* de esta variable aleatoria. Las funciones características son especialmente adecuadas para el estudio de la convergencia débil de variables aleatorias independientes.

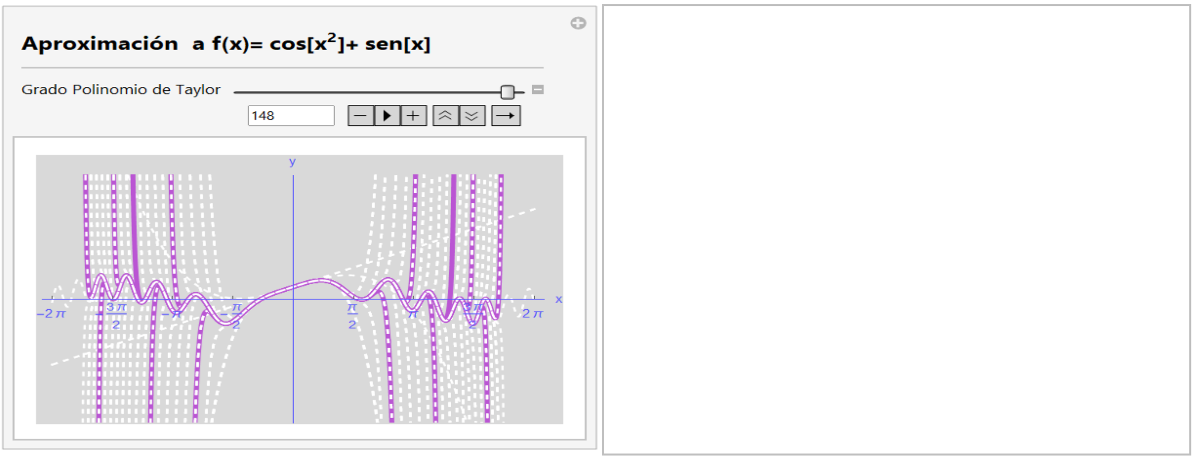


Fig. 2. Aproximación de Taylor, ajuste a la curva con 148 términos

Se define a la ecuación característica con la fórmula $f(t)=E(X)\, e^{(i\,t\,X)}$ o su equivalente:

$$f(t) = E(X)\,Cos\,(tX) + E(X)i\,Sen\,(tX) \qquad \textbf{(20)}$$

a partir del dominio de la función, es decir el espacio muestral. Esta función *G* es la función característica de la *va*. Si todos los valores que pueda asumir *X* existen y son válidos (es decir, los números resultantes que efectivamente pertenecen al espacio muestral entonces se demuestra que la ecuación característica es ***desarrollable en serie de Taylor*** alrededor de k=0, quedando (por (17) y (18)):

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i\,t^{(m)}(a)}{m!} M_m; \qquad M_m = X^{(m)} \frac{1 d^{(m)}}{i^{(m)}\, d\, t^{(m)}} G(t)\big|_{k=0} \qquad \textbf{(21)}$$

Este estudio es válido tanto para va discretas como continuas, ya que se puede hacer un traspaso de discreta a continua a través de la aplicación de la ecuación Delta de Dirac. Cada distribución tiene su función característica, por ejemplo la distribución exponencial posee la siguiente:

$$f(t) = \left(1 - \frac{i\,t}{\lambda}\right)^{-1} \qquad \textbf{(22)}$$

En la Fig. 3 se muestra la serie de Taylor de la ecuación característica obtenida y el algoritmo del análisis de la convergencia alrededor del 0 y en infinito. Esta ecuación está definida en el campo de los complejos por lo que no tiene representación gráfica, por ello se mostrará una aplicación de ecuaciones características, el camino aleatorio.

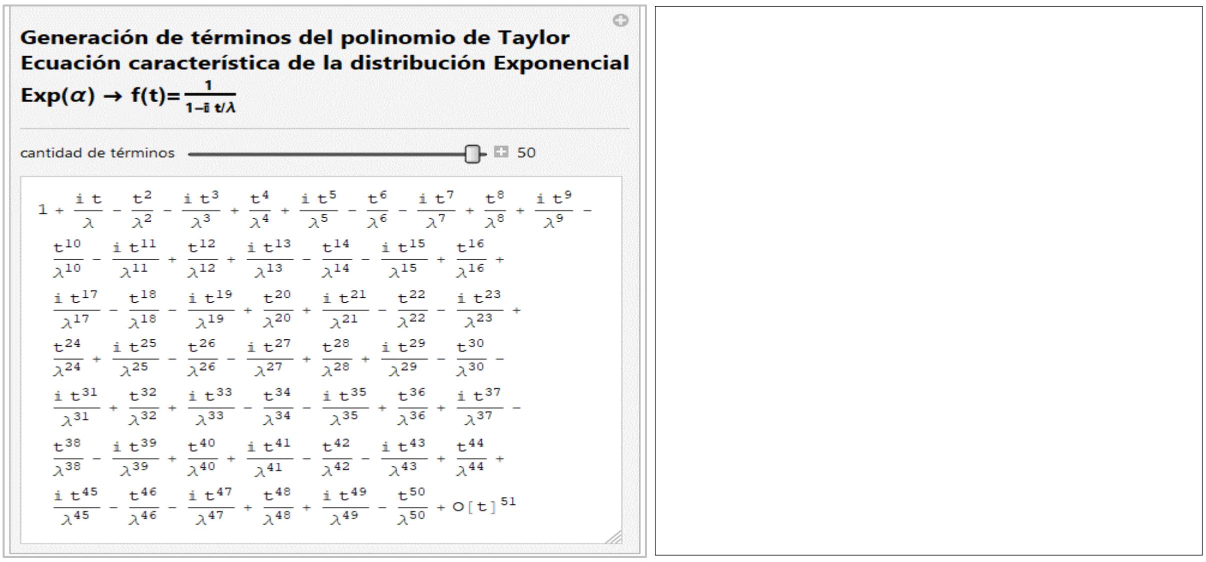


Fig. 3. Desarrollo de Taylor de la ecuación característica exponencial (21) y análisis de convergencia

5.2 Camino aleatorio

Considere la suma de r variables aleatorias *(va)* X_i estadísticamente independientes e igualmente distribuidas donde cada una de las variables X_i puede tomar el valor ± 1 con probabilidades p y q respectivamente siendo $(p + q = 1)$. La función característica de la suma $Y_r = \sum_{i=0}^{r} X_i$ vendría dada por [9]

$$f(t) = (pe^{it} + qe^{-it})^r \tag{23}$$

Usando el desarrollo del binomio de Newton:

$$(A + B)^r = \sum_{n=0}^{r} \frac{r!}{n!\,(r-n)!} A^n\, B^{r-n} \tag{24}$$

Se define así la llamada "Caminata Aleatoria" *(Random Walk)*. En este caso es una caminata aleatoria en dos dimensiones, ya que el movimiento ocurre en el plano *xy*. El valor aleatorio y corresponde a la distancia desde la posición de partida. El número de variables r corresponde al número de pasos efectuados por el "caminante". La Fig,4 muestra la animación de posibles caminatas aleatorias en dos dimensiones, conocidas como el problema del caminante, y la teoría de las apuestas secuenciales óptimas, fundamento teórico de la ganancia garantizada de los casinos.

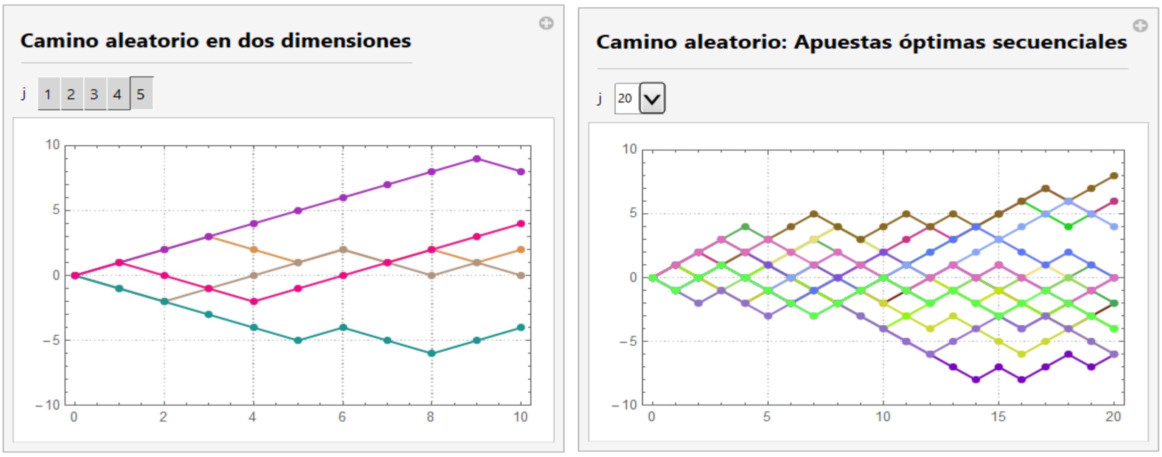
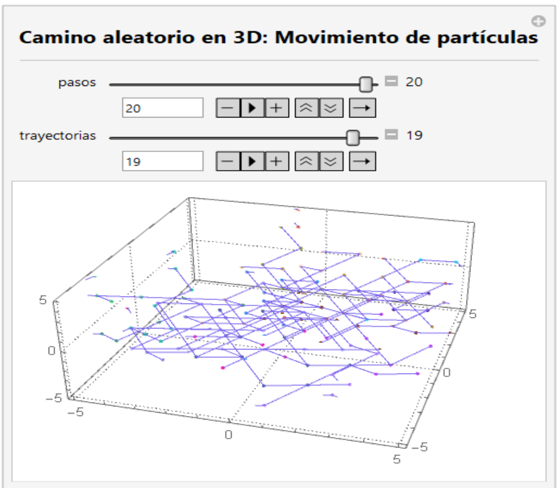


Fig. 4. Animación de Caminata aleatoria en dos dimensiones.

La Fig. 5 muestra una caminata aleatoria de tres dimensiones, que imita el movimiento aleatorio de una partícula en el espacio, semejando el movimiento browniano, junto con el código de la animación. En esta animación se pueden observar paso a paso el recorrido de las trayectorias, y también la animación completa.




```
Style[
 Manipulate [
  Show[
   Table[
    Show[
     ListPointPlot3D[Take[ptos3[[k]], i], PlotStyle → RGBColor[RandomReal[], RandomReal[], RandomReal[]], PlotTheme → "Detailed"],
     Graphics3D[{ColorData["Legacy"]["MediumSlateBlue"], Line[Take[ptos3[[k]], i]]}], PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}, {-5, 5}}],
    {k, 1, j}]],

  Style["Camino aleatorio en 3D: Movimiento de partículas", 16, Bold],
  Delimiter,
  {{i, 1, "pasos"}, 1, 20, 1, Appearance → "Labeled"},
  {{j, 1, "trayectorias"}, 1, 20, 1, Appearance → "Labeled"}],
 ControlsRendering → "Generic"]
```

Fig. 5. Animación de Caminata aleatoria en tres dimensiones. Movimiento de partículas

Siguiendo con la presentación de aplicaciones, y conectando con el tema de las trayectorias aleatorias de partículas, se introduce el tema del estudio en mecánica cuántica del destino de las partículas cuando son dispersadas por una fuente emisora, y la explicación del comportamiento de éstas en las cercanías del punto captor, a través del teorema óptico.

5.3 Aplicaciones a la óptica del polinomio de Taylor: Teorema Óptico

El teorema óptico [10] define el resultado de la dispersión de las ondas, que relaciona la amplitud de dispersión hacia delante con la sección eficaz de dispersión total de los objetos dispersantes que son chocados por las ondas. Creado simultáneamente por Wolfgang von Sellmeier y Lord Rayleigh en 1871, su fórmula generalizada obtenida por Heisemberg es:

$$\lim \{f(k',k)\} = \frac{k}{4\pi}\int f(k',k'')\,f(k'',k)dk \qquad \textbf{(25)}$$

Según la premisa del teorema óptico, cualquier objeto que disperse luz debería tener una amplitud de dispersión no nula hacia delante, pero el campo observado en esta dirección en realidad tiene la suma de las ondas incidente y dispersada, pudiendo anularse mutuamente, generando una zona donde la dispersión no alcanza a transmitirse. El teorema se demuestra a partir del tratamiento de una onda escalar. Si una onda plana incide en un objeto, la amplitud de la onda a una gran distancia, y ángulos pequeños de dispersión, se puede demostrar ***aplicando la expansión de Taylor*** y se obtiene como medida de la distancia la ecuación (26):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cong z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad \textbf{(26)}$$

Posteriormente la ecuación (25) se aplicó a la teoría de la dispersión cuántica por varios científicos, y recibió el nombre de relación de Bohr–Peierls–Placzek tras una publicación de 1939. La primera referencia publicada del Teorema Óptico fue en 1955 por Hans Bethe y Frederic de Hoffmann, después de haber recibido el nombre del "conocido teorema de la óptica" durante algún tiempo. Entrando ya en la mecánica cuántica, la aplicación del teorema óptico muestra que si se dispara un haz de electrones a un punto dispersor que está frente a una pantalla plana, siendo éste por ejemplo un núcleo atómico, si bien la teoría indicaría que los electrones se posicionan en órbitas alrededor del núcleo, siendo dispersados, algunos, aunque pocos, chocan en la pantalla plana justo detrás del núcleo. A modo de ejemplo de un potencial atractivo, se puede utilizar el potencial Yukawa atractivo con signo negativo:

$$V(r) = -\frac{e^{-0.2r}}{r} \quad \textbf{(27)}$$

Este potencial tiene una gráfica con una singularidad en *r = 0*, como se puede observar en la Fig. 6. En este caso el teorema muestra un valor muy pequeño pero no cero de cruce de electrones, como si hubieran atravesado el núcleo. Esto constituye una situación paradójica digna de estudio. Por ejemplo sabiendo que en el núcleo hay protones que tienen carga positiva, por lo que atraen a los electrones, la dispersión se puede ver comprometida.

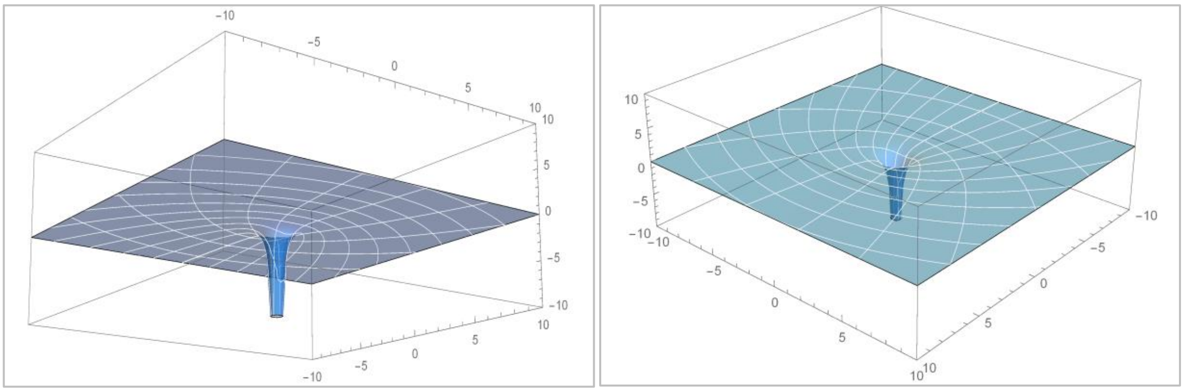


Fig. 6 Teorema óptico en mecánica cuántica: singularidad en la zona de dispersión, vista superior e inferior

La singularidad de la gráfica muestra la zona en donde los electrones que muestra una distribución del esparcimiento de partículas ciertamente *f(0)* puede ser diferente de cero, sin que haya una región de esparcimiento sombra, es decir una región en donde haya cero dispersión, siendo ésta ocupada por el punto dispersante.

6 Aplicación del desarrollo de Taylor en el algoritmo de optimización Descenso de Gradiente

El Descenso de gradiente es uno de los algoritmos más populares y ampliamente utilizados para entrenar modelos de machine learning. Estos algoritmos generalmente tienen parámetros (pesos y sesgos) y una función de costo que evalúa cuán cercano está un elemento que estoy comparando, del objetivo que se busca, por ejemplo, la mejor ruta, una imagen, la mejor solución a un problema, etc [11][12]. La búsqueda del costo mínimo es iterativa paso a paso dentro del algoritmo, e involucra la derivación matemática de la regla (especificada al inicio) que actualiza cada paso, testeando si se llegó al objetivo deseado. Como método de minimización se puede utilizar el gradiente, que consiste en obtener el mínimo global de la función costo. El problema reside en que no se sabe en qué dirección puede estar este mínimo, esta dirección está localizada en un universo con tantas dimensiones como posea la función costo. En cada paso se evalúa el costo y se observa si este aumentó o disminuyó, a través del valor del gradiente.

Generalmente la función costo *(L)* está afectada por parámetros, comúnmente llamados θ. En el caso se propone, los parámetros son el peso (ω) y el sesgo (*b*), de tal forma que *L = f (w, b)*

$$\theta_{new} = \theta - \alpha\,\Delta\theta, \qquad \Delta\theta = [\Delta\omega, \Delta b], \tag{28}$$

siendo α un parámetro adicional *(learning rate)* que limita el ancho del paso de actualización para impedir que se oscile en forma permanente alrededor del mínimo. El goal de este algoritmo es encontrar un enfoque de tal forma que $L(\theta_{new}) < L(\theta)$. Se utiliza la serie de Taylor para encontrar los valores de $\Delta\omega$ y Δb. Si la función costo solamente se definiera en términos de ω, $L(\omega + \alpha\,\Delta\omega) < L(\omega)$ y $u$tilizando la fórmula de Taylor (17),

$$L(\omega + \alpha\,\Delta\omega) = L(\omega) + \alpha L'(\omega)\Delta\omega + \frac{\alpha^2 L''(\omega)}{2!}\Delta\omega^2 + \cdots + \frac{\alpha^n L''(\omega)}{n!}\Delta\omega^n + R_n(x) \tag{29}$$

Pero L depende de múltiples parámetros, en el caso que se propone son dos, por lo que $\Delta\theta$ en realidad es un vector $\Delta\theta = \begin{bmatrix}\Delta\omega \\ \Delta b\end{bmatrix}$. Se demuestra que:

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix}\Delta\omega \\ \Delta b\end{bmatrix} = -\nabla_\theta L(\theta) = \begin{bmatrix}\frac{\delta L}{\delta\omega} \\ \frac{\delta L}{\delta b}\end{bmatrix} \tag{30}$$

siendo el gradiente ∇ el vector de derivadas parciales en cada uno de los parámetros. Por lo tanto, la función disminuirá en función de la actualización de sus parámetros. La disminución cesará cuando las derivadas parciales sean igual a cero, esto es, cuando se haya encontrado el mínimo.

$$\omega = \omega - \alpha\,\frac{\delta L}{\delta\omega} \qquad b = b - \alpha\,\frac{\delta L}{\delta b} \tag{31}$$

Se pueden utilizar más términos de la serie de Taylor para refinar el algoritmo. En la Fig. 7 se puede observar el camino descendente en la búsqueda de un mínimo en la superficie.

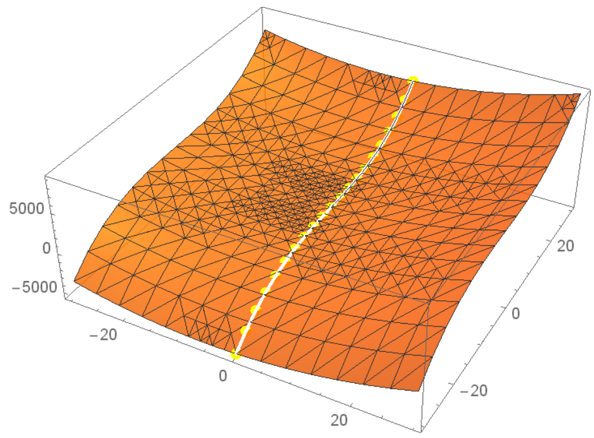


Fig. 7 Representación de la búsqueda de un mínimo

7 Conclusiones

El uso de animaciones está probado y se ha extendido, desde sus comienzos hasta la actualidad en diversas ciencias, para apoyo a la enseñanza. La aplicación de esta herramienta a temas complejos de la matemática supone un desafío para los docentes y los constructores de las herramientas informáticas, ya que al aumentar la complejidad, aumenta en forma exponencial la dificultad de codificación de la animación. Sin embargo, los resultados siempre son más que satisfactorios. En el caso del taller para el tema de las series y polinomios de Taylor, se ha dado un paso más allá, ya que no solo es brindar conocimiento, sino también disfrutar y dar apoyo a las tareas de investigación, y tratar de brindar un camino hacia la excelencia en el conocimiento. En el intento de hacer ese camino, el docente que genera las animaciones aprende mucho más todavía, comprueba que él mismo puede asimilar de otra forma más profunda y afianzada los conceptos. Así luego podrá transmitir ese conocimiento reinsertado en su mente, de forma dinámica y visual, a los alumnos y participantes.

El taller ha tenido buena aceptación dentro del grupo de docentes y alumnos que pertenecen a proyectos, ya que está orientado a estudiantes avanzados y con alto nivel de conocimientos en matemática. Es por eso que se considera su presentación dentro del ámbito de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario, ya que jerarquiza a la institución y al Departamento de Ciencias Básicas, mostrando una actitud de permanente deseo de superación y profundización del conocimiento.

Referencias

1. Feurzeig, W.; Roberts, N. W.; Roberts, N.: Modeling And Simulation In Science And Mathematics Education. (Eds): Springer-Verlag, Neew York Inc. Google E-Books pp 5-37. (1999)
2. Usos Y Ejemplos Del Formato De Documento Computable (CDF). Wolfram Uses-Examples. https://Www.Wolfram.Com/Cdf/Uses-Examples/Textbooks.Html. Accedido 20 enero de 2020.
3. Schoenfeld, A.: Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. Toward The Thinking Curriculum: Current Cognitive Research, Pp 83-103 (1989)
4. Apostol, T.: Calculus Volumen II. (Eds): Reverté pp 375-377. (2002)
5. Kline M.: Mathematical Though From Ancient And Modern Times Volume 3. (Eds): Oxford University Press New York pp 5-37. (1972)
6. Torres M. A.: Series de Taylor y Series de Fourier: Un Estudio Comparativo. Universidad De Granada, Departamento De Análisis Matemático, Facultad De Ciencias pp 7-11. (2015)
7. Thomas G. B: Cálculo de Varias Variables (12º E). (Eds): Addison Wesley pp 746-186. (2011)
8. Wolfram Training Courses. Wolfram, Computation Meets Knowledge. http://Www.Wolfram.Com/Training/Courses/. Accedido el 15 de febrero de 2020.
9. Cáceres. M.: Elementos de Estadística de No Equilibrio y sus Aplicaciones al Transporte en Medios Desordenados. Tesis. Comisión Nacional De Energía Atómica pp 13-15 y 189-192. (2014).
10. R. G. Newton Optical Theorem and Beyond American Journal of Physics American Journal of Physics 44, 639 (1976); Https://Doi.Org/10.1119/1.10324. Accedido el 16 de febrero de 2020
11. Khan Shahbaz Mathematical Intuition behind Gradient Descent https://towardsdatascience.com/mathematical-intuition-behind-gradient-descent-f1b959a59e6d. Accedido el 16 de febrero de 2020
12. Gradient Descent https://ml-cheatsheet.readthedocs.io/en/latest/gradient_descent.html (2019)

Matemáticas Renovables: Aplicaciones de las matemáticas a las energías renovables

Agustín Menuet, Nicolás Altamirano, Giuliano Ardissone, Silvia Guiñazú

Departamento Cs. Básicas, Facultad Ingenierías y Cs. Agropecuarias, Universidad Nacional de San Luis
Campus Universitario. Ruta 147. Villa Mercedes (SL)
agustinmenuet@gmail.com , nicolas59@gmail.com, silvi9129@gmail.com

Resumen El presente trabajo pretende lograr un vínculo entre los estudiantes de nivel secundario con la matemática. Para ello se despierta el interés de los alumnos con una problemática social que los involucre, como es el cambio climático. Se realizan talleres con los estudiantes sobre las causas y consecuencias del cambio climático, las diferentes aplicaciones de las energías renovables para luego abordar el diseño de una "cocina solar" para generación de energía térmica. A través de un modelo matemático los alumnos comprenden los principios físicos de funcionamiento de la cocina solar y diseñan el paraboloide. Con el plano elaborado se fabrica la cocina solar que luego es donada a una institución educativa para su puesta en funcionamiento y uso. Los alumnos encuentran un sentido y aplicación de la matemática y se concientizan con las problemáticas ambientales.

Palabras Clave: Energía solar, impacto social.

1 Introducción

El proyecto "Matemáticas Renovables: Aplicación Matemáticas a las Energías Renovables" se formuló en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias (FICA) de la Universidad Nacional de San Luis (UNSL) en el año 2018, con docentes que pertenecen principalmente al área de matemática y otras materias de los primeros años de las carreras de ingeniería.

En los alumnos de dichas materias, se detectan dificultades y desinterés por el aprendizaje de matemática, cuando en realidad esta asignatura es una herramienta clave e indispensable para su formación como profesionales. Consideramos que el problema no tiene su origen en la universidad, si no que desde su educación básica y secundaria no se les ha generado una verdadera motivación, y su apatía hacia la materia culmina en los estudios de grado.

Por otro lado, se encuentra la problemática ambiental que preocupa a toda la sociedad a nivel mundial y por la cual se realizan diversas actividades para mitigar los daños ocasionados por las actividades del hombre. Los adultos de la sociedad actual y los futuros adultos necesitan comprender que la manera en la que vivimos es insostenible a largo plazo y resulta imperioso modificar nuestro modo de obrar, desde las cosas más simples hasta las más complejas.

Por las razones mencionadas surge nuestro proyecto, que busca vincular los conocimientos en matemática de los alumnos de escuelas secundarias, a problemáticas sociales y ambientales que nos involucra a todos, incentivando con los resultados que no quedan solamente en papel sino en algo tangible, conjuntamente con la experiencia que conlleva realizarlo, con lo que se espera generar un mayor interés en las ciencias exactas.

La solución que propusimos fue la construcción de una cocina solar, que relaciona conceptos matemáticos (qué es un paraboloide [1], por ejemplo) con las energías renovables, a la vez que es un aporte a la sociedad ya que se donaría a un comedor.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

2 Marco teórico

El uso de tecnologías que combinan la energía solar y la eficiencia energética, entre ellas la cocina solar, ayudan a un segmento creciente de la población mundial, en mayor medida en sitios rurales o con personas de bajos recursos económicos y ambientales.

La combinación de ollas solares, cestas aislantes y cocinas eficientes energéticamente puede reducir el uso de combustible en un 85 %, según establecen distintos especialistas en estas áreas de las energías renovables. Es por ello que este trabajo está dirigido a sustituir de forma parcial el uso de combustibles fósiles para la cocción de alimentos por medio de la utilización de la energía solar térmica en la cual se transforma la energía radiante del sol en energía térmica, y de este modo contribuir con el medio ambiente y con la salud de las personas que usan estos tipos de combustibles para la preparación de sus alimentos

Esta opción tecnológica aparece hoy día prácticamente como la única alternativa, en algunos países en vías de desarrollo, para resolver algunas de sus necesidades energéticas, pues las otras fuentes de energías presentan graves problemas de aprovisionamiento. En los países con mayores posibilidades energéticas también se ofrece como un sistema deseable de

aplicar, por ofrecer una vía para avanzar en la solución de los problemas medio ambientales, nacidos a raíz de sus sistemas de híper consumo energético centrado en los combustibles fósiles. Por estos motivos Argentina está en un lugar privilegiado hablando de ubicación solar, las cocinas solares serían un medio para mejorar su situación económica, social y ambiental del país.

Las cocinas solares ofrecen un sistema simplificado de cocinar con un total ahorro de dinero, al no necesitar ningún aporte de combustible u otra fuente de energía que no sea la solar directa libre y gratuita, todo ello va acompañado de otras múltiples ventajas como son: mayor seguridad en la operación de cocinar y calidad nutricional de los alimentos cocinados, Pues al no utilizar fuego, no se generan humos ni dióxido de carbono y así se mejoran las condiciones medio ambientales tanto locales como generales.

Lo primero que se le puede venir a cualquier persona a la mente ante dicho dispositivo es su gran semejanza a las más que conocidas antenas parabólicas que se encargan de captar la señal de televisión (entre otras). Esta forma que toma la cocina solar no es coincidencia, ya que, al igual que estas antenas, la forma parabólica permite captar la mayor parte de ondas incidentes y que estas sean concentradas en un mismo punto común, lo que es denominado como foco.

Este alto rendimiento se lo van a dar varios factores, como es la amplia área de superficie de captación que presenta, el alto factor de reflexión de los materiales que la recubren y, por encima de todo, la concentración de los rayos incidentes. La ley de la parábola se va a encargar de explicar el porqué de este principio de funcionamiento.

3 PROYECTOS EJECUTADOS O EN EJECUCIÓN RELACIONADOS, RESULTADOS.

En la actualidad hay muchos proyectos que se desarrollan con el uso y la fomentación al uso de cocinas solares, algunos de ellos se mencionan a continuación [2]:

- Un grupo de pobladores de Tilcara buscó una alternativa sustentable para mejorar la calidad de vida de su comunidad. Uno de los recursos que La Quebrada de Humahuaca ofrece a sus pobladores es la energía solar. En este contexto nació el proyecto ESKAL cuya tarea fue fabricar cocinas solares en las cuales podrían preparar sus reconocidas comidas autóctonas.
- El proyecto "Pueblos Solares Andinos" de EcoAndina, es un plan integral que se ejecuta en pueblos de la Puna Jujeña, adaptado según las necesidades energéticas y características de cada uno. Se trabaja conjuntamente con la comunidad para lograr la mejor implementación de cada proyecto, privilegiando la participación, el intercambio de opiniones y el respeto por la identidad cultural.
- Tiene como finalidad instalar en los pueblos el empleo de la energía solar como opción energética limpia para minimizar los efectos producidos por la desertificación y preservar la biodiversidad. Otro objetivo es generar concientización ambiental y mejoras radicales en la calidad de vida sanitaria, alimenticia, económica y social de sus habitantes.

4 Objetivos

El objetivo general del proyecto es vincular los conocimientos que los alumnos de escuelas secundarias han adquirido en matemática, a problemáticas sociales y ambientales, con el fin de darles una aplicación práctica y motivarlos en el aprendizaje de matemática.

Para lograr el objetivo se plantean los siguientes objetivos específicos:

Planificar y ejecutar una campaña de formación y concientización de la población estudiantil y docente acerca del uso de matemática aplicada a las energías renovables.

- Planificar y ejecutar una campaña de formación y concientización de la población estudiantil y docente acerca del cuidado ambiental y el uso de las energías renovables.
- Realizar junto con los alumnos y docentes un análisis de un modelo matemático del principio de funcionamiento de la cocina solar.
- Realizar junto con los alumnos y docentes un análisis de un modelo matemático del principio de funcionamiento de otros dispositivos generadores de energía.
- Fabricar en conjunto con alumnos y docentes de las instituciones participantes una cocina solar.
- Generar, a través de los alumnos y docentes de las instituciones involucradas, un efecto multiplicativo en concientización ambiental y en el uso de la matemática.
- Realizar visitas a la universidad con los alumnos de las instituciones participantes.
- Realizar capacitaciones con asesores expertos destinadas a los alumnos y docentes de las instituciones participantes.

5 Proyecto 2018-19

En las asignaturas respectivas a ciencias básicas de las carreras de ingeniería de la FICA, se detectan a estudiantes con diferentes niveles de dificultades, como también distintos niveles de interés. Esta situación lejos de mermar por su cuenta, si no es tratada debidamente cada año empeora, no porque los alumnos sean ni más ni menos inteligentes, sino que son distintos a los alumnos que estaban preparados para recibir clases expositivas, debido a que la sociedad está en un constante cambio y las realidades son diferentes. Numerosas investigaciones han constatado, que los alumnos acceden a la Universidad con una disparidad de conceptos y en algunos casos con una preparación bastante deficiente, particularmente en Matemáticas, tanto que no les permite entender las enseñanzas que tienen lugar en las aulas y, en consecuencia, no aprenden. Se cree necesario que los docentes acepten el desafío de implementar nuevas metodologías que permitan que los alumnos se interesen por comprender los conocimientos.

La Competencia Matemática consiste en la adquisición de las habilidades para aplicar con precisión y rigor los conocimientos y el razonamiento matemático en la descripción de la realidad y en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

A partir de esta situación vemos que los jóvenes necesitan ver la matemática aplicada en algo concreto, razón por la cual estamos abocados a la necesidad de que el alumno entienda para que se emplea la matemática en la vida diaria.

Por otro lado, se encuentra la problemática ambiental, que son todos los problemas que amenazan la posibilidad de disfrutar de un medio ambiente saludable, generada por la explotación de recursos que nos brinda el planeta. Este problema afecta a la población a nivel mundial, a la actual y la futura. A causa de este problema se realizan diversas actividades para mitigar los daños ocasionados por las actividades del hombre.

A partir de esto, un grupo de docentes del área de matemáticas y otras asignaturas decidimos ponernos a trabajar en conjunto para tratar ambas problemáticas. Así surge el proyecto "Matemáticas Renovables: Aplicación Matemáticas a las Energías Renovables". En este nos propusimos construir en conjunto con alumnos de secundaria una cocina solar, para luego ser donada a un comedor.

En 2018, el primer año del proyecto, iniciamos con una búsqueda y consulta de bibliografía relacionadas al tema de energías renovables y cuidado medio ambiental, y cómo aplicar la matemática a estas. A la vez, contactamos con directivos del Colegio Nº 15 Agustín Mercau, para hablarles sobre el proyecto e invitarlos a formar parte del mismo. Cuando aceptaron colaborar con nosotros, pusimos fecha a una jornada de capacitación para los alumnos y docentes en temas relevantes al proyecto.

Llevamos a cabo la capacitación acordada y contando con el sí de los alumnos y docentes, procedimos a comprar la materia prima para la fabricación de la cocina que ellos mismo construyeron.

Fig 1. Cocina Solar en construcción en taller del Colegio Técnico.

Una vez terminada la construcción, la cocina fue donada al merendero "mi abriguito". Allí concurrimos en compañía de los docentes y estudiantes de la escuela técnica para realizar la instalación y entrega de la cocina, y poder compartir un almuerzo elaborado con energía solar.

Fig 2. Beneficiarios comedor "Mi abriguito" recibiendo la cocina donada

En el año 2019, trabajamos con una escuela generativa GEA, cuyos directivos se mostraron muy entusiasmado y comprometidos desde un primer momento. Tuvimos una reunión en donde realizamos un cronograma de actividades a desarrollar en conjunto y se estableció la institución que recibiría la cocina solar.

Previo al primer encuentro con los estudiantes de la GEA, en los laboratorios de la facultad, realizamos un paraboloide a escala con impresora 3D para tratar de materializar el concepto de la propiedad focal de la parábola [3], que queríamos mostrarles a los estudiantes.

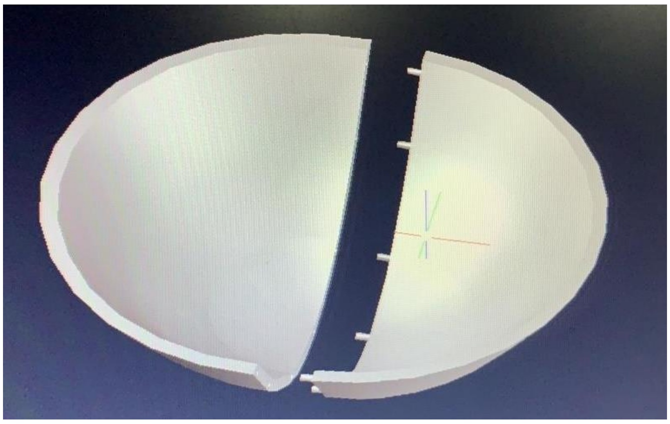


Fig 3. Paraboloide modelizado en Software CAD para impresión 3D.

Llegada la fecha, antes de comenzar la exposición les pedimos a los estudiantes que contestaran una encuesta en la aplicación formularios de google, para obtener una idea de cuánto conocen del tema antes de escuchar la exposición y así determinar el nivel de importancia que le dan los alumnos a las Matemáticas, y determinar si consideran el cambio climático como una problemática con necesidad de ser estudiada y evaluar las diferentes posibilidades para tratarlo.

Luego de responder la encuesta, se continúa planteando la problemática del cambio climático y las formas de mitigación, haciendo hincapié en el uso de energías renovables. Para ello se explica el modelo matemático de una cocina solar y se hace un breve desarrollo de las propiedades del paraboloide, entre ellos la propiedad focal de la parábola que permitirá optimizar la ubicación del recipiente a calentar.

$$\mathbf{4pz = x^2 + y^2} \qquad \mathbf{(1)}$$

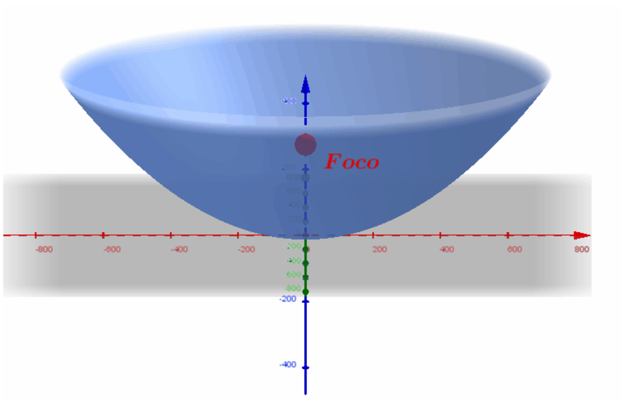


Fig 4. Ubicación del foco del paraboloide en software Geogebra.

Concretado el encuentro y contando con el sí de los alumnos y docentes, procedimos a comprar la materia prima para su fabricación. En este caso, a diferencia del año anterior, la cocina es fabricada fuera del establecimiento educativo ya que en dicha institución no poseen de las herramientas necesaria para llevar a cabo la misma. Pese a eso, los mismos estudiantes serán los que lleven a cabo el ensamble de la cocina con las piezas construidas.

Este colegio propuso la realización de dos cocinas: una para dejarla en la escuela y la otra para donar a una escuelita rural de la localidad de Donovan (San Luis). Para esta última, hemos organizado con los profesores y alumnos de la escuela GEA y del Colegio N°15 un viaje a dicha localidad para que los estudiantes del colegio anteriormente nombrado les enseñen a los de la GEA el ensamblado de la cocina. De ese modo se crearía una vinculación interesante entre los participantes del proyecto del año 2018 con los del 2019. Además, se planificó la visita al parque solar que se encuentra en Terrazas del Portezuelo.

6 PROYECCIONES

Con el presente proyecto se espera que los alumnos puedan crear un puente entre los hechos de la vida cotidiana y los conceptos matemáticos. De esta manera lograr que los contenidos enseñados en clase estén dotados de significado, y por lo tanto integrados al contexto de la realidad.

En relación a lo anterior, se pretende:

- Despertar el interés en los alumnos y promover el estudio universitario. En nuestro rol como docentes universitarios de las carreras de Ingeniería, observamos constantemente la necesidad de motivación en los alumnos.
- Desarrollar competencias genéricas en el estudiante de nivel secundario. Para lo cual deberá poseer conocimientos generales para realizar comportamientos laborales y habilidades que empleen tecnología.
- Desarrollar a través de una problemática actual, la vinculación de la matemática con el cambio climático, a través de la aplicación de energías renovables. Modelando por medio de una actividad cotidiana, y aprovechando el calor generado por el sol.
- Generar iniciativa a alumnos y docentes para desarrollar y relacionar la matemática con el contexto.
- Generar iniciativa para mitigar los efectos ambientales del cambio climático.
- Generar iniciativa a alumnos y docentes para desarrollar actividades sociales.

7 CONCLUSIONES

El interés de los alumnos cambia su sentido cuando se les plantea problemáticas dentro del contexto socio-ambiental donde ellos se encuentran inmersos. En el presente trabajo se formula una actividad enmarcada en la problemática ambiental del cambio climático, situación que los alumnos reconocen y consideran que se debe trabajar en pos de su mitigación, como así también la realidad social en la que se vive. En este caso particular con el uso de herramientas matemáticas aplicadas para mitigar el cambio climático, para formular un diseño de una cocina solar, que luego es donada a una institución a quien se le da una solución ambiental y económica, genera en los alumnos un sentido real de los números, fórmulas y teoremas a los cuales previamente no le daban importancia. Puede evidenciarse por medio de las encuestas que los alumnos reconocen las dos problemáticas a las cuales se les consulta. Por un lado, les dan una gran importancia a la situación que está sufriendo el planeta con respecto al cambio climático y entienden en general cuales son las principales causas que lo ha generado, por el otro también advierten sobre su desinterés y desmotivación por las matemáticas cuando son tratados de manera aisladas de cualquier contexto de la vida que los rodea.

Referecias

1. Fuller G.; Tarwater D.: *Geometría Analítica*. 7 ª edición. (1995).
2. Fundación tierra: Historia de la cocina solar. *Terra ecología práctica*. https://www.terra.org/categorias/comunidad-cocina-solar/historia-de-la-cocina-solar (2005).
3. Lehmann, Charles H.: *Geometría Analítica*. (2012).

Estrategia metodológica en enseñanza de la Matemática mediante la observación de fenómenos físicos. Caso de estudio funciones cónicas

Laura A. Avila[1], Rodolfo A. Dematte[2], Josefina Huespe[3]

[1] DACEFyN Universidad Nacional de La Rioja (UNLaR).
Av. Luis de la Fuente S/N (5300) La Rioja
alauavi@gmail.com

[2] Instituto de Energías Naturales Renovables. Centro de Investigación e Innovación Tecnológica (UNLaR)
Av. Luis Vernet 1000 (5300) La Rioja
rdematte@unlar.edu,ar

[3] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Centro Universitario. (M5502JMA). Mendoza, Argentina.
josefina.huespe@ingenieria.uncuyo.edu,ar

Resumen. En este artículo se presenta una propuesta metodológica de enseñanza de la matemática y su interrelación con la física aplicada en la escuela secundaria. Puntualmente, esta propuesta apunta a motivar y apoyar la comprensión del estudio de las funciones matemáticas de segundo grado (cónicas) a través de experiencias del tipo de laboratorio de física, realizadas con elementos de uso cotidiano y muy bajo costo. Como resultado de la propuesta, se construyeron estaciones experimentales para mostrar la generación de las curvas que responden a ecuaciones de segundo grado, su relación con el estudio de la física (óptica geométrica) y las propiedades ampliamente utilizadas en diversas aplicaciones y dispositivos de uso habitual. Con esta actividad se relacionaron simultáneamente la matemática y la física que forman parte de la currícula de los últimos años de las escuelas secundarias. Esta propuesta se desarrolló en el marco del programa de proyectos de extensión de la Universidad Nacional de La Rioja (UNLaR) vinculando a la comunidad educativa. La escuela de nivel medio seleccionada fue el Centro de Educación Franciscana San Francisco de la Ciudad de La Rioja)

Palabras Clave: Matemática, Física, Aprendizaje significativo, Ingeniería, Extensión universitaria.

1 Introducción

El número de estudiantes que eligen una carrera STEM (ciencia, tecnología, ingeniería o matemáticas) disminuye todos los años, a pesar de que las perspectivas de empleo son más altas que en otros campos. [1] Mejorar los indicadores de ingreso universitario es un objetivo importante en las reformas educativas de Estados Unidos, Europa y Latinoamérica. En Argentina, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería desde hace 15 años trabaja en la formulación y regulación de competencias genéricas para ingenieros [2]

Desde 2007, la Secretaría de Políticas Universitarias lleva adelante acciones para aumentar la cantidad de estudiantes y egresados de las ingenierías, debido a la baja tasa de ingreso a las carreras de ingeniería.

Dentro de los Objetivos del Desarrollo Sostenible 2030 (ODS 2030) se propuso llegar en el año 2021 al 11.8% de ingresantes a carreras del Nivel Superior Universitario en ciencia, tecnología, ingeniería y matemática (STEM por sus siglas en inglés), el último dato registrado indica que solo fue del 2.4% en

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

base a la población de 18 a 24 años (2017) aún existe una diferencia de 9,40 p.p. [3]. Los indicadores son bajos y más baja aún es la proporción de mujeres que estudian carreras relacionadas con la ingeniería, del total sólo el 24 % de los ingresantes, estudiantes y graduados son mujeres [4]

Kelley citando a Frykholm y Glasson 2005; Barnett y Hodson 2001, propone que *el aprendizaje, el diseño de ingeniería, la investigación científica, la alfabetización tecnológica y el pensamiento matemático es un sistema integrado lo que permite la construcción del conocimiento y permite la oportunidad de la interdisciplinariedad con otras áreas* aunque es un desafío presentar a los alumnos conceptos relacionados entre distintas disciplinas cuando generalmente los estudiantes no siempre o naturalmente utilizan sus conocimientos disciplinarios en contextos integrados. [1]

En este contexto se pretende aportar a través de la realización de estos proyectos de extensión universitaria que buscan promover el estudio de la ingeniería y otras carreras de ciencias exactas, así como también colaborar con la difusión del estudio de la matemática y la física y sobre todo contribuir con su comprensión y aprendizaje en edades tempranas.

La extensión, la investigación y la docencia son los pilares fundamentales de la universidad. La extensión universitaria promueve el desarrollo cultural y la transferencia del conocimiento a los diferentes sectores de la sociedad. En consecuencia, la extensión es el encuentro entre los distintos actores sociales, en palabras de Camillioni *no es transmisión sino acción intersubjetiva de problematización, concientización, reflexión y cambio, de este modo, la universidad asume un compromiso con la sociedad* [5]

En cada acción de extensión universitaria se ponen a disposición de la sociedad todo el bagaje de conocimientos adquiridos y/o desarrollados por parte de la comunidad universitaria (docentes, alumnos, no docentes y graduados) que dialogan con los conocimientos y saberes presentes en el medio sociocultural y socio-productivo en el que se interviene [6].

En el marco de diferentes programas de extensión universitaria desde el año 2016, en la UNLaR se trabaja con el proyecto de extensión universitaria "Matemática y Física. Aportes para fortalecer sus vínculos" El proyecto fue seleccionado por la Asociación de Física de la Argentina (AFA), que en su convocatoria INVOFI (Incentivo a las vocaciones para el estudio de la Física) que invita anualmente a presentar propuestas innovadoras que favorezcan el acercamiento de los estudiantes a las ciencias naturales y a la ingeniería, donde se proponen algunas experiencias, y su vinculación físico-matemática, como así también sus aplicaciones tecnológicas. Los resultados de la implementación de dicho programa se presentan en este trabajo.

1.1 Objetivos del proyecto

El objetivo general del proyecto fue la promoción del estudio de la ingeniería en la escuela media, a través de la creación de material didáctico diseñado de manera colaborativa entre los alumnos de la escuela secundaria, docentes y extensionistas universitarios.

Entre los objetivos específicos del proyecto se pueden mencionar:

- Estimular el interés vocacional de los alumnos del nivel medio hacia la Matemática y la Física, mediante la participación activa en el desarrollo de experimentos con elementos de uso cotidiano. Introducir en los educandos el concepto de interdisciplinariedad vinculando la Matemática con la Física.
- Demostrar la interrelación que existe entre los contenidos de ambas materias.
- Fomentar la creatividad en alumnos y docentes para generar en conjunto (Escuela – Universidad) material didáctico con elementos de bajo costo.
- Fomentar el trabajo colaborativo entre los docentes y alumnos de escuelas secundarias.
- Generar espacios en las escuelas para el desarrollo y la realización de experiencias de laboratorio de física.
- Impulsar el compromiso participativo de los profesores del nivel medio en este tipo de actividades pedagógicas.
- Estrechar vínculos entre las instituciones participantes generando conexiones para el desarrollo de futuros proyectos.

2 Materiales y métodos

Como base teórica para el desarrollo del trabajo se tomó la metodología propuesta por Trejo Trejo et al (2015), *Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica* se destaca por la realización de actividades previas introductorias por parte del docente, tales como la selección adecuada del evento a contextualizar, la identificación de los conocimientos previos de matemáticas y de la disciplina del contexto, y el diseño de la situación de aprendizaje en donde un profesor puede trabajar con la Matemática en Contexto de las Ciencias para fomentar la interdisciplinariedad [7]. Se opta por esta metodología, porque existe la necesidad de formar un nuevo perfil que obliga a repensar la manera en que se enseña y aprende matemáticas en la escuela de hoy [8].

Rodríguez et al 2015, sugiere tener en cuenta los siguientes aspectos respecto a la enseñanza de las matemáticas:

- *El tipo de matemáticas que debe ser enseñada y aprendida*
- *La relación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería.*
- *El rol que juegan los profesionales en la transformación del conocimiento matemático hacia un saber práctico, y de qué manera ese saber práctico puede volverse al aula.*
- *Las formas de modelización pertinentes en esos niveles.* [9]

2.1 Etapas metodológicas

- Etapa 1. Selección del evento contextualizado: La primera actividad que el profesor debe realizar corresponde a la selección del contexto para el tema matemático que desea abordarse, las modalidades más comunes son: caso de estudio, problema o proyecto [8]. Es condición indispensable que el profesor deja de ser proveedor de conocimiento para ser moderador mientras que el estudiante toma el rol activo en la construcción del conocimiento, además de desarrollar habilidades y destrezas sociales. En el proyecto planteado se contextualiza la matemática en relación a la física, ya que ambas asignaturas corresponden al cuarto año del nivel secundario.
- Etapa 2. Identificación de conocimientos previos de matemáticas y de la disciplina con la que se trabaja. En este punto el profesor establece como estrategia didáctica la introducción de los nuevos temas matemáticos [8]. Se identificó las nociones previas con las que cuenta el estudiante (matemáticas y física). El grupo de trabajo junto con el docente de aula diseñó actividades a partir de los conocimientos previos de las disciplinas, en pos de buscar la construcción de conocimientos significativos [10] [11]. En su aplicación y desarrollo es necesario indagar sobre las creencias de los estudiantes para generar nuevas estrategias que permitan que tanto la enseñanza como el aprendizaje sean más efectivos [12].
- Etapa 3. Generar una propuesta didáctica o situación de aprendizaje. Se diseñó una propuesta didáctica o situación de aprendizaje para los estudiantes, misma que deberá ser trabajada previamente por los docentes para poder anticiparse a las dificultades y preguntas. *El éxito en la construcción del conocimiento matemático está en función directa de una buena propuesta didáctica, pero sobre todo de la conducción y guía de la actividad por parte del profesor* [8].
- Etapa 4. Puesta en acción de dicha propuesta didáctica.

2.2 Aplicación de la propuesta didácticas

La puesta en acción de la propuesta didáctica se realizó con una experiencia piloto en la Escuela Secundaria Nº 247 Centro Educativo Franciscano San Francisco de Asís. La propuesta didáctica se compartió con docentes y alumnos del cuarto año.

3 Resultados

Se realizó la producción de material didáctico de bajo costo, constituyendo lo que se denominó: *estaciones experimentales*.

Esta tarea persiguió no solamente incentivar a los estudiantes del nivel medio, sino impulsar en sus docentes el espíritu de realizar actividades no formales que complementen sus tareas académicas. Además, las estaciones de trabajo que se construyeron (ver a continuación) quedaron en las aulas para futuras aplicaciones, es importante resaltar que tales estaciones pueden ser ampliadas y/o modificadas para realizar todas las experiencias que los docentes y los estudiantes decidan.

3.1 Primera estación: mecanismo de generación y proyección de cónicas con láser

Con la *primera estación*, se mostraron las curvas que se obtienen entre la intersección de un cono con planos ubicados en distintas posiciones.

La experiencia consistió en la utilización de un banco de rotación (plataforma giratoria p/experiencias de mecánica rotacional Pasco ®), y un puntero láser adosado, que al ser encendido proyecta un cono con el giro de la generatriz. Se precisó de una máquina de humo para la visualización del rayo láser, y un rectángulo de acetato o plástico (que se utilizó de plano de intersección). En talleres posteriores, se reemplazó el banco de rotación por un antiguo tocadiscos para generar la rotación del láser. (véase como ejemplo la Figura N° 1).

Fig. 1. Tocadiscos con dispositivo para colocación de láser. Al encender el láser y el tocadiscos la rotación forma la generatriz que dependiendo del ángulo de inclinación da lugar a un cuerpo de revolución como el cilindro o el cono. La máquina de humo posibilita una mejor observación del haz de láser. Para la observación de las funciones cónicas, se utiliza una hoja de papel o acetato y se varía el ángulo de la hoja que corta el haz de láser.

Con este mecanismo, se pudo visualizar las distintas cónicas generadas al interceptar el láser con el plano. De este modo los alumnos pudieron experimentar fenómenos físicos ópticos y su correspondiente relación con la matemática. En este contexto, la actividad sirvió de disparador para que los alumnos pudieran observar las funciones matemáticas cónicas: círculo, elipse, hipérbola y parábola a través de la visualización de un fenómeno físico.

Una vez visualizadas las cónicas, se desarrolló su estudio matemático y además se explicó la obtención y propiedades del láser.

Luego de la actividad experimental, se realizó una puesta en común entre los docentes y los estudiantes, las preguntas disparadoras fueron: *¿Qué te pareció la experiencia?, ¿Te gustaría agregar alguna otra experiencia para hacer en tu aula?, ¿Se te ocurren algunas ideas para mejorarla? ¿Cómo implementan este tema en su espacio áulico?* Entre todos debatimos sobre su implementación en el aula y su experiencia de uso.

Como la escuela cuenta con pantallas digitales interactivas se pueden mostrar videos y utilizar software matemático para estudiar las propiedades de las cónicas con un mayor dinamismo. En el establecimiento tienen disponibles la página Youtube® y el software Geogebra®.

Cuando se presentó esta experiencia a los estudiantes, valoraron, al igual que los docentes, el hecho de ver las curvas como resultado de los distintos cortes y a su vez propusieron alternativas para mejorar el dispositivo en cuanto al direccionamiento del humo a fin de optimizar la visualización de los rayos.

3.2 Segunda estación: elipse y parábolas

La *segunda estación* consistió en la construcción de material didáctico (con cartón y pequeños espejos) que demostró, mediante la reflexión de la luz, las propiedades de la parábola y la elipse. Empleando espejos pegados en una cinta podemos obtener formas de parábola y elipse para comprobar las propiedades ópticas de las mismas.

Se emplearon varios punteros láser como fuentes de luz y la máquina de humo para observar la trayectoria de los rayos.

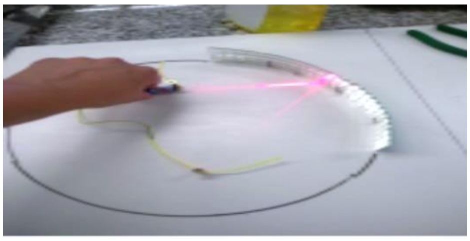


Fig. 2. Estación 2. Empleando espejos pegados en una cinta, se comprobó la construcción y las propiedades matemáticas de la parábola y de la elipse, como así también su aplicación.

La interacción con los docentes y estudiantes en esta segunda experiencia se puede resumir en el siguiente párrafo: La presentación de esta experiencia llevó a recordar la definición de la curva elipse y discutir algunas otras formas de poder representarla en el plano, basándonos en la definición de la curva como conjunto de puntos cuya suma de las distancias a dos puntos llamados focos es constante, por ejemplo, con hilos. (véase como ejemplo la Figura N° 2).

Se repasaron las definiciones de las curvas en la instancia con los docentes, las cuales no iban a ser presentadas a los alumnos, debido a que es un tema que se delega a un curso superior (en las carreras de ingeniería se estudia en detalle en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica). Por ello, el equipo pedagógico se limitó a orientar a los estudiantes hacia las posibles aplicaciones (véase como ejemplo la Figura N° 3).

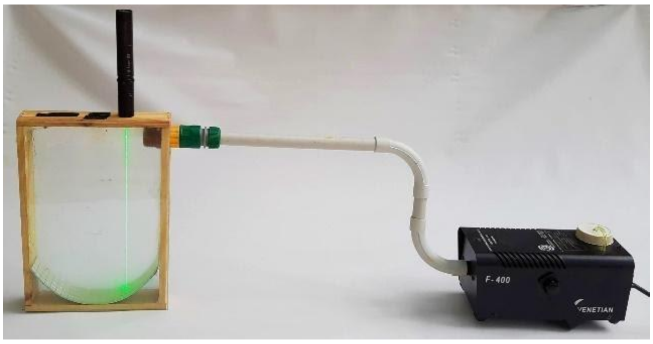


Fig. 3. Estación 2. Empleando espejos pegados en una caja estanca con humo, se visualizan las propiedades físicas ópticas de espejos curvos.

3.3 Tercera estación: aplicaciones prácticas y tecnológicas. Investigación y debate.

En la tercera estación, se analizaron y demostraron las aplicaciones prácticas y tecnológicas de las funciones cónicas, con la construcción de prototipos y de distintos artefactos tecnológicos donde se emplean las propiedades antes mencionadas, tales como, hornos, lámparas, cocinas solares, inclusive los efectos que se obtienen con las luces en los sitios de esparcimiento bailables, entre otros.

3.4 Guía para difusión.

Como se mencionó anteriormente, luego de la experimentación realizada, pueden surgir nuevas estaciones que se relacionen con este tema, o bien, generar más experimentos a las mismas.

Además, se desarrollaron tutoriales para el armado de estas estaciones experimentales de bajo costo, y guías de las posibles experiencias que pueden llegar a realizarse en las mismas.

Los resultados están disponibles en la web en un repositorio en línea disponible en (https://issuu.com/rdematteunlar/docs/matematica_y_fisica_aportes_para), permitiendo que otras instituciones educativas puedan replicar las experiencias y de ese modo propiciar su uso y posibilitar el intercambio y la incorporación de nuevas experiencias que pudieran surgir del interés de alumnos y educadores (véase como ejemplo la Fig. 4).

Fig. 4. Portada de la guía realizada: Matemática y Física. Aportes para consolidar sus vínculos.

4 Conclusiones y futuras propuestas

Desde el punto de vista de la vinculación entre las instituciones participantes del proyecto, la experiencia resultó muy enriquecedora, fue el inicio de varios proyectos de extensión en conjunto que originaron un programa que continúa, en otras aplicaciones de la matemática y de la física. Por ejemplo, el proyecto de extensión: *Conociendo el cielo riojano* presentado en 5to Encuentro Virtual de Enseñanza de las Ciencias. Simposio de Enseñanza y Popularización de la Astronomía y diversos trabajos multidisciplinarios presentados en simposios de la APFA (Asociación de Profesores de Física).

La interrelación de las dos áreas del conocimiento vinculadas quedó establecida y se aproximó a los jóvenes a la mirada de interrelación de estas disciplinas. Las experiencias de las estaciones de trabajo, fueron motivadoras y generaron mucho entusiasmo en los estudiantes, si algo quedó muy en claro fue que aprender ciencia puede ser muy divertido. Específicamente los docentes, recordaron que durante su formación docente tenían que imaginar dichos cortes, y valoraron que un dispositivo sencillo facilite la visualización de las curvas. Inmediatamente surgieron alternativas de mejora en cuanto a la forma de obtener el cono y al plano que efectúa los cortes. Como las estaciones experimentales quedan para los docentes y la escuela, las mejoras y proyecciones que ellos propongan son más que factibles de realizar en el futuro.

Se buscó desarrollar una idea constructivista del conocimiento, donde la interacción, los conocimientos previos y la practicidad de los experimentos planteados, permite a los estudiantes una mejor comprensión de las clases teóricas, mejorando el *saber*. Recordaron lo visto en la clase de matemática, no tenían presentes los nombres de las cónicas, pero sí que eran cuatro curvas. También surgieron ideas sobre la adaptación del tema para exponerlo ante los estudiantes, que están más abocados en el 4to año a estudiar en profundidad Análisis Matemático y pocos contenidos de Geometría Analítica. A los docentes del nivel medio les pareció que esta forma de presentar a las curvas es más didáctica en una etapa introductoria.

La participación efectiva de los alumnos en la preparación, el desarrollo y las conclusiones de las experiencias, se considera que han sido relevantes en su desarrollo del *saber hacer y saber ser*. Todas las experiencias fueron llevadas a cabo en una hoja de ruta decidida por el docente a cargo y al final los estudiantes hicieron debates y puestas en común, para lo cual debían apelar al consenso, la negociación, la comprensión: saber convivir.

De todas las exposiciones, lo más enriquecedor fueron las propuestas de los mismos alumnos para incorporar nuevas actividades a las estaciones experimentales, así como el entusiasmo de los docentes para replicar la experiencia en otras escuelas de la enseñanza media

Las *actividades de extensión* permitieron la vinculación de los docentes del nivel medio al ámbito universitario generando un espacio de colaboración y un vínculo entre ambos niveles, les abre un panorama de conocimientos, explicaciones y aplicaciones que pueden transferir a sus alumnos y sobretodo la certeza de saberse acompañados desde la universidad. La vinculación con estudiantes de nivel secundario posibilita estimular indirectamente el *interés vocacional de los alumnos hacia la ingeniería*, a través de la Matemática y la Física, mediante la participación activa en el desarrollo experimentos con elementos de uso cotidiano. Se vinculó con los estudiantes del nivel medio generando una primera interacción con el ambiente universitario en busca de despertar las vocaciones en el estudio.

El trabajo conjunto entre ambas instituciones estrechó lazos para futuros proyectos preferentemente que apoyen la instancia de prácticas en el laboratorio de la UNLaR, ya que la institución de nivel medio todavía no cuenta con un espacio físico ni material didáctico específico.

Agradecimientos. A los directivos, docentes y estudiantes del C.E.F. San Francisco de La Rioja, Argentina.

Referencias

1. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. Documentos de la OCDE Panorama de la educación Indicadores de la OCDE https://sede.educacion.gob.es/publiventa/descarga.action?f_codigo_agc=19884 (2019) Accedido 19 de marzo de 2021.
2. CONFEDI. Documentos de CONFEDI: competencias en ingeniería "Declaración de Valparaíso" sobre Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Iberoamericano. CONFEDI. Universidad FASTA Ediciones (2014).
3. CNCPS Consejo Nacional de coordinación de políticas sociales. Segundo Informe Voluntario Nacional Argentina. Foro Político de Alto Nivel Sobre el Desarrollo Sostenible de las Naciones Unidas AGENDA 2030 - ODS Argentina https://sustainabledevelopment.un.org/content/documents/26364VNR_2020_Argentina_Report_Spanish.pdf (2020). Accedido el 19 de marzo de 2021.
4. CONFEDI. 23 de junio Dia internacional de las mujeres en ingeniería. CONFEDI. https://confedi.org.ar/23-de-junio-dia-internacional-de-las-mujeres-en-ingenieria/ (2021) Accedido el 19 de marzo de 2021.
5. Camilloni, A; Menéndez, G. Rafaghelli, M.; Kessler, M.; Menéndez, G., Borfelli, M.; Sordo, S.; Pellegrino, E. Malano, D. La inclusión de la educación experiencial en el currículo universitario. Ediciones UNL. Santa Fe, Argentina: Integración docencia y extensión: otra forma de enseñar y de aprender. Ediciones UNL, pp11-22 (2013).
6. Menéndez, G. A extensão nas universidades latino-americanas e caribenhas passados 100 anos da Reforma Universitária de 1918. De que extensão estamos falando? Como é projetada a extensão nas universidades da América Latina e do Caribe? Revista Angolana de Extensão Universitária. Vol. 2, No. 1, pp 08-38 (2020).
7. Rodríguez Gallegos, Ruth. Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos. IE Revista de investigación educativa de la REDIECH, Vol. 8 No. 15, pp 69-85 (2017)
8. Trejo Trejo, E., Camarena Gallardo, P. Trejo Trejo, N. Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica Revista de Docencia Universitaria Vol.11 (Número especial, 2013), 397-424.
9. Rodríguez, R.; Quiroz, S. Developing Modeling Competencies through the use of technology. EnG. Stillman, W. Blum y M.S. Biembengut (eds.), Mathematical Modelling in Education, Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences. Springer, pp. 443-452 (2015)
10. Rodríguez Palmero, M.L. La teoría del aprendizaje significativo. La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva. Editorial Octaedro. pp 7-44 (2010)
11. Coll, C. Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo. Infancia y aprendizaje Vol. 41 pp 131-142 (1988)
12. Fajardo Valencia, A.; Benítez Mojica, D. Influencia de las creencias de los estudiantes en la resolución de problemas en educación matemática. Revista de Educación Matemática Vol.35, N° 3 (2020), páginas 21–36 (2020)

El sistema de ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán en tiempo de pandemia.

Nicolás Nieva[1], María I. Giannini[2], Fernando A. Miranda Bonomi[2], María. F. Guzmán[3]

[1] LAFISO-INFINOA, Departamento de Física, FACET-UNT
Avenida Independencia 1800 (4000), S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
nnieva@herrera.unt.edu.ar

[2] Área Ingreso, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán (FACET-UNT)
Avenida Independencia 1800 (4000), S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
{migianinni,fmirandabonomi}@herrera.unt.edu.ar

[3] Secretaría Académica, FACET-UNT
Avenida Independencia 1800 (4000), S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
mferguzman@herrera.unt.edu.ar

Resumen. Frente a la irrupción de la pandemia de Covid-19 en marzo de 2020, el Área Ingreso de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán adoptó la modalidad virtual completa para sus cursos de nivelación en matemática y pruebas de suficiencia para dar continuidad pedagógica a esta etapa vital de la articulación con los alumnos provenientes del nivel medio. Se mantuvo el contenido curricular de los cursos de nivelación del programa de ingreso del 2020 y se adaptó el Aula Virtual de la plataforma Moodle Facet Virtual de la Facultad. Se presentan detalles de la estrategia y forma de trabajo adoptada para cumplir con el espíritu del programa de ingreso a la FACET. Los resultados fueron altamente positivos, desde lo académico y de lo organizativo, lo que permitió atender una demanda de ingresantes que casi duplicó a la del año anterior 2020.

Palabras Clave: Sistema de ingreso virtual, Estrategias de enseñanza, Matemáticas.

1 Introducción

La Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán (FACET-UNT) incluye en su oferta académica cuatro carreras de pregrado, dieciséis de grado y catorce titulaciones de posgrado, todas estas carreras requieren de los aspirantes una base de conocimientos matemáticos lo suficientemente sólida. En las condiciones normales previas a la pandemia de Covid-19 la Facultad ofrecía a los aspirantes al pregrado y al grado un programa de ingreso consistente en cursos de nivelación en matemática y actividades complementarias. Entre los objetivos principales de este programa se busca que los aspirantes refuercen o adquieran conocimientos necesarios para facilitar el cursado de primer año de las carreras de la Facultad. Se busca desarrollar habilidades y criterios para estudiar, que adquieran información necesaria para incorporarse a la vida universitaria, que seleccionen los procedimientos que mejor se adecuarán a las situaciones planteadas y que se conduzcan con mayor seguridad. El sistema de ingreso de la FACET-UNT es provisto por su Área Ingreso, articulando acciones con: las Secretarías Académica y de Bienestar Estudiantil, el Área de Comunicaciones, el Gabinete de Tutorías y distintas cátedras y laboratorios de docencia, de investigación y de extensión. El Área Ingreso cuenta con dos coordinadores y un equipo docente asignado especialmente a las tareas docencia y tutoría del programa de ingreso.

La articulación con el nivel de enseñanza media es un pilar fundamental dentro de la política educativa de nuestra institución. Con este horizonte, desde principios de 2019 se propusieron desafíos y modificaciones en el sistema de ingreso de la FACET, procurando llegar a la población en una forma lo más homogénea e inclusiva posible [1]. La amplitud en la oferta académica y la extensión del área geográfica de influencia de la FACET implicaban un desafío a la hora de hacer más accesible esta etapa de transición y articulación. En este sentido, entre otras medidas, desde el mismo 2019 se avanzó en llegar con presencia territorial a cuatro lugares de la provincia de Tucumán: sede Capital (zona centro), sede Aguilares (zona sur), sede Trancas (zona norte) y Tafí del Valle (zona oeste de montaña), brindando en cada una de ellas el curso de nivelación. También se diseñó y concretó por primera vez un formato semipresencial de ingreso, de diciembre de 2019 a febrero de 2020 usando los servicios del Centro de Educación a Distancia de la Facultad (CEDITE-FACET), siempre con el propósito de abolir la brecha geográfica y de facilitar el acceso de ciudadanos de toda el área de influencia de la institución.

Otra modificación importante introducida para el sistema de ingreso 2020 fue la reformulación del programa de nivelación en matemática y de actividades complementarias para su adecuación al enfoque por competencias, sumado a la implementación de un proceso de mejora continua. Entre las competencias de egreso citadas en la propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) (Libro rojo) [2] se pueden referir algunas cuyas bases pretendieron ser provistas al ingresante desde y durante el proceso mismo de ingreso. Es así como competencias tecnológicas básicas como "utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería" o competencias sociales, políticas y actitudinales como "Comunicarse con efectividad", "Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global", "Aprender en forma continua y autónoma" fueron incluidas como estrategia pedagógica complementaria en el programa de ingreso. La aplicación de un modelo de formación por competencias en la instancia de articulación y nivelación para el ingreso a la FACET significó también la formación y capacitación de los recursos humanos que conforman el equipo docente. Este equipo está conformado por egresados de la UNT con diversa formación de grado, lo que constituye una fortaleza por el aporte de diferentes experiencias del ámbito profesional, pero a su vez se necesita la guía de especialistas que contribuyan en la capacitación en aspectos pedagógicos.

En conjunto, estos cambios permitieron ayudar a la igualdad de oportunidades al llegar a otros territorios, tanto en forma presencial como remota digital, se logró hacer un abordaje más estructurado en la formación del alumnado e instrumentar un proceso de sintonía con los requerimientos del primer año de cursado de las carreras de la FACET en cuanto a las capacidades de sus estudiantes. Los primeros resultados fueron alentadores [3].

Pero un día de marzo de 2020 la pandemia de Covid-19 impactó de lleno en la República Argentina y produjo una disrupción en la educación superior. Los cierres obligatorios de los lugares habituales de encuentro presencial de alumnos, docentes y administrativos como medida para evitar la propagación de la enfermedad llevaron a tomar acciones prontas para la continuidad pedagógica. Los obstáculos desde el principio fueron tecnológicos, financieros, pedagógicos y administrativos, amén de los graves problemas sociales, culturales, económicos y sanitarios generados por la pandemia en la población.

Para otro momento queda la discusión si el sistema universitario argentino estaba bien preparado para un evento de este tipo. En la FACET se apostó desde el principio a la continuidad pedagógica en forma de educación remota de emergencia como una manera de garantizar la educación como un derecho humano, un bien público y social y de responsabilidad como institución pública de gestión estatal.

En el caso del programa de ingreso, bajo las condiciones de la Resolución N° 0145/2020 del Honorable Consejo Superior de la UNT y posteriores [4], el Área Ingreso modificó su estrategia de trabajo adoptando la modalidad virtual completa para los cursos de nivelación y las pruebas de suficiencia, tanto en el dictado como en la evaluación.

El objetivo del presente trabajo es mostrar en forma sintética la estrategia y forma de trabajo adoptada para aplicar dentro del contexto de excepción suscitado el espíritu del programa de ingreso a la FACET, los resultados académicos obtenidos y las conclusiones finales de un año académico atípico.

2 Metodología

2.1 Decisiones, actividades y estrategia para el programa de ingreso 2021 a la FACET.

Para afrontar la contingencia de la participación remota de los alumnos considerados como ingresantes de la FACET en el año 2021, se tomaron decisiones y se implementaron actividades y estrategias entre las cuales se destacan:

- Se mantuvo el contenido curricular del curso de nivelación en Matemática similar al del Ingreso 2020, abarcando los siguientes temas generales: 1) Números Reales, 2) Expresiones Algebraicas, 3) Funciones y Ecuaciones, 4) Geometría, 5) Trigonometría. [3]
- Se realizó un proceso de capacitación del equipo de trabajo. Las nuevas condiciones laborales exigidas requirieron la preparación especial de los docentes del equipo del Área Ingreso. Se contó con el asesoramiento y acompañamiento permanente del CEDITE y de la Secretaría Académica de la FACET.
- Desde la Coordinación se adaptó el Aula Virtual a la nueva modalidad de cursado y de evaluación, ambas completamente virtuales, del programa de ingreso 2021. Se diseñaron para este objetivo las diferentes instancias de nivelación y pruebas de suficiencia. Los alumnos tuvieron la oportunidad de familiarizarse con las metodologías de evaluación a través de controles de estudio con la misma modalidad al finalizar cada unidad.
- Se concretaron reuniones virtuales de trabajo con el equipo docente del Área Ingreso para establecer la estrategia pedagógica, la metodología de trabajo, el monitoreo continuo del avance del programa y la evaluación de los resultados obtenidos en cada instancia. El monitoreo incluyó un análisis de dificultades y propuestas de mejora. Estas acciones se engloban en sostener la consigna de mejora continua a pesar de las circunstancias a priori tan desfavorables.

2.2 Instancias de nivelación para el ingreso 2021

Durante el periodo abril 2020 a febrero 2021 se realizaron tres instancias de curso de nivelación y tres pruebas de suficiencia, todos en modalidad a distancia. La inscripción y recolección inicial de datos de los interesados se implementó mediante formularios de Google. La información de cada instancia se publicó en el sitio web del Área Ingreso de la FACET [https://www.facet.unt.edu.ar/ingreso-facet/]. La difusión de noticias, novedades y llamados se llevó a cabo por las redes sociales del Área Ingreso y de la Facultad. Siempre se trabajó para todos estos propósitos en forma coordinada con la Secretarías Académica y de Bienestar Estudiantil, con el Área Comunicaciones y con el CEDITE.

A continuación, se presentan algunos detalles y particularidades de cada dictado y evaluación. Las cambiantes condiciones fueron adaptaciones a las restricciones establecidas por las autoridades superiores de la UNT:

Curso abril-agosto (2020-04-CUR): El curso inició el 15/04/20 y finalizó con su última actividad de recuperación el 12/08/20. Para el cursado se utilizó el Aula Virtual de Facet Virtual y dos clases semanales virtuales sincrónicas a través de Google Meet en tres turnos a elección: uno matinal y dos vespertinos. El Aula Virtual se organizó según unidades temáticas y con una presentación que facilitó el acceso ordenado y coordinado con las clases virtuales. Se incluyó un Contrato Pedagógico del curso y una guía didáctica detallando el contenido y proceso de enseñanza en cada unidad. Para cada unidad el Aula Virtual incluyó un foro de consulta a cargo de tutores docentes, material de estudio, ejercitación, una selección de videos recomendados sobre cada tema y una evaluación de seguimiento con calificación y realimentación automáticas. A nivel global se incluyeron, además de los exámenes parciales y sus recuperaciones, un foro de anuncios y un menú de acceso a grabaciones de las clases virtuales, que fueron editadas y subidas al canal de YouTube asociado a la cuenta institucional del Área Ingreso. Las tareas se distribuyeron entre los integrantes del equipo docente; las mismas fueron asignadas en función de la carga horaria y necesidades del Área e incluyeron dictado de clases, atención de foros de consulta y revisión del material de estudio. Se brindaron, dentro del tiempo para el dictado, talleres de introducción a la vida universitaria en modalidad virtual a cargo del Gabinete de Tutorías de la FACET.

Una breve acotación respecto al Aula Virtual. En presencialidad se les brindaba a los alumnos del Curso de Nivelación un taller para el registro en Facet Virtual y su matriculación en el Aula del curso, que se utilizaba como aula extendida. Para el dictado semipresencial de diciembre 2019 - febrero 2020, el Área Ingreso preparó videotutoriales para que los alumnos pudieran autogestionar su registro y matriculación. Este material fue aprovechado en la modalidad de dictado plenamente virtual, donde el Aula pasó a ser un elemento fundamental en el dictado. Además, el uso de Aula Virtual en la plataforma Facet Virtual es frecuente en las asignaturas de primer año y la mayoría de las mismas en los siguientes años. Así, los nuevos alumnos ingresan ya familiarizados con este recurso tecnológico, contribuyendo a lograr nuestro objetivo de que se conduzcan con seguridad.

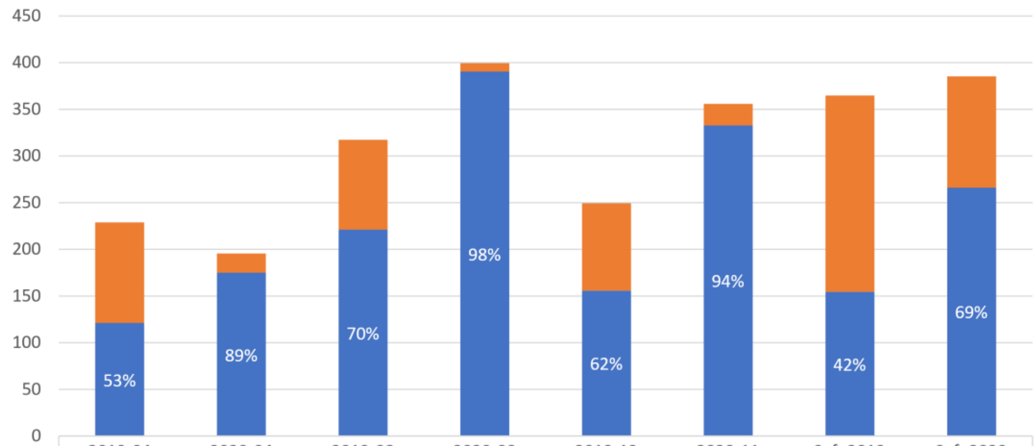
Curso agosto-octubre (2020-08-CUR): El curso inició el 19/08/20 y finalizó con su última actividad de recuperación el 30/10/20. Para el cursado se utilizó el Aula Virtual y tres clases virtuales sincrónicas a través de Google Meet en tres turnos: uno matinal y dos vespertinos. El uso del Aula Virtual fue similar al curso anterior. Los alumnos participaron de las charlas de presentación de las carreras de la Facultad, organizadas por el Gabinete de Tutorías de la FACET. Ésta fue la herramienta que la Facultad pudo brindar a los aspirantes para que adquieran información sobre la oferta académica mediante videoconferencias con el testimonio de los directores de carrera, docentes, graduados y alumnos de las mismas.

Curso noviembre - diciembre 2020 (2020-11-CUR): El curso inició el 03/11/20 y finalizó su última actividad de recuperación el 23/12/20. Se trató de un curso de dictado intensivo con clases sincrónicas diarias con dos comisiones en cada uno de los tres turnos (6 clases diarias). El Aula Virtual mantuvo el formato de los dos cursos anteriores. Como en el curso anterior, se invitó a los alumnos a participar de las charlas de presentaciones de carreras que se dieron.

Pruebas de suficiencia febrero 2021 (2021-10-02-SUF, 2021-17-02-SUF y 2021-24-02-SUF): Se habían planificado tres pruebas de suficiencia, una en agosto 2020, otra en diciembre 2020 y otra en febrero 2021. Por las consabidas cambiantes condiciones en las restricciones debieron suspenderse las pruebas de suficiencia de agosto y de diciembre de 2020. Las tres pruebas planificadas se tomaron en el mes de febrero de 2021, los días 10, 17 y 24, todas en forma virtual utilizando un aula especialmente diseñada para tal fin en la plataforma Facet Virtual. Mediante trabajo coordinado con las Secretarías Académica y de Bienestar Estudiantil, junto al Área Comunicaciones y el CEDITE se llevó adelante esta actividad inédita en nuestra Facultad. En el sitio web del Área Ingreso se publicó la información necesaria para tomar esta instancia, además de material de estudio elaborado por el Área Ingreso y una selección de videos tutoriales disponibles en YouTube sobre todos los temas a evaluar. El Área Ingreso preparó un video tutorial con los pasos necesarios para acceder y responder a la evaluación en la plataforma Facet Virtual.

3 Resultados y discusión

La Fig. 1 presenta los resultados académicos globales del programa de ingreso 2021 discriminados por instancia en cuanto a cantidad de aprobados, desaprobados y porcentaje de aprobación. Se muestran los datos de los tres cursos virtuales (2020-04-CUR, 2020-08-CUR, 2020-11-CUR) y los resultados consolidados de las tres instancias de prueba de suficiencia de febrero de 2021: Suf.2020 (2021-10-02-SUF+2021-17-02-SUF+2021-24-02-SUF). Los resultados corresponden a los alumnos que fueron evaluados efectivamente en cada instancia. En la misma gráfica se muestran, a modo de comparación, los resultados obtenidos en las instancias correspondientes del programa de ingreso 2020, en donde 2019-04-CUR y 2019-08-CUR fueron cursos presenciales y 2019-11-CUR fue la instancia semipresencial. Se incluyen también los datos consolidados de las dos pruebas de suficiencia de este año 2020 de ingreso: Suf.2020 (2019-12-SUF+2020-02-SUF).



	2019-04	2020-04	2019-08	2020-08	2019-12	2020-11	Suf. 2019	Suf. 2020
Desaprobados	108	21	96	8	94	23	210	120
Aprobados	121	175	221	391	156	333	155	266

Fig. 1. Resultados académicos globales de las distintas instancias del ingreso 2020 y 2021 de la FACET-UNT. Las instancias de 2019-04, 2019-08 y 2019-12 corresponden a los cursos de ingreso para el ciclo 2020. Las instancias 2020-04, 2020-08 y 2020-11 corresponden a los cursos de ingreso para el ciclo 2021. Suf. 2019 corresponde a los resultados agregados de las pruebas de suficiencia para el ingreso 2020 y Suf. 2020 corresponde a los resultados agregados de las pruebas de suficiencia para el ingreso 2021. El total de aprobados en el ingreso 2020 fue 653 (56%) y el total de aprobados en el ingreso 2021 fue 1165 (87%).

Respecto a las instancias de cursado y evaluación virtual, el porcentaje de aprobación del curso de la instancia de abril 2020, 2020-04-CUR**,** es menor al resto de las instancias (comportamiento similar a lo observado para el curso presencial 2019-04-CUR). Al igual que en el 2019, esto puede deberse a que los alumnos que tomaron esta instancia están en su mayoría en el comienzo del cursado del último año de secundaria y también a que en esta instancia, en el 2020, se estaba viviendo la primera etapa de la cuarentena oficial y toda la población estaba acomodándose a esta “nueva normalidad”. El mayor porcentaje de aprobación se observa en la instancia 2020-08-CUR (comportamiento similar a lo observado para el curso presencial 2019-08-CUR) que es cuando se considera que los alumnos ya se acomodaron a la vivencia del último año de secundaria (que también fue modalidad virtual) y probablemente también se acostumbraron a la nueva realidad que estaban transitando. Tampoco hubo la “distracción” de los viajes de egresados. Un porcentaje de aprobación intermedia en las cursadas se observa en la instancia 2020-11-CUR**.** Se atribuye esta leve disminución respecto a la instancia inmediata anterior, principalmente al hecho de que esta fue un curso más comprimido en tiempo. No se compara esta tercera instancia con la correspondiente del año anterior por haber sido aquella una circunstancia especial, en el sentido de que era la primera vez que se dictaba en formato semipresencial y que se desarrollaba su parte virtual durante el receso estival 2020. Los resultados de las pruebas de suficiencia en formato virtual también mostraron una similitud cualitativa respecto a las pruebas de suficiencia presenciales del programa de ingreso anterior en el sentido que los porcentajes de aprobación fueron sensiblemente más bajos que los resultados de las cursadas. Sin embargo, los resultados de 2021 son mejores que los de 2020 en las pruebas de suficiencia (Suf.2020 vs Suf.2019).

Se considera que los resultados académicos fueron altamente positivos al comparar en general los porcentajes de aprobación del programa de ingreso 2021 con el del ingreso 2020. El nivel y la rigurosidad de los contenidos y las evaluaciones no fueron diferentes a los del año anterior. Las diferencias introducidas fueron dos: las clases fueron virtuales mediante video conferencias sincrónicas y las evaluaciones también fueron virtuales mediante el Aula Virtual. Hubo una mejora ostensible del rendimiento académico de los alumnos. El impacto inmediato es que prácticamente se duplicó el número de ingresantes que estarían en condiciones de cursar completo el primer año de las carreras de pregrado y grado en nuestra Facultad. También se observó que alumnos que no lograron aprobar los cursos de nivelación en 2020 recibieron una formación suficiente para, con una dedicación adicional, superar las pruebas de suficiencia de febrero 2021.

Tabla 1. Algunos resultados de la encuesta de calidad educativa del ingreso 2021 de la FACET-UNT.

Instancia evaluada	*2020-04-CUR*	*2020-08-CUR*	*2020-11-CUR*
Número de respuestas registradas.	118	203	226
Realizó cursos virtuales	25	95	132
Realizó cursos semi-presenciales	43	60	49
Encuentra útil el aula virtual.	75%	76%	86%
Encuentra adecuado el cronograma.	70%	70%	63%
Indica dificultad en manejo del tiempo personal.	45%	52%	51%
Indica desconocimiento de los temas tratados.	40%	26%	38%

Al igual que en el programa de ingreso 2020, en el programa de ingreso 2021 se realizaron encuestas de calidad educativa. Las mismas se suministraron al final de las diferentes instancias de cursada. Los cuestionarios se modificaron sensiblemente comparando con las encuestas correspondientes del año anterior, habida cuenta de las diferentes estrategias y dinámicas docentes adoptadas. En la tabla 1 se indican los resultados de una parte de los cuestionarios. Se exponen preguntas realizadas, cantidad de alumnos que respondieron, las respuestas mayoritarias, su porcentaje de satisfacción para cada instancia. Las encuestas se realizaron mediante el recurso Encuestas de la plataforma Moodle de Facet Virtual.

En general el grado de aceptación en cuanto a la organización, modalidad y temas abordados en el dictado virtual, extraído de la Tabla1, ha sido relativamente alto, mejorando desde la primera hasta la tercera instancia; excepto en el cronograma de estudio que en la tercera instancia fue más comprimido en tiempo. Respecto a las dificultades encontradas los datos indicarían que los alumnos cuentan con niveles relativamente bajos de la competencia de autorregulación y disciplina, imprescindibles para la estrategia de educación a distancia.

Otra parte de la encuesta estuvo referida a la satisfacción al final de cada una de las instancias de cursado sobre el material y herramientas brindadas en la virtualidad (promedio de respuestas con 4 o 5 / 5 puntos máxima calificación), consultando a los alumnos sobre apartados tales como: Guía didáctica, Foros de consulta, Material de estudio, Clases *online*, Videos, Material adicional, Ejercitación, Cuestionarios y Aula Virtual. Notamos un alto porcentaje de satisfacción general, siendo lo mejor valorado en la primera instancia el material de estudio y las Clases *online* (porcentajes de satisfacción por arriba del 80%) y evolucionando hacia un porcentaje de satisfacción por arriba del 80% en todos los apartados para la tercera instancia de cursado, excepto en los apartados Foros de consulta y Guía didáctica. Atribuimos esta mejoría a las acciones tomadas en el proceso de mejora continua. Un parámetro que sí se puede discutir comparativamente es el grado de satisfacción respecto al Aula Virtual. En el programa de ingreso 2020 el Aula Virtual se utilizó en las dos primeras instancias presenciales como elemento complementario de la estrategia docente y como herramienta preponderante en la instancia semipresencial. En aquella encuesta de satisfacción final a los alumnos, se obtuvo un porcentaje relativamente alto (64% de promedio de las tres instancias de cursado) pero insuficiente para los estándares autoimpuestos para el equipo de ingreso. En cambio, en esta parte de la encuesta del ingreso 2021 el Aula Virtual llegó a obtener para la última instancia un porcentaje de satisfacción del 90%. Esto, consideramos se atribuye a diversos parámetros tales como: el crecimiento de la experticia del equipo docente en el entorno virtual, las mejoras en el servicio de la plataforma Facet Virtual de la Facultad y también, por qué no, al acomodamiento de los alumnos a este nuevo paradigma educativo.

También se requirieron comentarios a los alumnos en las distintas instancias de cursado y desde la conducción del Área Ingreso se solicitó una reflexión y autoevaluación a los mismos docentes de los cursos. Las respuestas de unos y otros fueron un insumo valioso para progresar en la mejora del sistema de ingreso virtual. Independientemente de todos los parámetros y datos expuestos, la lectura de comentarios de los alumnos lleva a los docentes del Área Ingreso y a los docentes que conducen la Facultad a tener la sensación revitalizante de un buen trabajo cumplido en un marco de condiciones excepcionales. Como muestra se transcribe uno de los comentarios positivos de los alumnos: *"Me encantó! fue una linda experiencia, me encanta estudiar y la forma en que enseñaron. Todos tenemos distintas formas de aprender y en el curso los profesores tanto como el material del aula virtual se puede aprender muy bien. Muchas gracias."*

4 Conclusiones

Se considera que los resultados académicos fueron muy satisfactorios, más en las instancias de cursado virtual que en las pruebas de suficiencia. Esto permitió la nivelación e ingreso directo a las actividades completas de primer año a un número muy importante de alumnos.
El cursado virtual de las actividades de ingreso debiera impactar positivamente en estos alumnos que enfrentan primer año en 2021 en modalidad virtual.
La etapa semipresencial del programa de ingreso 2020 ayudó notablemente a la formación de una parte sustancial del equipo docente del Área Ingreso en el uso de la plataforma virtual de la Facultad. Esta familiaridad previa fue vital para la etapa inicial del dictado virtual del programa de ingreso 2021.
A pesar de limitaciones iniciales en la conectividad o de la falta de un conocimiento más extendido en la operación de plataformas y recursos digitales, se notó un crecimiento progresivo y colectivo (docentes y alumnos) de la pericia virtual y un enriquecimiento de las estrategias pedagógicas en este marco de excepción.
Al ser acciones de contingencia las implementadas, no hubo tiempo de adecuar en forma completa el espíritu del programa de ingreso 2021 con un enfoque basado en ciertas competencias, tal como el que se llevó adelante en el programa de ingreso 2020. Con un año completo de "vivencia a distancia" de la etapa de articulación e ingreso y con la experiencia ganada en este trayecto, el Área Ingreso se propone avanzar en este desafío de abordar el tema competencias en el entorno virtual para el programa de ingreso 2022.
El aprovechamiento de las TIC aplicadas a la educación y a la gestión permitió la respuesta rápida y flexible para que las actividades académicas del Área Ingreso tuvieran continuidad. Esta respuesta se basó claramente en la gran responsabilidad de los docentes, en el entusiasmo de los estudiantes y el acompañamiento de las áreas administrativas y complementarias de la educación. Este es un valor compartido con todo el sistema universitario argentino [5].

Referencias

1. Consejo Directivo, FACET UNT: Resolución N° 1002/19. https://www.FACET.unt.edu.ar/resoluciones/
2. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina "Libro Rojo de CONFEDI",* Universidad FASTA Ediciones, 2018.
3. EMCI 2021, "*El Modelo de Formación por Competencias en las Diversas Instancias de Ingreso a la FACET-UNT",* M.I. Giannini, F.A. Miranda Bonomi, N. Nieva.
4. Resoluciones Rectorales UNT Nº 145/2020, Nº 148/2020, N° 150/2020, N° 151/2020, N° 153/2020.
5. La universidad entre la crisis y la oportunidad: reflexiones y acciones del sistema universitario argentino ante la pandemia / Alberto E. Barbieri ... [et al.]; compilado por Paulo Falcon. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Eudeba ; Córdoba : Editorial de la Universidad Nacional de Córdoba, 2020. Libro digital, PDF, ISBN 978-950-23-3121-8.

EMCI 2021

Eje 3: Aplicaciones de la Matemática

Construcción y Aplicación de un Proceso Gaussiano para la Predicción de Fallas en Aerogeneradores

Agustín López de Lacalle[1], Álvaro Díaz[2]

[1] Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Julio Herrera y Reissig 565 – CP 11300
agustinl@fing.edu.uy

[2] Ex docente del Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental (IMFIA), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Julio Herrera y Reissig 565 – CP 11300
adiaz@fing.edu.uy

Resumen. La predicción de fallas en aerogeneradores es un tema en pleno auge a nivel mundial, para el que diversos autores han propuesto diferentes técnicas para reducir los costos de Operación y Mantenimiento asociados. En este artículo se propone la construcción de un modelo probabilístico basado en un Proceso Gaussiano, construido a partir de la información disponible en el SCADA (Supervisory Control And Data Acquisition) del aerogenerador, con el objetivo de predecir sus fallas. Gran parte de los modelos existentes se remiten al estudio de la curva de potencia del aerogenerador; una de las principales virtudes del modelo aquí presentado es la posibilidad de incorporación de variables de distinta naturaleza. Se busca modelar una variable del SCADA a partir de un conjunto de variables predictoras, de forma comparar las observaciones registradas con el resultado del modelo. El modelo es aplicado al estudio de un caso real, discutiendo los resultados obtenidos.

Palabras Clave: Proceso Gaussiano; Predicción de fallas en aerogeneradores; Modelo probabilístico; Energía eólica.

1 Introducción

La energía eólica es la energía cinética contenida en las partículas de aire en movimiento respecto a la superficie de la Tierra. Una partícula de masa M que se mueve con una velocidad V contendrá una energía cinética como expresa la Ecuación 1.

$$\boldsymbol{E = \frac{MV^2}{2}} \qquad \textbf{(1)}$$

Si un flujo de aire (de densidad ρ) de velocidad V atraviesa una superficie de área A, suponiendo que el vector velocidad es normal a la superficie, se establece un flujo de energía cinética por unidad de tiempo, es decir, un flujo de potencia, que puede expresarse de acuerdo a la Ecuación 2.

$$\boldsymbol{P = \frac{\rho A V^3}{2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Esta expresión daría una estimación de la potencia eólica disponible que atraviesa una superficie de área A y que para utilizarse, se debería convertir en una forma útil de energía como puede ser energía mecánica o energía eléctrica, entre otras.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Los equipos utilizados para convertir la energía eólica en energía eléctrica se denominan aerogeneradores y se componen de una turbina eólica, que convierte la energía eólica en energía mecánica disponible en un eje que gira, y un generador de energía eléctrica.

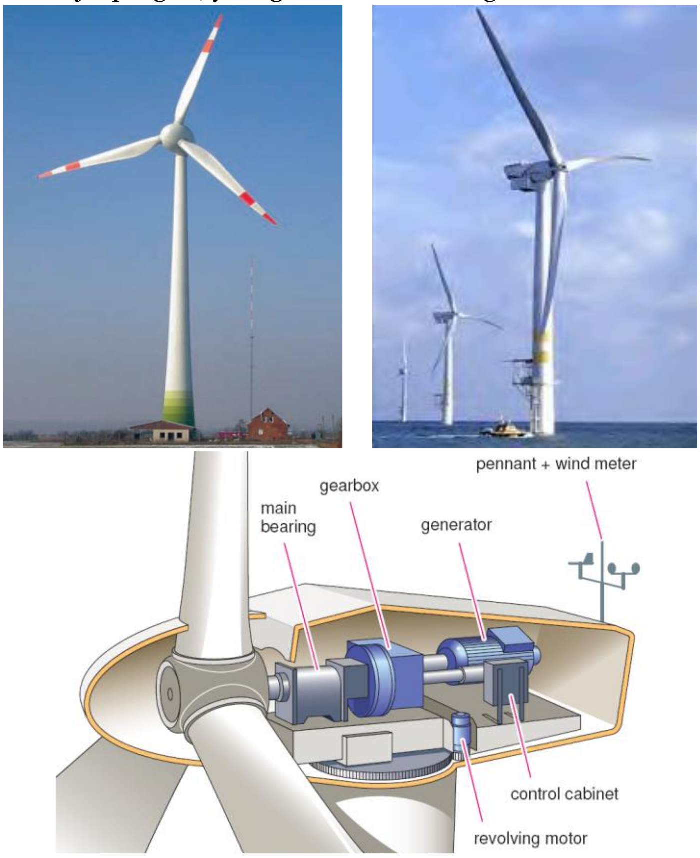


Fig. 1. Aerogenerador on-shore (arriba-izquierda); aerogenerador off-shore (arriba-derecha); principales componentes del aerogenerador (abajo) [1].

La energía eólica ha tenido un importante desarrollo internacional, con tasas de crecimiento de la capacidad instalada de 20% en las últimas décadas [2]. En Uruguay se ha dado un importante crecimiento de esta tecnología, constituyendo una de las principales fuentes de transformación de la matriz eléctrica nacional. Este importante crecimiento fue posible gracias a avances tecnológicos relevantes en las últimas décadas, así como a un marco nacional e internacional favorable. En Uruguay, la instalación del orden de 1000MW de energía eólica en tres años ha implicado importantes desafíos, particularmente generando capacidades antes inexistentes y requiriendo ampliar algunas poco desarrolladas. Así, Uruguay se presenta como un caso de referencia a nivel internacional, con capacidades competitivas a nivel regional en lo que concierne al desarrollo de proyectos de parques eólicos.

Los aerogeneradores usualmente están ubicados en zonas remotas o de difícil acceso. Esto hace que la falla de un componente clave del mecanismo resulte en una parada operacional, produciendo así pérdidas económicas. La detección temprana de anomalías en el funcionamiento permite preservar la capacidad operativa del aerogenerador, facilitar el mantenimiento proactivo y minimizar el tiempo fuera de servicio, maximizando así la productividad. En ese sentido, el análisis predictivo de fallas en aerogeneradores es una rama que está en auge hoy en día, para la que diversos autores han expuesto resultados provenientes de variada naturaleza [3].

En este artículo se presenta un acercamiento a una técnica predictiva de fallas en aerogeneradores enfocada desde un punto de vista estadístico. Un modelo de regresión basado en un Proceso Gaussiano se aborda con la finalidad de evaluar la condición de funcionamiento de un aerogenerador, modelando una variable del SCADA a partir de un subconjunto de variables predictoras adquiridas en régimen diezminutal. Finalmente, se presenta un caso de estudio de un aerogenerador real, donde se aplica la técnica desarrollada con el fin de predecir fallas en su funcionamiento.

2 Proceso Gaussiano para regresión

En un problema típico de regresión, se tiene que dadas algunas observaciones ruidosas de una variable dependiente (y) en ciertos valores de la variable independiente x, escalar o vectorial, se busca hallar la mejor estimación de la variable dependiente en un nuevo valor de x. Haciendo alguna suposición sobre la relación de estas variables, $f(x)$, como por ejemplo asumir una forma lineal, se podría aplicar el método de mínimos cuadrados para resolver el problema. La regresión mediante un Proceso Gaussiano es una aproximación más fina, en el sentido de no exigir asociar a $f(x)$ a ningún modelo en particular. Esta herramienta permite representar a $f(x)$ de modo que "los datos hablen" más por sí mismos.

Un Proceso Gaussiano es una generalización no paramétrica de la distribución normal conjunta para un conjunto de variables dado. Matemáticamente se define por sus funciones de media y covarianza, como se expresa en la Ecuación 3,

$$\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{PG}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad \textbf{(3)}$$

donde μ es la función media y Σ es la función covarianza que tiene asociada una función de densidad de probabilidad. Un modelo de Proceso Gaussiano genera datos ubicados en algún dominio de manera que cualquier subconjunto finito del rango siga una distribución gaussiana multivariada. Lo que relaciona una observación a otra es justamente la función de covarianza Σ, que se representa a través una matriz K, cuyos elementos son $k(x, x')$. En este artículo se trabaja con la elección de la función exponencial cuadrática, dada en la Ecuación 4.

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{\sigma}_f^2 \mathbf{exp}\left[-\frac{\boldsymbol{d}^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')}{2\boldsymbol{l}^2}\right] \quad \textbf{(4)}$$

Donde $d(x, x')$ representa la distancia entre x y x', σ_f es la varianza de la señal y l es una escala de los datos. Esta función de covarianza tiene parámetros libres σ_f y l, que deben ser ajustados convenientemente para la obtención de un modelo adecuado. Como en general los datos contienen cierto ruido, cada observación está relacionada con la función $f(x)$ de acuerdo a la Ecuación 5,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_n^2) \quad \textbf{(5)}$$

donde σ_n es un parámetro que también debe ser ajustado. Por lo tanto, para simplificar lo que sigue, se reescribe la función de covarianza de acuerdo a la Ecuación 6,

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{\sigma}_f^2 \boldsymbol{exp}\left[-\frac{\boldsymbol{d}^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')}{2\boldsymbol{l}^2}\right] + \boldsymbol{\sigma}_n^2 \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \quad \textbf{(6)}$$

donde $\delta(x, x')$ es la función Kronecker Delta. Entonces, dado un conjunto de observaciones $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, el objetivo es predecir el valor de la observación y^*, para un nuevo valor de x^*, más que $f(x^*)$.

Una vez construido el modelo a partir de la función de covarianza, es decir, a partir de la matriz $(K)_{ij} = k(x_i, x_j)$, el objetivo es determinar el valor de y^*.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{y}^* \end{bmatrix} \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{K}_*^T \\ \boldsymbol{K}_* & \boldsymbol{K}_{**} \end{bmatrix}\right) \quad \textbf{(7)}$$

donde $K^* = [k(x^*, x_1), \ldots, k(x^*, x_n)]$ y $K^{**} = k(x^*, x^*)$. En este contexto se está asumiendo que el conjunto Y tiene media nula.

El interés está entonces en determinar la mejor predicción para y^* dados los datos, es decir, la probabilidad condicional $p(y^*|Y)$. El resultado que se obtiene es el presentado en la Ecuación 8 [4].

$$\boldsymbol{y}^*|\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{K}_*\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{K}_{**} - \boldsymbol{K}_*\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}_*^T) \quad \textbf{(8)}$$

Por lo que la mejor estimación para y^* es la media de la distribución.

$$\overline{y^*} = K_* K^{-1} Y \quad (9)$$

A su vez, la incertidumbre en la estimación está dada por su varianza de acuerdo a la Ecuación 10.

$$var(y^*) = K_{**} - K_* K^{-1} K_*^T \quad (10)$$

El análisis precedente depende del conjunto de parámetros $\theta = \{l, \sigma_f, \sigma_n\}$. La elección de estos parámetros debe ser realizada adecuadamente para que el resultado del modelo sea satisfactorio. El máximo a posteriori de θ ocurre cuando $p(\theta|X,Y)$ es máxima. El teorema de Bayes asegura que este problema corresponde a maximizar $\log p(Y|X,\theta)$, dado por la siguiente expresión [5].

$$log\ p(Y|X,\theta) = -\frac{1}{2} Y^T K^{-1} Y - \frac{1}{2} log\ |K| - \frac{n}{2} log\ 2\pi \quad (11)$$

Mediante un algoritmo de optimización multivariado es posible resolver el problema con el fin de obtener los parámetros del conjunto θ adecuados para la construcción del modelo. En [4] se desarrollan algunas herramientas adicionales para la resolución de este problema de optimización.

3 Metodología de aplicación

El método estudiado consta de tres etapas globales: *entrenamiento*, *validación* y *testeo*. En la primera, a partir de un conjunto de datos “saludables”, es decir, sin eventos anormales identificados, se construye el modelo. En la segunda etapa, a partir de otro conjunto de datos de iguales características, se valida el modelo; se verifica que el modelo describe satisfactoriamente los datos. Finalmente, el modelo es empleado para evaluar la condición de funcionamiento del aerogenerador en una última etapa con un tercer conjunto de datos. Este último conjunto eventualmente puede estar asociado a desperfectos de funcionamiento en la turbina.

Con el fin de independizar el problema de los efectos asociados a la variación anual de presión y temperatura, se corrige la velocidad de viento medida a partir de la densidad del aire como se establece en [6].

$$\rho = 1,225 \left(\frac{288{,}15}{T}\right)\left(\frac{P}{1013{,}3}\right) \quad (12)$$

$$V_C = V_M \left(\frac{\rho}{1{,}225}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

donde V_C y V_M son las velocidades corregidas y medidas, respectivamente; P es la presión ambiente medida en mbar, y T es la temperatura ambiente medida en Kelvin. Luego, V_C es empleada para lo que sigue en caso de que la velocidad de viento sea seleccionada como una de las variables del problema.

En primera instancia, se selecciona un conjunto de datos saludables (o sea que se supone que no son datos anormales) de *entrenamiento* para construir el modelo. Este está compuesto por n_e datos, d variables predictoras y una determinada variable a modelar, que llamamos y. A su vez, llamamos X_e a la matriz compuesta por los datos de entrenamiento; tenemos entonces que X_e es una matriz de tamaño $n_e \times (d+1)$.

En el caso de estudio, el modelo es construido a partir de X_e mediante la herramienta $fitrgp$ de Matlab, que dados la función kernel definida en la Ecuación 6, el método de resolución del problema de optimización establecido en la Ecuación 11, y la inicialización de θ, propociona la solución para θ junto con el modelo de Proceso Gaussiano.

Este modelo obtenido es validado en segunda instancia con el conjunto de datos de *validación*, X_v. X_v es una matriz de tamaño $n_v \times (d+1)$, donde n_v es la cantidad de observaciones contenidas en estos datos. Para los n_v datos de las d variables predictoras, se obtienen las estimaciones proporcionadas por el modelo, $\bar{y}_v$. $\bar{y}_v$ es una matriz de tamaño $n_v \times 1$. Esta validación consta de dos etapas. La primera es una validación visual, cualitativa. La segunda es una validación cuantitativa, que consiste en encontrar la recta de regresión entre las observaciones de la variable modelada y $\bar{y}_v$. Esta validación es concluyente en el caso de que esa recta de regresión se asemeje a la recta identidad en algún sentido.

Finalmente, una vez validado el modelo, se avanza a la etapa de *testeo*. Para esta instancia se cuenta con n_t datos de testeo comprendidos en una matriz X_t de tamaño $n_t \times (d+1)$, de las cuales se utilizan las primeras d columnas para obtener las estimaciones mediante el modelo ya construido. A partir del modelo se obtiene la variable estimada $\bar{y}_t$, que se compara con la columna $(d+1)$-ésima de X_t, y_t, con el fin de evaluar la condición de funcionamiento del aerogenerador. Se define así el residuo de testeo como

$$\boldsymbol{R_t = y_t - \bar{y}_t} \qquad \textbf{(14)}$$

Con el fin de remover el ruido asociado a datos faltantes en el registro de X_t, se aplica a R_t un filtro pasa-bajos IIR [7]:

$$\boldsymbol{R_t^*[i] = 0.95R_t^*[i-1] + \frac{1}{39}R_t[i] + \frac{0.95}{39}R_t[i-1]} \qquad \textbf{(15)}$$

La evolución de R_t^* representa la condición de funcionamiento del aerogenerador, en el sentido de que para condiciones de buen funcionamiento se espera obtener valores de $|R_t^*|$ bajos, mientras que para condiciones anómalas los valores de R_t^* son superiores. R_t^* representa la desviación de la medición original de la variable modelada respecto al modelo; por esta razón, el residuo del modelo es una herramienta que permite evaluar lo deseado.

En algunos casos, no parece evidente distinguir períodos donde R_t^* tenga un comportamiento inusual. En ese sentido, en [7] se propone un algoritmo de detección de anomalías aplicado a R_t^*. Un enfoque similar se propone en este artículo, donde el eje temporal es subdividido en ventanas móviles de largo constante LV, y en cada una de ellas se consideran los valores correspondientes de R_v^*, definido de forma análoga a R_t^*. Dos ventanas consecutivas tendrán $LV-1$ diezminutales en común; el primero de una ventana no estará presente en la siguiente. En este contexto, LV es considerado una escala temporal dentro del análisis. Si bien todas las ventanas tienen el mismo largo temporal, eventualmente puede ocurrir que la cantidad de datos dentro de una ventana sea inferior a LV, ya sea por ausencia de mediciones o por paradas operativas en ese período. Del mismo modo, R_t^* también es subdividido en ventanas temporales de largo LV, valiendo las mismas observaciones anteriores. El propósito de esto es utilizar un *método de Monte Carlo* para comparar estadísticamente y en forma reiterada un gran número de veces, de forma cronológica, las ventanas de R_t^* con ventanas aleatorias de R_v^*, y así poder distinguir un cambio en el funcionamiento del aerogenerador.

Elegimos este camino ya que no entendemos que, a priori, una ventana particular (o calculada a partir de ventanas particulares) del período de validación sea preferible a otras, como patrón de comparación. El método de Monte Carlo así implementado tiene la virtud de tomar en cuenta la población de ventanas del período de validación.

Esto se hace en dos etapas. Para la primera, sea $v_v(i)$ la ventana i-ésima de R_v^*, y sea $v_t(j)$ la ventana j-ésima de R_t^*. Con el objetivo de aplicar el test de diferencia de medias [8], se definen M, s y n como la media, la desviación estándar y la cantidad de datos de la ventana respectiva. Si bien este test es robusto frente a la falta de gausianidad de los datos, no lo es en el caso de que la hipótesis de independencia de los propios datos no sea cubierta [9]. En nuestro caso, por tratarse de ventanas temporales asociadas a fenómenos físicos dependientes de variables meteorológicas, en general los datos de las ventanas son correlacionados entre sí. Se propone una corrección para n (ver por ejemplo [9]), n_{eq}, que tiene en cuenta la correlación de los datos de la serie de la ventana temporal,

$$\boldsymbol{n_{eq} = \frac{n}{1+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\rho(k)}} \qquad \textbf{(16)}$$

donde $\rho(k)$ es la función de autocorrelación.

Teniendo en cuenta la consideración anterior, se considera el siguiente estadístico adimensionado, que se puede suponer que sigue una distribución t de Student.

$$t = \frac{M_v - M_t}{\sqrt{s_v^2/n_{eq_v} + s_t^2/n_{eq_t}}} \quad \textbf{(17)}$$

Este es empleado para evaluar los casos extremos de R_t^*, negativos o positivos, dependiendo de cuál sea el significado físico de la variable modelada. Por otra parte, la cantidad de grados de libertad a emplear está dada por:

$$\nu = \frac{\left(s_v^2/n_{eq_v} + s_t^2/n_{eq_t}\right)^2}{\frac{\left(s_v^2/n_{eq_v}\right)^2}{n_{eq_v}-1} + \frac{\left(s_t^2/n_{eq_t}\right)^2}{n_{eq_t}-1}} \quad \textbf{(18)}$$

A partir de lo anterior, y de un nivel de significancia α_W elegido, es posible comparar estadísticamente $v_v(i)$ con $v_t(j)$, y así evaluar si hay una desviación estadísticamente significativa entre una y otra.

En la segunda etapa, dado que cada v_t es comparada con una ventana v_v tomada de forma aleatoria (para garantizar independencia), se procede a repetir r veces el mecanismo de evaluación, registrando la cantidad de veces que el test resulta en que la media de $v_t(j)$ es significativamente distinta a la media de $v_v(i)$. De esta forma se obtienen r ensayos repetidos de Bernoulli. Estos ensayos tienen probabilidad de "éxito" α_W en la hipótesis nula y, por la elección aleatoria de las ventanas de validación, son independientes entre sí.

Finalmente, es necesario determinar cuántos registros de $v_t(j)$, en las r repeticiones, hacen que esa ventana sea asignada como anómala. Para ello, sea a_j el acumulador de registros de $v_t(j)$; notar que $0 \leq a_j \leq r, \forall j$. Se busca entonces el mínimo valor de R_m tal que $p\left(a_j \geq R_m\right) \leq 1 - \alpha_S = \sigma_S$, es decir que la cola de la distribución binomial sea suficientemente pequeña.

De esta forma, es posible determinar si $v_t(j)$ es clasificada como anómala, para cada j. Así, poder identificar funcionamientos anómalos en el aerogenerador.

4 Caso de estudio

La técnica y metodología desarrolladas en las secciones precedentes fueron aplicadas a un caso de estudio real. Sea trata de dos aerogeneradores iguales de 1800kW instalados en Uruguay. Se dispuso de sus SCADA con más de treinta variables registradas, con mediciones comprendidas entre 2016 y 2018. Por información proporcionada por el ente operador, se supo que el aerogenerador 2 había tenido en mayo y setiembre de 2016 dos fallas asociadas a la tercera fase del generador de la turbina. A partir de esta información, se propuso evaluar la técnica presentada en este artículo con el objetivo de anticipar los fallos ocurridos en el aerogenerador.

En primer lugar, los datos debieron ser filtrados. Cabe destacar que debido a la naturaleza de los datos SCADA disponibles, no hubo registros de presión, por lo que la corrección presentada en la Ecuación 12 se llevó a cabo únicamente por temperatura ambiente. A partir de la curva de potencia del aerogenerador, se desestimaron mediciones asociadas a outliers o a restricciones operativas impuestas por el operador del parque. En la Figura 2 se presentan las curvas de potencia filtradas de ambos aerogeneradores. Visualmente no se aprecia diferencia significativa a la hora de comparar ambas curvas.

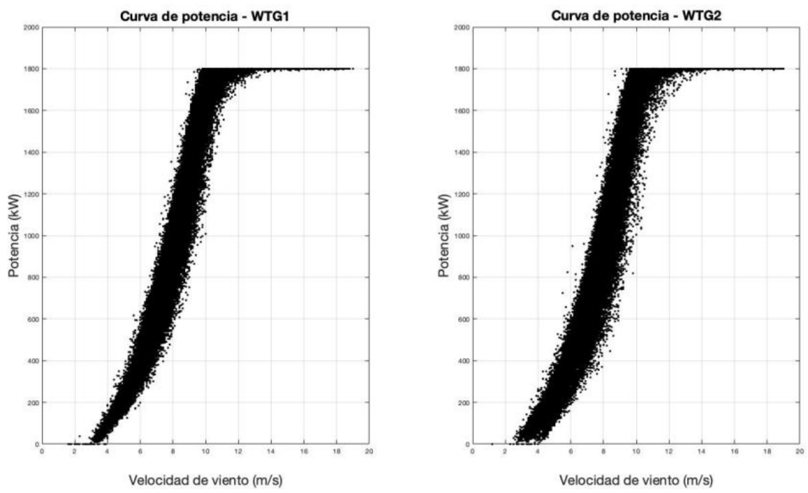


Fig. 2. Curva de potencia filtrada de ambos generadores.

Una vez aplicado el filtro, se realizó un análisis preliminar de las variables de mayor relevancia e injerencia en la falla antes mencionada. Evaluando los diagramas de dispersión de las variables del aerogenerador 1, y destacando las altas correlaciones entre las variables, se optó por construir el modelo a partir de la potencia y las dos temperaturas de rodamientos del generador como variables predictoras (x), con el fin de modelar la temperatura de la tercera fase del generador (y).

Considerando la cercanía entre ambos aerogeneradores, y la alta correlación entre los registros de velocidades de viento entre ambos, se optó por tomar el aerogenerador 1 como base de entrenamiento para generar el modelo de Proceso Gaussiano; 88939 diezminutales son los que componen este conjunto de datos de entrenamiento. Esta decisión se fundamenta principalmente en la hipótesis de que dos aerogeneradores iguales, enfrentados al mismo flujo de viento, en condiciones normales, deberían responder de forma similar; agregando además que el aerogenerador 1 no tuvo fallas identificadas durante su producción.

Una vez generado el modelo, para el que se requirieron aproximadamente siete horas de procesamiento para su generación (en una computadora portable de características estándar), se seleccionan los primeros dos meses de operación del aerogenerador 2 para validarlo, conteniendo este período un total de 3212 registros. Cabe destacar que este proceso de validación no requirió tiempo de procesamiento computacional significativo. En la Figura 3 se presentan los resultados para esta etapa. A su vez, en la Figura 4 se presenta un diagrama de dispersión de los datos medidos y modelados, y_v y $\bar{y}_v$, respectivamente. Si bien hay una alta correlación entre ambas series, a partir de la recta de regresión es posible identificar un sesgo del modelo respecto a la recta identidad. El modelo subestima la variable objetivo para temperaturas superiores a 50C. Este sesgo es tenido en cuenta a la hora de determinar R_t^*.

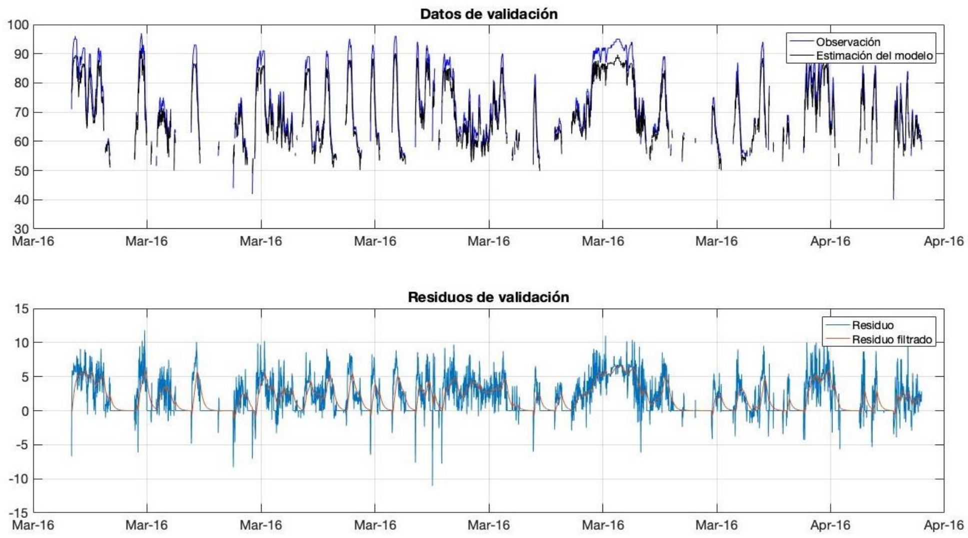


Fig. 3. Mediciones registradas y estimación del Proceso Gaussiano (arriba); residuo y residuo filtrado (abajo).

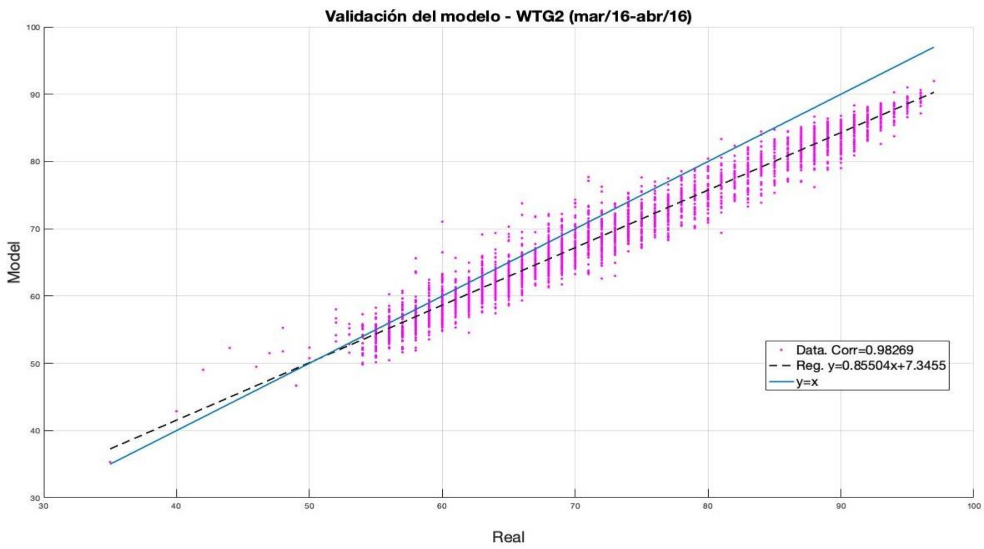


Fig. 4. Diagrama de dispersión de los datos medidos y modelados.

En la Figura 5 se presenta la serie de observaciones de la variable modelada junto con la estimación proporcionada por el modelo para los datos de testeo, conjunto compuesto por 12162 diezminutales. En la parte inferior de la misma, se presenta R_t^* obtenido a partir de las series anteriores, considerando además el sesgo ya mencionado.

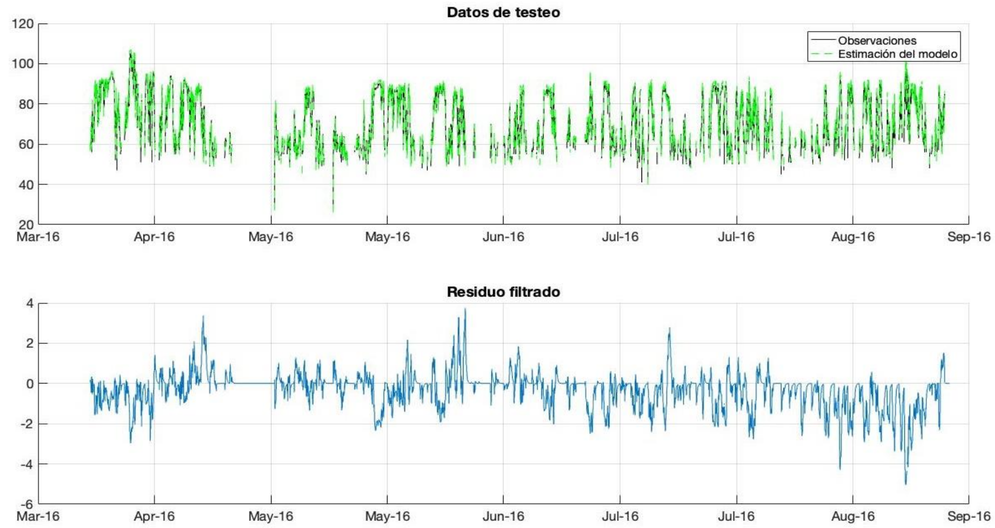


Fig. 5. Observación y estimación del modelo para la variable modelada (arriba); R_t^* (abajo).

Cabe mencionar que es de interés exclusivo los valores positivos de R_t^*, ya que los negativos están asociados a puntos donde el modelo sobreestima las observaciones, no correspondiendo esto a una potencial anomalía. Esto se debe a que la variable modelada, la temperatura de la fase del generador, presenta riesgo de funcionamiento en valores elevados. Por lo tanto, el test de diferencia de medias que se aplica es de una cola.

Para realizar el test estadístico asociado a R_t^*, se realizó un estudio de sensibilidad en relación a LV, α_W y α_S. A partir de ello, se optó por trabajar con un valor de LV igual a 432 diezminutales, es decir, 72 horas; y un valor de r igual a 200. Sin perjuicio de esto, otros valores de estos parámetros conducen a resultados igual de concluyentes que los seleccionados. En particular, el parámetro LV es una escala de tiempo asociada al alcance predictivo del modelo. En la Figura 6 se presentan los resultados obtenidos a partir de los test estadísticos empleados con el fin de identificar las anomalías asociadas a la variable modelada.

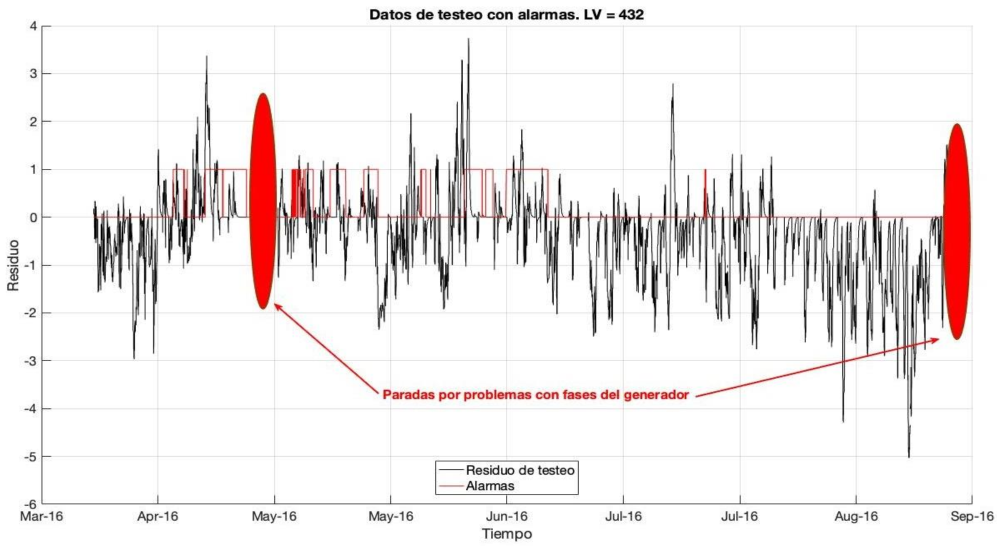


Fig. 6. Residuo R_t^* con las alarmas obtenidas a partir de los test estadísticos.

En la Figura 6 se muestran las dos paradas registradas que fueron asociadas a las fases del generador de la turbina. Las herramientas de detección desarrolladas fueron capaces de detectar algunas alarmas durante el funcionamiento del aerogenerador. En particular, algunas de ellas se concentran inmediatamente antes de la parada de mayo de 2016. Otro grupo de alarmas son detectadas entre mayo y junio, teniendo alta densidad durante ese período. Finalmente, una alarma aislada es visualizada durante el mes de julio.

Lo anterior permite una contundente predicción de la falla de mayo, teniendo una anticipación de un mes. Las otras alarmas pueden asociarse a una predicción de la falla de setiembre, aunque no con la misma certeza que la predicción de la primera falla. A diferencia de la primera falla, para la parada de setiembre el modelo presenta alarmas con tres meses de anticipación, dejando de reconocer anomalías frecuentes en los dos meses previos.

Luego de la falla ocurrida en mayo, el modelo siguió registrando frecuentes alarmas durante los siguientes dos meses. Esto puede deberse a que en la primera parada el problema no fue resuelto de forma definitiva, dejando secuelas para lo que luego ocurrió en setiembre.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Se presentó en este artículo una construcción de un Proceso Gaussiano aplicado a la predicción de fallas operativas en aerogeneradores. El modelo es construido a partir de los datos del sistema SCADA con los que usualmente cuentan los parques eólicos, tomando una de las variables como objetivo a modelar, a partir de otro conjunto de variables predictoras. El modelo desarrollado fue empleado para analizar un caso de estudio real, donde los resultados permitieron anticipar dos fallas en el aerogenerador.

Una de las principales virtudes de este modelo es su versatilidad. Es posible estudiar varios conjuntos de variables de forma independiente, analizando distintas fuentes de fallas. Asimismo, la proximidad entre aerogeneradores permite cruzar los datos, de forma de aprovechar al máximo la información registrada, tal como se presentó en el caso analizado.

En el futuro se planea seguir analizando casos reales a partir del método desarrollado en este artículo, identificando fallas asociadas a alguna de las variables de los SCADA disponibles. A su vez, se pretende comparar el modelo con otros métodos predictivos, de forma de evaluar el poder de prediccion de cada uno.

Referencias

1. Amirat, L,; Benbouzid, M.; Al-Ahmar, E.; Bensajer, B.; Turri, S.: A brief status on condition monitoring and fault diagnosis in wind energy conversion systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews, Elsevier*, Vol. 3, No. 9, pp. 2629-2636 (2009).
2. Sawyer, S.; Fried, I.; Shukla, S.; Liming, Q.: Global Wind Report. *Global Wind Energy Council.* https://gwec.net/publications/global-wind-report-2/global-wind-report-2016/ (2016). Accedido el 5 de diciembre de 2019.
3. Tautz-Weinert, J.; Watson, S. J.: Using SCADA data for wind turbine condition monitoring – a review. *IET Renewable Power Generation,* Vol. 11, No. 4, pp. 382-394 (2017).
4. Rasmussen, C. E.; Williams, C. K. I. Ditterich, Thomas: *Gaussian Process for Machine Learning*. MIT Press (2006).
5. Ebden, M.: Gaussian Process for Regression: A Quick Introduction. *ArXiv. https://arxiv.org/abs/1505.02965* (2015). Accedido el 6 de junio de 2019.
6. International Electrotechnical Comission: Wind energy generation systems – Part 12-1: Power performance measurements of electricity producing wind turbines. *International Standard.* IEC 61400-12-1 (2017).
7. Wang, Y.; Infield, D.: Supervisory control and data acquisition data-based non-linear state estimation technique for wind turbine gearbox condition monitoring. *IET Renewable Power Generation,* Vol. 7, No. 4, pp. 350-358 (2013).
8. Sawilowski, S. S.: Fermat, Schubert, Einstein, and Behrens-Fisher: The probable difference between two means when $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. *Journal of Modern Applied Statistical Methods,* Vol. 1, No. 2, pp. 461-472 (2002).
9. Von Storch, H.; Zwiers, F. W.: *Statistical Analysis in Climate Research.* Cambridge University Press (1999).

Aplicaciones de Transformada de Laplace a una Ecuación Diferencial: El caso de potenciales eléctricos del corazón

Carlos Vera[1], Andrés García[1], Franco Dotti[1,2]

[1] Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada(GIMAP) Facultad, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Bs. As. Argentina
{cvera, andresgarcia, fdotti}@frbb.utn.edu.ar

[2] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Resumen. La enseñanza de conceptos complejos en Ingeniería como lo es la transformada de Laplace, se ha visto facilitada en los últimos años por métodos innovadores como el método de competencias o aprendizaje activo. En este sentido, poseer modelos matemáticos a nivel de grado con aplicaciones reales, siempre resulta de interés para ambos: profesores y estudiantes. En este artículo se presenta la aplicación de la transformada de Laplace para aproximar soluciones de una ecuación diferencial conocida como Van der Pol, en particular, como aplicación en el modelado de potenciales eléctricos ECG. Se presentan simulaciones de Matlab para mostrar la efectividad de la técnica propuesta, así como conclusiones y trabajos futuros de utilización en el aula.

Palabras Clave: Aprendizaje activo, Van der Pol, Transformada de Laplace, Ecuaciones Diferenciales

1. Introducción

Las carreras de ingeniería están siendo atravesadas transversalmente por las nuevas definiciones de los estándares de segunda generación para la acreditación de las carreras de ingeniería, propuesta elevada el Ministerio de Educación por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) y aprobada por el Consejo de Universidades durante el año 2019. Dos de los basamentos principales de éstos son la consolidación de un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante y la definición del enfoque de los programas de las carreras basados en competencias y descriptores de conocimiento [1] y [2].

En esa dirección, cátedras de las carreras de ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN – FRBB) vienen trabajando y llevando adelante acciones como las de articulación interdisciplinar, matemáticas contextualizadas (abordaje de temas desde un punto de vista práctico y conceptual), aprendizaje activo y uutilización de TIC's en los entornos formativos, todo en pos de contribuir a la concepción de formación en carreras de ingeniería basada en competencias [3]-[7].

En el caso particular del estudio de la Transformada de Laplace, es ampliamente conocido que otorga útiles herramientas para el estudio de sistemas lineales de control. Sin embargo, para sistemas no lineales, si el estudio se enfoca en el análisis de estabilidad, la aproximación con un sistema lineal (linealización) resulta de utilidad en entornos cercanos a los equilibrios (ver por ejemplo [8]).

De todos modos, cuando la linealización presenta autovalores complejos puros, las oscilaciones propias del sistema vuelven la aproximación muy imprecisa. Por ese motivo, en la actualidad no existen métodos simplificados a nivel de grado universitario para el estudio de sistemas oscilatorios (ver por ejemplo [9], [10] y [11]).

En el presente artículo, se presenta de manera resumida la metodología de implementación del estudio del caso de potenciales eléctricos del corazón, como aproximación de la solución de la ecuación de Van del Pol. Se realizan y comparan resultados obtenidos mediante *Matlab* y *Mathematica* como herramientas computacionales académicas, la justificación del uso de dos herramientas diferentes se debe a que ambos programas contienen los dos lados de la simulación en ingeniería: numérica y simbólica.

Partiendo del modelo simplificado presentado en [12], en el cual se modelan las señales eléctricas del corazón con dos ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden (sistemas Van der Pol modificado), se propone una linealización especializada para este tipo de modelos que permiten una excelente aproximación a las soluciones verdaderas del modelo.

2. Un modelo matemático de señales eléctricas del corazón

Con los fines de trabajar con modelos simplificados, para poder estudiar algunas señales generadas por el corazón, se ha propuesto el estudio de modelo de Van der Pol ([12]). Si bien el modelo responde a una formulación no lineal, se propone una linealización de este, de manera que una vez linealizado se resuelva mediante la Transformada de Laplace.

Este tipo de aplicaciones llevan a los estudiantes de las cátedras de Cálculo Avanzado y Automatización y Control a trabajar no solo con la teoría de Laplace, sino que se los insta a que busquen información adicional para el estudio del tema desde un caso de aplicación multidisciplinar.

En materia de involucrar a los estudiantes en los contenidos del currículo desde aplicaciones de la matemática a la ingeniería, las cátedras mencionadas trabajan sobre modelos simplificados de sistemas de vibraciones de uno y más grados de libertad, circuitos RLC, modelos de control de lazo abierto y cerrado, modelos de amortiguación de automóviles, modelos de válvulas hidráulica, etc. siendo en todos los casos ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales. No obstante, el modelo del potencial eléctrico del corazón permite introducir la idea de ecuación no lineal, como un oscilador de Van der Pol, y también el concepto de la linealización, para luego resolver el problema mediante la Transformada de Laplace a través del uso de paquetes de cálculo: Mathematica y MatLab.

Estas acciones permiten al estudiante internarse en la metodología de aprendizaje activo (AA) y de aprendizaje basado problemas (ABP), a través de los cuales logran incorporar nuevos conocimientos mediante estrategias de situaciones que los vinculan con problemas reales, como lo es en este caso particular un electrocardiograma (ECG)y su solución matemática. Desde la simulación con ambos paquetes, los estudiantes activan previamente el conocimiento, incorporan variantes, lo resuelven bajo diferentes condiciones y en ese contexto valoran la herramienta de resolución e incorporan nuevos conocimientos para utilizarlos posteriormente.

2.1 Aproximación usando una recta: El caso de Van der Pol

Considerando un modelo aproximado, aunque muy conocido para las señales eléctricas del corazón ([12]) que para su linealización se propone:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\alpha \cdot (x(t)^2 - 1) \cdot y(t) - \omega^2 \cdot x(t) \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

donde *x(t)* son las amplitudes del impulso eléctrico e *y(t)* las derivadas de dichos pulsos.

No es dificultoso reescribir la ecuación (1) como una de segundo orden:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\alpha \cdot (x(t)^2 - 1) \cdot \frac{dx(t)}{dt} - \omega^2 \cdot x(t) \qquad \textbf{(2)}$$

Por lo que ahora es posible reagrupar términos en (2) del siguiente modo:

$$\frac{d\left[\frac{dx(t)}{dt} + \alpha \cdot \left(\frac{x(t)^3}{3} - x(t)\right)\right]}{dt} = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Identificando la no-linealidad cuadrática dentro del corchete, se propone la siguiente aproximación:

$$\frac{x(t)^3}{3} \cong \beta \cdot x(t), \beta \in R^+$$

Teniendo en cuenta que alrededor del origen: $x(t) = 0$ la aproximación con una recta es muy buena, se impone una aproximación linealizada. Así, queda entonces una EDO de 2° orden que sí se puede resolver mediante la aplicación directa de la Transformada de Laplace.

2.2 Transformada de Laplace para soluciones aproximadas

Partiendo de las ecuaciones (2) y (4), es posible obtener la EDO aproximada:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\alpha \cdot \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) \cdot \frac{dx(t)}{dt} - \omega^2 \cdot x(t) \tag{3}$$

Aplicando transformada de Laplace $L(s)$ a (3)

$$L\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) = L\left(-\alpha \cdot \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) \cdot \frac{dx(t)}{dt} - \omega^2 \cdot x(t)\right) \tag{4}$$

Donde s es la variable en el plano transformado. Definiendo las condiciones iniciales de manera general:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ d\left.\frac{x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}(0) \end{cases} \tag{5}$$

Se obtiene (de (4) y (5)), recordando las propiedades de la transformada de Laplace:

$$s^2 \cdot x(s) - s \cdot \dot{x}(0) - x(0) = -\alpha \cdot \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) \cdot \big(s \cdot x(s) - x(0)\big) - \omega^2 \cdot x(s) \tag{6}$$

Donde $x(s) = L\big(x(t)\big)$. Reorganizando términos en (6):

$$s^2 \cdot x(s) + \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) s \cdot x(s) + \omega^2 \cdot x(s) = s \cdot \dot{x}(0) + x(0) + \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) \cdot x(0)$$

Finalmente:

$$x(s) = \frac{s \cdot \dot{x}(0) + x(0) + \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) \cdot x(0)}{s^2 + \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) s + \omega^2} \tag{7}$$

Utilizando las propiedades de la transformada de Laplace y la forma universal de segundo orden aplicado a sistemas de control automático (ver por ejemplo [13]) en la ecuación (7):

$$x(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega_d}\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot sen(\omega_d\cdot t)\right)+\frac{\left(1+\alpha\cdot\left(\frac{\beta}{3}-1\right)\right)\cdot x(0)}{\omega_d}\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot sen(\omega_d\cdot t) \qquad \textbf{(8)}$$

Donde $\sigma=\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{3}-1\right)$, $\omega_d=\omega\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2\cdot\omega}\cdot\left(\frac{\beta}{3}-1\right)\right)^2}$. Es notable que si $\beta=3$, la ecuación (8) describe un movimiento oscilatorio puro:

$$x(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\cdot sen(\omega\cdot t)\right)+\frac{x(0)}{\omega}\cdot sen(\omega\cdot t)$$

3. Simulaciones numéricas

Se muestran en esta sección simulaciones realizadas utilizando dos de los más utilizados softwares para educación en Ingeniería: Matlab y Mathematica.

3.1 Simulaciones en Matlab

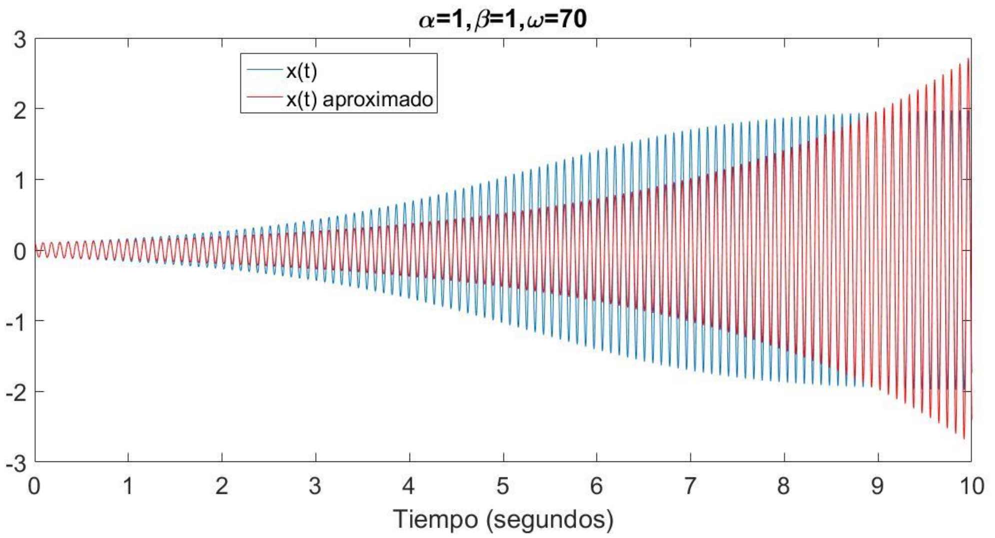
Se presentan en esta sección dos simulaciones que muestran la sensibilidad de la aproximación lineal propuesta respecto del parámetro β.

El código de Matlab utilizado para escribir ambas EDO's (no-lineal y linealizada) resulta:

```
function dy=EMCI_2020(t,y,a,b,w,seleccion)
  dy=zeros(2,1);

  if(seleccion==0)

  %----VDP Model of Electric Potential
  dy(1)=y(2);
  dy(2)=-a*(y(1)^2-1)*y(2)-w^2*y(1);
  end

  if(seleccion==1)
  %----Linear apporoximation
  dy(1)=y(2);
  dy(2)=a*(1-b/3)*y(2)-w^2*y(1);
  end
end
```

<u>α=1, β=10⁻⁵, ω=70 (pps)</u>

<u>α=1, β=1, ω=70 (pps)</u>



3.2 Simulaciones en Mathematica

A fin de comparar la precisión obtenida con el motor numérico de Matlab, se realizan simulaciones con los mismos parámetros, pero utilizando el software Mathematica.

<u>α=1, β=10-5, ω=70 (pps)</u>

Mediante la sentencia LaplaceTrasform[&&] se transforma la EDO, con la sentencia Collect[&&] se simplifica el resultado en X[s]

In[6]:= $\text{Ecu1} = \text{LaplaceTransform}\left[\omega^2 * x[t] + \alpha * \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) * x'[t] + x''[t] == 0, t, s\right]$ /. LaplaceTransform[x[t], t, s] → X[s] /. α → 1 /. ω → 2 Pi 70 /. β → 1 /. x'[0] → 0 /. x[0] → 1;

Collect[Ecu1, Y[s]]

Out[6]= $-s + 19600\,\pi^2\, X[s] + s^2 X[s] - \frac{2}{3}\left(-1 + s\, X[s]\right) == 0$

De esta manera se obtiene la ecuación subsidiaria para X[s], y se despeja ésta con la sentencia Solve[&&]

In[7]:= Solve[Ecu1, X[s]]

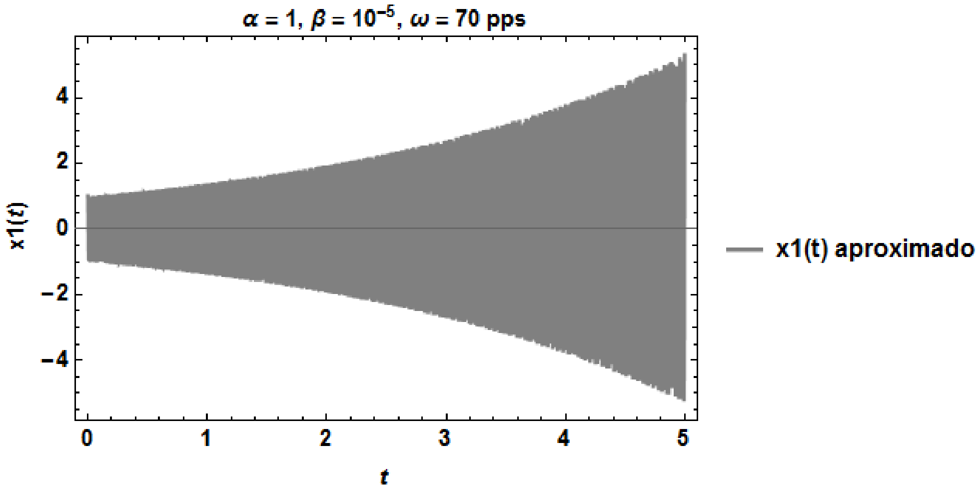
Out[7]= $\left\{\left\{X[s] \rightarrow \frac{-2 + 3\,s}{58800\,\pi^2 - 2\,s + 3\,s^2}\right\}\right\}$

Ahora, se obtiene la solución x(t) como la anti transformada de X[s], utilizando la sentencia InverseLaplaceTransform[&&]

In[8]:= $x[t\_] = \text{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{-2+3s}{58800\pi^2 - 2s + 3s^2}, s, t\right]$

Out[8]= $$\frac{e^{t/3}\left(\sqrt{-1+176400\pi^2}\,\text{Cos}\left[\frac{1}{3}\sqrt{-1+176400\pi^2}\,t\right] - \text{Sin}\left[\frac{1}{3}\sqrt{-1+176400\pi^2}\,t\right]\right)}{\sqrt{-1+176400\pi^2}}$$

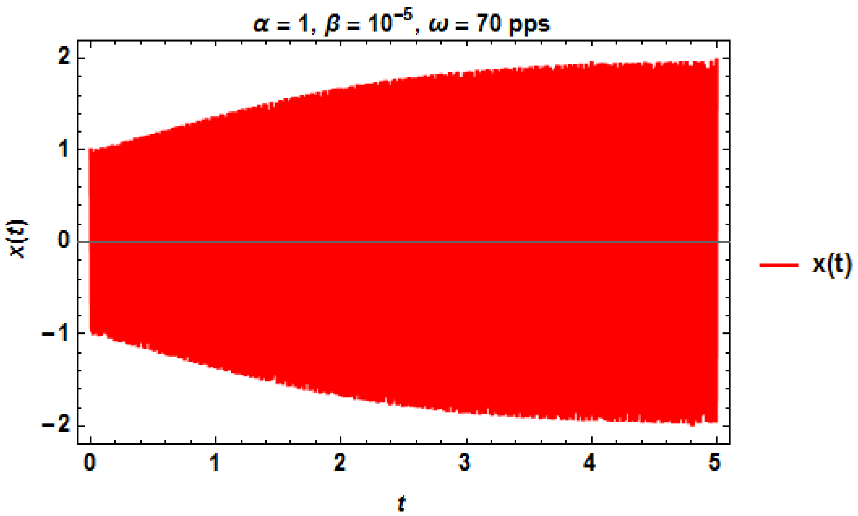
Out[26]=



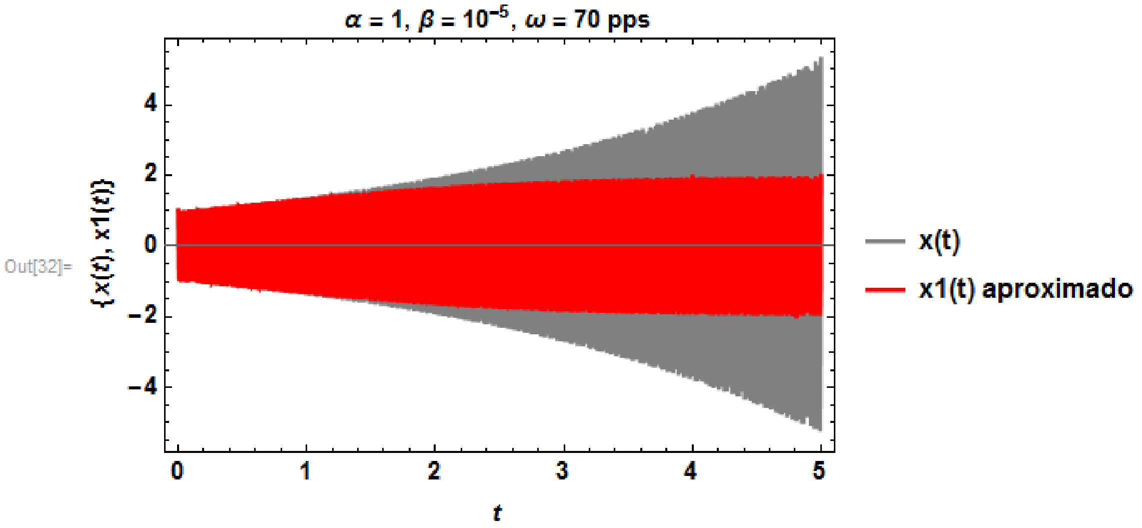
Para la resolución de la ED no lineal con Mathematica se utiliza la sentencia NDSolve[&&], que entrega como resultado una función de interpolación *x(t)*

```
In[3]:= AA = NDSolve[{ω^2 x[t] + α (-1 + x[t]^2) x'[t] + x''[t] == 0, x[0] == 1, x'[0] == 0}, x, {t, 0, 10},
        AccuracyGoal → 10] /. α → 1 /. ω → 2 Pi 70

Out[3]= {{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 10.}} Output: scalar ]}}
```

Out[25]=



Superponiendo ambos gráficos se puede determinar el rango de convergencia en el que ambas soluciones convergen y desde qué valores no hay convergencia.



4. Conclusiones y trabajos futuros

En el presente artículo se ha introducido la idea de linealización especializada para sistemas escritos en forma Lienard. En este respecto, la integración del término polinomial (no-lineal) ofrece una ruta alternativa para aproximar con un sistema lineal.

Las simulaciones en Matlab y Mathematica permiten concluir que la aproximación es muy buena, al menos para un análisis local (como lo es la linealización clásica). De este modo, se provee una herramienta para el estudio de ciertos sistemas oscilatorios con aplicación en Ingeniería.

Desde un punto de vista cognitivo, este tipo de análisis motiva y mantiene la atención de los estudiantes en problemas de relevancia en Ingeniería, pero a la vez, despierta el interés por las aplicaciones de las herramientas matemáticas a problemas reales.

Como trabajo futuro se propone es estudio y ampliación de estas ideas a sistemas más complejos con no-linealidades polinómicas o que pueden ser integrados. Del mismo modo el análisis del impacto del parámetro β en la precisión de las aproximaciones, constituye un problema de interés a nivel de grado *per-se*.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer el apoyo de los Departamentos de Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Mecánica y CONICET.

Referencias

1. Libro rojo de CONFEDI. (2018)
2. Resolución 1254 de Ministerio de Educación de la República Argentina
3. A. Linares, A. García, Demostrador para enseñanza del concepto de modelado: control de dos tanques. (V IPECYT) (2016)
4. E. Perotti, J. J.Pino, O. Villagra, A. García, Demostrador para enseñanza del concepto de estabilidad: péndulo invertido. (V IPECYT) (2016).
5. A. García, O. Cura, Aprendizaje Activo en Ingeniería Eléctrica: Aplicación a la cátedra Control Automático. 1er Congreso Latinoamericano de Ingeniería (CLADI 2017), (2017).
6. A. García, C. Vera, Formación de vocaciones tempranas y aprendizaje active entre UTN FRBB y escuelas secundarias. XXI Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación matemática en Ingenierías (EMCI 2018) (2018)

7. A. García, C. Vera y F. Dotti, Aprendizaje activo en la enseñanza: experiencias entre cátedras de ingeniería y con escuelas secundarias. (CONFEDI) (2019)
8. Carmen Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications: Springer Verlag, pp. 20-27 (2006)
9. Dan-Ni Yu, Ji-Huan He, Andrés García, Homotopy perturbation method with an auxiliary parameter for nonlinear oscillators. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active. 2018.
10. S. S. Mota and P. Sibanda, A Note on the Solutions of the Van der Pol and Duffing Equations Using a Linearisation Method. Mathematical Probems in Engineeering, Hindawi Publishing Company, Vol. 2012, 2012.
11. C. Bota, B. Caruntu and O. Bundau, Approximate Periodic Solutions for Oscillatory Phenomena Modelled by Nonlinear Differential Equations. Mathematical Problems in engineering, Hindawi Publishing Company, Vol.2014, 2014.
12. E. Ryzhii and M. Ryzhii, A heterogeneous coupled oscillator model for simulation of ECG signals. Computer Methods and Programs in Biomedicine, (2017).
13. Richad C. Dorf, Robert H. Bishop, Modern Control Systems: Pearson Prentice Hall, (2011).

La comprensión del concepto de derivada, uso del software GeoGebra como herramienta didáctica

María Agostina Cagnina, Graciela del Valle Echevarría, Paola Andrea Vilchez

Departamento de Ciencias Básicas- Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de San Luis
Campus Universitario -Ruta 148 Extremo Norte – Villa Mercedes, (San Luis)
{gecheva61, agostinacagnina, vilchezpaolaandrea}@gmail.com

Resumen. En este trabajo se propone un itinerario didáctico, a través de la interdisciplinariedad, que facilite los procesos de construcción comprensiva y paulatina de conceptos matemáticos del cálculo infinitesimal, como el concepto de derivada. Éste será considerado en su doble aspecto: como objeto de conocimiento y como instrumento de conocimiento ligado a situaciones reales no matemáticas. Este trabajo está basado en construir el sentido del concepto de la derivada, se busca a través de una situación problemática, en un contexto real, que los alumnos logren modelizar una situación, sacar conclusiones de temas ya vistos, pero no necesariamente entendidos, y finalmente encontrar el sentido que tiene la tasa promedio y la tasa instantánea. Es por esto que se propone una situación orientada al trabajo activo de los estudiantes, en el que se involucre el razonamiento, la comunicación, la representación, las conexiones y la tecnología como claves para la producción de aprendizajes significativos.

Palabras Clave: Calculo, Construcción del sentido, Derivada, Variación, Geogebra.

1 Introducción

El presente trabajo se llevó a cabo con estudiantes del primer año de las carreras de Ingeniería Industrial, que cursan Análisis matemático 1, dictada en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis.

Nosotros como docentes, a menudo, nos encontramos en situaciones donde "debemos ir hacia atrás". A diario en nuestras prácticas debemos ponernos en esta posición y evaluar si corresponde comenzar el proceso de elaboración de un nuevo concepto o, bien, retomar contenidos curriculares anteriores, necesarios e imprescindibles, ya que los estudiantes han demostrado que no han logrado alcanzar el dominio de aplicabilidad de los mismos. Es decir, no han logrado construir el sentido de ese conocimiento anterior necesario para dar continuidad en el proceso de enseñanza.

Sin duda esta situación nos ubica en una posición de insatisfacción y desilusión ante el escenario estudiantil observado donde nuevamente nos planteamos de qué manera los docentes estamos contribuyendo en la construcción del conocimiento en nuestros alumnos. No tiene sentido dar rigurosidad en los contenidos sino es priorizando el sentido lógico sobre la realidad. Con el paso del tiempo se ha perdido la lógica en la aplicación de los contenidos, priorizando los aspectos técnicos sobre los mismos. No hay que enseñar contenidos sino es a través del desarrollo del dominio de aplicabilidad de los conceptos, de lo contrario el conocimiento se desvanece y el objetivo no se logra. Debemos ser capaces, los docentes, de lograr que el alumno pueda responder las preguntas: ¿PARA QUE y POR QUE? de ese conocimiento.

"No debemos perder de vista que debe primar el espíritu del estudiante y en lo que se quiere convertirlo"

Es por eso que nuestra propuesta apunta a redescubrir las ideas relacionadas con la razón de cambio y la variación, ya que estas son las que construyen el sentido de la derivada, apuntando al sentido de la

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

misma y no a su definición y formalismo. Muchas investigaciones muestran que el concepto de la derivada no es comprendido, solo se logra un dominio razonable de los algoritmos para calcular derivadas, es por esto que apuntamos a un proceso en donde los alumnos tienen una participación activa, y solo son guiados por el docente, para así poder construir el sentido de la derivada.

A partir de esto es que se desarrolló una actividad guiada, en donde los alumnos no tenían como conocimiento disponible el concepto de la derivada, pero si nociones de funciones, variables dependientes e independientes, cocientes incrementales etc.

De esta manera a través de tablas, el uso del GeoGebra y una guía de preguntas se busca que los alumnos construyan el sentido de la derivada.

Esta propuesta está enmarcada en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) [1], que constituye el marco de referencia a la vez conceptual y metodológica de este problema de práctica social.

La TAD se pregunta cuáles son las *condiciones* que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o "vivir") en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las *restricciones* que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades.

El investigador francés Yves Chevallard [2], creador de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, propuso introducir la noción de Recorrido de Estudio e Investigación (REI) como nuevo dispositivo didáctico que, en contra de un punto de vista "monumentalista" que pone en primer plano el estudio o "visita" de los saberes cristalizados, apuesta por la introducción de una nueva epistemología escolar que viene a reemplazar el *paradigma escolar de "inventariar" los saberes* por un paradigma de *cuestionamiento del mundo*. En cierta manera, los REI representan la materialización de lo que la TAD considera como procesos didácticos basados en una enseñanza "funcional" de las matemáticas.

2 Objetivos

Lograr que el alumno:

- Sea el protagonista de su propio aprendizaje permitiendo la construcción del concepto de derivada otorgándole un sentido al mismo.
- Mediante la utilización del software Geogebra como una herramienta que potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilite su comprensión.

Lograr que el docente:

- Asuma frente a los alumnos el rol de guía, planteando una situación de discusión, argumentación, etc.,
- Retroalimente el conocimiento de una manera eficiente, invitando a los alumnos a pensar, brindándole las herramientas para hacerlo.

3 Metodología

Esta propuesta áulica pretende facilitar la visualización de imágenes dinámicas y la comprensión de los conceptos (tasa de variación media, instantánea y derivada) que conllevan al conocimiento de los puntos en donde una función es derivable.

Para nuestro proyecto utilizaremos una actividad áulica, realizada en forma directa con alumnos pertenecientes al "Primer año de La Universidad Nacional de San Luis – Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias- Carrera: Ingeniería Industrial", donde se tendrá en cuenta una observación participante de carácter cualitativo, y un desarrollo practico de carácter cuantitativo.

Como fuentes de recolección de información utilizaremos: el planteo de una situación contextualizada basada en la elaboración y organización de la información y luego en preguntas guiadas.

Las preguntas guiadas:

- Nos determinan de antemano cual es la información relevante que se quiere conseguir. Se hacen preguntas abiertas dando oportunidad a recibir más matices de la respuesta, y permite ir entrelazando temas.

- Pretenden conocer en el alumno el dominio que tiene sobre el manejo del software matemático Geogebra y los saberes previos disponibles acerca del concepto de derivada con preguntas simples que luego se van complejizando, donde el alumno pueda dar evidencias sobre los conocimientos disponibles que tiene acerca del objeto de estudio.

4 Propuesta áulica

Una empresa exportadora de cerámicos para la construcción se encuentra en expansión. Nos solicitan que elaboremos un informe, según los datos suministrados por la empresa, sobre las Ganancias Anuales y las Ganancias Acumuladas en sus tres primeros años de actividad.

Con los datos suministrados en la siguiente tabla calcula la Ganancia Anual y la Ganancia Acumulada en cada año.

Tabla 1.

Años	Cantidad vendida (Tonelada) (q)	Precio de venta (Pv)	Costos variables (Cv)	Costo Fijo (Cf)	Ganancia Anual	Ganancia Acumulada
1	150	25	15	500		
2	300	25	15	500		
3	950	25	15	500		

1. ¿En la Ganancia anual cual considera que es la variable independiente y la variable dependiente?
2. ¿En la Ganancia acumulada cual considera que es la variable independiente y la variable dependiente?
3. Grafique con el software geogebra, una gráfica que represente la Ganancia Anual y otra grafica que represente la Ganancia Acumulada.
4. ¿Considera que el crecimiento de la Ganancia Anual es uniforme? ¿y el de la Ganancia Acumulada? ¿Cómo puede explicar su respuesta?
5. ¿El tipo de comportamiento que describen las variables corresponden al de una función? Si considera que si, ¿qué tipo de función es? Fundamente su respuesta.
6. ¿Cuál fue la ganancia durante el tercer año? (entre t=2 y t=3)
7. ¿Cuál fue la ganancia durante el cuarto año? (entre t=3 y t=4)
8. ¿Cuál fue la tasa promedio durante la primera mitad del tercer año? (entre t=2 y t=2,5)
9. Completa la siguiente tabla

Tabla 2.

t	t_0	$f(t)$	$f(t_0)$	Tasa promedio
2	2,5			
2	2,4			
2	2,3			
2	2,2			
2	2,1			
2	2,05			
2	2,01			

10. ¿Qué ocurre con la tasa de crecimiento promedio de ganancias cuando el valor de t_0 se aproxima al valor de t?
11. ¿Cuál será la tasa instantánea de ganancia en $t = 2$?
12. Grafica la función e identifica cuando el valor de t=2. Identifica que representa la tasa instantánea.

5 Análisis de la propuesta áulica

A continuación, se transcriben algunos fragmentos de los diálogos más relevantes que se mantuvo con los alumnos, se aclara que D hace referencia a las intervenciones del docente, y A, A1, A2, A3 y A4 a los alumnos.

En los apartados 2, 3 y 4, los alumnos lograron identificar las variables dependientes e independientes, tanto de la Ganancia Anual como de la Ganancia Acumulada, destacando además que las mismas diferían entre sí. Es decir, en el caso de la Ganancia Anual la variable dependiente está en función de la cantidad vendida y en la Ganancia Acumulada en función de los años transcurridos.
Se transcribe a continuación donde queda en evidencia lo explicitado

Análisis de la Ganancia anual

- D: en al apartado 2, ¿cuál consideran ustedes que es la variable dependiente e independiente?
- A: "q" es la variable independiente, es la cantidad, porque es el dato que le voy a meter a la función
- D: ¿y por eso ya es independiente?
- A: si, porque puede tomar cualquier valor que no depende de la otra parte de la función, o sea puede tomar "q" cualquier valor y voy a obtener siempre la variable dependiente, que es la Ganancia Anual.
- D: entonces la Ganancia Anual es la variable……
- A: dependiente
- A2: ¿pero también el precio de venta es una variable independiente?
- A: no, es una constante, porque vos lo vendes a $25, vos lo que cambias son las cantidades que has vendido
- A2: ahhh, está bien….
- D: es importante destacar un comentario que hiciste: ¿qué es el precio?
- A: es una constante
- D: y la Ganancia Anual, entonces, ¿de quién depende?
- A3: de la cantidad que se venda.
- D: estos datos: q: cantidad vendida y G: ganancia anual la puedo representar en una gráfica…que variable coloco en el eje de las abscisas (x)
- A: la variable independiente, la cantidad vendida.
- D: y la variable dependiente la coloco en el eje de las ordenadas (y), ¿y cuál es nuestra variable dependiente?
- A2: la ganancia anual.

Análisis de la Ganancia acumulada

- D: en la Ganancia acumulada, ¿qué varía?
- A: varían las dos, la ganancia anual y la acumulada, las dos
- A1: lo que varía es la ganancia anual….
- D: ¿entonces de quien depende?
- A2: de la ganancia del año anterior…
- D: ¿quién juega entonces un papel importante acá?
- A2: los años
- D: ahora los años, ¿será la variable dependiente o independiente?
- A2: la independiente, porque la ganancia acumulada depende de la cantidad de años que haya, va a variar la ganancia acumulada, entonces los años seria la variable independiente…. Y la ganancia acumulada la dependiente

Luego, alumnos a través del software GeoGebra, graficaron los puntos obtenidos en cada caso, y a través de la aproximación de una función cuadrática, pudieron aproximar la ganancia acumulada por una función de segundo grado y así poder observar la función que quedo graficada en ese caso.
En los apartados 7 y 8, los alumnos calcularon la ganancia anual del año solicitado, como diferencia entre la ganancia acumulada del año actual y la del año anterior.
Se transcribe a continuación donde queda en evidencia lo explicitado

- D: ¿la ganancia del año 4, como la calcularon?

- A4: como la diferencia entre la ganancia acumulada en el 4º año y el 3º año……
- D: ¿eso me da la ganancia anual del 4º año?
- A4: si
- D: ¿por qué?
- A4: porque si…. risas
- A1: porque es como el ingreso marginal que aumenta justamente en ese año, la diferencia entre el cuarto año y el tercero.
- D: ¿o sea que si yo se la ganancia acumulada del 4º año y el 3º año puedo saber cuál fue la ganancia anual del 4º año?
- A: ……si

En el apartado 9, se analiza la tasa promedio. Para ello evaluaron la función para t: 2.5, para calcular la ganancia acumulada.
Se transcribe a continuación:

- D: ¿Cuál fue la tasa promedio entre los años t=2 y t=2,5?
- A2: restando la función en 2.5 con la función en 2, eso nos da la ganancia en el tiempo 2.5. Pero todavía falta el promedio….
- D: ahí se ve la ganancia entre el año 2 y el año 2.5, se ve? …y como calculo el promedio?
- A4: ¿dividiendo por la cantidad de años?…
- D: ¿y cuantos años pasaron?
- A1: 4, no…2. 5?
- A4: no, medio año…
- D: ¿y entonces?
- A1: no sé cómo hacer el promedio…
- A4: dividido la cantidad de años…
- A2: o sea 2.5….
- A1: ¡no! …0.5
- A4: ¡claro!… está pidiendo el promedio de un periodo en particular…
- D: bien, ¿entonces que hicimos en este apartado 9?
- A2: ¡profe! ¿Eso que hicimos seria la variación en delta?
- D: Chicos escuchen lo que está diciendo el Alumno 2, ¿lo podrías explicar mejor?
- A2: Si, estoy haciendo el cociente entre y2 – y1 y x2 – x1, es decir la variación que hay en y dividido la variación que hay en x.

En el apartado 11, luego de completar la tabla del apartado 10, los alumnos logran a través de la observación concluir que la tasa promedio es cada vez menor.
Se transcribe lo siguiente:

- D: que pasa con la tasa de crecimiento promedio cuando t_0 se aproxima al valor de t?
- A5: se hace cada vez más chico el tiempo transcurrido….
- D: ¿entonces? Que podemos decir ….
- A4: la variación en la tasa de crecimiento es cada vez más chica a medida que el lapso de tiempo transcurrido es menor….

En el apartado 12, se plantea que ocurre con la tasa de crecimiento instantánea.
Los alumnos luego de completar la tabla del apartado 10, y al observar que la tasa de variación de crecimiento promedio es cada vez menor a medida que el tiempo transcurrido disminuye en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, logran hacer un juicio sobre la tasa de crecimiento instantánea.
Se transcribe a continuación el dialogo:

- D: ¿cuál es la tasa instantánea?
- A2: cero…porque no hay distancia del 2 al 2….
- A3: ¡si existe un crecimiento!
- D: ¿cómo?
- A3: cuando la diferencia se hace cero
- D: ¿y matemáticamente como lo puedo calcular?

- A1: ¡el limite!, cuando lo de abajo se hace cada vez más chico…
- D: ¿entonces que estoy haciendo?
- A1: la recta tangente en un punto…
- D: antes de eso…
- A1: ¡la derivada en 2!…
- D: ¿entonces que es la derivada?
- A1: una tasa promedio……… calculado en un intervalo de tiempo cada vez menor…
- D: entonces ¿es la recta tangente?
- A2: no, profe es la pendiente de la recta tangente cuando el tiempo es igual a 2.

Además de los diálogos entre ellos y los docentes se les pidió a los alumnos que entregaran una hoja por grupo en donde habían desarrollado la actividad, esto se pidió para su análisis, pero teniendo en cuenta lo representativo que fueron los diálogos, la producción escrita se dejó de lado.

Producción de los alumnos

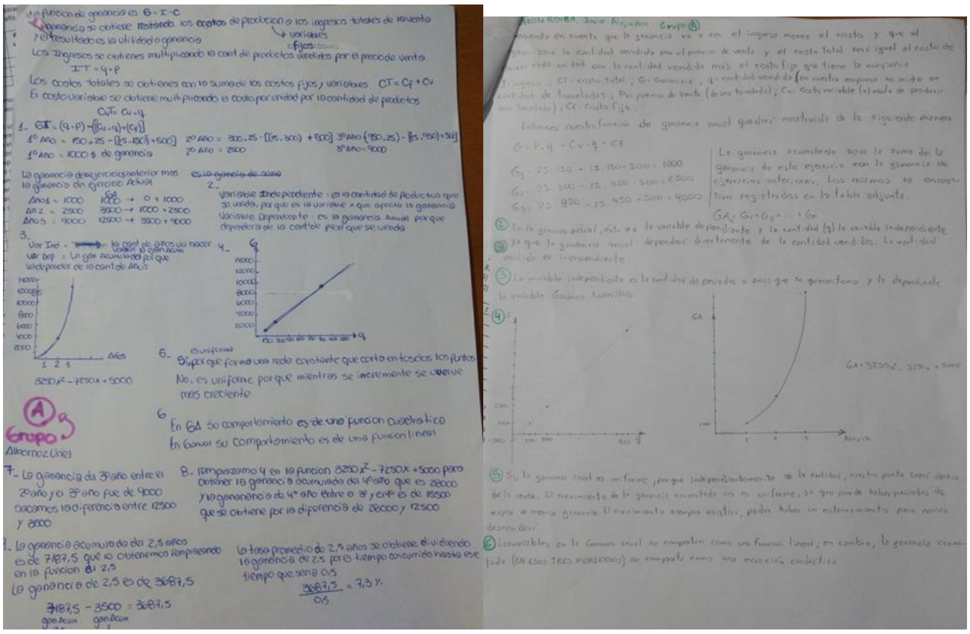


Fig. 1. Se observan análisis, cálculos, gráficas y conclusiones

6 Conclusiones de la propuesta áulica

Con la actividad áulica propuesta se logró que los alumnos de primer año de la carrera Ingeniería Industrial no solo comprendan el concepto de la derivada, sino que descubran el sentido que esta tiene.

A través de los años hemos visto que los alumnos adquieren el concepto de la derivada de forma técnica y mecánica, pero muchas veces carece de sentido. Con la situación extra matemática que se les dio para analizar, hicieron un trabajo completo de modelización, ya que tuvieron que realizar tablas, hacer análisis de variables, elaborar gráficos y desarrollar un juicio crítico; la actividad fue muy enriquecedora, no solo para ellos, sino también para el equipo docente. Esta situación actuó como un disparador para abordar diferentes temas. Además, generó un ambiente propicio para el debate y la discusión, que antes no era así, ya que trabajaban de forma individual, sin casi participación con sus compañeros y docente.

Se destacó además el uso de la herramienta informática (Geogebra), contribuyendo a una mejor representación de imágenes, facilitándoles la visualización de la situación, que ayudó a un mejor análisis. Dicha herramienta es de vital importancia ya que hoy en día no se habla sobre la necesidad de estas en el interior del aula, sino de las ventajas que tienen en el desarrollo de pensamiento por parte del estudiante y de cómo el docente puede cada día innovar estrategias para brindar una educación de mejor calidad. Es por esta razón que el uso de softwares, permitió que el estudiante pueda comprender los conceptos matemáticos significativamente. Además de lo anterior el uso de esta herramienta hizo que la labor del equipo docente sea más fácil en cuanto a las explicaciones matemáticas, de esta forma permitió que la clase sean más dinámicas y se acerquen más a las necesidades de los jóvenes de hoy, quienes necesitan de una formación más interactiva a través del uso de las nuevas tecnologías como la computadora y los celulares.

Referencias

1. Chevallard, Y. *Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique*. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), Sociedad, escuela y matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (pp.705-746). Jaén: Universidad de Jaén (2007).
2. Chevallard,Y; Bosch,M; Gascón,J. *Estudiar Matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Universitat de Barcelona(1997).

Variable compleja, coloreo de dominio e ingeniería inversa

Federico D. Kovac

Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de La Pampa
Calle 110 N° 390 - (6360) General Pico - La Pampa - Argentina
kovacf@ing.unlpam.edu.ar

Resumen. En este trabajo se abordan de manera simultánea dos problemas presentes en las carreras de ingeniería: el estudio de funciones de variable compleja y los problemas de ingeniería inversa. Mediante la técnica conocida como "coloreo de dominio" (domain coloring), de desarrollo relativamente reciente, se propone introducir a los estudiantes en un proceso de ingeniería inversa, donde los mismos descubren las diferentes particularidades de las funciones de variable compleja, analizando "gráficos" de las mismas. Esto facilita de manera sustancial la comprensión y aprendizaje significativo de la teoría de variable compleja, área tradicionalmente ardua para su enseñanza por la carencia de las técnicas gráficas de variable real, a la vez que estimula la actitud proactiva de los estudiantes, promoviendo la adquisición de las capacidades relativas a la reingeniería de productos, y la formación de ingenieros competentes para identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.

Palabras Clave: Variable compleja. Coloreo de dominio. Ingeniería inversa.

1 Introducción

La enseñanza de la Teoría de Variable Compleja o Funciones Analíticas se constituye en un sujeto particularmente arduo, tanto en las carreras de Matemática Pura, como (y mucho más aún) en las Carreras de Ingeniería, donde los conocimientos matemáticos constituyen un insumo y no un fin en sí mismos. Por un lado, la completa analogía de muchos de los conceptos, notaciones y resultados de Teoría de Variable Compleja con sus análogos de la Teoría de Variable Real (Cálculo, o Análisis Matemático) propenden a subestimar las reales proporciones del tema. Por mencionar un ejemplo, con la notación adecuada, la definición de función derivable en ambos contextos, ¡es la misma! (pero las funciones de variable compleja derivables poseen una entidad absolutamente superior a sus homólogas de variable real). Por otro lado, y sobre todo, la *carencia de gráficas*, o al menos gráficas de funciones análogas a las de variable real, termina invariablemente transformando el tema en un compendio de resultados abstractos de difícil compresión. Pues está en las gráficas de funciones, sin lugar a duda, la base absoluta de la comprensión y aprendizaje del Cálculo. Existen enfoques que buscan mitigar esta carencia, como el estudio de funciones de variable compleja como "mapeos" entre dos planos, o más recientemente como en la propuesta de Tristan Needham [1] en "Visual Complex Análisis" (Análisis Complejo Visual), donde se abordan los temas de Variable Compleja con un enfoque centrado en argumentos geométrico (es decir, sin poner énfasis en el enfoque analítico). Si bien estas opciones son, sin lugar a duda, una mejora sustancial cuando se las compara con un tratamiento meramente enciclopedista, siempre queda una brecha notable entre las formas utilizadas en un curso de Cálculo y un curso de Variable Compleja.

La gráfica $G(f)$ de una función $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (definida en un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$) se define como un subconjunto del plano:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in I,\ y = f(x)\}. \quad \textbf{(1)}$$

Emular esta definición para funciones de variable compleja no es posible (porque estamos atrapados en un mundo tridimensional), y la carencia de tales gráficas resulta crítica al momento de

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

enseñar/aprender/utilizar funciones de variable compleja. Pero esta falencia no radica en la imposibilidad de "copiar" método con el que se grafica, *sino a la carencia de una herramienta con las mismas características*. La forma en que graficamos funciones de variable real es una mera convención, aceptada universalmente, y que permite la síntesis visual de toda la información relevante de la función (para el grupo de interés). No es la única forma de graficar una función de variable real; sí es la forma más utilizada y aceptada. Emular esto eficientemente en variable compleja no significa encontrar una forma de "copiar" las gráficas de funciones reales, sino encontrar una forma de graficar las funciones de variable compleja que permita la síntesis visual de toda la información de interés de la función (y esperar que dicha forma sea universalmente aceptada).

Otro aspecto arduo en la formación de un ingeniero es el desarrollo de capacidades y competencias. Entre las competencias generales, y solo para citar un ejemplo se encuentra la de "concebir, diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería", la cual es abordada en general de manera indirecta por las diferentes carreras[1]. Sin embargo, una competencia extensamente valorada y raramente mencionada en los estándares de carreras de ingeniería o diseños curriculares de carreras de ingeniería se refiere exactamente al *proceso inverso* al de "concebir, diseñar y desarrollar": la ingeniería inversa ó reingeniería de productos. En este último, se parte de un sistema funcionando (sistema que ya ha sido concebido, diseñado y desarrollado), y se desmantela para lograr la comprensión acabada del mismo. Esto puede aplicarse a sistemas mecánicos y/o electrónicos (donde la palabra "desmantela" se aplica de manera textual), como a porciones de software acabados donde el programador deberá "desmantelar" el código para desentrañar su funcionamiento. Este último aspecto se presenta como clave en cualquier área relacionada con programación/informática, donde el profesional deberá trabajar con fragmentos de software desarrollados por otras personas.

El presente trabajo propone la incorporación de una técnica gráfica para funciones de variable compleja, el *coloreo de dominio* (más específicamente, los *retratos de fase mejorados*). Esta técnica, descripta en la Sección 2.1, se presenta como un análogo a las gráficas de funciones de variable real, permitiendo la visualización de las características relevantes de las funciones analítica, y por lo tanto estrechando la brecha existente entre los cursos de Cálculo y los de Variable Compleja típicos. Esta incorporación se propone con un enfoque tal que aporte, entre otras, a la formación de un ingeniero competente en procesos de ingeniería inversa, donde los sistemas objeto de estudio (sistema a desmantelar) son los gráfico de funciones de variable complejas realizadas mediante la técnica de coloreo de dominio.

2 Coloreo de dominio e ingeniería inversa

2.1 Coloreo de dominio

En esta sección describiremos de manera sucinta la técnica general de coloreo de dominio, y dos casos particulares en los cuales se centra el presente trabajo: los retratos de fase y los retratos de fase mejorados. Un tratamiento acabado del tema se puede encontrar en Wegert [2], bibliografía que ha sido utilizado como referencia de base para la presente sección.

El coloreo de dominio (domain coloring, en inglés) es una técnica para graficar funciones de variable compleja. La filosofía general de esta técnica es asignar, en principio, una codificación única a cada punto del plano complejo por medio de un determinado color, para después colorear el dominio de una función, en términos del color asignado por la referencia a la imagen por esta a cada punto de su dominio. Concretamente, si $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función de variable compleja definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, el "grafico" de f consiste en pintar cada número complejo z en el dominio de f, con el color asignado al plano de referencia al número complejo $f(z)$. En la Figura 1 (izquierda) se muestra una porción del plano complejo centrada en el origen (el cuadrado $\{z \in \mathbb{C}: -2 \leq Re(z),\ Im(z) \leq 2\}$), coloreado con el sistema HSL (del inglés, Hue, Saturation, Lightness – Matiz, Saturación, Luminosidad).

[1] Esta competencia en particular aparece en "CONFEDI Declaración de Valparaíso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina. FASTA Ediciones. (Abril 20l4)". Más allá del formalismo, es una competencia absolutamente esperable en cualquier graduado de carrera de Ingenieríat

Junto a él, se presentan el “grafico” de la función $f(z) = 1/z$ (centro), y el “gráfico” de la función $f(z) = (z-1)/(z^2+z+1)$ (derecha), para la misma porción del plano. Estas gráficas fueron hechas con la extensión *Plomplex v1.4* para el navegador Chrome, analizada en la Sección 2.4.1.

La idea de codificar datos (en general unidimensionales, reales) por medio de colores no es nueva, y se utiliza de manera estándar hace décadas en diversas áreas. Por ejemplo, para indicar alturas en un mapa geográfico o temperaturas en un objeto una o varias dimensiones. En cuanto al uso de coloreo para visualizar funciones de variable compleja, la (no muy abundante) bibliografía sobre el tema cita sus comienzos a fines de la década de los 80´s, con los trabajos de Larry Crone [3], y Hans. Lundmark [4], recibiendo un fuerte impulso a partir de la reseña de Frank Farris [5] del libro “Visual Complex Analisis” [1]. La autoría de la denominación “domain coloring” se le atribuye a Farris [6], en su descripción de la técnica del año 1997.

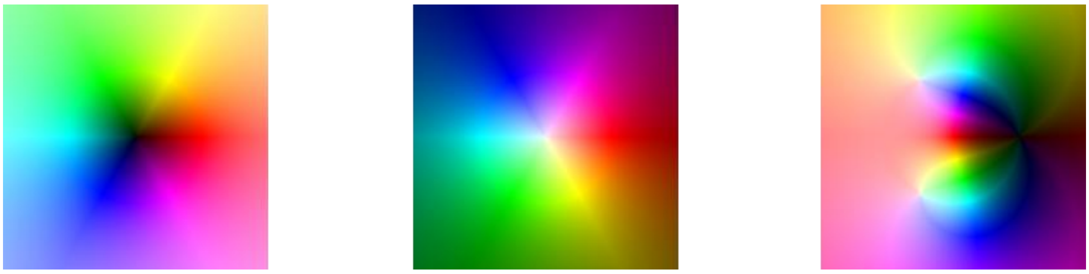


Fig. 1. Porción del plano complejo coloreado con el sistema HSL (izquierda), y grafica de las funciones función $f(z) = 1/z$ (centro), y $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}$ (derecha).

Una versión simplificada de esta técnica consiste en obviar el módulo y codificar con colores solo la fase. Si denotamos $\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ y definimos

$$\psi: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathcal{T},\ \psi(z) = \frac{z}{|z|}, \quad \textbf{(2)}$$

entonces $\psi(z)$ se denomina la *fase* del número complejo z, y todo número complejo distinto de cero se puede escribir de forma única como $z = |z|\psi(z)$ (no confundir fase con argumento, terminología utilizada en las coordenadas polares de un número complejo). En este caso, el coloreo de dominio se realiza únicamente tomando la fase de la función. Es decir, en primer lugar se fija un color de referencia para identificar cada fase, y si $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función de variable compleja definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, el "grafico" de f consiste en pintar cada número complejo z en el dominio de f, con el color asignado en la referencia a la fase $\psi(f(z))$. Por esta razón, el gráfico obtenido se denomina *retrato de fase* de la función.

Un esquema de colores muy utilizado para referenciar la fase es la componente "hue" de la rueda de color del sistema de color HSV (del inglés, Hue, Saturation, Value – Matiz, Saturación, Valor)[2], rotada de manera tal que el color rojo se corresponda con la fase correspondiente a los números reales positivos. En particular, esta referencia es la que se toma en Wegert [2], y la que tomaremos nosotros en el resto del presente trabajo. En la Figura 2 se puede ver, de izquierda a derecha, el coloreo de referencia para la fase, y los retratos de fase de las funciones $f(z) = z$, $f(z) = 1/z$, y $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}$, respectivamente, correspondientes a la región cuadrada $\{z \in \mathbb{C}: -2 \leq Re(z),\ Im(z) \leq 2\}$.. Estas gráficas fueron realizadas íntegramente online con la herramienta *DC Tools* que se describe en la Sección 2.1.3.

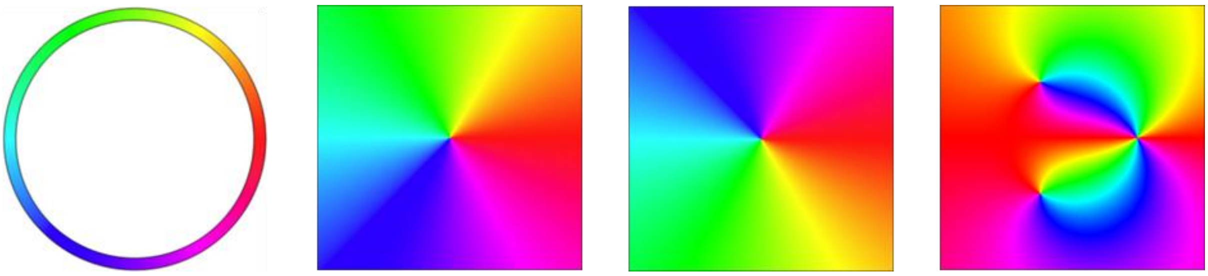


Fig. 2. Círculo de colores de referencia para la fase (extremo izquierda), junto con los retratos de fase de las funciones $f(z) = z$, $f(z) = 1/z$, y $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}$ (de izquierda a derecha).

Una primera mirada hace suponer que estas gráficas tienen menos información, pues se ha descartado el módulo de la función. Si bien no existe unicidad, tenemos el siguiente (Wegert, Theorem 3.4.10, [2] pp. 106):

Teorema 1: Si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones analíticas definidas en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, y tienen el mismo retrato de fase en algún abierto $U \subseteq D$, entonces existe $c > 0$ tal que $f(z) = cg(z)$ para todo $z \in D$.

[2] Este sistema de color también se conoce por HSB, Hue, Saturation Brightness.

Sin embargo, dicho resultado esconde una realidad con la cual es necesario ser particularmente cuidadoso: el resultado *es falso* si quitamos la palabra "analítica". Se puede verificar fácilmente (por ejemplo, de la misma manera que se realizaron los gráficos de la Figura 2) que las funciones $f(z) = \frac{z-1}{z^2+z+1}$ (analítica en todo su dominio) y la función $g(z) = (z-1)(\overline{z}^2 + \overline{z} + 1)$ (no analítica en su dominio) tienen exactamente el mismo retrato de fase. Los retratos de fase no son adecuados para estudiar cualquier función de variable compleja. Esto, si bien requiere cuidado, no representa una limitación ya que la clase de funciones de variable compleja que se estudia y de uso general es exactamente el de las funciones analíticas.

La falta de unicidad en los retratos de fase es una de las motivaciones para introducir lo que Wegert [2] llama "retrato de fase mejorado" (enhanced phase portrait, en inglés), donde aplica la técnica de coloreo de dominio con colores de referencia que tiene como base los colores de la fase, al que se le superponen dos esquemas de sombreado regular con discontinuidades, uno radial, donde las discontinuidades resaltan las líneas isocromáticas (donde la fase es constante), y otro circular, donde se resaltan las curvas de nivel (perpendiculares a las anteriores), donde el módulo es constante. Un retrato de fase mejorado con sombreado radial de una función $f(z)$ destaca las líneas donde el argumento $f(z)$ es constante, mientras que un retrato de fase mejorado con sombreado circular resalta las curvas de nivel de $|f(z)|$. Cuando se utilizan ambos sombreados simultáneamente, las discontinuidades se suelen elegir de forma tal de lograr un embaldosado del plano con sectores angulares casi cuadrados, con bordes que se cortan en ángulos rectos. Todas estas propiedades permiten resaltar la naturaleza conforme (preservación de ángulos) de las funciones analíticas. En la Figura 3 se muestran los tres posibles esquemas de referencia (resaltando líneas de igual módulo, de igual argumento, y ambas simultáneamente), junto con el retrato de fase mejorado correspondiente de la función $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}$.

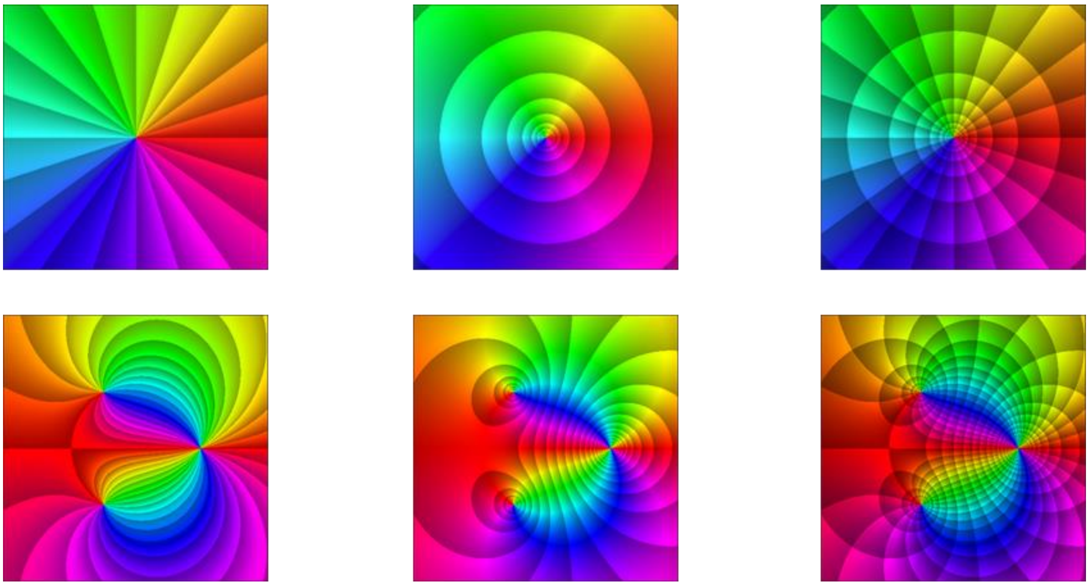


Fig. 3. En la fila superior, los esquemas de sombreado radial (izq.), circular (centro) y ambos (derecha). En la fila inferior, el correspondiente retrato de fase mejorado de la función $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}$.

2.2 Ingeniería Inversa

La expresión "Ingeniería Inversa", o reingeniería de producto tiene una amplia variedad de significados y no se refiere a un procedimiento único y claramente establecido; existen diferentes acepciones para la expresión "ingeniería inversa". Como referencia general podemos citar los libros de Wang [7], y de Eilam [8] para el caso particular de "Reversing", o ingeniería inversa en software.

Una de estas acepciones dice que la ingeniería inversa es el proceso de descubrir los principios tecnológicos de un dispositivo, un objeto o un sistema, mediante el análisis de su estructura, funcionamiento u operación. Este proceso consiste en tomar una entidad por separado y analizar a detalle su funcionamiento, para reparar, reconstruir o dar nueva funcionalidad a un sistema, o para construir un dispositivo o programa nuevo que hará lo mismo, sin copiar el original. La diferencia entre el método científico y la ingeniería inversa es que el primero se aplica a cosas de la naturaleza, y el segundo se aplica a cosas hechas por el hombre.

En ingeniería mecánica, ingeniería reversa es el nombre que se le da al proceso de reconstruir un objeto existente. En un proceso de diseño, el ingeniero comienza con las especificaciones y acaba con el producto terminado. Al realizar ingeniería inversa, el ingeniero comienza con el producto final y realiza el proceso de diseño en sentido inverso, desmantelando el sistema hasta el nivel de especificaciones, descubriendo información esencial en el concepto de diseño y las técnicas de fabricación.

La ingeniería inversa está presente desde la edad de piedra, cuando las comunidades primitivas estudiaban las herramientas desarrolladas por otros grupos. Hoy en día está más vigente que nunca, llegando incluso a ser la técnica adoptada por algunos gobiernos (por ejemplo, de países asiáticos) como estrategia para el desarrollo productivo. La promoción de políticas ambientales y sustentables ha generado un movimiento que impulsa la reparación (en lugar del reemplazo) de determinados componentes electrónicos, por ejemplo teléfonos celulares o baterías. Determinar el funcionamiento de los mismos en general se logra con técnicas de ingeniería inversa aplicada a componentes electrónicos. Un área relacionada con esta y transversal a la seguridad informática, se refiere a detectar y determinar el funcionamiento de componentes electrónicos que han sido modificados por sujetos ajenos al fabricante (microchips añadidos a motherboards, por ejemplo) para la venta masiva, y cuyo propósito solo conoce el grupo que diseñó la modificación. Capítulo aparte merece la aplicación al campo militar, donde comprender el funcionamiento y alcance del armamento enemigo resulta determinante.

Si bien la ingeniería inversa puede abrir las puertas a prácticas ilegales (robo de diseños, derechos de autor, espionaje industrial), las aplicaciones legítimas son incontables: la fabricación y mejora de piezas antiguas, mejora de diseños existentes, análisis de productos de la competencia, reparación o reconstrucción de maquinaria de la cual no se dispone de documentación, puesta en marcha de maquinaria adquirida sin "know how". En particular, esta área ha experimentado un crecimiento exponencial desde la disponibilidad de impresoras 3D, los scanner laser, y el desarrollo de software de diseño de gran potencia.

En informática, la ingeniería inversa consiste en tomar una porción de código y desmantelarlo para determinar su funcionamiento. Es una herramienta utilizada para analizar software para explotar sus debilidades y reforzar sus defensas. Los Hackers utilizan ingeniería inversa como una herramienta para exponer fallas en seguridad y políticas de privacidad cuestionables. En la industria de seguridad informática, la ingeniería inversa es un requerimiento central. A diferencia de otras áreas, en informática la ingeniería inversa se suele utilizar por los desarrolladores sobre sus propios productos. En la actualidad el software utilizado es tan complejo que muchas veces ni los propios desarrolladores conocen el su alcance y características. En muchas oportunidades, se requiere la aplicación de ingeniería inversa a software desarrollado sin la documentación correspondiente, o cuya documentación ha sido extraviada. En análisis de Spyware o Malware cuya función sólo conoce la persona que lo ha programado, requiere de la aplicación de ingeniería inversa.

Cualquiera sea a acepción o área de aplicación en la que pensemos, la ingeniería inversa siempre parte de un producto terminado y lo investiga para determinar su funcionamiento. Una cuestión clave para el éxito en la aplicación de un programa de ingeniería inversa es que equipo que lleva adelante el procedimiento de ingeniería inversa debe tener un marco conceptual adecuado que le permita inferir el funcionamiento del todo a partir de las partes o el rol de cada parte. Un ingeniero actual debería tener ambas cosas: marco conceptual adecuado en su área de experticia, y cierto entrenamiento en técnicas de ingeniería inversa.

2.3 Aplicación de ingeniería inversa al coloreo de dominio

Las gráficas de funciones representan la columna vertebral de cualquier curso de Cálculo. Luego de introducir el concepto de función y su gráfica, comienza el análisis de las propiedades de las mismas, y de su impacto en la correspondiente gráfica. Por ejemplo:

- La gráfica de una función f no corta dos veces ninguna recta vertical
- f par/impar; gráfico simétrico respecto de…
- f positiva; gráfico sobre el eje x
- f lineal; gráfico es una recta

- f periódica; gráfico se repite…
- f creciente/decreciente; grafico se ve como …
- Estudios de asíntotas en general: Si $\lim_{x \to \cdots} f(x) = \cdots$; gráfico es …
- Si f es (o no es) derivable; gráfico se ve….
- Si la derivada segunda de f es (signo); grafico se ve curvo hacia…

y la lista sigue. En la gran mayoría de los casos, se parte de una propiedad de la función y se dice/deduce como debe ser su gráfica. Se enseña desde la propiedad al gráfico, se enseña a *graficar* funciones, incluyendo en la gráfica toda la información relevante de la función, a pesar de que el propósito de las gráficas para un ingeniero (o estudiante de ingeniería, o probablemente cualquier usuario) es precisamente *el contrario*: poder leer la información sintetizada en la gráfica. Curvas de evolución de un proceso, respuesta de un sistema en la pantalla de una PC u osciloscopio, son ejemplos que muestran "a golpe de ojo" toda la información relevante. El ingeniero debería estar capacitado para leer e interpretar dicha información, a pesar de que el entrenamiento, en general, se produce en el sentido contrario (y se asume, de alguna manera, que se desarrollará la capacidad de realizar el proceso inverso).

La propuesta del presente trabajo es tomar, para el caso de funciones de variable compleja, el camino inverso: presentar las gráficas (retratos de fase o coloreo de dominio), y a partir del producto terminado, hacer el trabajo de ingeniería inversa para encontrar las propiedades de las funciones. Se trata de descubrir toda la información relevante de las funciones en los retratos de fase mejorados. Cabe destacar que el producto a la que se aplica ingeniería inversa, el producto a desmantelar, no es a la técnica de coloreo de dominio propiamente dicha, sino al gráfico de cada función. No es relevante descubrir cómo se hace la gráfica, sino como se ve en cada gráfica la información relevante de la función. Este trabajo de ingeniería inversa tiene 4 etapas: recolección de datos, análisis de los datos recolectados, redacción de conclusiones, y verificación de estas conclusiones (por medio de análisis de otros casos, o con demostraciones matemáticas). A partir de la gráfica de una función, los estudiantes deberían identificar en ellas patrones llamativos, conjeturar sobre cuáles son las propiedades debe tener la función para que dicho patrón esté presente, testear (con otras funciones) la conjetura, y finalmente probar la conjetura.

Para que esta aplicación sea posible, es clave poder realizar los coloreos de dominio de manera razonablemente eficiente, evitando que el esfuerzo se invierta en graficar en lugar de invertirse en estudiar las diferentes gráficas. Se espera que los alumnos investiguen las gráficas, y por lo tanto se espera que confeccionen un gran número de ellas. Tal como se explica en la Sección 2.4, esto hoy es posible, porque se dispone de graficadores gratuitos y que funcionan de manera eficiente con requerimientos de hardware mínimos. Las aplicaciones *Plomplex* (Sección 2.4.1), *DC Tools* (Sección 2.4.3) y *Exploring Complex Functions* (Sección 2.4.5) resultan todas adecuadas, y pueden usarse todas para evaluar diferentes resultados. Por otro lado, el marco de aplicación es muy adecuado, porque los estudiantes que cursan Variable Compleja ya cuentas todo el bagaje de gráficas de funciones del Cálculo y por lo tanto están orientados hacia lo que deben buscar en el objeto nuevo (sin que ello vaya en desmedro de características propias de la Teoría de Variable Compleja). Solo para ejemplificar, presentamos el siguiente listado de información a identificar en un retrato de fase:

- Periodicidad (con períodos reales o imaginarios)
- Ceros y polos de diferente orden
- Puntos de ramificación
- Líneas de igual color, líneas de igual módulo (para ver dirección de máximo crecimiento, las líneas que van de ceros a polos).
- Violaciones al principio de conformidad, puntos donde se anula la derivada
- Principio del argumento
- Gráficas engañosas (que ocultan la falta de analiticidad si se hace un retrato de fase no mejorado)

Como se trata de entrenamiento, resulta recomendable la confección de Guías de Trabajo, que indiquen a los estudiantes cosas que puede resultar interesante mirar. Dejar que los estudiantes realicen solos todo el procedimiento de ingeniería inversa podría ser una tarea que sobrepase los límites de su formación y el tiempo disponible. A pesar de eso, se cree que las guías no deberían ser excesivas (alguna consigna y preguntas guías), para no sesgar los resultados. Esto dependerá del grado de formación de los destinatarios. A modo de ejemplo: para el tema Series Taylor, se indica a los estudiantes que grafiquen diferentes polinomios y su respectiva función, y se los guía con las siguientes preguntas: *¿Cuántos ceros debe tener el polinomio que aproxima? ¿Ve esos cero?¿Ve la región de convergencia de la serie?¿Qué pasa con los ceros[3]?). Si compara con la gráfica de la función, ¿Ve la convergencia?*

Algunos otros ejemplos de temáticas para guías son los siguientes (pensando en una guía breve por semana de clase):

- *Guía 1: Bienvenida*. Grafique cuanta función encuentre, la incluida en las clases teóricas y las incluidas entre los ejemplos del software utilizado. Cambie esquemas de color y sombreado. Anote todo lo que le llame la atención.
- *Guía 2: Dilataciones y traslaciones*. Usando *Exploring Complex Functions*, graficar las funciones $f(z) = Az + B$. Varíe los parámetros complejos A y B y anote sus conclusiones. Repita tomando cualquier función $f(z)$ y graficando $f(z) + A$, $Bf(z)$, y $f(Cz)$..
- *Guía 3: ¿Analítica o no?* Haga los retratos de fase de las funciones $f(z) = \bar{z}$. Repita con retratos de fase mejorados. Pruebe con otras funciones analíticas/no analíticas, y anote conclusiones.
- *Guía 4: Puntos de ramificación*. Graficar funciones que involucren logaritmos y potencias de exponente complejo. Detectar patrones.
- *Guía 5: Ceros*. Grafique polinomios de diferentes grados (retratos de fase, y luego mejorados). Analice que patrones se repiten y cuantas veces.
- *Guía 6: Polos*. Grafique diferentes funciones racionales. Analice que patrones se repiten (tener en cuenta la guía anterior). Dirección de crecimiento/decrecimiento del módulo.
- *Guía 7: Derivada nula*. Grafique funciones cuya derivada se anule. Analice comportamiento y ubicación de los ceros de la derivada
- *Guía 8: Series de Taylor*. Descripción en el párrafo anterior.
- *Guía 9: Series de Lauren*. Similar a la de Taylor.
- *Guía 10: Principio del Argumento*. Grafique funciones, sobre ellas curvas cerradas, y cuente cuantas veces cruza la curva líneas de igual color.

Los resultados de las guías se pueden discutir en clase con todos los estudiantes presentes para generar debates, o se puede presentar informes, dependiendo de la orientación que tenga el curso.

2.4 Análisis de software

En esta sección presentaremos algunas opciones disponibles para realizar el coloreo de dominio. Nos centramos en programas de ejecución local u online que no requieren conocimientos específicos de programación.

2.4.1 Plomplex

Plomplex (Figura 4) es una extensión para el navegador Chrome de Google. Originalmente disponible en https://chrome.google.com/webstore/detail/kbjlipkfgffobjpnkigjgepljhhkpphi (2012) (y en el repositorio https://github.com/pimvdb/Plomplex), fue eliminado del repositorio de extensiones de Chrome Webstore por razones de incompatibilidad en el año 2014. En 2016 fue reprogramado por el estudiante Guido Bocchio de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Pampa, y desde entonces se encuentra disponible, de manera gratuita, en
https://chrome.google.com/webstore/detail/plomplex-2/ckpnhmdlhmjhgpkopjccleoegcbkjcjl?hl=en
bajo la denominación Plomplex2.

[3] Debido al Teorema de Jentzsch (ver [2] pag. 78), los ceros se acumulan en la frontera de la región de convergencia.

Permite realizar retratos de fase, superponer sombreado circular, y realizar coloreo de dominio con el esquema HSL. Las funciones pueden definirse con las operaciones usuales, y reconoce las funciones elementales. Además, de permitir iteraciones, fórmulas para sumas, y constantes predefinidas como pi, e, ó la unidad imaginaria i. Dispone de un archivo de ayuda donde explica de manera clara y sucinta todos estos aspectos. En este sentido, la herramienta es extremadamente flexible, y los requerimientos de hardware son mínimos, pudiendo realizar gráficas de manera casi instantánea en la mayoría de los casos. A pesar de ser una extensión para Chrome, puede ser utilizado offline, es decir, sin conexión a Internet. Como limitaciones, podemos mencionar que no permite superponer sombreado radial ni manejar la densidad de las líneas de nivel resaltadas. Además, las dimensiones del dominio a colorear se deben fijar previo a realizar el gráfico, no permitiendo el redimensionamiento dinámico. Es, en general, una muy buena herramienta. Las gráficas de la Figura 1 fueron realizadas con *Plomplex*.

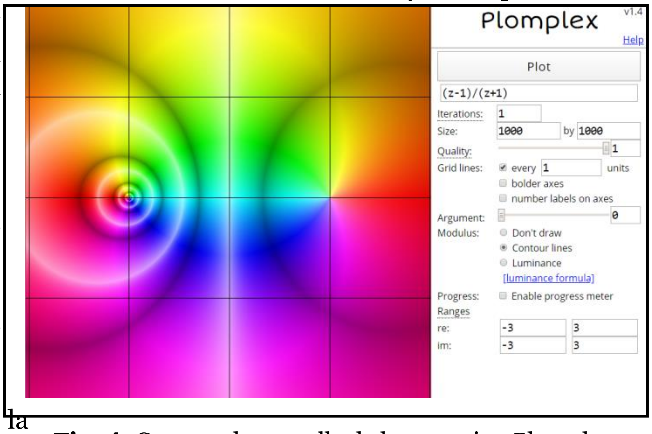


Fig. 4. Captura de pantalla de la extension Plomplex

2.4.2 CFE para MatLab®

Complex Functions Explorer (CFE, inglés para Explorador de Funciones Complejas) es un conjunto de rutinas e interface de usuario creados por Elias Wegert para el software MatLab® de MathWorks. Para su ejecución es necesario tener instalado el software MatLab®. Al ejecutar el archivo que guarda la interface de usuario, se despliegan tres ventanas: la consola de control, una ventana con el patrón de coloreo elegido, y otra con el dominio coloreado de la función (ver Figura 5). Ofrece una gran cantidad de variantes para el esquema de color (HSL y HSV con diversos sombreados, y varias combinaciones en blanco y negro), así como controles para la densidad de las grillas determinadas por el sombreado según el esquema seleccionado. Permite, además del coloreo de dominio, realizar graficas 3D coloreadas (donde la tercer coordenada es el módulo de la función, "analytic landscape", en inglés), además de hacer coloreo de dominio en la esfera de Riemann. Dispone de la gigantesca librería de MatLab® para el ingreso de funciones, además de soportar comandos como integración y derivación. Es un desarrollo extremadamente potente, al cual se le pueden señalar dos debilidades: la primera, es necesario disponer del software comercial MatLab® (es decir, no se puede utilizar de forma gratuita); la segunda, no permite la exploración dinámica de las gráficas, es decir, se debe definir las dimensiones del dominio a graficar previo a realizar la gráfica. Las rutinas de CFE se pueden descargar de manera gratuita en *https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/45464-complex-function-explorer*

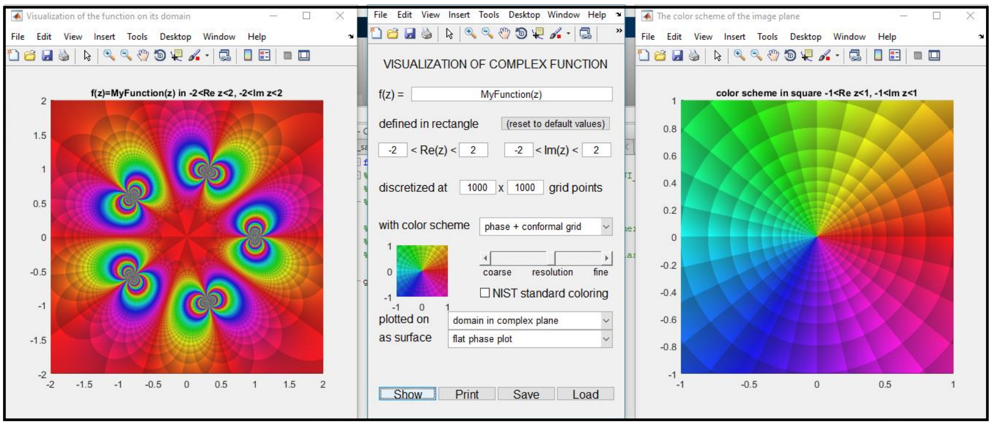


Fig. 5. Ventanas del CFE para MatLab®, al centro la consola de controles, a la derecho el patrón de coloreo, y a la izquierda el dominio coloreado de la función

2.4.3 DC Tools - Dynamicmath

DC Tools (Figura 6) es un conjunto de aplicaciones para coloreo de dominio que se encuentran en https://www.dynamicmath.xyz/domain-coloring/, una de las páginas del sitio https://www.dynamicmath.xyz/. Tal sitio, creado por Juan Carlos Ponce Campuzano, contiene una gran variedad de gráficos dinámicos desarrollados con la librería *p5.js*[4] de *Javascript*[5]. De acuerdo a la herramienta elegida, se pueden realizar retratos de fase mejorados o coloreo de dominio con nueve diferentes esquemas de color (entre los que se incluye un RGB y uno blanco y negro, aunque llamativamente no aparece el esquema HSL), con diferentes opciones para sombreados. La herramienta dispone de un panel de control que permite elegir el diseño de sombreado aunque no su densidad, las dimensiones del dominio, una de las cuales permite redimensionarlo de manera dinámica, otorgando un efecto de "zoom" (aunque siempre enfocado en el centro del gráfico). Permite el ingreso de funciones y constantes complejas de manera similar a *Plomplex* (2..4.1), pero es definitivamente más rápido y versátil que este. Se puede utilizar offline si se descargan los archivos; además es de uso libre y gratuito reconociendo al autor. Se encuentra disponible en

https://www.dynamicmath.xyz/complex/dctools/hsbfull/

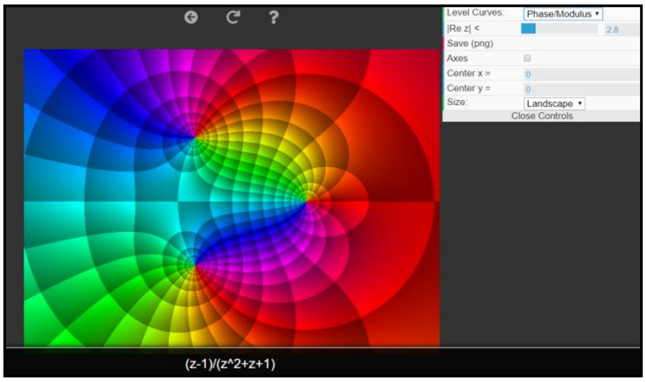


Fig. 6. Vista de la herramienta DC Tools de Dynamicmath

2.4.4 Domain coloring - Geogebra

Se trata de un conjunto de aplicaciones ("libro") para el software Geogebra, creadas por Juan Carlos Ponce Campuzano (Figura 7). Se puede acceder online, pero el propio autor recomienda descargarlo para su uso. Permite realizar coloreo de dominio con esquema HSL, y con varios esquemas HSV fijos. Las gráficas son creadas con un proceso de escaneo, que puede ser manual o automático. Si bien cumple su propósito, resulta algo artificial y evidencia que el software Geogebra no está diseñado para este tipo de aplicación. Tiene también limitaciones en cuanto al ingreso de funciones, ya que Geogebra no maneja de manera directa números complejos[6] (los simula mediante pares). En Campuzano [9], el autor ofrece una descripción de cómo fueron programadas las aplicaciones.

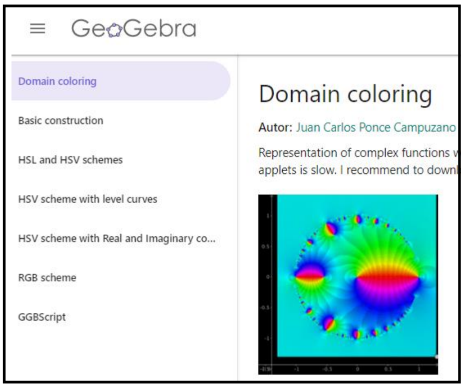


Fig. 7. Captura de pantalla del libro Domain Coloring para Geogebra

[4] Para mayor información acceder a https://p5js.org/

[5] Para mayor información accede ahttps://www.javascript.com/

[6] De acuerdo a la documentación de Geogebra, disponible en https://wiki.geogebra.org/en/Complex_Numbers, Geogebra simula los números complejos de manera directa.

2.4.5 Exploring Complex Functios, CindyJS

Aplicación creada por Aaron Montag lajo la librería JavaScript de código abierto *CindyJS*[7], permite retratos de fase mejorados con sombreado radial y/o circular, pudiendo elegirse la densidad de la grilla determinada por el mismo (Figura 8). Además permite elegir como patrón de referencia la imagen generada por una cámara web. Tiene una librería de funciones similares a las de Plomplex/DC Tools, y si bien realiza las gráficas en un dominio fijo (el cuadrado $\{z \in \mathbb{C}: -4 \leq Re(z),\ Im(z) \leq 4\}$), esto no resulta una limitación respecto de los otros, porque puede escalarse la variable. Pero además, este graficador permite el uso de 5 variables (4 complejas y una real) cuya ubicación se elige moviendo puntos en la consola de control, lo cual permite la exploración dinámica de los gráficos bajo el efecto de determinadas transformaciones. Por ejemplo, permite graficar la función $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y analizar dinámicamente su comportamiento al mover los parámetros a, b, c, y d. Se puede utilizar online o sin conexión a Internet descargando la página web. Su desempeño es asombroso. Se encuentra disponible en
https://cindyjs.org/gallery/cindygl/ComplexExplorer/index.html

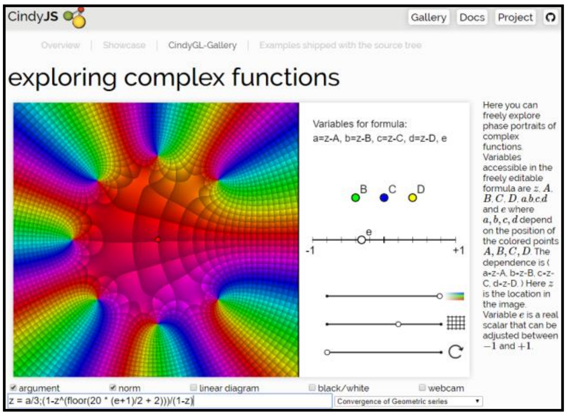


Fig. 8. Vista de la aplicación "exploring complex functions desarrollada en el entorno CindyJS

2.4.6 Edición Manual de páginas HTML

Finalmente, queremos mencionar que existen páginas web donde aparecen retratos de fase mejorados de *una* función, en general páginas creadas por programadores que intentan testear la potencia de determinados motores gráficos. Estas páginas sólo permiten visualizar la función que tienen graficada, pero en muchos casos pueden descargarse y, mediante un proceso de edición manual, cambiar la función y obtener una gráfica. Es un proceso tedioso, pero que puede valer la pena en algunas circunstancias. Citamos como ejemplo la página web creada por Ricky Reusser https://rreusser.github.io/glsl-domain-coloring/eqn.html (incluida como enlace secundario en https://github.com/rreusser/glsl-domain-coloring). Esta página muestra el retrato de fase mejorado de la función $f(z) = \cos(z)/\sin(z^4 - 1)$, permitiendo cambios en los patrones de color y sombreado con deslizadores (dinámicos), y más notablemente aún, exploración con zoom a cualquier punto del gráfico. Otra página web de similares características y el mismo autor se encuentra en [10].

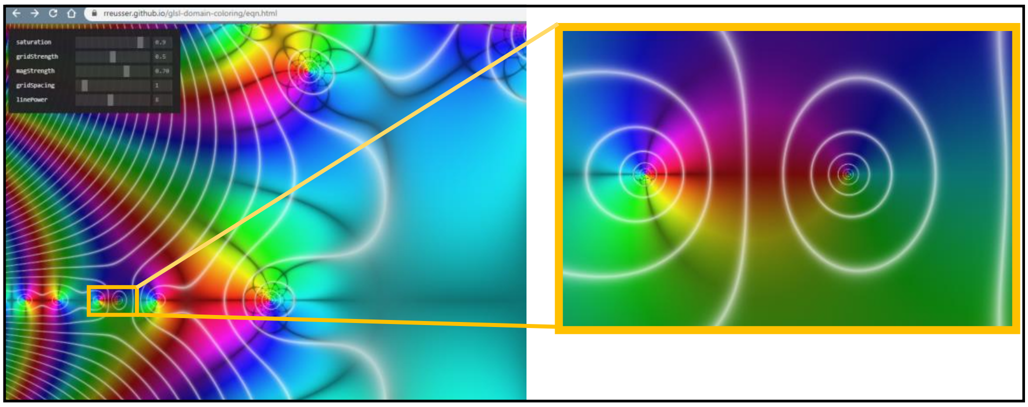


Fig. 9. Grafica de la función $\boldsymbol{f(z) = cos(z)/sin(z^4 - 1)}$, y una ampliación de un pequeño sector rectangular a la derecha

[7] Para mayor información accede a https://cindyjs.org/

3 Conclusiones y trabajos futuros

Con los avances tecnológicos disponibles, no resulta razonable pensar en mantener nuestras propuestas educativas sin actualizar. El caso de la enseñanza de la Teoría de Variable Compleja, en ese sentido, es paradigmático, ya que la tecnología disponible nos permite, finalmente, poner fin la limitación que significaba no poder confeccionar de manera efectiva graficas de funciones. Este trabajo presenta una propuesta en tal dirección. De hecho, resulta llamativo que a pesar de los avances disponibles en las capacidades gráficas de los dispositivos (teléfonos celulares, pcs) todavía el coloreo de dominio no parece haberse impuesto como una solución a las conocidas limitaciones gráficas que acotan la enseñanza de la teoría de variable compleja, estando ausente de las versiones más modernas de la bibliografía que típicamente se utiliza en un curso de variable compleja para estudiantes de ingeniería.

La propuesta presentada en el presente trabajo se puso en práctica, de manera parcial, con estudiantes de la asignatura Análisis Matemático III de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Pampa. Las carreras de Ingeniería en dicha Facultad se caracterizan por una fuerte carga horaria en Ciencias Básicas (aproximadamente 30% de la carga total), además de un sistema de promoción riguroso, por lo cual el perfil de estudiantes resulta particularmente dedicado al estudio. Desde la puesta en marcha de esta propuesta (dos años), ha habido una mejora notable en el desempeño de los estudiantes, que en su gran mayoría se ha visto involucrado, comprometido y entusiasmado con las tareas, elaborando conclusiones y detectando patrones gráficos a veces no esperados. Claramente, las tareas encomendadas generan una actitud proactiva, que resulta contagiosa al resto de los temas de la asignatura, facilitando la comprensión y el aprendizaje significativo de la teoría de Variable Compleja. A su vez, esta experiencia resultó ser la primera en la que los estudiantes realizaban (aunque sea de manera acotada y guiada) un proceso de ingeniería inversa en contexto académico.

Las líneas de trabajo posibles a partir de este punto son innumerables: desde el diseño y elaboración de actividades (digitales/online) para los estudiantes hasta el desarrollo de software específico para la confección de las gráficas, con diferentes capacidades dinámicas y/o apuntados a objetivos específicos. También están abiertas numerosas líneas de aplicaciones, por ejemplo a la Teoría de Control, donde esta técnica gráfica podría sustituir a las tradicionalmente utilizadas para localizar ceros y polos de funciones de transferencia, entre otras. Todos los campos donde se utiliza habitualmente las funciones de variable compleja y que tradicionalmente se han visto acotados por la carencia de "gráficas" de funciones tienen en el coloreo de dominio la oportunidad de un nuevo desarrollo. Además, queda abierta la posibilidad de estudiar diferentes esquemas de coloreo, que pueden ser elegidos para destacar particularidades específicas de un tipo de funciones o que sea adecuado para aplicaciones concretas. Una línea de trabajo particularmente interesante es la programación de una aplicación que permita realizar las gráficas de manera eficiente, y su exploración dinámica (cambios de escala y diferentes parámetros sin necesidad de rehacer la gráfica). En este sentido nos encontramos trabajando con un estudiante de la Facultad de Ingeniería de la UNLPam, en un desarrollo que además resultaría multiplataforma.

Se debería hacer difusión de la técnica, que sorprendentemente está ausente de los libros de texto que abordan el tema de Variable Compleja, tanto la literatura específica para carreras de Ingeniería como en la propia orientada a la formación matemática pura.

Referencias

1. Needham, T. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press (1997).
2. Wegert, E. *Visual Complex Functions: An introduction with phase portraits*. New York: Springer Basel (2012).
3. Crone, L. Color graphs of complex functions. http://fs2.american.edu/lcrone/www/ComplexPlot.html. Accedido el 10 de febrero de 2021.
4. Lundmark, H. Visualizing complex analytic functions using domain coloring. http://users.mai.liu.se/hanlu09/complex/domain_coloring.html. Accedido el 10 de febrero de 2021
5. Farris, A. Review of Visual Complex Analysis. By Tristan Needham. *American Mathematical Monthly*, Vol 105, No. 5, pp. 570–576 (1998).
6. Farris, F. Visualizing complex-valued functions in the plane. http://www.maa.org/pubs/amm_complements/complex.html. Accedido el 10 de febrero de 2021
7. Wang, W. *Reverse Engineering*. *Technology of Reinvention*. CRC Press (2011).
8. Eilam, E. *Reversing: Secrets of Reverse Engineering*. Wiley Publishing, Inc. (2005).
9. Ponce Campuzano, J. C. Representación de funciones complejas con GeoGebra usando el método de dominio coloreado. *Numeros*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Vol 101, pp. 85-101 (2019).
10. Reusser, R. Domain Coloring for Complex Functions. Observable. https://observablehq.com/@rreusser/domain-coloring-for-complex-functions. Accedido el 10 de febrero de 2021.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Estudio de la Representación Módulo-Fase de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto en el Procesamiento Digital de Imágenes

Luciano Savoie, Ernesto Klimovsky, María Mercedes Gaitán

[1]Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería (GIEMCI)
Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional
Almafuerte 1033, 3100, Paraná, Entre Ríos, Argentina
savoieluciano@gmail.com, erklimo@gmail.com, mgaitan@frp.utn.edu.ar

Resumen. Abordamos una propuesta de articulación de contenidos de tres asignaturas (Álgebra y Geometría Analítica, Análisis de Señales y Sistemas y Procesamiento Digital de Imágenes) de la carrera Ingeniería Electrónica de la Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional, en el marco del Proyecto de investigación "Aportes de Matemática aplicada en Ingeniería sustentados en elementos de Álgebra Lineal", que intenta mostrar a los estudiantes la importancia de los conceptos matemáticos adquiridos en el Ciclo Básico para resolver situaciones concretas de Ingeniería. En este trabajo vinculamos la modelización matemática de las imágenes digitales como matrices, la representación Módulo-Fase de la transformada discreta bidimensional de Fourier y exponemos su aplicación concreta en el Procesamiento Digital de Imágenes. Comenzamos con los conceptos matemáticos necesarios, desarrollados en las asignaturas antes mencionadas, exponemos aquellos relacionados al tratamiento de imágenes digitales, realizamos simulaciones mediante software, mostramos ejemplos prácticos y mencionamos aplicaciones.

Palabras Clave: Modelización matemática, Transformada de Fourier, Procesamiento de imágenes.

1 Introducción

Un desafío que enfrentamos los docentes universitarios del área Matemática es qué estrategia usar para enseñar determinado tema, logrando motivar al alumno y que dicho aprendizaje desarrolle las competencias profesionales que perduren en el tiempo. El uso de una estrategia metodológica referida a resolución de problemas que integre conceptos de distintas asignaturas permite contextualizar los contenidos, facilitando su aprendizaje. En este caso, trabajamos en la articulación de tres asignaturas de la carrera de la siguiente manera:

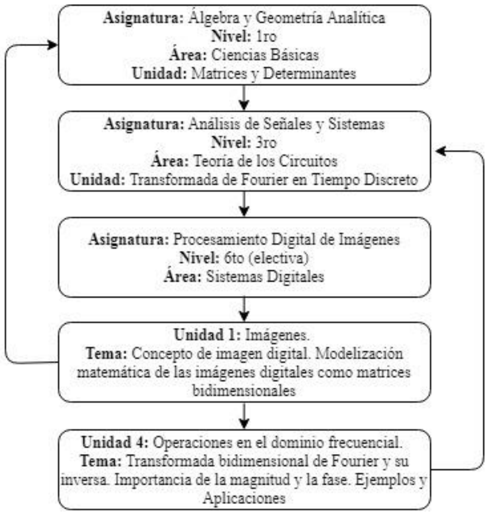


Fig. 1. Esquema de articulación de asignaturas planteado, detallando las unidades relacionadas y la vinculación entre ellas.

Tenemos presentes los documentos elaborados por el Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería (CONFEDI) de la República Argentina, en particular el correspondiente al año 2014 denominado *Competencias en Ingeniería*, en el cual se expresa *Competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales.* [1]

Consideramos que resolver problemas relativos a la especialidad elegida, abordando y vinculando los contenidos de las diversas asignaturas e incorporando tecnología al aula, posibilita de alguna manera superar el desafío planteado inicialmente con el fin de lograr las competencias requeridas a un ingeniero, que incluyen entre otras: la identificación, la formulación y el análisis del problema, la búsqueda de soluciones y la selección criteriosa de la alternativa más adecuada.

2 Marco teórico

2.1 Imágenes digitales

Una imagen puede ser definida como una función bidimensional *f(x,y)*, donde *x* e *y* son las coordenadas en el plano y *f* es la amplitud de cualquier par de coordenadas *(x,y)*, llamada intensidad de la imagen en el punto.

El término nivel de gris se usa para referirse a la intensidad monocromática de las imágenes. Por su parte las imágenes a color están formadas por una combinación individual de imágenes 2-D. En el sistema de color RGB, un color consiste en tres componentes individuales de una imagen que son Red, Green y Blue (rojo, verde y azul respectivamente). Por esta razón, muchas técnicas de desarrollo para imágenes monocromáticas pueden ser extendidas para el procesamiento de imágenes a color.

Cuando *(x, y)* y los valores de la amplitud de la función *f* son cantidades discretas finitas, a dicha imagen se le llama imagen digital. Una imagen digital está compuesta de un número finito de elementos llamados píxeles, donde cada uno tiene una localidad y un valor establecido. [2]

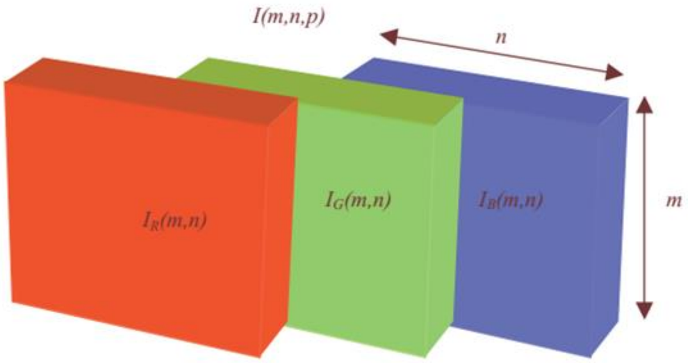


Fig. 2. Esquema de una imagen RGB *I(m,n,p)* con sus tres componentes individuales. Aquí m y n tienen el mismo significado que para el caso de las imágenes monocromáticas, mientras que p representa el plano, que para RGB es 1 para el rojo, 2 para el verde y 3 para el azul. [3]

2.2 Manejo de imágenes mediante software

Ya sea que utilicemos MatLab o una alternativa en software libre como SciLab, la estructura básica de datos es el arreglo, el cual se puede definir como un conjunto ordenado de números reales o complejos. En el caso de las imágenes, éstas pueden ser representadas por matrices formadas por conjuntos ordenados de valores reales que, a su vez, representan la intensidad de color o de niveles de grises.

Estos programas almacenan las imágenes como arreglos bidimensionales (matrices) en los cuales cada elemento de la matriz corresponde a la intensidad de un píxel de la imagen. Por ejemplo, una imagen de 200 filas por 300 columnas se almacena como una matriz de *200x300*. Algunas imágenes, como las RGB nombradas anteriormente, requieren de un arreglo tridimensional, donde el primer plano representa la intensidad de rojo en los píxeles, el segundo plano, la intensidad de verde de los píxeles, y el tercer plano, la intensidad de azul de ellos.

Esta convención sustituye el trabajo con imágenes por una representación matricial. Por ejemplo, se puede seleccionar un solo píxel de una imagen-matriz (estos términos serán análogos a partir de ahora para las definiciones que siguen) de la forma *I(2,15)*, con lo cual el software regresará el valor del píxel localizado en el renglón 2, columna 15 de *I*. [2]

2.3 Transformada de Fourier en tiempo continuo y su inversa

La *Transformada de Fourier* de una función continua unidimensional $f(x)$ viene dada por la expresión:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).\, e^{-j2\pi ux} dx \qquad \textbf{(1)}$$

donde u es la variable en el espacio de la frecuencia, y $j = \sqrt{-1}$.

Análogamente, dada $F(u)$, puede obtenerse la función $f(x)$ calculando la *Transformada Inversa de Fourier*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u).\, e^{j2\pi ux} du \qquad \textbf{(2)}$$

Estas dos ecuaciones componen lo que denominamos *Par de Transformadas Fourier*.

La *Transformada de Fourier* de una función consta, en general, de una parte real $R(u)$ y otra imaginaria $I(u)$, de forma que podemos expresar $F(u)$ en coordenadas rectangulares:

$$F(u) = R(u) + jI(u) \qquad \textbf{(3)}$$

o también puede expresarse en términos de amplitud $|F(u)|$ y fase $\phi(u)$ (coordenadas polares):

$$F(u) = |F(u)|.e^{-j\phi(u)} \quad \textbf{(4)}$$

donde

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)} \quad \textbf{(5)}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \quad \textbf{(6)}$$

A $|F(u)|$ se le conoce normalmente como el Espectro de Fourier o Módulo de la Transformada de Fourier, y a $\phi(u)$ como su Ángulo de Fase o simplemente, Fase de la Transformada de Fourier.

El término exponencial compleja de la Transformada Inversa de Fourier puede escribirse, siguiendo el Teorema de Euler, de la siguiente forma:

$$e^{j2\pi ux} = \cos 2\pi ux + j.\sin 2\pi ux \quad \textbf{(7)}$$

lo que nos permite ver que la función original $f(x)$ está compuesta por un número infinito de funciones seno y coseno, donde el valor de u representa la frecuencia de los respectivos pares seno y coseno.

La *Transformada de Fourier* puede extenderse a una función bidimensional $f(x,y)$:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y).e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \quad \textbf{(8)}$$

y su transformada inversa es:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v).e^{j2\pi(ux+vy)}dudv \quad \textbf{(9)}$$

donde u y v son las dos variables de frecuencias. El módulo y la fase pueden calcularse de forma análoga al caso unidimensional. [4]

2.4 Transformada de Fourier en tiempo discreto y su inversa

Suponiendo funciones bidimensionales de variables discretas, como es el caso de las imágenes digitales, la *Transformada Discreta de Fourier* o *TDF* se obtiene empleando sumatorias en lugar de integrales:

$$F(u,v) = \frac{1}{M.N}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y).e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad \textbf{(10)}$$

donde M representa el número de columnas (píxeles en la dirección X) y N el número de filas (píxeles en la dirección Y). La *Transformada Inversa* viene dada por la expresión:

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v).e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \quad \textbf{(11)}$$

El módulo y la fase se calculan de la misma forma que en el caso de una función continua, con la única diferencia de que las variables independientes son ahora discretas:

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)} \quad \textbf{(12)}$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] \quad \textbf{(13)}$$

donde $R(u,v)$ y $I(u,v)$ son las partes real e imaginaria de $F(u,v)$ respectivamente. [4]

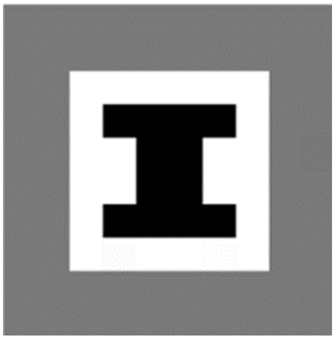
3 Implementación en software

3.1 Módulo y Fase de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) de una imagen digital

Una vez expuestos los conceptos matemáticos necesarios para comprender la TDF en tiempo discreto y su vinculación con las imágenes digitales, continuamos con la implementación computacional mediante el paquete MatLab. Este nos permite realizar la TDF, expresarla en términos de magnitud y fase, además, poder representar gráficamente a ambas.

Por una cuestión práctica y para facilitar la comprensión de los temas, a continuación, mostramos ejemplos desarrollados sobre imágenes monocromáticas de 8 bits. En ellas, el valor de cada píxel se corresponde a un determinado valor en una escala de grises de 2^8, es decir, 256 tonalidades distintas. La misma está comprendida en un rango de números enteros de 0 a 255 en el cual cada valor está asociado a distintas graduaciones de gris, desde el negro cuyo valor es el 0, hasta el blanco cuyo valor es 255. Todos los conceptos desarrollados pueden hacerse extensivos a imágenes color, recordando que éstas son tratadas como arreglos tridimensionales, como se mencionó anteriormente. [2]

Un ejemplo de imagen monocromática y su correspondiente representación matricial se presenta en la Fig. 3



$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 0 & 0 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 0 & 0 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

Fig. 3. Representación de una imagen en escala de grises mediante una matriz. [5]

Un número elevado de niveles de gris se corresponderá con una imagen que se representará digitalmente con un mayor número de bits y de la misma forma tendrá la capacidad de representar imágenes con mayor *rango dinámico*. El rango dinámico, expresado en Decibeles (dB), se define matemáticamente como:

$$DB = 10 \log \frac{(Amplitud\ Máxima)^2}{(Amplitud\ Mínima)^2} \quad \textbf{(14)}$$

En un sistema digital se considera la amplitud máxima como 2^n, siendo n el número de bits, y como amplitud mínima 2^0 (es decir, 1), correspondiente al bit 0. [6]. Por ejemplo, un digitalizador de 8 bits puede desplegar 256 niveles de gris y corresponderá a un sensor con un rango dinámico de 48 dB.

Tomando como ejemplo la imagen "cameraman.tif" (una de las imágenes de prueba en escala de grises más populares, de tamaño *256x256*) realizamos una serie de instrucciones resumidas en la Fig.4, obteniendo los resultados expuestos en la Fig. 5.

Para el cálculo práctico de la TDF (y su inversa) de una imagen, Matlab emplea un algoritmo basado en la Transformada Rápida de Fourier o FFT (Fast Fourier Transform) [7]. Este método supone un gran ahorro de cantidad de cálculos realizados y tiempo de procesado.

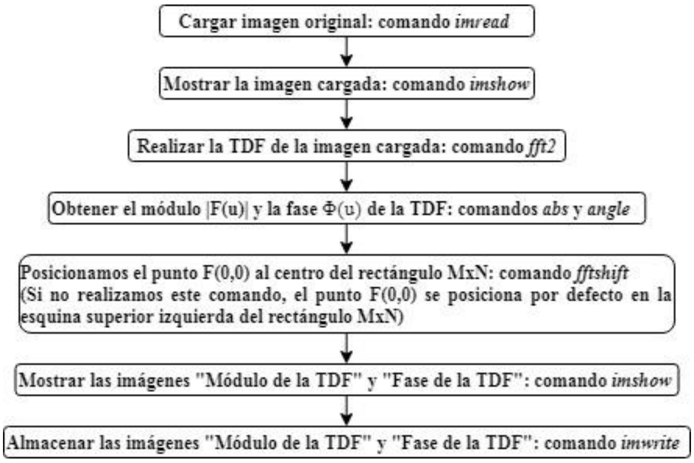


Fig. 4. Etapas del procesamiento realizado en MatLab destacando los comandos utilizados para la obtención de la TDF, expresarla en términos de módulo y fase, y poder representar gráficamente a ambas. La visualización de la imagen "Módulo de la TDF" se realiza aplicando la función $log(1+|F(u,v)|)$ en lugar de $|F(u,v)|$.

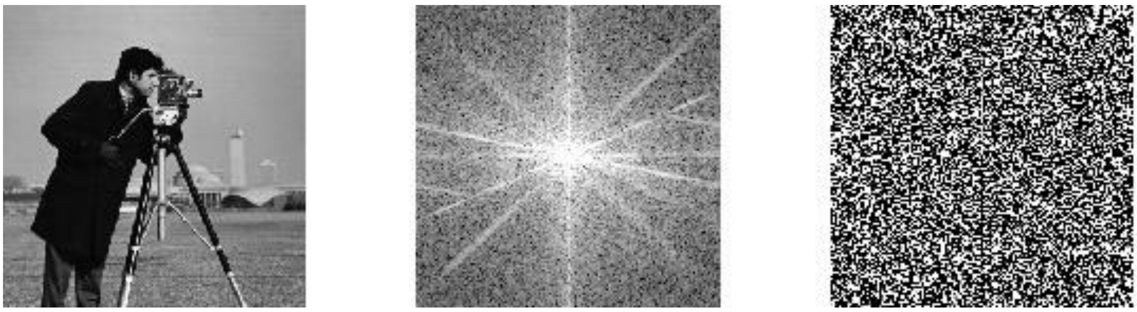


Fig. 5. Izquierda: Imagen utilizada como ejemplo "cameraman.tif". Centro: Imagen "Modulo de la TDF". Derecha: Imagen "Fase de la TDF". Todas ellas obtenidas a partir de la implementación del procesamiento detallado en la **Fig.4**

Hay que superar algunas dificultades al mostrar el espectro de frecuencia de una imagen. La primera surge debido al amplio rango dinámico de los datos resultantes de la TDF. En la imagen original, el valor de un píxel será un número entero entre [0,255], representando el grado de intensidad, pero en la imagen que representa el módulo de Fourier los valores de los píxeles son números en punto flotante y no están limitados a los valores de [0,255]. Estos datos deben ser escalados de nuevo para transformarlos en un formato visible, de forma que no exceda la capacidad del dispositivo de visualización. Una cuantización lineal simple no proporciona siempre los mejores resultados, pues muchas veces se pierden los puntos de baja amplitud. Una solución común a este problema es representar el logaritmo del espectro, mejor que el espectro por sí mismo. De esta forma, la función logarítmica realiza una compresión del rango dinámico, facilitando considerablemente su visualización y su interpretación. [6]

A primera vista, las imágenes "Modulo de la TDF" y "Fase de la TDF" no parecen proporcionarnos demasiada información respecto a la imagen original y pueden parecernos conceptos abstractos. A partir de esto, planteamos las siguientes preguntas: ¿Es más importante el módulo o la fase de una imagen? ¿cuál de las dos contiene más información de la imagen? Al momento de restaurar una imagen ¿cuál componente (módulo o fase) es más importante o con cuál de las dos es más importante contar? El análisis realizado a continuación nos permitirá resolver estas cuestiones y ver la importancia que tiene cada componente.

3.2 Imagen de “Solo Módulo” e Imagen de “Solo Fase”

Como vimos, cualquier señal unidimensional o bidimensional expresada por medio de su *Transformada de Fourier*, puede ser recuperada completamente por el proceso inverso sin pérdida de información. Es decir, podemos ir y volver del espacio de frecuencias al *(x,y)* sin perder información. A través del comando *ifft2* podemos obtener la inversa de la TDF [7], este nos permite realizar un proceso de reconstrucción de una imagen a partir de sus componentes de módulo y fase.

Un método utilizado para exponer la importancia de las componentes que conforman la TDF, consiste en realizar un proceso de reconstrucción de una imagen a través de la inversa de la TDF, pero conservando una componente original de la misma (módulo o fase) y modificando la restante a un valor fijo determinado, para así poder observar cuál de las dos tiene un papel preponderante, dando origen a los siguientes tipos de imágenes:

- *Imagen de solo módulo*: La TDF tiene como módulo el de la imagen original, y fase nula.
- *Imagen de solo fase*: La TDF tiene módulo unitario y la fase igual al de la imagen original.

Tomando nuevamente como ejemplo la imagen “cameraman.tif” realizamos una serie de instrucciones resumidas en el diagrama de la Fig.6, para obtener las imágenes de “Solo Módulo” y “Solo Fase”, presentadas en la Fig. 7.

En teoría, si la imagen original es real, entonces el resultado del comando *ifft2* debería ser real. En la práctica, sin embargo, el resultado de *ifft2* a menudo tiene componentes imaginarios muy pequeñas como resultado de errores de redondeo que son característicos de los cálculos en coma flotante. Por lo tanto, una buena práctica es extraer la parte real del resultado (comando *real*) después de calcular la inversa de la TDF para obtener una imagen que conste solo de valores reales. [7]

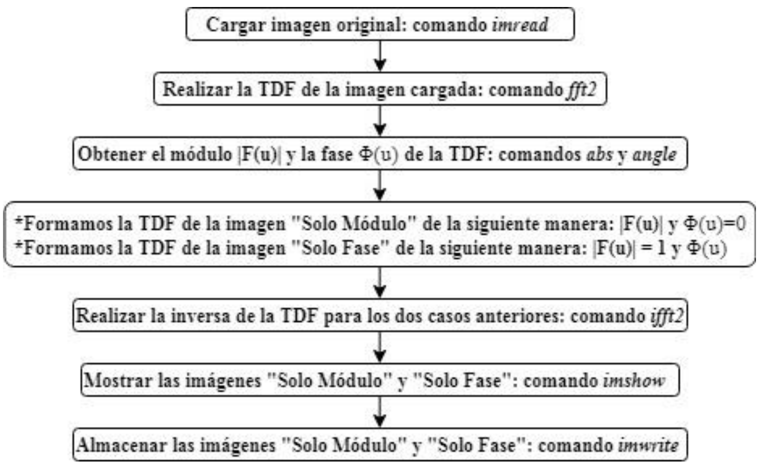


Fig. 6. Etapas del procesamiento realizado en MatLab destacando los comandos utilizados para la obtención de las imágenes “Solo Módulo” y “Solo Fase”.

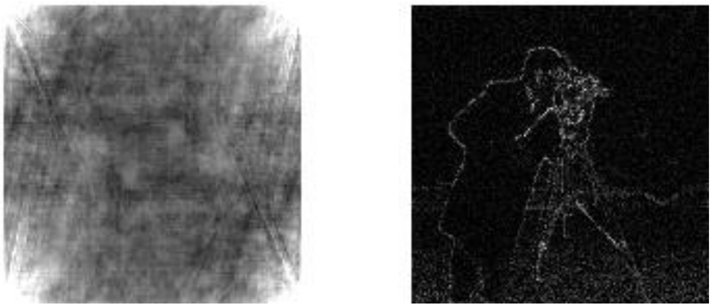


Fig. 7. Izquierda: Imagen "Solo Módulo". Derecha: Imagen "Solo fase", obtenidas a partir de la implementación del procesamiento detallado en la **Fig.6**.

Observamos que muchas de las características de la imagen original son identificables claramente en la imagen de "Sólo fase", pero no ocurre lo mismo en la imagen de "Sólo módulo", lo que nos permite deducir que gran parte de la información se encuentra codificada en la fase. Las características principales de la imagen original son identificables en una imagen de "Sólo fase", ya que la inteligibilidad está asociada a los detalles (puntos, bordes, etc.), como dicha imagen ilustra en la **Fig. 7**. Entonces, al estar las imágenes confinadas en una región del espacio, es decir, que tienen una extensión finita, la información de la fase es suficiente para reconstruirla (podemos ver la imagen a grandes rasgos).

La imagen de "Sólo magnitud" es irreconocible y tiene severos problemas de rango dinámico. En cambio, la imagen de "Solo Fase" es reconocible, pero significativamente degradada en calidad. Si observamos nuevamente con mayor detenimiento la **Fig. 5**, podemos ver que la fase se distribuye casi por igual en todo el espectro de frecuencias mientras que el módulo se concentra en el centro del espectro y decae de manera exponencial al aumentar la frecuencia. [8]

Tomemos otro ejemplo para reafirmar lo anteriormente expuesto, en este caso, con una fotografía astronómica muy popular como lo es "moon.tif". Aplicamos otra vez los procesamientos detallados en las **Fig.4** y **Fig.6**, y exponemos los resultados en la **Fig. 8**. Vemos nuevamente el rol preponderante que tiene la fase.

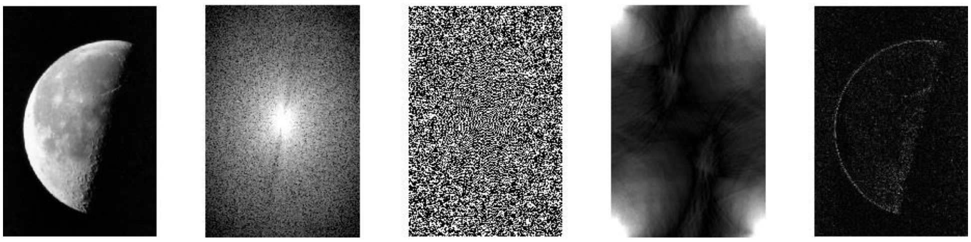


Fig. 8. De izquierda a derecha: imagen original "moon.tif", "Módulo de la TDF", "Fase de la TDF", "Solo módulo" y "Sólo fase". Todas ellas obtenidas a partir de la implementación de los procesamientos detallados en las **Fig.4** y **Fig. 6**.

3.3 Experimento de Oppenheim

Un experimento que ilustra claramente la observación de que las señales "Sólo fase" capturan mayor inteligibilidad de la señal que las de "Sólo módulo", es el que se conoce como "Experimento de Oppenheim" [9]. Este consiste en reproducir una imagen combinando el módulo de una imagen fuente con la fase de otra imagen fuente, y observar cuál información de las dos imágenes fuente predomina en la imagen resultante.

Este experimento ha sido llevado a cabo por numerosos autores y con distintos tipos de imágenes (paisajísticas, faciales, astronómicas, etc.), arribando todos ellos a las mismas conclusiones que las expuestas anteriormente.

Fig. 9. Experimento de Oppenheim. Esquina superior izquierda: Imagen “monkey.tif” (IM1). Esquina superior derecha: Imagen “lena.tif” (IM2). Esquina inferior izquierda: Imagen reconstruida utilizando el módulo de IM1 y la fase de IM2. Esquina inferior derecha: Imagen reconstruida utilizando el módulo de IM2 y la fase de IM1. [8]

4 Conclusiones y trabajos a futuro

En la representación de Fourier, el módulo y la fase tienden a desempeñar papeles diferentes y, en algunas situaciones, muchas de las características importantes de una señal se conservan si solo se mantiene la fase. Además, bajo una variedad de condiciones, como cuando una señal es de longitud finita, la información de la fase por sí sola es suficiente para reconstruir completamente una señal dentro de un factor de escala [9]. Esta observación acerca de la fase puede realizarse en varios contextos y aplicaciones diferentes, incluyendo tanto señales unidimensionales como bidimensionales y/o tridimensionales.

Los algoritmos de reconstrucción de imágenes “Solo Fase” se han explotado en determinadas áreas del procesamiento digital de imágenes. Por ejemplo; segmentación (dividir una imagen digital en varias partes u objetos), detección de bordes, procesos de eliminación de ruido, etc. Además, el estudio de la representación Módulo-Fase de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto es especialmente relevante en el diseño de filtros. Las citadas son líneas que se podrían desarrollar en una futura tarea de investigación.

Para finalizar, consideramos que, al vincular las materias básicas con las específicas de la ingeniería elegida, los estudiantes comprenden que todo saber se basa en un saber anterior, aunque sea el correspondiente al de una etapa que consideran ya superada, lo que contribuye a la idea de que cada asignatura no es un compartimiento estanco. Durante el desarrollo de la articulación de asignaturas planteado inicialmente, se estimula a que el alumno realice diversas actividades vinculadas a cada área, creando sus propios códigos para tal fin.

Creemos que la formación en la praxis se emprende descubriendo la formación sistémica del ingeniero, tratando de lograr una integración superadora de la visión parcial de cada una de las disciplinas, contribuyendo al desarrollo de las competencias de criterio y acción, a partir del conocimiento de las problemáticas de la ingeniería y de la tecnología.

Referencias

1. CONFEDI: Competencias en Ingeniería. *Web*. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf (2014). Accedido en septiembre 2015
2. Savoie, L.; Klimovsky, E.; Gaitán, M.: Aplicación de la Descomposición en Valores Singulares en la Compresión de Imágenes Digitales. *Libro de actas: XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*, pp. 61-68 (2017)
3. Cuevas Jimenez E.; Zaldivar Navarro D.; Rojas R.: *Computer Vision using MatLAB and the Toolbox of Image Processing*. Freie Universitat Berlin, pp. 7 (2005)
4. Gonzalez, Rafael C.; Woods, Richard E.: *Digital Image Processing*. Prentice Hall, pp. 150-154 (2001)
5. Avendaño, Santiago; Castillo, Gonzalo: *Detección y Reconocimiento de las Señas del Juego del Truco en Tiempo Real*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires, pp. 7 (2012).
6. Aristizábal Ramírez, Diego Luis; Ramirez Martínez, Diego Alberto: *Conceptos Básicos del Procesamiento Digital de Imágenes Usando OrquideaJAI*. Escuela de Física, Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín, pp. 8-23 (2006)
7. Gonzalez, Rafael C.; Woods, Richard E.; Eddins, Steven L.: *Digital Image Processing using MatLab*. Pearson, pp. 112-115 (2003)
8. Skarbnik, Nikolay; Zeevi, Yehoshua Y.; Sagriv, Chen: The Importance of Phase in Image Processing. *Center for Communication and Information Technologies (CCIT)* – Report #773 (2010)
9. Oppenheim, Alan V.; Lim, Jae S.; The Importance of Phase in Signals. *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, no. 5, pp. 529-541 (1981)

El diseño de una situación didáctica a través de un problema de álgebra vectorial conjuntamente con la aplicación de una herramienta didáctica computacional

Oscar Enrique Ares, Agustín Menuet, Nicolás Altamirano

Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias – Universidad Nacional de San Luis
Departamento de Ciencias Básicas
Campus Universitario. Ruta 147. Villa Mercedes (SL)
oscareares@gmail.com, agustinmenuet@gmail.com, nicolas59@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presenta el diseño de una situación didáctica junto con una herramienta computacional, en la forma de guía secuenciada, para propiciar un aprendizaje significativo de la noción de ortogonalidad de vectores en términos de productos escalar. La secuencia didáctica ha sido diseñada y puesta en escena en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería en la FICA de la UNSL. Se hacen significativas las nociones de suma de vectores, producto escalar y ortogonalidad, y se volverá imprescindible la puesta en práctica de estas nociones para controlar, dominar y solucionar la situación problema, en concordancia con la teoría de Guy Brousseau. El alumno desarrolló sus conceptos e imágenes conceptuales mediante el uso de cuatro registros: geométrico, algebraico, numérico y computacional. Al explorar en el registro computacional el alumno utilizó la herramienta didáctica diseñada por el equipo docente.

Palabras clave: Secuencia didáctica, Ortogonalidad, Visualización.

1 Introducción

La siguiente situación didáctica, diseñada y puesta en escena por los autores de este trabajo en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería de la FICA-UNSL, propicia la construcción de conocimientos a través de una situación problema que hace significativa las nociones de suma de vectores, producto escalar y ortogonalidad y se volverá imprescindible la puesta en práctica de éstas nociones para controlar y dominar la situación problema.

2 Objetivos

Fundado en la teoría del constructivismo la secuencia didáctica fue diseñada con el objetivo de lograr el protagonismo del alumno como constructor de su propio aprendizaje, en el descubrimiento de la noción de ortogonalidad expresada en términos de producto interno como el concepto esencial e imprescindible para resolver la situación problema. La visualización como estrategia de enseñanza para favorecer un aprendizaje significativo utilizando una herramienta didáctica computacional especialmente diseñada, ha sido el segundo objetivo de este trabajo.

3 Fundamento

En el modelo constructivista, la matemática se basa en la resolución de problemas para llegar a la modelización matemática, siendo su propósito fundamental el de forjarse como un marco teórico que guía el desarrollo de las actividades instruccionales que, facilitan al alumno una construcción progresiva de conceptos y procedimientos matemáticos cada vez más abstractos.

En consecuencia, el éxito o fracaso del que aprende matemáticas depende de la formación de quien enseñe, de sus inclinaciones filosóficas e ideológicas acerca del hombre, de la sociedad y de la educación matemática; todo lo cual orientará la reflexión didáctica del ejercicio docente, este conjunto de opiniones y creencias del docente es percibida de manera directa por el que aprende, quien se ve verdaderamente afectado en su proceso de adquisición del conocimiento [1].

Las propuestas constructivistas se han convertido en el eje de una transformación fundamental de la enseñanza de la matemática, es de resaltar que el modelo constructivista no tiene una materialización uniforme debido a que se alimenta de diversas aportaciones de diferentes campos del saber; el constructivismo hunde sus raíces en postulados filosóficos, psicológicos y pedagógicos, en muchos casos divergentes. No obstante, comparten la importancia de la actividad mental constructiva del alumno.

Como sucede con cualquier doctrina o teoría, según Paul Ernest [2] expresa que el constructivismo alberga en su interior una variedad de escuelas y orientaciones que mantienen ciertas diferencias de enfoques y contenidos.

A continuación, según Glasersfeld (1991) citado en [3] enuncia dos principios fundamentales del constructivismo radical como son: Por un lado, el conocimiento no es recibido pasivamente sino construido activamente por el sujeto de forma cognitiva. Por otro lado la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica

4 Secuencia didáctica para abordar el problema

En el marco de las estrategias para la resolución de problemas, se diseña una secuencia que consta de los pasos siguientes y no necesariamente es estrictamente lineal:

4.1 Analizar y comprender el problema

Analizar: a partir de una lectura comprensiva esencialmente consiste en descomponer la información contenida en los datos, identificar condiciones y separar datos e incógnitas.

Comprender: de importancia prioritaria es visualizar, es decir, elaborar diagramas, esquemas, gráficos, que posibiliten identificar claramente el problema y simplificarlo, con el objetivo de poder representarlo. Si es posible, utilizar una herramienta didáctica computacional para explorar y visualizar.

4.2 Representar el problema

Convertir las representaciones visuales y proposiciones del problema a un registro algebraico, planteo de las ecuaciones expresadas en fórmulas matemáticas.

4.3 Diseñar y planificar una solución

Consiste en la búsqueda de estrategias de resolución y la elección más adecuada. Elección de un método para resolver las ecuaciones planteadas.

4.4 Ejecución

Actuación con la estrategia seleccionada previamente. Sintéticamente resolver las ecuaciones planteadas. Es recomendable siempre que sea posible introducir el uso de software que permitan resolver numérica y/o analíticamente la solución, además de graficar y visualizar.

4.5 Verificación de la solución y conclusiones

En matemática la idea de verificar la solución es bastante clara y en general consiste en reemplazar los resultados obtenidos en forma analítica o numérica en las ecuaciones originarles, comprobando si satisfacen todas las igualdades. Esta última fase da lugar a revisar el proceso seguido, vincular los resultados con la situación real del problema y generalizar la solución.

4.6 Aplicación de una secuencia didáctica en la estrategia de la resolución del problema: visualización.

Según Brousseau [4], la situación debe conducir al alumno a hacer lo que se busca, pero al mismo tiempo no debe conducirlo, es decir, debe existir un margen de toma de decisiones por parte del alumno, lo cual implica no conducir absolutamente al alumno como por un carril. Consecuentemente, se requiere un análisis de las relaciones puestas en juego, relaciones que producen respuestas positivas o erróneas que generan un proceso de retroalimentación. Las relaciones que se ponen en juego constituyen el objeto matemático en la situación, y que permiten la construcción de la estrategia óptima, resultante de un trabajo personal insustituible por parte del alumno, puesto que ninguna teoría por si misma garantiza el aprendizaje.

Una tarea del docente es seleccionar, adaptar y proponer al alumno situaciones acertadas, que estén a su alcance, según su nivel, para que provoquen una actuación lo más fecunda e independiente posible, aceptando el problema como suyo y produciendo sus propias respuestas.
Para lograr esto, comunica (o se abstiene de comunicar) información, métodos, heurísticas y preguntas, de la manera que considera apropiada. Este juego de interacción entre el docente y las interacciones del alumno con los problemas que él le ha planteado, es la situación didáctica.

Luego de leer y releer el problema el alumno realizará un diagrama vectorial con lápiz y papel, pero posteriormente se le facilitará una herramienta didáctica computacional interactiva con la utilización del software Geogebra que le permita manipular distintas configuraciones de la situación [5].

Véase la Figura 1.

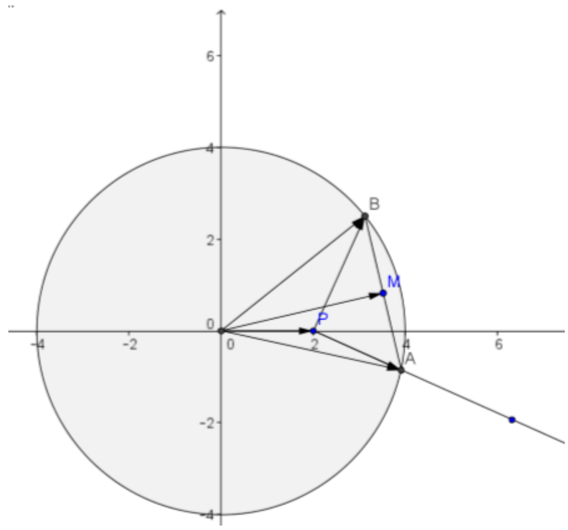


Fig.1. Construcción geométrica interactiva para la visualización del problema dado.

5 Representación matemática del problema.

De la representación gráfica, el alumno ensayará una representación en lenguaje algebraico específicamente en álgebra vectorial. Es decir, con la guía del profesor, puesto que en ésta fase se produce una progresiva abstracción de la realidad, el alumno intentará plantear las ecuaciones vectoriales que modelizan la situación.

5.1 Ecuación vectorial que caracteriza el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas AB.

Se utiliza la definición de suma junto con la idea de que al sumar dos vectores de igual modulo y direcciones distintas, la dirección de la resultante es la bisectriz del ángulo entre los vectores.

$$A + B = 2M \qquad \textbf{(1)}$$

La idea central indispensable para la solución del problema, que favorece la construcción de un campo conceptual es: 'el producto escalar de vectores ortogonales es cero'. ¿Cuáles son estos vectores? a partir de la gráfica los vectores ortogonales son $(A - P)$ y $(B - P)$. En consecuencia:

$$(A - P).(B - P) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Los extremos de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se hallan sobre la circunferencia, en consecuencia, $|\mathbf{A}| = r$ y $|\mathbf{B}| = r$.
Se puede escribir una ecuación escalar que sintetice la geometría indicada en esta forma.

$$|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 = 2\mathrm{r}^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

Donde r es el radio de la circunferencia y d el diámetro.

6 Enunciado de la situación en forma de problema

Por el punto $P = (1,3)$ interior al círculo, con centro en $c = (0,0)$ y radio $r = 6$, trazar dos semirrectas perpendiculares entre sí; sean A y B los puntos en que ellas cortan a la circunferencia.
Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas $\overline{AB}$, al variar las semirrectas perpendiculares trazadas por P.

6.1 Secuencia guiada para la resolución en registro geométrico y numérico

6.1.1. Realizar la gráfica del círculo dado.
6.1.2. Trazar dos semirrectas perpendiculares entre sí a partir del punto P dado. Hallar las ecuaciones de cada una de ellas.
6.1.3. Encontrar las coordenadas de la intersección entre éstas semirrectas y la circunferencia. Llamaremos a los puntos de intersección $\boldsymbol{A_1}$ y $\boldsymbol{B_1}$.
6.1.4. Hallar el punto medio $\boldsymbol{M_1}$ del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}_{\boldsymbol{1}}$.
6.1.5. Hacer el trazado geométrico de las dos semirrectas, girándolas a 45° en sentido anti horario.
6.1.6. Encontrar las coordenadas de la intersección entre éstas rectas y la circunferencia. Llamaremos a los puntos de intersección $\boldsymbol{A_2}$ y $\boldsymbol{B_2}$.
6.1.7. Hallar el punto medio $\boldsymbol{M_2}$ del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}_{\boldsymbol{2}}$.
6.1.8. Repetir los ítems 5, 6 y 7.
6.1.9. Que figura geométrica observa que se describe al unir todos los puntos medios $\boldsymbol{M}$ de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$.

6.2 Secuencia guiada para la resolución en registro algebraico:

Punto de partida: En cada paso algebraico del siguiente desarrollo con ecuaciones vectoriales, recurra como guía al registro geométrico obtenido y a la visualización interactiva realizada con la herramienta computacional:

6.2.1. Determine Vectorialmente $\overrightarrow{\mathbf{PA}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{PB}}$
6.2.2. Determinar el punto M en forma vectorial a partir de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{PA}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{PB}}$.
6.2.3. Qué características geométricas observa entre los vectores $\overrightarrow{\mathbf{PA}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{PB}}$?
6.2.4. ¿Cómo determina algebraicamente la condición de ortogonalidad entre vectores?

6.2.5. De la Ecuación 4, determinar el modulo del vector $\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}$ al cuadrado:
6.2.6. ¿Qué producto de vectores utiliza para determinar el módulo de un vector al cuadrado?
6.2.7. Y con el resultado obtenido en Ecuación 5, se obtiene:
6.2.8. La suma $\left|\overrightarrow{\mathbf{PA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathbf{PB}}\right|^2 = \cdots$
6.2.9. Completando el cuadrado del trinomio, llegamos a la ecuación de la circunferencia en forma VECTORIAL de la forma:
6.2.10. Con los datos de nuestro problema, determine la ecuación de la circunferencia.

6.3 Resolución de la actividad en registro geométrico

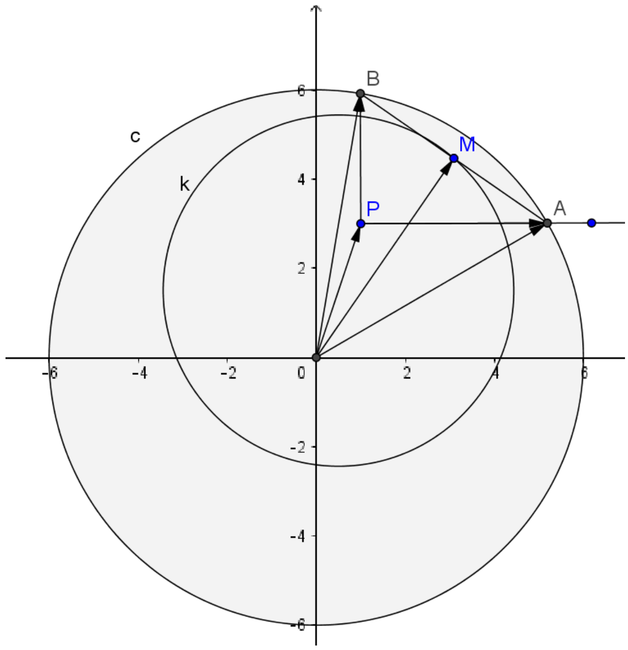


Fig. 2. Representación geométrica de la actividad, visualizada mediante el uso del software Geogebra.

6.4 Resolución de la actividad en registro algebraico

6.4.1. Determine Vectorialmente $\overrightarrow{\mathbf{PA}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{PB}}$
6.4.2. Determinar el punto M en forma vectorial a partir de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{PA}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{PB}}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{PA}}+\overrightarrow{\mathbf{PB}} = 2\overrightarrow{\mathbf{M}} \qquad (4)$$

6.4.3. Qué características geométricas observa entre los vectores $\overrightarrow{\mathbf{PA}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{PB}}$?
6.4.4. Como determina algebraicamente la condición de ortogonalidad entre vectores?

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{PA}} - \overrightarrow{\mathbf{P}}\right).\left(\overrightarrow{\mathbf{PB}} - \overrightarrow{\mathbf{P}}\right) = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{PA}}\,.\,\overrightarrow{\mathbf{PB}} - \overrightarrow{\mathbf{P}}\,.\left(\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right) + \mathbf{P}^2 = 0$$

$$\overrightarrow{\mathbf{PA}}\,.\,\overrightarrow{\mathbf{PB}} = \overrightarrow{\mathbf{P}}\,.\left(\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{P}}\right|^2 \qquad (5)$$

6.4.5. De la Ecuación 4, determinar el modulo del vector $\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}$ al cuadrado:
¿Qué producto de vectores utiliza para determinar el módulo de un vector al cuadrado? Producto escalar, entonces:

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right|^2 = 4|\mathbf{M}|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{PA}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathbf{PA}}\,.\,\overrightarrow{\mathbf{PB}} + \left|\overrightarrow{\mathbf{PB}}\right|^2 = 4|\mathbf{M}|^2$$

6.4.6. Y con el resultado obtenido en Ecuación 5, se obtiene:

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{PA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathbf{PB}}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{\mathbf{P}}\,.\left(\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{P}}\right|^2\right) = 4|\mathbf{M}|^2$$

6.4.7. La suma $\left|\overrightarrow{\mathbf{PA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathbf{PB}}\right|^2 = \cdots$

$$\frac{d^2}{2} + 2\left(\vec{\mathbf{P}}\,.\left(\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right) - \left|\vec{\mathbf{P}}\right|^2\right) = 4|\mathbf{M}|^2$$
$$\frac{d^2}{2} + \left(4\vec{\mathbf{P}}\,.\vec{\mathbf{M}} - 2\left|\vec{\mathbf{P}}\right|^2\right) = 4|\mathbf{M}|^2$$
$$\frac{d^2}{2} = 4|\mathbf{M}|^2 - 4\vec{\mathbf{P}}\,.\vec{\mathbf{M}} + 2\left|\vec{\mathbf{P}}\right|^2$$
$$\frac{d^2}{2} = 4\left(|\mathbf{M}|^2 - \vec{\mathbf{P}}\,.\vec{\mathbf{M}} + \frac{\left|\vec{\mathbf{P}}\right|^2}{2}\right)$$

6.4.8. Completando el cuadrado del trinomio, llegamos a la ecuación de la circunferencia en forma VECTORIAL de la siguiente forma:

$$|\mathbf{X} - \boldsymbol{X_0}|^2 = r^2$$

6.4.9. Con los datos de nuestro problema, determine la ecuación de la circunferencia.

$$\left|\mathbf{M} - \frac{\vec{\mathbf{P}}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{2} - \left|\vec{\mathbf{P}}\right|^2\right)$$

7 Utilización de la herramienta didáctica computacional específicamente diseñada.

El significado de la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo geométrico interactivo con la manipulación de software computacional adquiere mayor significado debido, entre otras causas, a que las primeras evocaciones de un problema, teorema o definición son visuales.

Con la herramienta didáctica el alumno con el cursor apoyado sobre el punto externo a la circunferencia que se halla sobre la recta lo desplaza y ve el trazado de la circunferencia –color azul- cuya ecuación matemática halló, luego puede modificar el punto P, obteniendo nuevas configuraciones.

Distintas configuraciones del problema y su solución

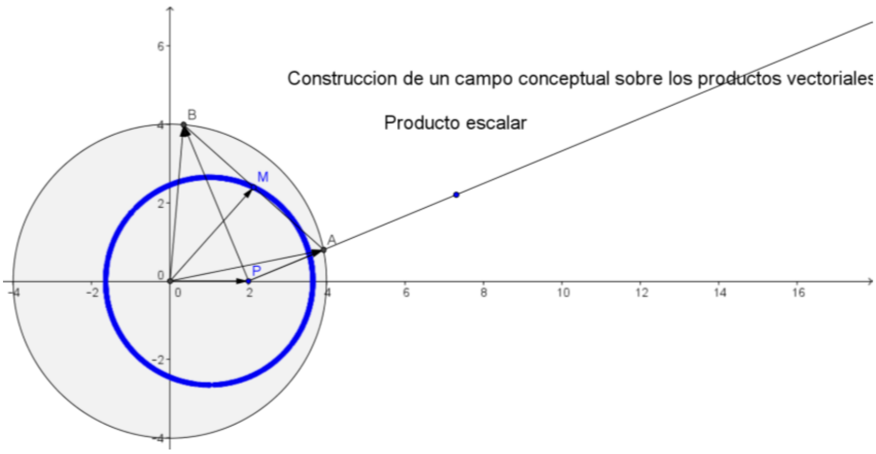


Fig. 3. Construcción geométrica de las distintas configuraciones interactivas para la visualización del problema dado

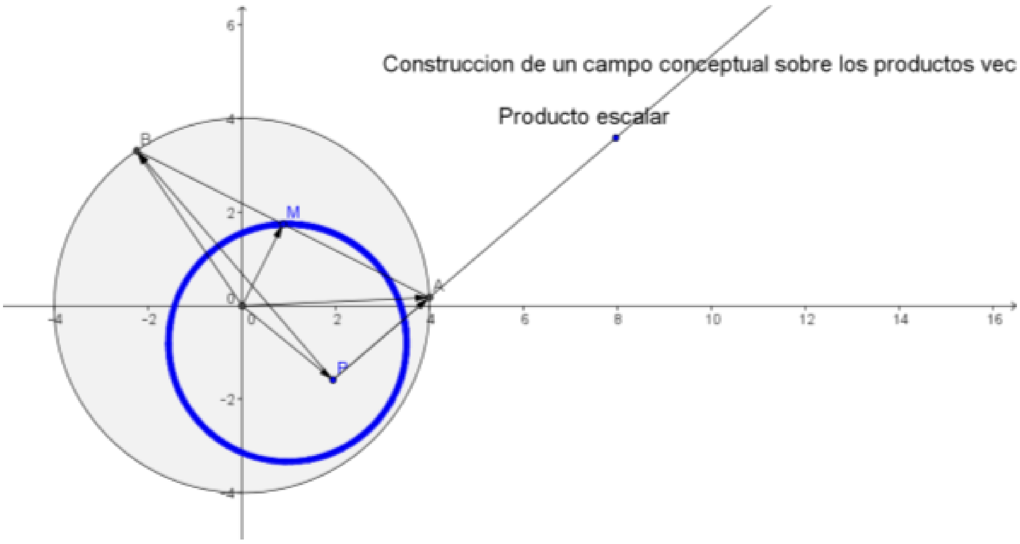


Fig. 4. Construcción geométrica de las distintas configuraciones interactivas para la visualización del problema dado.

8 Resolución de la actividad realizada por los alumnos

A continuación, se adjuntan las imágenes de la actividad que entregada por uno de los alumnos.

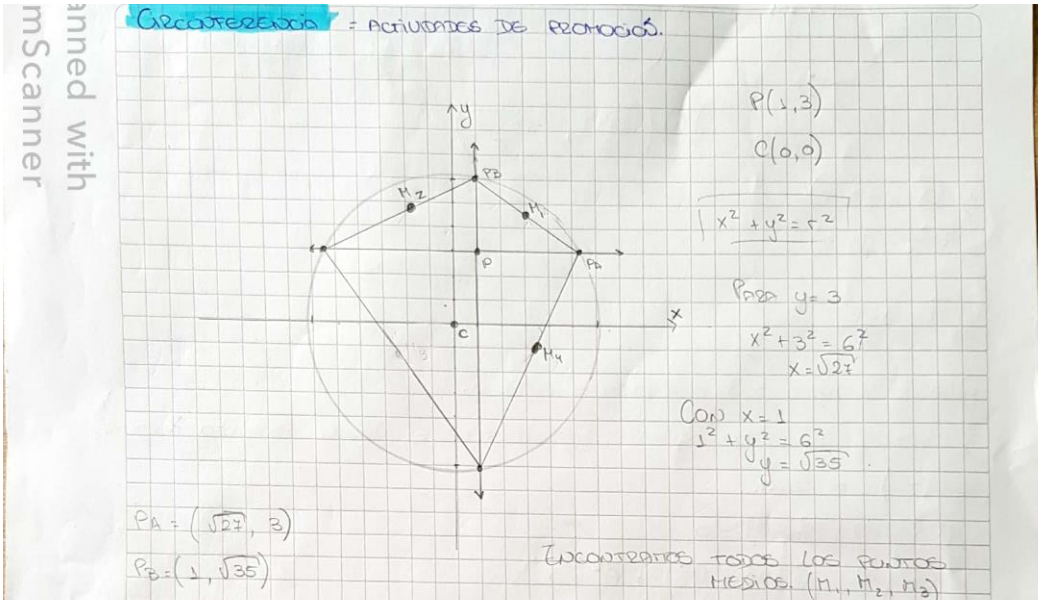


Fig. 5. Página 1 de 3 del trabajo entregado por el alumno.

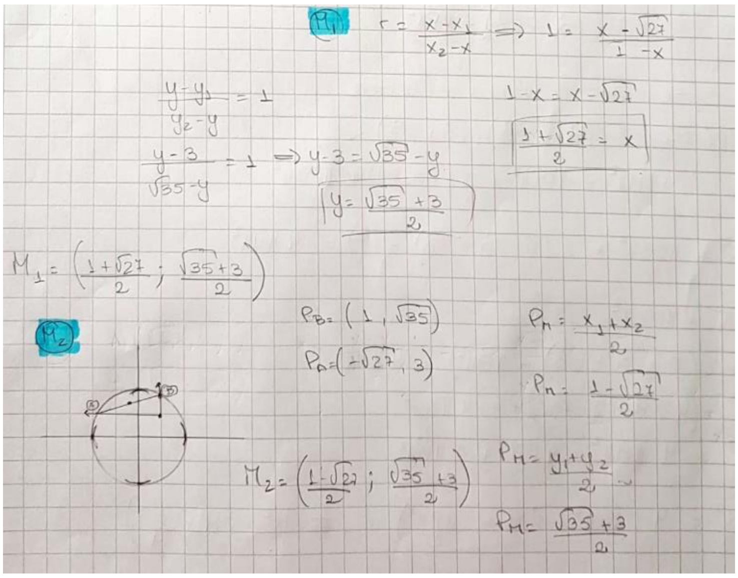
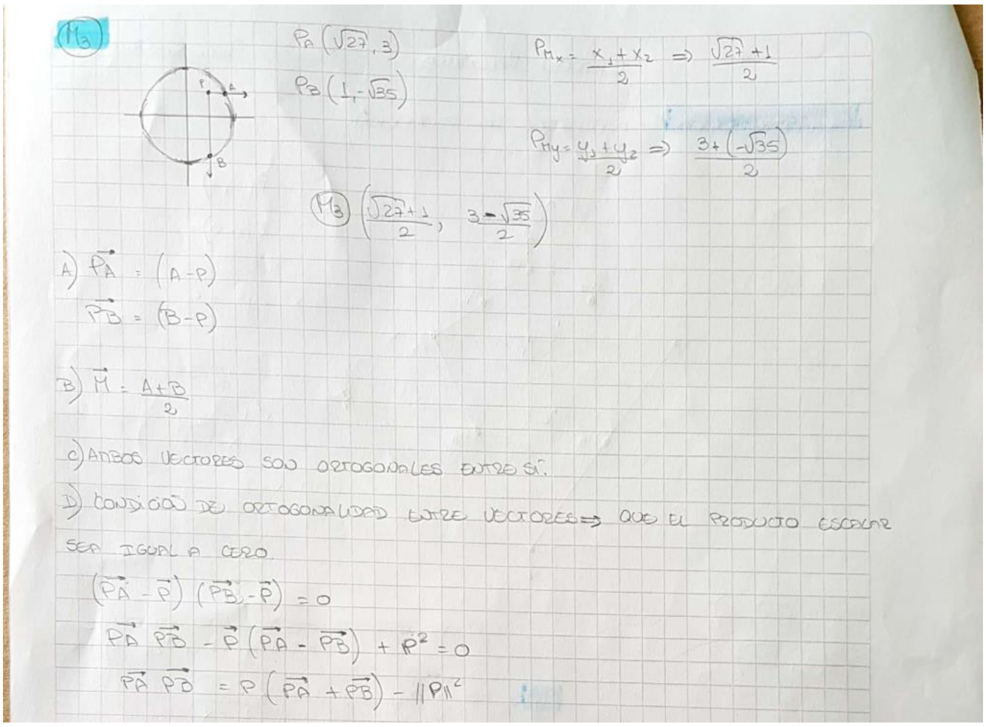


Fig. 6. Página 1 de 3 del trabajo entregado por el alumno.



M3

$P_A(\sqrt{27}, 3)$

$P_B(1, -\sqrt{35})$

$P_{M_x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{27}+1}{2}$

$P_{M_y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow \frac{3+(-\sqrt{35})}{2}$

$M_3\left(\frac{\sqrt{27}+1}{2}, \frac{3-\sqrt{35}}{2}\right)$

A) $\vec{PA} = (A-P)$

$\vec{PB} = (B-P)$

B) $\vec{M} = \frac{A+B}{2}$

C) AMBOS VECTORES SON ORTOGONALES ENTRE SÍ.

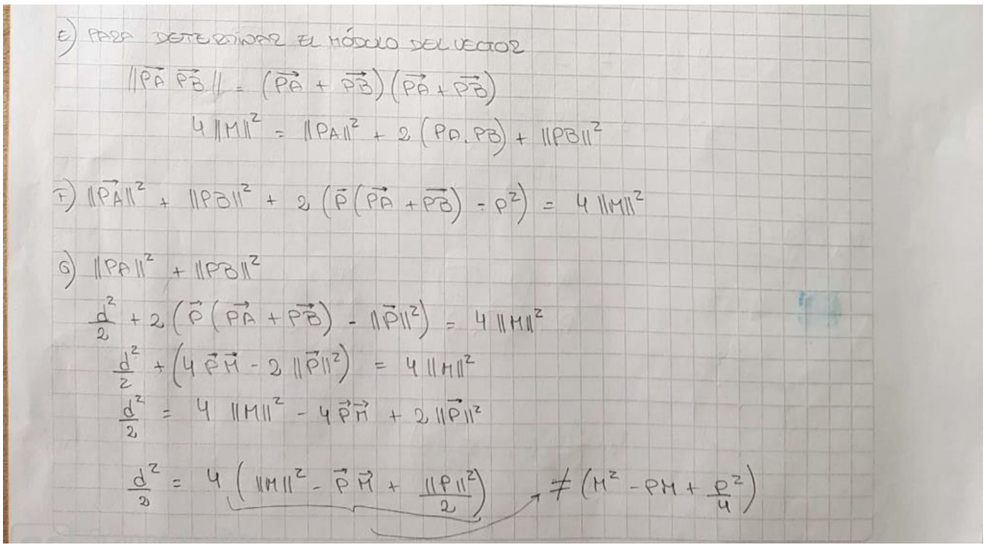
D) CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD ENTRE VECTORES ⇒ QUE EL PRODUCTO ESCALAR SEA IGUAL A CERO

$(\vec{PA} - \vec{P})(\vec{PB} - \vec{P}) = 0$

$\vec{PA}\,\vec{PB} - \vec{P}(\vec{PA} - \vec{PB}) + P^2 = 0$

$\vec{PA}\,\vec{PB} = P(\vec{PA} + \vec{PB}) - \|P\|^2$

Fig. 7. Página 2 de 3 del trabajo entregado por el alumno.



E) PARA DETERMINAR EL MÓDULO DEL VECTOR

$\|\vec{PA}\,\vec{PB}\| = (\vec{PA} + \vec{PB})(\vec{PA} + \vec{PB})$

$4\|M\|^2 = \|PA\|^2 + 2(PA.PB) + \|PB\|^2$

F) $\|\vec{PA}\|^2 + \|PB\|^2 + 2(\vec{P}(\vec{PA} + \vec{PB}) - P^2) = 4\|M\|^2$

G) $\|PA\|^2 + \|PB\|^2$

$\frac{d^2}{2} + 2(\vec{P}(\vec{PA} + \vec{PB}) - \|\vec{P}\|^2) = 4\|M\|^2$

$\frac{d^2}{2} + (4\vec{P}\vec{M} - 2\|\vec{P}\|^2) = 4\|M\|^2$

$\frac{d^2}{2} = 4\|M\|^2 - 4\vec{P}\vec{M} + 2\|\vec{P}\|^2$

$\frac{d^2}{2} = 4\left(\|M\|^2 - \vec{P}\vec{M} + \frac{\|P\|^2}{2}\right) \neq \left(M^2 - PM + \frac{P^2}{4}\right)$

Fig. 8. Página 2 de 3 del trabajo entregado por el alumno.

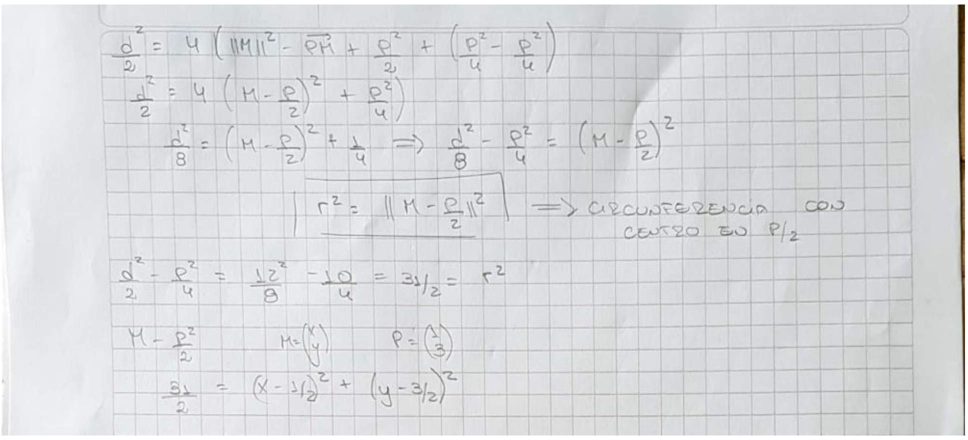


Fig 9. Página 3 de 3 del trabajo entregado por el alumno.

8.1 Análisis de los trabajos presentados por los alumnos

Se observa que el alumno en una primera aproximación comienza exponiendo los datos y herramientas conocidas como punto de partida.

Procede a calcular las coordenadas de puntos medios y realiza despejes sin problemas, para luego hacer uso de una de las propiedades de producto escalar para determinar la ortogonalidad entre vectores a modo de verificación de lo calculado en una primera etapa. En ésta instancia el alumno ya tiene adquirido el concepto y definición de producto escalar, lo cual es necesario como conocimiento previo para la resolución de la situación propuesta. El alumno construye el conocimiento de la noción de ortogonalidad a través de la definición dada de producto escalar, que resulta ser conocimiento necesario para resolver el problema.

A la hora de analizar el registro algebraico, se considera un tanto escueto y hasta con poco orden, características comunes para alumnos en este nivel de la carrera. Es aquí donde se podría guiar previamente al alumno hacia un ordenamiento de las herramientas que va utilizando en pos de favorecer así no solo un orden visual sino mental. Es decir, que en el papel pueda el alumno reflejar todo lo necesario que, si bien está en su mente, aún necesita un acomodamiento en forma de procedimiento. Mientras tanto otros alumnos han logrado este orden reflejando una simpleza a la hora de lectura por parte del docente

9 Conclusiones

Con frecuencia en la elaboración de material didáctico se ha subvaluado la importancia en que resulta atractivo y produzca motivación para el aprendizaje del alumno. En nuestra experiencia hemos observado que la visualización presentada y entregada al alumno para explorar con ella utilizando la computadora de la sala, ha resultado muy atractiva y útil para la comprensión de las actividades. En registro algebraico, al margen de que todos los alumnos han realizado la devolución del material, se han producido avances, pero se han detectado dificultades. La idea sugerida por el docente de plantear la condición de ortogonalidad utilizando el producto escalar, ha resultado en una muy buena elaboración del alumno, el manipuleo algebraico posterior ha sido muy fuertemente guiado por el docente para poder avanzar en la resolución, como si la secuencia debiera ser más escalonada o graduada.

Por otra parte, el balance general permite describir una elevada partición activa de los estudiantes, y la devolución con las respuestas por parte de todos. Sintéticamente, comparando este diseño didáctico, con las anteriores prácticas que solamente mostraban el enunciado del ejercicio o problema, resulta un balance muy favorable en lo referente a elaboración, comprensión conceptual y compromiso en el proceso educativo.

Referencias

1. Castañeda, Yamile. El constructivismo y la realidad matemática. http://www.etnomatematica.org/publica/articulos/articulo%20-el%20constructivismo%20y%20la%20realidad%20%20matematica-2015-yamile-%20-%20copia.pdf. Accedido el 11 de junio de 2020.
2. Paul, E. (1992). El Modelo Constructivista en la enseñanza de las matemáticas. Recuperado el 11 de 09 de 2013.
3. Martínez, A. (1999). Constructivismo radical, Marco teórico de investigación y enseñanza de las ciencias. Enseñanza de las Ciencias, 17(3), 493-502.
4. Brousseau, G.: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. (1986).
5. Hitt, Fernando: Construcción de conceptos matemáticos y estructuras cognitivas. Cinvestav, IPN. México. (2000).

Aplicando el Programa Mathematica para la Solución y Visualización de Problemas de la Carrera de Ingeniería Electromecánica

Javier O. Vitti[1], Héctor D. Martín[1], Sandra M. Mendoza[2], Brian J. Zorzon[1]

[1] Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Reconquista
[2] Universidad Tecnológica Nacional, CONICET, Facultad Regional Reconquista
Calle 44 N°1000, CP 3560, Reconquista, Santa Fe
javier.vitti@gmail.com, hmartin@frrq.utn.edu.ar, smendoza@frrq.utn.edu.ar, zorzon-utn@outlook.com

Resumen. En la Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional se desarrollan desde hace varios años talleres utilizando el programa Mathematica, con el fin de que alumnos de grado apliquen esta herramienta para resolver problemas de ingeniería. De allí surgieron numerosos trabajos de innovación que brindaron soluciones tecnológicas aplicadas a diversas cátedras de la Facultad. En este trabajo se presentan dos de ellos. El primer caso involucra la visualización de las series de Fourier mediante sus vectores posición, girando a una frecuencia determinada para funciones con desarrollo par, impar y generales. El segundo caso consiste en un aplicativo que permite, mediante el análisis de imágenes, obtener el ángulo de contacto de una superficie, el cual es un dato importante para la caracterización de la misma y una herramienta complementaria al equipo de mediciones de ángulo de contacto, que facilita y sistematiza el análisis de las superficies de los materiales.

Palabras Clave: Talleres, Programa Mathematica, Series de Fourier, Ángulo de contacto.

1 Introducción

Desde el año 2006 se dictan en la Facultad Regional los Talleres de Mathematica, cuya función es proporcionar un soporte informático para las diferentes asignaturas de los primeros tres años de la carrera de Ingeniería Electromecánica. Una vez finalizado los talleres por parte de los alumnos, estos pueden continuar investigando y aplicando el software enseñado para la visualización o resolución de diferentes temáticas desarrolladas en las cátedras de los años superiores. El programa empleado en los talleres es el Mathematica, de Wolfram Research [1], un software de matemática simbólica que permite la resolución de una gran variedad de problemas, ya sean puramente matemáticos o problemas aplicados de ingeniería [2].

En el presente trabajo se muestran dos desarrollos realizados íntegramente en el software por alumnos que han participado de los talleres. El primer trabajo consiste en una representación de funciones periódicas mediante series de Fourier, empleando las funciones trigonométricas seno y coseno. Desde el aspecto gráfico, las series de Fourier pueden representarse mediante el movimiento de un punto alrededor de una circunferencia. Otra forma interesante de visualizarlo es mediante sus vectores posición, girando a una frecuencia determinada. Las sucesivas proyecciones de este punto según las direcciones x e y representan a la función que ha sido modelada por este método [3].

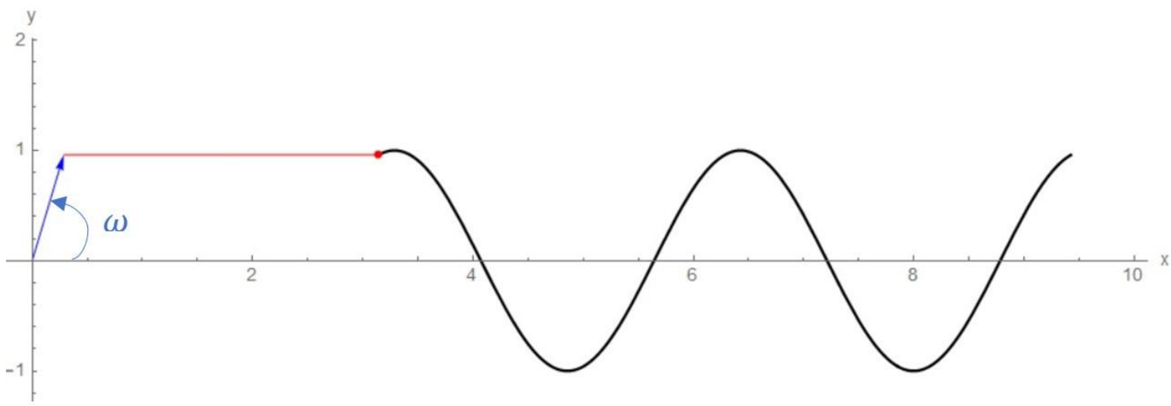


Fig. 1. Representación gráfica de un vector que gira con frecuencia ω describiendo una función senoidal.

El segundo trabajo, consistió en la resolución de una problemática existente en la Facultad, donde actualmente se lleva a cabo un laboratorio en el área de materiales, que implica la determinación del ángulo de contacto de distintas superficies. Dicho ángulo, que se observa cuando una pequeña cantidad de líquido es depositada sobre una superficie sólida desde el aire, se forma entre la línea tangente al borde de la gota de líquido (Fig. 2, líneas azules) y la horizontal de la superficie donde dicha gota se depositó (Fig. 2, línea roja punteada). Esta medición se puede realizar de forma manual, es decir, imprimiendo la fotografía y utilizando un transportador, o mediante un software comercial. Los softwares libres existentes cuentan con la desventaja de que se introduce error debido a que el usuario debe ingresar manualmente ciertos parámetros subjetivos [4]. El objetivo es crear un aplicativo que permita la automatización de las mediciones y otorgue mayor precisión [5].

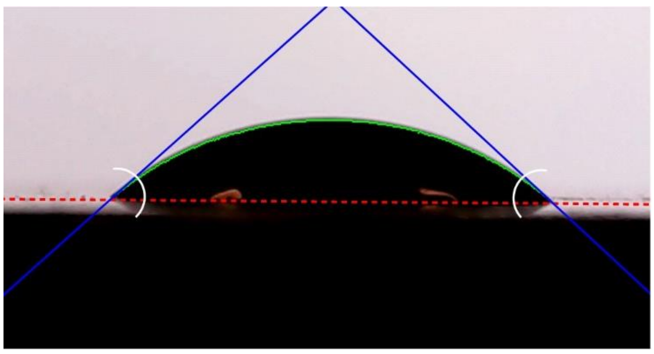


Fig. 2. Ángulo de contacto.

2 Metodología

Los trabajos se llevaron a cabo de acuerdo a consignas dadas por los docentes de las distintas cátedras. Las mismas, consistían en analizar la posibilidad de resolver ciertas problemáticas de ingeniería utilizando las ventajas de las visualizaciones gráficas al modificar diferentes parámetros en el programa Mathematica de Wolfram Research.

Para la representación gráfica de las series de Fourier se utilizaron funciones trigonométricas con tres parámetros asociados: la amplitud al radio de una circunferencia o al módulo de un vector posición; el argumento a la frecuencia de giro de dicho vector y el ángulo de fase a la ordenada al origen de la gráfica. Cada término de la serie se asoció a una circunferencia diferente, por lo que se necesitan tantas circunferencias como términos tenga la serie.

Para el diseño del aplicativo que permite medir el ángulo de contacto se analizaron imágenes obtenidas desde una lupa digital Electronic Magnifier, sin filtros intermedios y con resolución de 640x480 píxeles, que obtiene las imágenes en formato jpg. Dichas fotografías se realizaron a partir de un instrumento físico también en fase de diseño y prueba en la Facultad.

La totalidad de los trabajos se desarrollaron desde el software Mathematica 11.2 mediante la ejecución de scripts.

3 Resultados y discusiones

Wolfram Mathematica, un programa de matemática simbólica utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemática y áreas computacionales. Comúnmente considerado como un sistema de álgebra computacional, Mathematica es también un poderoso lenguaje de programación de propósito general con una amplia variedad de funciones integradas.

3.1 Representación gráfica de las series de Fourier

Las Series trigonométricas de Fourier, o simplemente series de Fourier fueron desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier. La idea que subyace en las mismas es la descomposición de una función periódica en términos de funciones trigonométricas fundamentales: senos y cosenos [6]. Una función es periódica de periodo T si hay un número $T > 0$ tal que $f(x) = f(x + T)$.

Sea f una función de variable real x, que es integrable en el intervalo $[-L, L]$ se puede obtener el desarrollo en serie de Fourier de f(x) en ese intervalo como:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) + b_n \operatorname{Sin}\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) \right) \qquad \textbf{(1)}$$

Donde los coeficientes a_n y b_n se calculan de acuerdo a:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, Cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) dx\,, \qquad para\; n = 0, 1, 2 \ldots \qquad \textbf{(2)}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, Sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) dx\,, \qquad para\; n = 1, 2, 3 \ldots \qquad \textbf{(3)}$$

Notar que el caso de a_0 es el caso especial cuando n es cero:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{\mathrm{L}} f(x)\, dt \qquad \textbf{(4)}$$

Fuera del intervalo, la serie es periódica con período $T = 2L$. Si f(x) es periódica en toda la recta real, la aproximación por series de Fourier también será válida en todos los valores de x.

Dichas series se abordan desde un enfoque analítico en el tercer año de la carrera en la cátedra de Matemática para Ingeniería Electromecánica. Sin embargo, se pueden representar gráficamente como una sumatoria de proyecciones de vectores que rotan encadenados entre sí, es decir, pueden representarse mediante el movimiento de un punto alrededor de una circunferencia, o de sus vectores posición, girando a una frecuencia determinada. Las sucesivas proyecciones de este punto según las direcciones x e y representan a la función que ha sido modelada por este método.

Para el caso de estudio primeramente se han abordado funciones con desarrollo par e impar, es decir, los casos más sencillos debido a que ciertos coeficientes de la serie en esos casos se anulan. Con los resultados obtenidos, se trabajó sobre el desarrollo de funciones que no fueran necesariamente par ni impar.

Una función f es par en $[-L, L]$ si $f(x) = f(-x)$ para $-L \leq x \leq L$ y es impar en $[-L, L]$ si $f(-x) = -f(x)$ para $-L \leq x \leq L$. Esto implica que las gráficas de dichas funciones son simétricas con respecto al eje y o simétricas respecto del origen respectivamente.

Si se realiza la extensión de una función como función par, su serie de Fourier se reduce a la serie de cosenos:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Donde los coeficientes a_0 y a_n se calculan respectivamente con (2) y (4). De esta manera, se interpreta al coeficiente a_0 como la ordenada al origen y el restante término como la sumatoria de las proyecciones de vectores sobre el eje "x" que giran con frecuencia $(n\,\pi)/L$, enlazados entre sí.

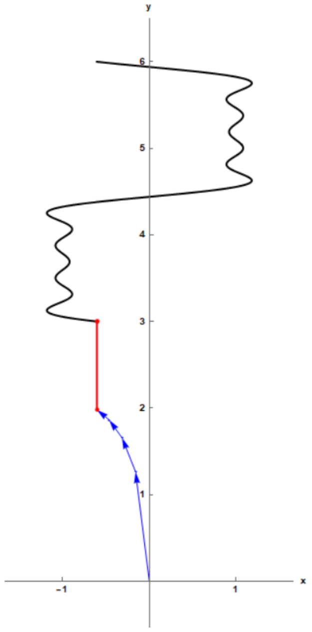


Fig. 3. Serie de Fourier en cosenos de una onda cuadrada. Las sumatoria de las proyecciones de los vectores se realiza sobre el eje x.

De manera análoga, si se realiza la extensión de una función como función impar, su serie de Fourier se reduce a la serie de senos:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sin}\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

Donde el coeficiente b_n se calcula respectivamente con (3). De esta manera, se vuelve a interpretar la fórmula como la sumatoria de las proyecciones de vectores sobre el eje "y", que nuevamente giran con frecuencia $(n\,\pi)/L$ encadenados entre sí.

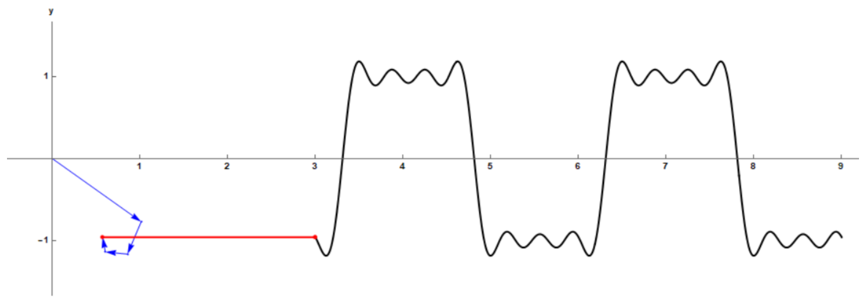


Fig. 4. Serie de Fourier en senos de una onda cuadrada. En este caso, las sumatoria de las proyecciones de los vectores se realiza sobre el eje y.

Por último, para el caso de desarrollo de funciones que no son pares ni impares, como la función (7), se debió considerar que se debían sumar proyecciones sobre el eje x e y, por lo que, para simplificar su representación, se rotaron las proyecciones sobre el eje x 90 grados, con tal de seguir mostrando gráficamente las series de Fourier de forma intuitiva como la sumatoria de proyecciones de vectores que rotan, en este caso, siempre sobre el eje y.

$$f(x) = \begin{cases} -x & -L < x < 0 \\ 0 & 0 < x < L \end{cases} \qquad (7)$$

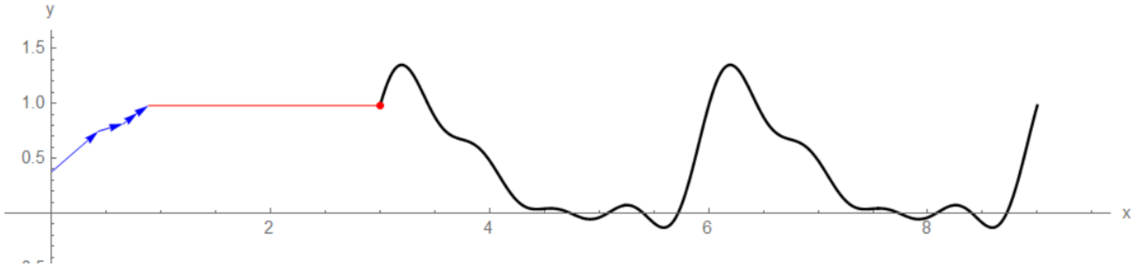


Fig. 5. Serie de Fourier del desarrollo de la función (7). Se rotaron 90° las proyecciones sobre el eje x para la representación gráfica.

3.2 Aplicativo para la medición de ángulo de contacto

En la actualidad, la medición de ángulo de contacto es una técnica eficiente y ampliamente utilizada para evaluar la hidrofobicidad, adhesión y tensión superficial de una superficie sólida [7], [8] y [9]. Cuando una pequeña cantidad de líquido es depositada sobre una superficie sólida desde el aire, esta adoptará una forma determinada por la tensión superficial generada por el estado de equilibrio de las tres fases interactuando (sólido, líquido, gaseoso) [10].

En la práctica, si al depositar el líquido, éste se esparce, se obtienen ángulos pequeños, lo cual indica que la superficie es altamente mojable. Por otro lado, si el líquido depositado toma una forma similar a la de una esfera, se obtienen ángulos grandes, lo que significa que la superficie es menos mojable. Si el líquido utilizado es agua pura, la superficie sólida con mayor o menor mojabilidad puede ser interpretada como hidrofílica o hidrofóbica respectivamente [11] y [12].

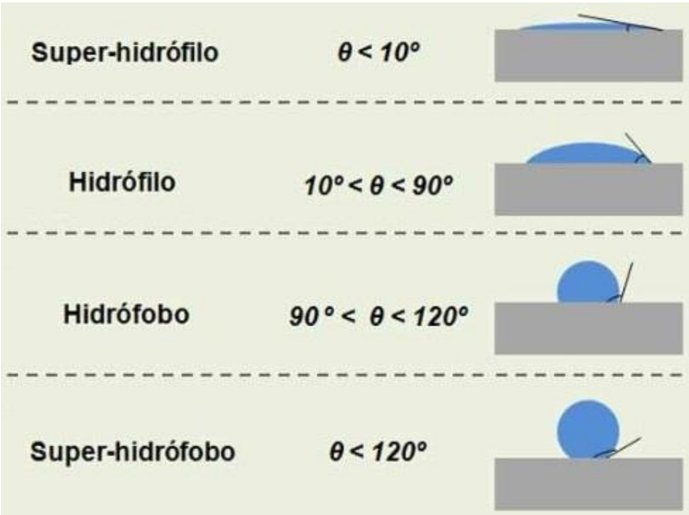


Fig. 6. Ángulo de contacto y relación de mojabilidad.

Desde la base del Mathematica, se ha desarrollado una aplicación para la determinación del ángulo de contacto a partir de imágenes obtenidas con un instrumento de medición de ángulo de contacto, también desarrollado en la UTN – Facultad Regional Reconquista. El objetivo es contar con una herramienta que complemente el instrumento de medición y sea de fácil manipulación, es decir, que permita controlarla con solo usar el mouse a través de deslizadores y/o pestañas para obtener rápidamente la medición deseada. A su vez, se automatizó la mayor cantidad posible de pasos para evitar errores que pueda originar el usuario.

La aplicación se basa en aprovechar la diferencia de contraste entre la gota y el fondo de la imagen para reconocer el ángulo a medir. Por lo tanto, es indispensable que la fotografía tenga un alto contraste con el fondo y esté correctamente enfocada, ya que es fundamental para el posterior reconocimiento de la silueta de la gota.

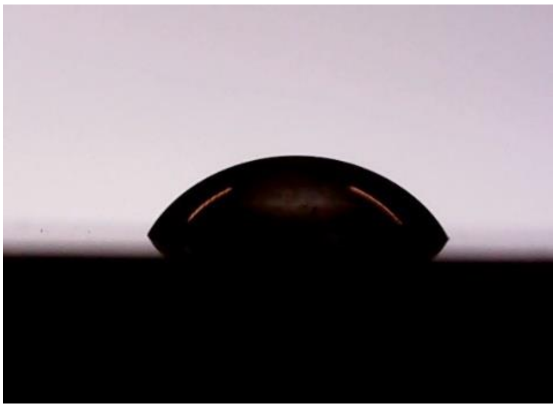


Fig. 7. Fotografía tipo obtenida por el instrumento desarrollado en la Facultad. El líquido es agua y la superficie ensayada acero. Existe una gran diferencia de contraste entre la gota con respecto al fondo de la imagen.

La fotografía es cargada a la aplicación y procesada de manera tal que el aplicativo delimita dos regiones de puntos de acuerdo al color del píxel. El proceso de carga es simplemente arrastrando la imagen y soltándola en el aplicativo, o bien mediante opciones en la cinta de herramientas del programa.

Matemáticamente, el aplicativo se basa en un ajuste polinómico del contorno de la imagen de la gota. Para ello, primeramente, se binariza la imagen mediante una función integrada que la transforma en una matriz de 0 y 1. Posteriormente se identifica el cambio entre las dos regiones, almacenando las posiciones de cada punto (pixel) en una lista.

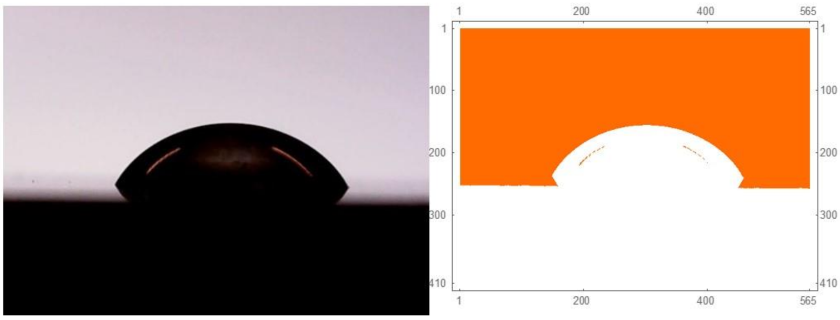


Fig. 8. Fotografía tipo procesada por la función integrada en el software de binarización.

Luego, el usuario debe definir una recta que se utiliza como base para eliminar los puntos que están por debajo de la gota. En otras palabras, un algoritmo se encarga de eliminar los puntos que no pertenecen a la gota, tomando como base la recta acomodada por el usuario. Seguidamente, se divide la lista de puntos que pertenecen al contorno de la gota en dos y se ajustan los puntos mediante un polinomio de grado dos.

Finalmente, se debe considerar para el cálculo final la inclinación de la recta definida por el usuario, ya que ésta a su vez define la inclinación con la que la cámara obtuvo la fotografía, que en condiciones ideales debería ser cero.

Fig. 9. De izquierda a derecha: definición de recta por parte del usuario, lista de puntos que se ajustará, resultados gráficos.

La Fig. 10 muestra la primera pestaña de la interfaz donde se lleva a cabo el primer paso del aplicativo. Esta permite al operador visualizar las dos regiones e identificar sectores en donde el contraste fue insuficiente con la consecuente delimitación inexacta. También, mediante la manipulación de deslizadores, el usuario ajusta la recta horizontal que representa el límite entre la gota y la superficie de la muestra.

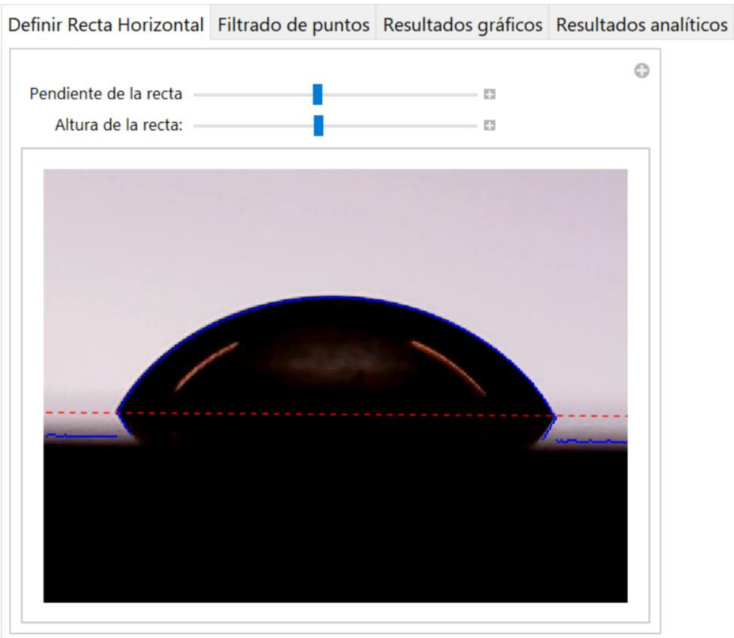


Fig. 10. Primera pestaña del aplicativo. Permite visualizar las dos regiones y definir la recta horizontal.

Seguidamente el usuario se mueve de forma consecutiva entre las distintas pestañas: “Filtrado de puntos”, donde se muestran los puntos filtrados que se van a ajustar; “Resultados gráficos”, donde ya se visualizan las rectas tangentes al contorno de la gota (Fig. 11) y; “Resultados analíticos”, donde se dan solamente los valores numéricos, en grados, de los ángulos de contacto tanto de la izquierda como de la derecha (Fig. 12).

De esta manera, la aplicación determina el ángulo de contacto entre la recta tangente y la recta horizontal definida por el usuario. Cabe destacar que el aplicativo está en fase final de diseño y puesta a punto.

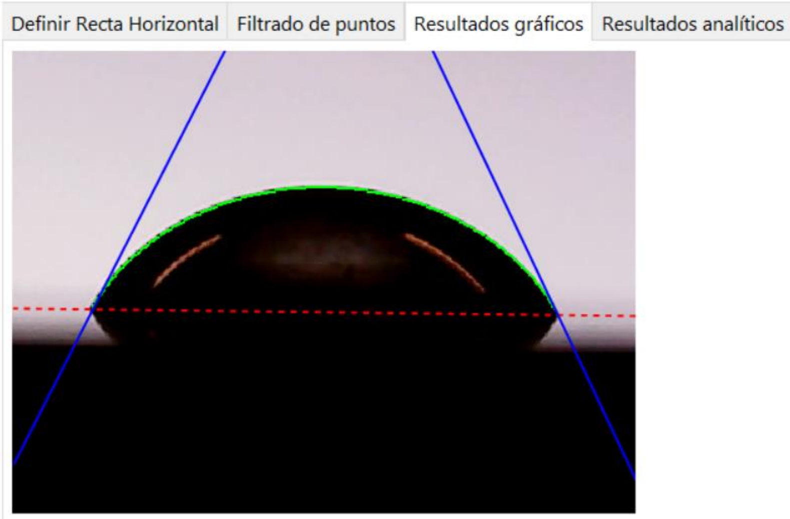


Fig. 11. Tercera pestaña del aplicativo. Visualización de los resultados gráficos.

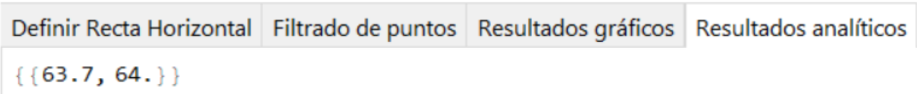


Fig. 12. Cuarta y última pestaña del aplicativo. Visualización de los resultados analíticos.

4 Conclusiones

Se muestran algunos de los trabajos realizados íntegramente por alumnos de grado que participaron de los talleres de Matemática de la Facultad Regional Reconquista con el programa Mathematica, de Wolfram Research.

En el primer caso, se logró representar las series de Fourier de una forma gráfica, como la sumatoria de proyecciones de vectores que giran a determinadas frecuencias enlazados entre sí, para funciones con desarrollo par, impar y generales.

En el segundo caso, se desarrolló un aplicativo para la determinación del ángulo de contacto. Como resultado se logró una herramienta complementaria al equipo de mediciones de ángulo de contacto, que facilita y sistematiza el análisis de las superficies de los materiales. A futuro, resta llevar a cabo la puesta a punto del instrumento para determinar márgenes de error de las mediciones efectuadas por el mismo.

Esta experiencia resultó sumamente enriquecedora, ya que estos casos ayudaron a los alumnos a indagar en teorías no desarrolladas en las asignaturas y a resolver problemáticas tangibles. La utilización del software brinda un medio visual y dinámico de representación e interpretación de los resultados obtenidos.

Agradecimientos. Este trabajo se llevó adelante con el apoyo de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN, Argentina). Agradecemos al Grupo de Diseño Mecánico (GRUDIM) y al Laboratorio de Materiales Avanzados de la Facultad Regional Reconquista. A su vez, se agradece al Ing. Norberto Maggi, a Gastón Maidana y a Marcos Peresón por las discusiones y la contribución para el desarrollo de los trabajos.

Referencias

1. Wolfram Research. *Wolfram Mathematica © 1988-2019*. http://www.wolfram.com/mathematica. Accedido en 2020.
2. Martín, H.; Maggi, N.: *Matemática en Ingeniería, utilizando programas de lenguaje simbólico*. Editorial Académica Española (2018). 160 páginas. ISBN 978-620-2-15147-4.
3. Martín, H.; Maggi, N.; Gutbrod, N.; Peresón, M.; Vitti, J.; Fabbro, A.; Maidana, G.: Experiencias de Taller con el programa Mathematica. *Encuentro Regional de la Unión Matemática Argentina*. (2019).
4. École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). Biomedical Imaging Group: Drop Shape Analysis. http://bigwww.epfl.ch/demo/dropanalysis/. Accedido en 2020.
5. Vitti, J.; Zorzon, B.: Desarrollo de un Instrumento de Medición de Ángulo de Contacto. *Jóvenes Investigadores Tecnológicos*. (2019)
6. O´Neil, P: *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 6° Edición. Thomson Learning (2008).
7. Chau, T.T: A review of techniques for measurement of contact angles and their applicability on mineral surfaces. *Minerals Engineering*, Vol. 22, No. 3, pp. 213-219 (2009).
8. Jung, Y. C., Bhushan, B: Contact angle, adhesion and friction properties of micro-and nanopatterned polymers for superhydrophobicity. *Nanotechnology*. Vol. 17 (2006).
9. Zhao, T: Contact angle measurement of natural materials. *Colloids and surfaces B: Biointerfaces*, Vol. 161, pp 324-330 (2018)
10. Wu, Y: *Control of Pentacene Thin Film Growth by Supersonic Molecular Beam Deposition*. Editorial: Rijksuniversiteit Groningen (2008).
11. Good, R: Contact angle, wetting and adhesion: a critical review. *Journal of Adhesion Science and Technology*. Vol. 6, pp. 1269-1302 (2012).
12. Kwok, D. Y.; Neumann, A. W.: Contact angle measurement and contact angle interpretation. *Advances in Colloid and Interface Science*. Vol. 81, No. 3, pp 167-249 (1999).

Análisis Estadístico de las Variables para la Optimización de un Ciclón de Alta Eficiencia

Miriam B. Cocconi[1], Edgardo M. Rodriguez[2], Mirta R. Barbosa[3], Ana M. Pagano[1]

[1] TECSE, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN)
Av. del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina
mcocconi@fio.unicen.edu.ar, apagano@fio.unicen.edu.ar

[2] Facultad de Ciencias Veterinarias, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN)
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000 Tandil, Argentina

[3] INMAT, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN)
Av. del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina

Resumen. En este trabajo se analizó la influencia conjunta de variables geométricas y las que caracterizan el material a separar sobre la eficiencia fraccional de un ciclón. Para obtener un diseño eficiente del dispositivo se utilizaron técnicas de optimización, considerando aspectos uni y multivariado. Empleando el modelo de número de vórtices para el cálculo de la eficiencia fraccional, se realizó el análisis univariado. Esto mostró que la eficiencia de separación aumenta cuando lo hacen la velocidad de entrada al ciclón, el diámetro y la densidad de partícula y la temperatura; por otra parte, decrece con el incremento del diámetro del ciclón. Sin embargo, el modelo no tiene en cuenta la sinergia entre las variables. El análisis multivariado contempla la interacción entre las variables. Con este objetivo se empleó el diseño de superficie de respuesta. El método de superficie de respuesta es una herramienta potente y adecuada en el enfoque de este estudio.

Palabras Clave: Modelo estadístico univariado y multivariado, Ciclón de alta eficiencia, Superficie de respuesta, Optimización.

1 Introducción

Los ciclones son dispositivos capaces de remover el material particulado de una corriente gaseosa, basándose en el principio de impactación inercial, generado por la fuerza centrífuga. Son ampliamente empleados en la purificación de gases y en la clasificación de partículas finas como es el caso de colección de polvo en plantas seleccionadoras de semillas [1].

En la actualidad existe un marcado interés en la obtención de polvos con tamaño de partícula controlado. El diseño de materiales compuestos para ser utilizados en las más diversas aplicaciones industriales ha generado una creciente demanda de materiales particulados finamente divididos [2]. Las propiedades físicas de estos polvos son tan importantes como las químicas. El tamaño de partícula y la superficie específica tienen consecuencias tecnológicas tales como la facilidad de mezclado y la capacidad de dispersión del material particulado. Por su parte, la morfología influye en la elaboración de suspensiones, facilidad de disolución y compresibilidad del polvo.

La búsqueda de una alta eficiencia se dificulta debido al gran número de variables involucradas, por lo que el diseño se basa en empirismos. Un estudio estadístico puede aportar una alternativa valiosa para obtener una funcionalidad entre las variables. Además, permite analizar la posible sinergia de la combinación de las variables que incrementaría la eficiencia.

En función de lo expuesto, en este trabajo se plantearon los siguientes objetivos:

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

- Analizar en forma univariada la influencia de cada variable sobre la eficiencia del ciclón y posteriormente estudiar la sinergia producida por la combinación de las variables aplicando un método que permita analizarlas en forma conjunta.
- Obtener superficies de respuesta de la eficiencia de separación en función de las variables involucradas y encontrar su máximo valor.

2 Metodología

La dependencia funcional de la eficiencia puede expresarse mediante una función generalizada:

$$\eta = f(G, Op, M) \quad \textbf{(1)}$$

donde G corresponde a la geometría y proporciones del ciclón; Op tiene en cuenta las condiciones de operación del ciclón; M caracteriza el material considerando aspectos como la distribución de tamaño de partícula, la densidad del sólido, densidad y viscosidad del fluido, grado de humedad, aglomeración entre partículas y el contenido de polvo en el gas.

Las condiciones de operación suelen ser las de mayor relevancia, dado que, una vez construido el ciclón con una determinada geometría, ellas son las que pueden modificarse para brindar cierto grado de versatilidad en el funcionamiento, lo que permite cambios en la eficiencia de separación. Es bien conocido que a medida que se incrementa la velocidad de entrada (V_i) se logran mejores resultados. Sin embargo, esta variable no puede crecer indefinidamente porque dentro del ciclón ocurre el fenómeno de resuspensión de las partículas. Esto es, si la velocidad de entrada supera cierto valor, las partículas ya separadas en la tolva inferior pueden ser arrastradas hacia arriba por el flujo turbulento y ser resuspendidas, con lo que la eficiencia del ciclón disminuye. La velocidad a la que ocurre este fenómeno se denomina velocidad de saltación (V_s). Por otra parte, tampoco puede haber diferencias de presiones ilimitadas porque ésto genera una inviabilidad económica relacionada con el gran consumo energético que conlleva, especialmente en ciclones de gran tamaño.

La eficiencia puede obtenerse a través de diferentes modelos. Leith y Licht [3] proponen una teoría que predice las eficiencias de colección del material particulado teniendo en cuenta las propiedades físicas del aire cargado con partículas, como así también las proporciones del ciclón. Dirgo y Leith [4] presentan un modelo basado en el ajuste de datos experimentales. El modelo de número de vórtices, ecuación (2), relaciona la eficiencia del ciclón con los parámetros y condiciones de operación:

$$\eta_i = 1 - \exp\left[\frac{-\pi \; N \; \rho_p \; D_p^2 \; V_i}{9 \mu b}\right] \quad \textbf{(2)}$$

donde N es el número de giros; ρ_p y D_p son la densidad y el diámetro de la partícula, respectivamente; V_i es la velocidad de entrada del gas; μ es la viscosidad del gas y b es la altura de la boca de entrada del ciclón.

En este trabajo se calcula la eficiencia utilizando el modelo de número de vórtices combinado con la expresión de la velocidad de saltación (ecuación 3) y la correlación experimental establecida por Kalen y Zenz [5] (ecuación 4). Se obtienen las expresiones para la eficiencia en función de las variables más significativas (ecuación 5 y ecuación 6).

$$V_s = \frac{4.913 \; W \; K_b^{0.4} \; D_C^{0.067} \; \sqrt[3]{V_i^2}}{\sqrt[3]{1 - K_b}} \quad \textbf{(3)}$$

$$V_i = 1.25 \, V_s \quad \textbf{(4)}$$

$$\eta = 1 - \exp\left(\frac{-6.544\ \rho_p\ D_p^2\ V_i}{\mu}\right) \quad \textbf{(5)}$$

$$\eta = 1 - \exp\left(\frac{-5269.436\, D_c^{-0.799}\ \rho_p\ D_p^2\ \left(\rho_p - \rho\right)}{\rho^2}\right) \quad \textbf{(6)}$$

donde W es la velocidad equivalente que depende de las propiedades del fluido y de la partícula; K_b es una constante que relaciona parámetros geométricos del ciclón; ρ_P es la densidad de la partícula; ρ es la densidad del aire; D_c es el diámetro del ciclón; η es la eficiencia del ciclón.

Se comenzó el estudio con un análisis univariado. Posteriormente se aplicó la metodología de superficie de respuesta (RSM), para el estudio de las óptimas condiciones de diseño. El RSM un conjunto de técnicas matemáticas y estadísticas utilizadas para modelar y analizar problemas en los que una variable de interés es influenciada por otras. El objetivo es optimizar la variable de interés.

Un diseño experimental por sí solo tiene como objetivo identificar los factores más importantes que afectan el desempeño de un proceso [6]. Si se desea realizar una optimización se debe identificar el conjunto de variables que rigen el problema, y aplicar un proceso adecuado para obtenerla.

Por su parte, el método de superficie de respuesta tiene como objetivo no sólo localizar el tratamiento que maximice o minimice la variable respuesta sino también establecer las condiciones óptimas de operación del proceso.

El estudio de la dependencia de la eficiencia de separación con cada una de las variables geométricas y de operación muestra una información parcializada. En consecuencia, es necesario aplicar una metodología capaz de considerar el efecto conjunto de las variables que se logra con el método de superficie de respuesta, aplicando por ejemplo un diseño como el de Box–Behnken seleccionado en el presente trabajo.

3 Resultados y Discusión

Utilizando la ecuación 2 se realizó un estudio univariado de la eficiencia fraccional en función de las diferentes variables como la temperatura (T), diámetro del ciclón, densidad de partícula y concentración de polvo.

En la Fig. 1 se muestra la eficiencia fraccional en función de la densidad de partícula tomando como parámetro la velocidad de entrada, para los parámetros: V_i, D_c, D_p, T. Se considera un ciclón de 0.5 m de diámetro, partículas de 5 µm de diámetro, temperatura de operación de 20 ºC y concentración de polvo de 2 g/m³ de aire. Se toman velocidades de entrada al ciclón de 5, 10, 15, 20, 25 y 30 m/s.

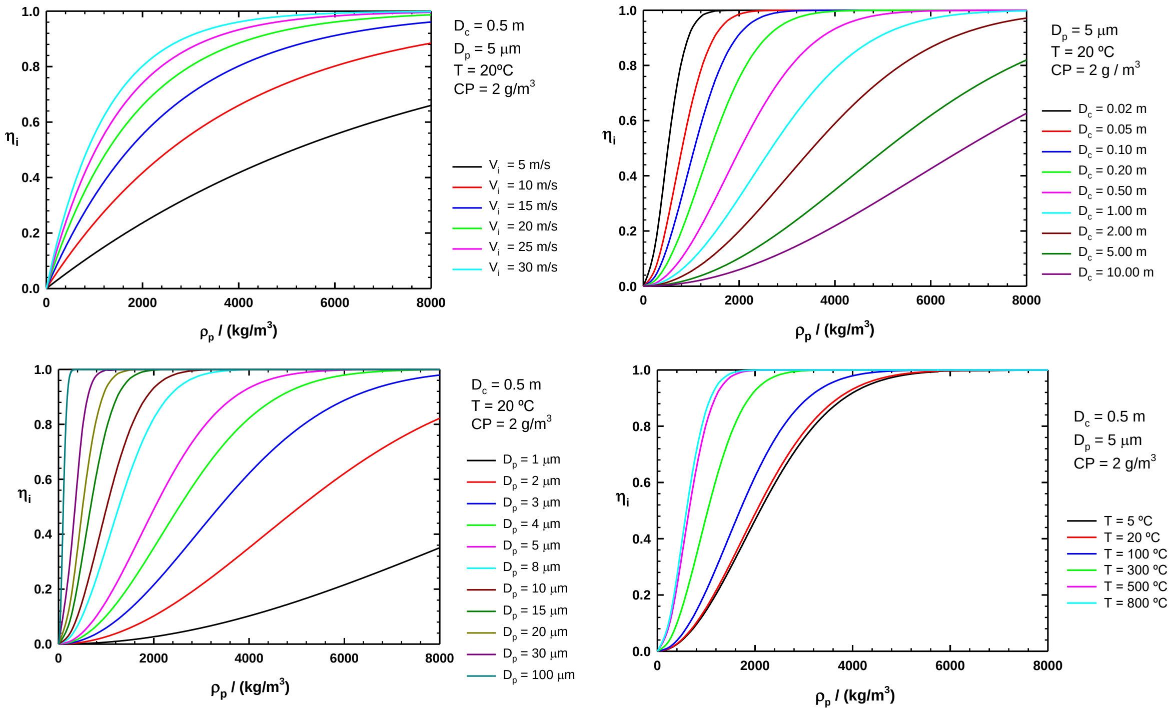


Fig. 1. Eficiencia fraccional (η) en función de la densidad de partícula (ρP) tomando como parámetros la velocidad de entrada (Vi), el diámetro del ciclón (Dc), el diámetro de la partícula (Dp) y la temperatura del gas (T).

En todos los casos se observa que la eficiencia aumenta a medida que lo hace la densidad de la partícula.

A través de este análisis univariado es posible establecer algunas pautas generales. Se puede establecer que la eficiencia fraccional de separación:

- Aumenta cuando lo hacen la velocidad de entrada (caudal) al ciclón, el diámetro y la densidad de partícula.
- Disminuye cuando se incrementan el diámetro del ciclón y la temperatura.

Sin embargo, el conocimiento empírico sobre el mejor rendimiento de los ciclones evidencia que se obtienen mejores rendimientos cuando estos dispositivos trabajan a alta temperatura. Esto se debe a la sinergia producida por la posibilidad de incrementar la velocidad de entrada cuando se trabaja a altas temperaturas, pues los cambios en las propiedades del fluido condicionan el fenómeno de resuspensión [7].

La descripción precedente evidencia la insuficiencia del análisis univariado para el estudio de las óptimas condiciones de diseño de un separador ciclónico. Este hecho plantea la necesidad de utilizar una metodología que considere simultáneamente el efecto conjunto de todas las variables. En consecuencia, se enfoca el problema a través del Método de Superficie de Respuesta. El amplio rango de variación de cada una de las variables hace que no sea posible establecer una única superficie. En función de ello, se establecieron escenarios parciales para buscar la eficiencia óptima, estableciendo rangos lógicos de cada variable.

A continuación, se presenta uno de los escenarios estudiados:

Se toma un material con una densidad de partícula de 50 a 300 kg/m³ (como por ejemplo, aserrín de maderas livianas (madera balsa, bacú, seibo, aliso, soroche, ambay, samohú, polvillo de arroz, etc.) y se considera el siguiente escenario de trabajo: propiedades presentadas en Tabla 1 y modelo de vórtices descripto por la ecuación 7.

Tabla 1. Rangos de las variables del proceso.

Variables	$D_P \times 10^5$ (m)	D_c (m)	□$_p$ (kg/m³)	T (ºC)
Rangos	1 – 5	0.3 – 0.5	50 – 300	1 – 20

$$\eta_i = 1 - \exp\left(\frac{-537.15 \;\; g \;\; D_C^{-0.799} \; \rho_p \; D_p^2 \left(\rho_p - \left(-0.254 \;\; \ln T \; + \; 2.0508 \right) \right)}{\left(-0.254 \;\; \ln T \; + \; 2.0508 \right)^2} \right) \qquad \textbf{(7)}$$

3.1 Análisis de varianza para la eficiencia de separación

La Tabla 2 presenta el análisis de la varianza del efecto de los factores D_P, D_C □$_P$ y T (y sus interacciones) sobre la eficiencia de separación (η).

Tabla 2. Análisis de la varianza (ANOVA).

Variables	Suma de cuadrados	GL	Cuadrado medio	F de Fisher	p-valor
D_P	0.86756	1	□□□□□□ □	597.16	0.0000*
D_C	0.008854	1	□□□□□□ □□	18.44	0.0010*
ρ_P	0.320769	1	□□□□□□ □□	667.99	0.0000*
T	0.036112	1	□□□□□□ □□	75.20	0.0000*
$D_P D_P$	0.003058	1	□□□□□□ □□	6.37	0.0267*
$D_P D_C$	0.002679	1	□□□□□□ □□	5.58	0.0359*
$D_P \rho_P$	0.093574	1	□□□□□□ □□	194.87	0.0000*
D_P T	0.010292	1	□□□□□□ □□	21.43	0.0006*
$D_C D_C$	0.000136	1	□□□□□□ □□	0.28	0.6043#
$D_C \rho_P$	0.002981	1	□□□□□□ □□	6.21	0.0283*
D_C T	0.000309	1	□□□□□□ □□	0.64	0.4382#
$\rho_P \rho_P$	0.004639	1	□□□□□□ □□	9.66	0.0090*
ρ_P T	0.011479	1	□□□□□□ □□	23.90	0.0004*
T T	0.002412	1	□□□□□□ □□	5.02	0.0447*
Error Total	0.005762	12	□□□□□□ □□		
Total	0.793087	26			

*Efecto significativo; #Efecto no significativo (α=0.05).

El modelo resultante de este análisis queda determinado por la ecuación 8 y describe con alta precisión (R^2= 99.27%) el proceso en función de las variables consideradas (y de sus interacciones).

$$\eta_i = 0.1440 + 0.1546 D_P - 0.0272 D_C + 0.1635 \rho_P + 0.0548575 T + \\ + 0.0239452 D_P^2 - 0.0258815 D_P D_C + 0.152949 D_P \rho_P + 0.0507237 D_P T + \\ + 0.0273015 D_C \rho_P + 0.0294941 \rho_P^2 + 0.0535672 \rho_P T^2 - 0.0212661 T^2 \quad \textbf{(8)}$$

El Diagrama de Pareto que se muestra en la Fig. 2 evidencia el peso relativo del efecto de los factores significativos y no significativos (y de sus interacciones) sobre la variable de respuesta. Por otro lado, la Fig. 3 permite verificar la presencia de interacciones entre los efectos de los factores individuales y combinados de a pares.

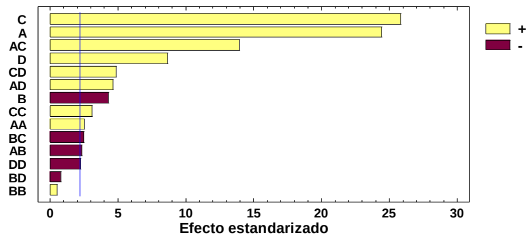


Fig. 2. Diagrama de Pareto del efecto estandarizado de los factores (y sus interacciones) sobre la variable de respuesta eficiencia (η). (Notación de los factores: A: D_p; B: D_c; C: r_p; D: T).

(a) **(b)**

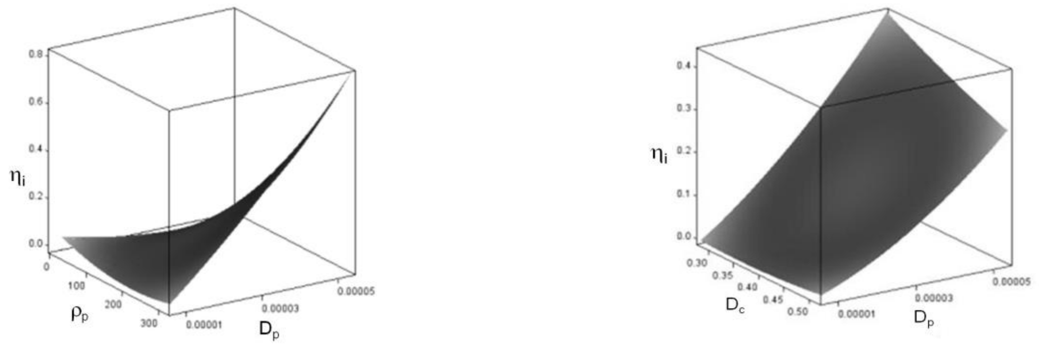
Fig. 3. Gráficas de los efectos principales de los factores (a) y de sus interacciones (b) sobre la variable de respuesta (Notación de los factores: A: D_p; B: D_c; C: r_p; D: T).

3.2 Modelamiento y optimización mediante RSM

Teniendo en cuenta el modelo estadístico que representa el proceso, es decir la eficiencia como una función de los factores y de sus interacciones, se llevó a cabo un análisis de superficie de respuesta para optimizar la respuesta. La Fig. 4a-f muestra las superficies representativas del modelo de 4 factores, considerando fijos 2 de ellos por vez. Como resultado de la optimización realizada fijando como función objetivo maximizar la eficiencia, se obtuvieron los valores óptimos para los factores que se presentan en la Tabla 3.

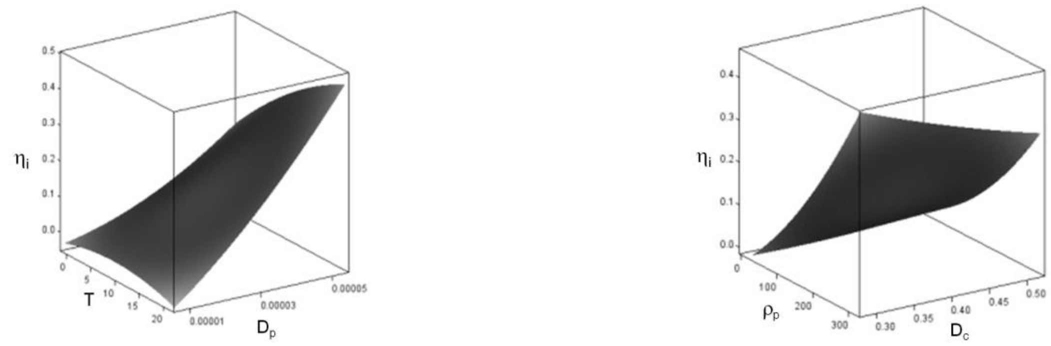
Tabla 3. Combinación de niveles de los factores que maximiza la eficiencia del ciclón.

Factor	Valores que maximizan la eficiencia (η)	
	Codificados	No codificados
D_P	0.982025	4.964×10^{-5} m
D_C	-0.984148	0.3015 m
ρ_P	0.999994	299.99 kg/m³
T	1.0	20 ºC



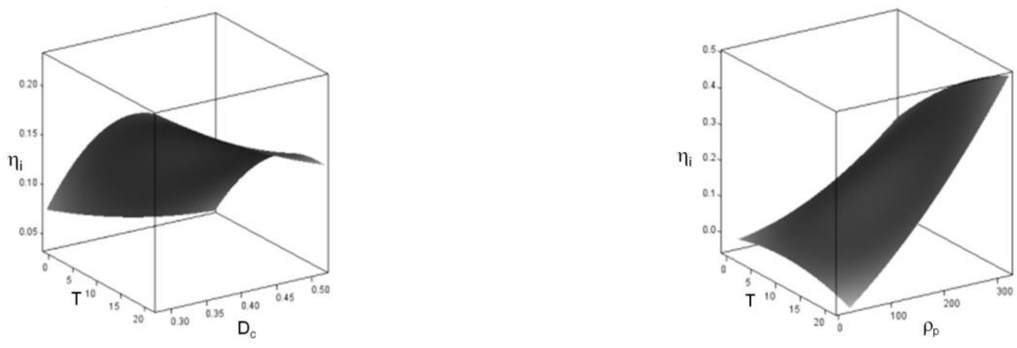
(a) (b)

Eficiencia fraccional en función de: a) D_p y $\square_p$, b) D_p y D_c



(c) (d)

Eficiencia fraccional en función de: c) T y D_p , d) $\square_p$ y D_c



(e) (f)

Eficiencia fraccional en función de: e) T y D_c , f) T y $\square_p$

Fig. 4. Superficies de respuesta obtenidas para la eficiencia del proceso en función de los parámetros del proceso.

El máximo valor de ηi que resultó de esta combinación fue 0.8913. La Tabla 4 muestra comparativamente los valores óptimos de la eficiencia calculados por el modelo conceptual de vórtices (ecuación 7) y por el modelo estadístico de superficie de respuesta completo (considerando todos los factores) y reducido (considerando sólo los factores significativos).

Tabla 4. Valores óptimos de eficiencia calculados con los modelos de número de vórtices y los modelos estadísticos.

Eficiencia máxima		
Modelo conceptual de vórtices	Modelo estadístico completo	Modelo estadístico reducido
0.8384	0.8913	0.8777

4 Conclusiones

El análisis univariado mostró que:

- La eficiencia fraccional de separación aumenta cuando lo hacen la velocidad de entrada al ciclón, el diámetro y la densidad de partícula y la temperatura.
- La eficiencia fraccional decrece con el incremento del diámetro del ciclón.
- No es posible interpretar la sinergia entre las variables.

El método de superficie de respuesta permitió:

- Observar el mismo comportamiento de la eficiencia de separación con cada factor.
- Detectar interacciones entre los factores que conducen a una visión de la sinergia entre variables.
- Estimar los valores de las variables que conducen a la obtención de la máxima eficiencia en cada rango.

Al modificar el rango de valores de cada variable, cambia la importancia relativa de las demás y sus interacciones. Estos cambios no son sistemáticos debido a que la sinergia entre las variables tampoco lo es. En consecuencia, no fue posible encontrar un único modelo de eficiencia de separación para obtener un óptimo en amplios rangos de todas las variables. Sin embargo, fue posible establecer distintas combinaciones que reproducen situaciones reales para el diseño de un ciclón.

Cabe destacar que la metodología aplicada en este trabajo pertenece al Programa del Curso de Doctorado en Ingeniería FIO-UNICEN que se dicta actualmente, como parte del contenido Diseños de Experimentos.

Como aplicaciones futuras se propone: extender la estrategia utilizada en este trabajo al diseño de otro tipo de ciclón y emplear otros modelos físico-matemáticos. Asimismo, esta metodología podría extenderse al diseño de otro tipo de ciclón empleando otros modelos físico -matemáticos como así también aplicarse al estudio de otras variables, tales como la caída de presión que ocurre en el interior del dispositivo o el tamaño de corte de partículas.

Referencias

1. Hoffmann, A.C.; Stein,L.E.: *Gas Cyclones and Swirl Tubes*. Second Edition. Springer Verlag, Berlín (2002)
2. Astudillo P., L.C.: Diseño de un sistema colector de polvo para una planta seleccionadora de semillas. *Tesis* (Ing Civ Agr). Universidad de Concepción, Facultad de Ingeniería Agrícola, Chillán, Chile. 94 p. 26528 Biblioteca Central del Instituto de Investigaciones Agropecuarias (INIA), Chile, A859 (2000)
3. Leith, D.; Licht, W.: *Collection efficiency of cyclone type particle collectors, a new theoretical approach*. A.I.Ch.E. Syposium Series: Air-1971 (1972)
4. Dirgo, J.; Leith, D.: Performance of theoretically optimized cyclones. *Filtration and Separation*. Vol. 22, pp. 119-125 (1985)
5. Kalen, B.; Zenz, F.A.: Theoretical Empirical Approach to Saltation Velocity in Cyclone Design. *AIChE Symposium*. Vol. 70, pp. 388-396 (1974)
6. Montgomery Douglas, C.: *Diseño y Análisis de Experimentos*. Segunda Edición. Editorial Limusa, México, DF. (2004)
7. Elsayed K.; Lacor, C.: Robust parameter design optimization using Kriging, RBF and RBFNN with gradient-based and evolutionary optimization techniques *Applied Mathematics and Computation*. Elsevier Vol. 236, pp. 325–344 (2014)

EMCI
Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Una propuesta de actividades para el curso de Álgebra Lineal en carreras de Ingeniería sobre Geometría Fractal basada en el diseño de antenas multibanda

Victoria Artigue[1], María de los Ángeles Fanaro[2], Eduardo Lacués[3]

[1] Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Ingeniería y Tecnología, Universidad Católica del Uruguay
8 de Octubre 2738
maria.artigue@ucu.edu.uy,

[2] Núcleo de Estudios Educacionales y Sociales (NEES), Facultad de Ciencias Exactas (UNICEN) y Consejo Nacional de Investigaciones cientificas y técnicas (CONICET)
Campus Universitario. Arroyo seco s/n
mfanaro@exa.unicen.edu.ar
[3]elacues@gmail.com

Resumen. La importancia de la enseñanza de la Geometría Fractal es creciente, tanto en las investigaciones del ámbito de la Educación Matemática como en las recomendaciones curriculares de muchos países de Latinoamérica (Argentina, Brasil, Chile, Uruguay). Sin embargo, las investigaciones han documentado que los profesores no cuentan con suficiente formación y la investigación acerca de su enseñanza, tanto a nivel medio como superior, aún presenta un desarrollo incipiente. En este trabajo presentamos una propuesta de enseñanza que permitiría a los estudiantes que cursan la materia Álgebra Lineal, resignificar los conceptos de la Geometría Euclideana representados por conceptos propios del Álgebra Lineal como transformaciones afines representadas matricialmente, en el campo de la geometría fractal. Eso resulta especialmente útil para los estudiantes de las carreras de Ingeniería, dadas sus aplicaciones en la construcción de antenas para las telecomunicaciones.

Palabras Clave: Fractales, Álgebra Lineal, Antenas multibanda, autosemejanza.

1 Introducción

Las primeras ideas acerca de la Geometría Fractal (GF) se desarrollaron hace poco menos de medio siglo, por lo que es un ámbito de la Matemática relativamente nuevo. Diversos autores reconocen su importancia para describir y explicar fenómenos naturales que la Geometría Euclidiana (GE) no puede abordar ([1], [2]).

El interés didáctico en la GF es aún más reciente y se está constituyendo como una problemática relevante, ya que se trata de una geometría claramente distinta de la GE, y existe un interés creciente en la comunidad de investigadores por la enseñanza y el aprendizaje de la GF.

Sin embargo, aún no ha sido ampliamente abordada en la Educación Matemática y en los currículos ([2], [3], [4], [5]). Adicionalmente, pocas veces integra los contenidos de los planes de formación docente, por lo que los profesores pueden no tener conocimiento de esta temática, su epistemología, sus fundamentos matemáticos ([2]). Esto es, desconocen las transformaciones necesarias al saber matemático (propio de los matemáticos) para que sea enseñable, que tenga sentido para el alumno. Este proceso es señalado con la expresión transposición didáctica ([6]).

Entre las posibles causas de esta escasa atención se encuentra el hecho de que la GF no está explícita como contenido en los programas de las asignaturas; en algunos países como China y Estados Unidos figura como tema opcional, pese a argumentos a favor de su inclusión ([7]). En contraste, tanto en Argentina como en Uruguay los currículos de secundaria abordan el tema.

En el caso de Argentina, el diseño curricular para la escuela secundaria prescribe la enseñanza de los fractales en sexto año:

> *La noción de fractal posee modelos matemáticos donde los alumnos verán contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero aplicado con ciertas particularidades –como geometría, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales y noción de límite de sucesiones–. Los fractales también modelizan objetos que exhiben una estructura a varios niveles de escala y se utilizan en la gráfica computarizada, que en ciertos casos describen formas de la naturaleza: Helge Koch mostró una curva con perímetro infinito, que encierra una región del plano de área finita, representada por una figura con forma de copo de nieve* ([8]).

En Uruguay, también es en sexto año de secundaria (tercer año de bachillerato) que está indicado la noción de fractal como contenido curricular, explícitamente en Programas 2006 Reformulación 2010, aunque solamente es para la opción de la modalidad orientada de "Matemática y diseño":

> *Se construirán fractales conocidos. Por ejemplo: Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert, Curva de Koch, Triángulo y alfombra de Sierpinski. Se vincularán a cálculos de longitudes, áreas y coordenadas de puntos. Se crearán nuevos fractales a partir de los conocidos. Se podrán construir fractales a partir de materiales concretos, por ejemplo, poliminós. Se podrán construir fractales en la Sala de Informática"* ([9]).

Estos antecedentes motivan a aprovechar los cursos de primer año de carreras de ingeniería para la enseñanza de la GF y sus aplicaciones, creando una oportunidad para motivar a los estudiantes a retomar algunos contenidos matemáticos vistos anteriormente en la escuela secundaria (límites, sucesiones, series, transformaciones de semejanza, funciones exponenciales y logarítmicas, recursividad) ampliándolos y revisándolos en términos tanto estrictamente matemáticos como en su relación con problemas de Ingeniería.

En este trabajo se presenta el diseño de actividades para un primer curso de Álgebra Lineal en las que, a partir de un problema de construcción de antenas, se abordan algunas características de los fractales (como la autosemejanza) y las vincula con entidades matemáticas (como las transformaciones lineales).

En la sección que sigue se presentan algunas de las propiedades de los fractales que resultan relevantes para el desarrollo de esta intervención. A continuación, se discuten los conceptos matemáticos cuya enseñanza se pretende propiciar. Luego se presenta la planificación de la actividad. Se cierra este trabajo con comentarios y sugerencias.

2 Fractales y autosemejanza: hacia una noción matemática para superar lo intuitivo

En la definición de fractal aparece la necesidad de abordar dos conceptos: la dimensión fractal y la autosemejanza.

En relación con el primero, se han formulado al menos diez definiciones matemáticas: topológica, de Hausdorff, fractal, de conteo de cajas, de capacidad, de información, euclidiana. Aunque relacionadas entre sí, algunas tienen sentido solo en ciertas situaciones, no siempre coinciden, algunas tienen mejor aplicación ([9]). Por este motivo, sumado a que cualquiera de ellas implica un importante desarrollo matemático que excede el objetivo de este trabajo, en lo que sigue el concepto de autosemejanza estará en el foco.

La autosemejanza parece ser una noción evidente y solo necesitar la presentación de ejemplos sencillos donde la Matemática está ausente. Sin embargo, su importancia es esencial para dar significado a los fractales, ya que es una propiedad subyacente en todos ellos. Un ejemplo frecuentemente utilizado es la cabeza de una coliflor: contiene partes que cuando se quitan y se comparan con el conjunto son muy parecidos, solo que más pequeñas ([9]). Otro, bastante intuitivo, de autosemejanza lo provee una varilla graduada de un metro, que tiene marcados los decímetros, los centímetros y los milímetros: un decímetro, junto con sus marcas, parecen un metro con sus respectivas marcas, pero reducido en un factor de 10; el segmento de recta resulta ser autosemejante aunque no es un fractal. Por lo tanto, la autosemejanza no es el único elemento para considerar que se trate de un fractal, aunque usualmente los fractales sí cumplen con esta propiedad.

Esta idea intuitiva y básica de autosemejanza es cuestionable, porque no se presenta de la misma manera en todos los fractales. Al intentar encontrar partes que sean pequeñas réplicas del todo, con cualquier grado de aumento de escala, se encuentran resultados distintos, como se muestra en la Figura 1:

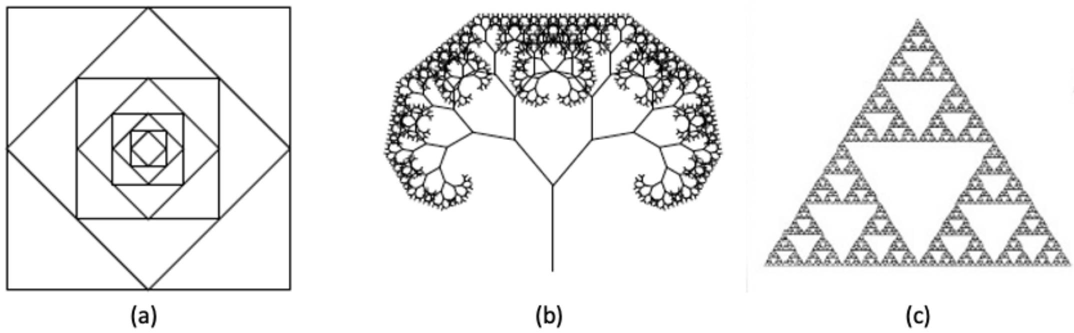


Fig. 1. Se presentan tres figuras, para ilustrar distintos tipos de autosemejanza. Fuente: (a) y (b) de Sabogal y Arenas (2011), (c) de Peitgen (2004).

La parte c) de la Figura 1 da la oportunidad de presentar el fractal conocido como triángulo de Sierpinski (TS). Partiendo de un triángulo cualquiera se construyen cuatro triángulos: uno tiene como vértices los puntos medios de los lados del original; cada uno de los otros tres tiene como vértice uno de los vértices del original y los puntos medios de los lados del original que concurren en él. Estos cuatro triángulos son iguales y, además, semejantes al original.

En el primer paso del proceso iterativo que permite construir este fractal, se construye la figura formada por los tres últimos descritos; otra manera de ver este proceso es considerar que se quitó del triángulo original el formado por los puntos medios de sus lados.

Este proceso se repite con cada uno de los tres triángulos restantes. El resultado del segundo paso es la unión de las figuras obtenidas a partir de cada uno de ellos.

A continuación, se repite el mismo proceso con cada uno de los triángulos que componen la figura obtenida. La figura obtenida como "límite" de este proceso iterativo es el triángulo de Sierpinski.

Otro fractal que se puede construir con un proceso similar es la curva de Koch. Un segmento es dividido en tres partes iguales. Tomando como base el subsegmento que no contiene a ninguno de los extremos del original se construye un triángulo equilátero. El resultado del primer paso es la unión de los dos lados de este triángulo que no están sobre el segmento original y los dos subsegmentos que contienen a alguno de los extremos del segmento original. A continuación, aplicamos este mismo procedimiento a cada uno de los segmentos que conforman el resultado del primer paso. La curva de Koch es la figura obtenida como "límite" de este proceso.

Es necesario comentar que en cada uno de los ejemplos anteriores está implícito un proceso de "límite" que no se ha formalizado. Solo se ha dado una descripción de la construcción iterativa por medio de la cual se construyen estos conjuntos. La formalización de este concepto de convergencia requiere desarrollos fuera del alcance de los contenidos que se tratan en general en las carreras de Ingeniería.

Estos ejemplos permiten dar la noción de autosemejanza con la que se trabajará en esta propuesta: "*Una figura es autosemejante estricta si es obtenida por un proceso iterativo donde el resultado de cada paso puede descomponerse en partes, cada una de las cuales es semejante al resultado de la primera iteración."* [11]

Para que la autosemejanza sea presentada de manera más formal desde el punto de vista matemático, se requiere hacer referencia al concepto de semejanza propio de la geometría euclidiana, lo que se desarrolla en la sección siguiente.

3 Transformaciones afines y construcción de fractales.

Una transformación de semejanza en el plano es definida como una función del plano en el plano que se obtiene mediante la composición de una homotecia con una isometría (rotación, traslación o simetría).

Para el estudio de los fractales, dichas transformaciones deben ser contractivas, es decir con razón de homotecia entre cero y uno, por lo que al aplicarla reduce la distancia entre dos puntos cualesquiera de la figura imagen.

Las transformaciones afines se definen como las funciones que tienen a $\mathbf{R}^n$ como dominio y codominio definidas por la expresión $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}$, donde $\mathbf{G}$ es una transformación lineal y $\mathbf{c}$ un vector cualquier de $\mathbf{R}^n$. Estas transformaciones pueden representar semejanzas, dependiendo de la naturaleza de $\mathbf{G}$.

En los currículos de carreras relativas a la Ingeniería el estudio de las transformaciones lineales se incluye en el primer curso de Álgebra Lineal; en particular, se presentan como ejemplos las transformaciones que representan transformaciones geométricas relevantes tanto en el plano como en el espacio: rotaciones, simetrías, traslaciones, homotecias. Además, un punto central del currículo es la posibilidad de representar las transformaciones lineales por medio de una matriz y el vínculo de las operaciones matriciales (suma, producto por un escalar, producto) con las operaciones con transformaciones lineales (suma, producto por un escalar, composición, respectivamente).

Un problema asociado con la enseñanza de estos temas es que suelen resultar lejanos a los estudiantes, dado su carácter abstracto y porque se desaprovechan oportunidades para presentarlas tanto en un registro gráfico (interpretando geométricamente el efecto de la transformación) como algebraico, lo que sería conveniente desde el punto de vista didáctico ([12]). La asociación entre transformaciones afines y construcción de fractales, que se describe a continuación, proporciona un ejemplo de aplicación que puede motivar a los estudiantes y, a la vez, abre la posibilidad de atender estas preocupaciones didácticas.

Los fractales que se presentaron como ejemplos pueden ser construidos usando un conjunto de transformaciones afines, lo que se denomina Sistema de Funciones Iteradas (SFI) ([13]). El proceso iterativo por el que se construye el fractal comienza con la determinación de las imágenes de una figura de partida, que se llama semilla, por medio de cada una de las transformaciones del conjunto. Cada una de estas imágenes es semejante a la figura original. La unión de estas imágenes conforma el resultado del primer paso iterativo.

El proceso iterativo continúa actuando de la misma manera sobre cada una de las imágenes obtenidas en el paso anterior. El resultado del segundo paso es la unión de los conjuntos conseguidos a partir de cada una de las imágenes.

A continuación, se presentan los procesos descritos para construir los fractales mencionados antes.

Las transformaciones de semejanza, descritas mediante transformaciones lineales afines para la curva de Koch, designadas por f_1, f_2, f_3 y f_4 están dadas, respectivamente, por las siguientes fórmulas:

$$f_1\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\binom{x}{y} \qquad \textbf{(1)}$$

$$f_2\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{3}) & -sin(\frac{\pi}{3}) \\ sin(\frac{\pi}{3}) & cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

$$f_3\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} cos(-\frac{\pi}{3}) & -sin(-\frac{\pi}{3}) \\ sin(-\frac{\pi}{3}) & cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

$$f_4\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

Geométricamente, estas transformaciones se pueden interpretar como sigue:

- f_1 representa una homotecia de razón $^1/_3$ y centro $\binom{0}{0}$,

- f_2 es la composición de tres transformaciones: la primera es una homotecia de razón $^1/_3$, la segunda es una rotación de ángulo $^\pi/_3$ y la tercera es una traslación cuyo vector es $\binom{\frac{1}{3}}{0}$,

- f_3 también es la composición de tres transformaciones: la primera es una homotecia de razón $^1/_3$, la segunda es una rotación de ángulo -$^\pi/_3$ seguida de una traslación cuyo vector es $\binom{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}}$,

- f_4 representa una homotecia de razón $^1/_3$ centro $\binom{0}{0}$ seguida de una traslación de vector $\binom{\frac{2}{3}}{0}$.

Si se aplica f_1 al vector $\binom{1}{0}$ (que es la semilla de este proceso iterativo) se obtiene el vector $f_1(K) = \binom{\frac{1}{3}}{0}$. En forma análoga, aplicando f_2 a la semilla se obtiene el segmento de extremos $\binom{\frac{1}{3}}{0}$ y $\binom{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, a partir de f_3 se consigue el de extremos $\binom{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ y $\binom{\frac{2}{3}}{0}$ y con f_4 se halla en segmento de extremos $\binom{\frac{2}{3}}{0}$ y $\binom{1}{0}$, como se muestra en la figura 2.

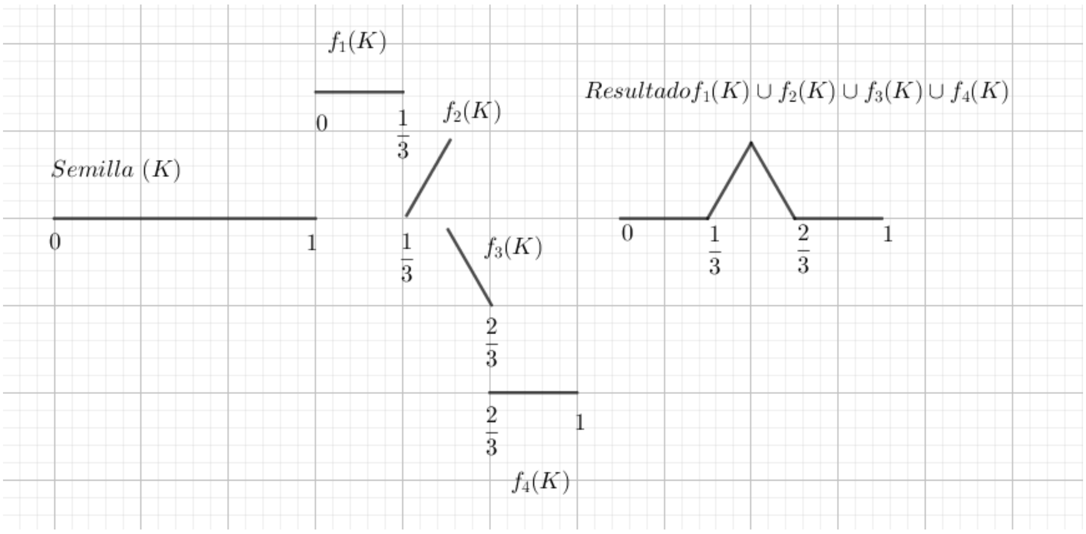


Fig. 2. Las imágenes representan las cuatro transformaciones que se aplican a la figura inicial K (semilla). La unión de las imágenes mediante las cuatro transformaciones f_1, f_2, f_3 y f_4 da como resultado la primera iteración para el TS con semilla un triángulo rectángulo.

Si la semilla para el TS es el triángulo rectángulo con vértices $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$ y $\binom{0}{1}$; con él se pueden considerar tres transformaciones afines f_1, f_2 y f_3 , donde f_1 es una homotecia de razón $\frac{1}{2}$ y centro $\binom{0}{0}$, f_2 es f_1 seguida de una traslación de vector $\binom{0}{\frac{1}{2}}$ y f_3 es f_1, seguida de una traslación de vector $\binom{\frac{1}{2}}{0}$. Por lo tanto f_1, f_2 y f_3 forman un SFI para el TS. El resultado de la primera iteración por medio del SFI queda definido por la unión de las imágenes de la semilla, en cada una de las funciones aplicadas ([13]; [14]) como se muestra en la Figura 2 (adaptado de [13]). Las representaciones de cada una de estas aplicaciones se dan a continuación.

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

Los resultados de aplicar f_1, f_2 y f_3 a la semilla son, respectivamente, los triángulos de vértices: $\binom{0}{0}$, $\binom{\frac{1}{2}}{0}$ y $\binom{0}{\frac{1}{2}}$; $\binom{0}{\frac{1}{2}}$, $\binom{0}{1}$ y $\binom{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$; $\binom{0}{0}$, $\binom{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ y $\binom{1}{0}$, como se muestra en la figura 3.

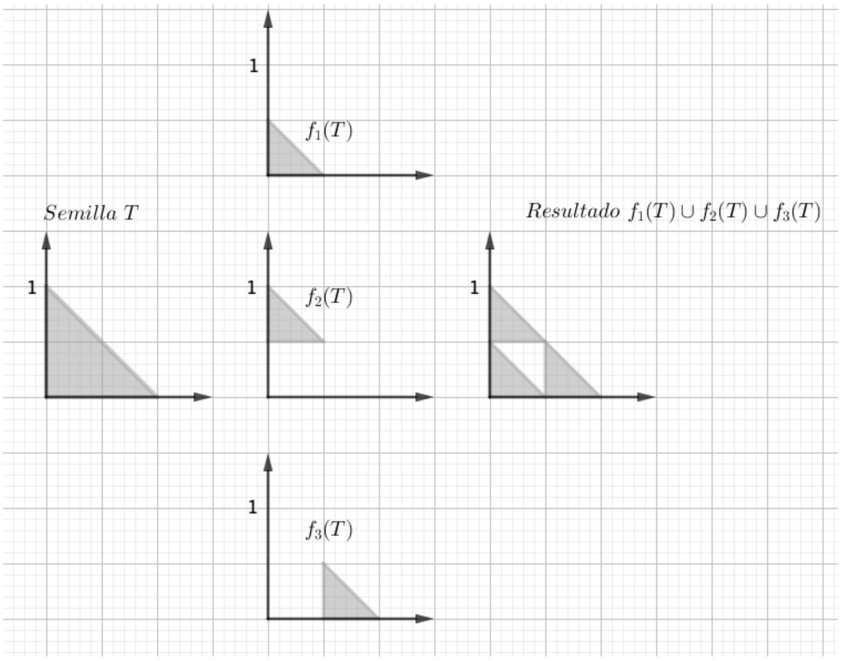


Fig. 3. Las imágenes representan las tres transformaciones que se aplican a la figura inicial T (semilla). La unión de las imágenes mediante las tres transformaciones f_1, f_2 y f_3 da como resultado la primera iteración para el TS con semilla un triángulo rectángulo.

Con independencia de la figura original, el comportamiento límite del SFI garantiza que cada algoritmo fractal da lugar a una figura límite, y sólo una (Pérez Medina, 2007). Por lo tanto, cada conjunto formado por transformaciones de semejanza define una imagen fractal denominada atractor del SFI, que siempre existe y es único. ([15]). Este resultado es el que da rigor a la noción intuitiva de límite que se manejó en los ejemplos (TS, CK). Además, da la oportunidad de formalizar la propiedad de autosemejanza ([16]).

4 Antenas prefractales multibanda

A partir de la consideración anterior acerca de los procesos infinitos que permiten definir a los fractales en el límite de éstos, las investigaciones científicas que aplican fractales frecuentemente usan el término pre-fractal ([17]). Esta distinción es válida para reconocer que cuando los fractales se representan gráficamente, se está considerando una etapa precisa y un número finito de iteraciones.

Como ejemplo de objetos fabricados cuyo diseño se basa en GF se encuentran las antenas que, gracias a la propiedad de autosemejanza, tienen la ventaja de poder ser multibanda, es decir, trabajar en varias frecuencias. Esto se debe principalmente a que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de onda, y por lo tanto, si la antena semilla trabaja en una determinada frecuencia, otras partes de la antena trabajarán en frecuencias proporcionales a ella.

Otra ventaja es la posibilidad de fabricarlas muy pequeñas, lo cual condice con las diferentes áreas de la ingeniería, y en especial en la electrónica, cuyo foco se ha volcado hacia la miniaturización, y las antenas no han sido la excepción. Hay un límite de funcionamiento en relación a qué tan pequeña una antena puede ser, y se está dedicando mucho esfuerzo en estudiar la posibilidad de fabricarlas realmente pequeñas ([18]).

En este sentido, el avance de las comunicaciones inalámbricas ha llevado a incluir múltiples servicios en espacios pequeños como teléfonos celulares y computadoras portátiles, para lo cual es necesario que las antenas tengan un gran rango de frecuencias dentro del cual la antena opere satisfactoriamente, lo que se conoce como ancho de banda ([19]). Por ejemplo, deben ser capaces al menos de trabajar en las bandas de 900 MHz y 1800 MHz para el Sistema Global de Comunicaciones Móviles o GSM en sus siglas en inglés. La banda de frecuencia en la que opera el GSM es diferente según el territorio, así en Europa es de 900 MHz a 1800 MHz y en Estados Unidos es hasta 1900 MHz.

Por lo tanto, para poder fabricar una antena que sea independiente de la frecuencia, debe tener una estructura que incluya diferentes tamaños para que pueda operar en diferentes frecuencias ([18]). Y, para que el ancho de banda sea mayor, la antena debe utilizar de manera eficaz el espacio que ocupa. Parece intuitivo pensar en que las antenas diseñadas con GF, puedan contemplar estas características: ser multibanda (debido a la propiedad de autosemejanza y muy pequeñas (longitudes infinitas en áreas finitas).

5 La propuesta de enseñanza

Las actividades están diseñadas y organizadas con la herramienta Libro GeoGebra (para más información sobre este recurso se puede ingresar a https://www.geogebra.org), sobre la cual pueden incrustarse imágenes, videos, applets interactivos, cuestionarios, etc., organizando el material por capítulos como muestra la figura 4.

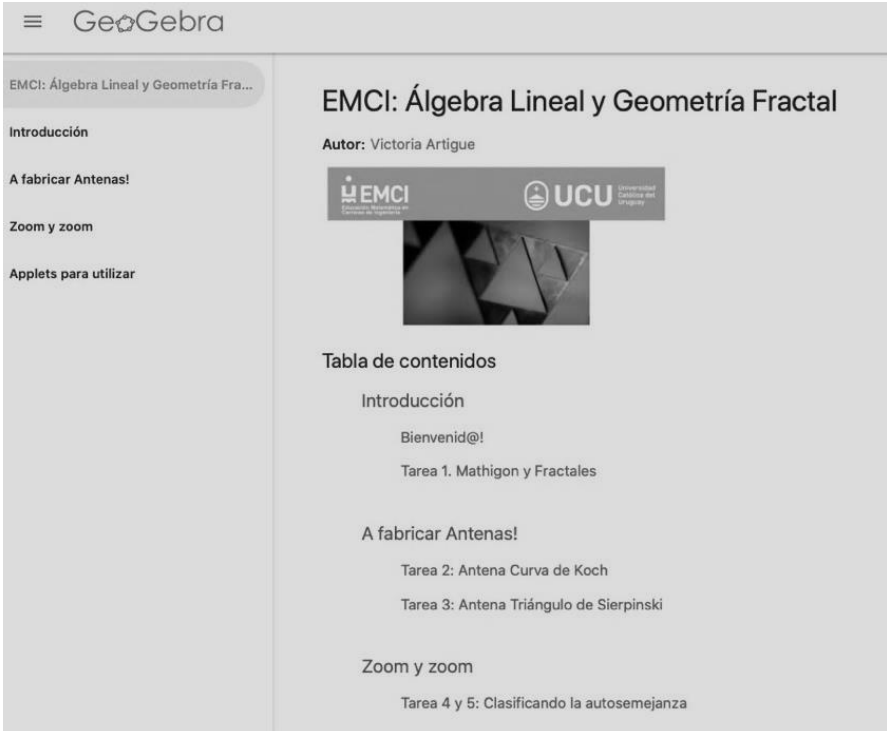


Fig. 4. Libro GeoGebra como entorno de aprendizaje para el estudiante.

La descripción de las actividades se detalla a continuación:

-Actividad 1: Mirar este Video (https://www.youtube.com/watch?v=50KUGdAvMGw) y responder la pregunta: ¿Cuáles son las ventajas de fabricar antenas cuyo diseño se basa en la Geometría Fractal?

-Actividad 2: Antena curva de Koch

Consigna: La empresa Fractenna (https://www.fractenna.com) está diseñando antenas que apunten a la miniaturización, esto es, fabricarlas lo más pequeñas posible y que aprovechen mejor el espacio. En este caso comenzaron con un una antena simple de cobre representada con el segmento de extremos A y B como se muestre en la figura 5. El deslizador permite cambiar de antena, generándose otras. ¿De qué manera describirías y explicarías cómo se obtienen las diferentes antenas? ¿Cuál es la longitud de cada una de ellas si la antena número 0 mide 12cm? ¿Cuáles serían las dimensiones mínimas de un material rectangular donde se puedan incrustar todas las antenas? ¿Y si el material fuera triangular? ¿Qué reflexiones te merecen los resultados anteriores? ¿Cuáles son las transformaciones afines que permiten obtener la antena número 1 a partir de la 0?

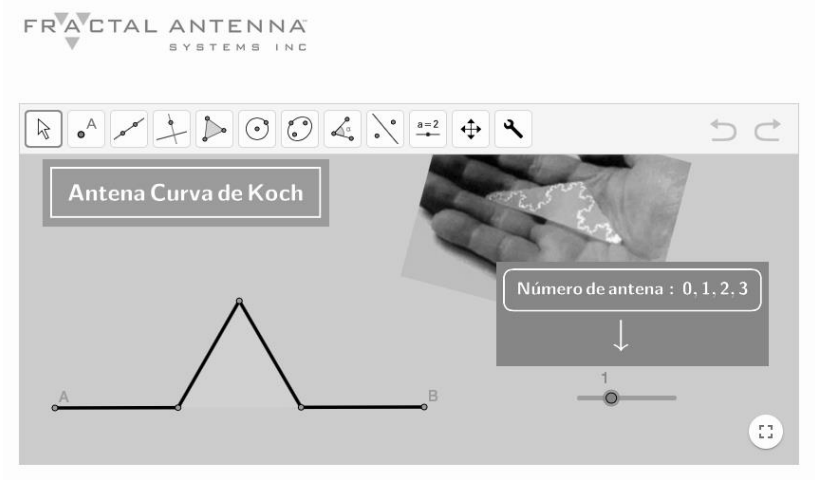


Fig. 5. Actividad sobre la antena prefractal basada en la CK.

-Actividad 3: Antena Triángulo de Sierpinski

Consigna: La empresa Fractus (https://www.fractus.com) quiere fabricar un tipo de antena cuya figura inicial sea un triángulo equilátero, como se muestra en la siguiente figura. Mediante el deslizador puedes ver las demás antenas que está pensando fabricar. ¿Puedes describir y explicar de qué manera se obtienen las diferentes antenas? ¿Cuál es el perímetro de cada antena, considerando que la antena número 0 es un triángulo equilátero de lado 1 unidad? ¿Y el área de cada una de ellas? ¿Qué reflexiones te merecen los resultados anteriores?¿Cuáles son las transformaciones afines que permiten obtener la antena número 1 a partir de la 0?

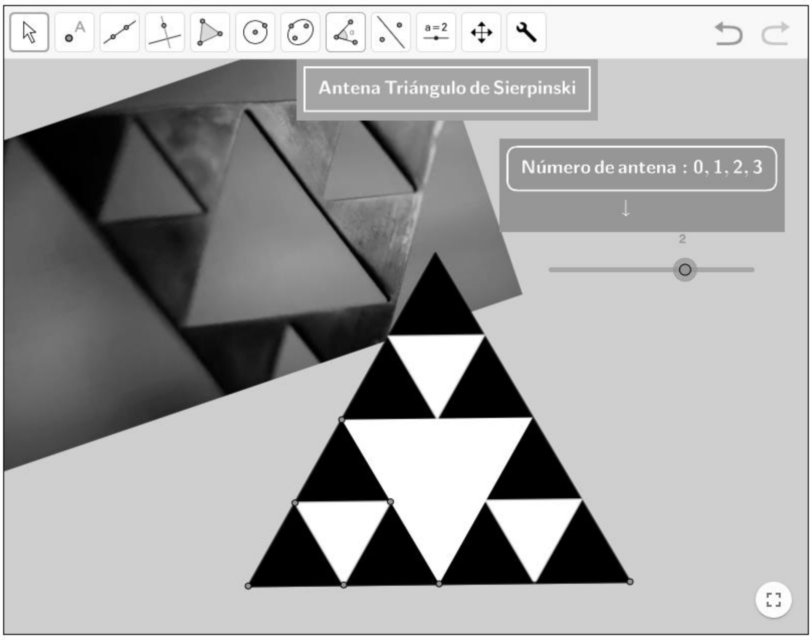


Fig. 6. Actividad sobre la antena prefractal basada en el TS.

-Actividad 4: Autosemejanza

Consigna: A continuación, te presentamos algunos Gifs en los cuales se representa la propiedad de autosemejanza que presentan algunos Fractales. ¿Encuentras diferencias o similitudes en cuanto a cómo se presenta dicha propiedad? Explica.

-Actividad 5: Como hemos visto, las antenas fractales tienen un diseño basado en algún fractal. Una de las propiedades que hemos analizado en ellos es la de autosemejanza y es la que permite que las antenas trabajen en distintas frecuencias. Esto se debe principalmente a que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de onda, y por lo tanto, si la antena semilla trabaja en una determinada frecuencia, otras partes de la antena trabajarán en frecuencias proporcionales a ella.

Considera las siguientes imágenes de antenas fractales. ¿Qué semilla y qué generador tienen los Fractales en los cuales se inspiraron para su diseño? ¿Qué tipo de autosemejanza tienen dichos fractales? ¿Qué nombres reciben dichos fractales? ¿En cuántas frecuencias diferentes operan dichas antenas? ¿Por qué?

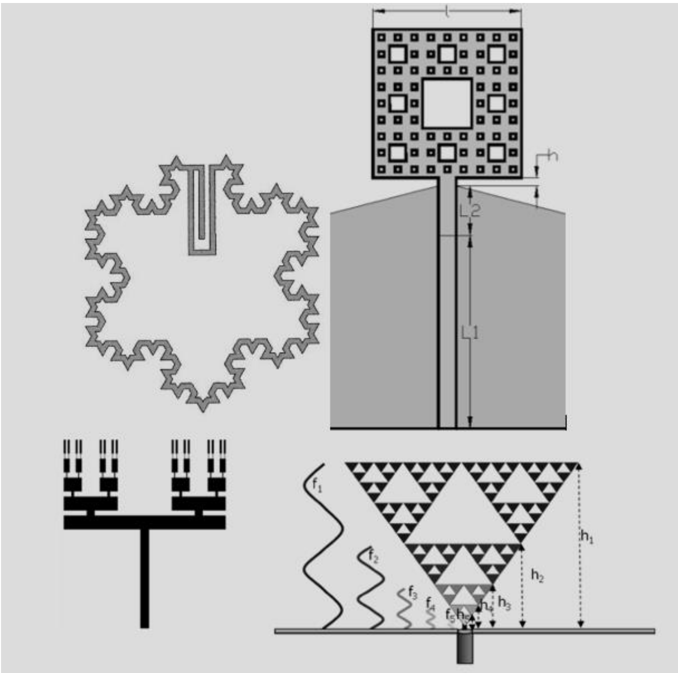


Fig. 7. Actividad acerca de la propiedad de autosemejanza de algunas fractales y su relación con la capacidad de una antena de ser multibanda.

6 Reflexiones finales y proyecciones de este trabajo

En este trabajo se presentó un conjunto de actividades especialmente diseñadas, como una propuesta para que los profesores puedan implementarla en sus clases de Algebra Lineal, dado que la geometría fractal tiene la potencialidad de permitir recuperar conceptos relativos a la geometría euclideana, representados mediante elementos y operaciones del álgebra matricial, que son conceptos propios de esta materia. También esta propuesta presenta la ventaja de dar sentido a los conceptos de la Geometría fractal y permitir también la aplicación de los conceptos estudiados al área de las telecomunicaciones, ámbito ligado a la ingeniería.

Prontamente se implementará esta propuesta en un curso de Algebra Lineal en la Universidad, y se analizará su funcionamiento didáctico. También, una versión adaptada de esta secuencia de actividades será propuesta a los profesores de la Escuela Secundaria, para que puedan hacerla propia e implementarla en sus cursos. Se espera de esta forma, contribuir a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Entre las posibles proyecciones de este trabajo se mencionan tres:

a) Se espera que de la observación del trabajo de los estudiantes en estas actividades se obtengan elementos relevantes para la planificación, implementación y evaluación de intervenciones didácticas orientadas a la enseñanza de la GF.

b) Interesa, desde el punto de vista de las competencias matemáticas, estudiar vínculos entre el reconocimiento de situaciones de autosemejanza con los de detección de patrones y generalización a partir de casos particulares.

c) Es relevante indagar acerca de relaciones entre la noción de procesos infinitos (como la construcción de un fractal) con los conceptos de límite que se estudian en Cálculo.

Referencias

1. Shriki, A.; Nutov, L.: Fractals in the Mathematics Classroom: The Case of Infinite Geometric Series. Learning and *Teaching Mathematics*, Vol. 20, pp. 38-42 (2016)
2. Chen, S.; Herron, S.; Ding, J.; Mohn, R.: Assessing United States and Chinese Secondary Mathematics Teacher´s Interest in Fractal Geometry. *Journal of Mathematics Education*, Vol. 11, No. 2, pp. 17-34 (2018), *https://doi.org/10.26711/007577152790025*. Accedido 02 de diciembre de 2020
3. Karakus, F.: Assesing Grade 8 Elementary School Mathematics Curriculum and Textbooks within de Scope of Fractal Geometry. *Elementary Education Online*. Vol. 10, No. 3, pp. 1081-1092 (2011)
4. Karakus, F.: A Cross-Age Study of Student´s Understanding of fractals. *Bolema*. Vol. 27, No. 47, pp. 829-846 (2013)
5. Karakus, F.; Baki, A.: Pre-Service Teacher´s Concept Images on Fractal Dimension. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 17, No. 2, pp. 1-12 (2016)
6. Chevallard, Y.: La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado. Editorial AIQUE. (1999)
7. Fusi, F.; Sgreccia, N.: ¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría. Épsilon, 105, 31-50. (2020)
8. Dirección General de Cultura y Educación De La Provincia De Buenos Aires: Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior, *http://servicios.abc.gov.ar/*. 2010. http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/sexto/materias%20comunes/matematica_6.pdf, Accedido el 01/12/20
9. Consejo de educación secundaria. Programa del curso de Matemática I para 3er año de bachillerato, opción Matemática y diseño, plan reformulación 2006, *https://www.ces.edu.uy/* 2006. de https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/6to%20matematica%20diseño/mat1matdise6.pdf Accedido el 01/02/21
10. Peitgen, H.; Jürgens, H.; Saupe, D.: *Chaos and Fractals. New Frontiers or Science*. Springer. (2004).
11. Artigue, V.; Fanaro, M.; Lacués, E. (2021): La Geometría Fractal en la escuela secundaria: ¿Qué reportan las investigaciones de los últimos 20 años? Pensamiento matemático. Aceptado para su publicación.
12. Duval, R.: Understanding the Mathematical Way of Thinking:-The Semiotic Registers of Representations. Springer. (2017)
13. Rubiano, G. *Iteración y fractales (con Mathematica)*. Vicerrectoría Académica, Colombia (2009).
14. Sabogal, S.; Arenas, G. :*Una introducción a la geometría fractal*. Universidad Industrial de Santander (2011).
15. Moreno-Marín, J.: Experiencia didáctica en Matemática: construir y estudiar fractales. *Suma*. pp 91-104. (2002).
16. Pérez Medina, C.: Transformaciones lineales afines y fractals. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. (2007).
17. Gianvittorio J.; Romeu, J.; Blanch, S.; Rahmat-Samii, Y.: Self-Similar Prefractal Frequency Selective Surfaces for Multiband and Dual-Polarized Applications. *IEE transactions on antennas and propagation*, Vol. 51, No 11, pp. 3088-3096 (2003).
18. Herrera, M.; Inclán, J.: Estudio y metodología de diseño de antenas utilizando geometría fractal (antenas fractales). Escuela de ingeniería (2004).
19. Sandoval, F.; Vire, S.: Diseño e implementación de antenas fractales para UHF. Proyecto fin de carrera. (2008)

Ecuaciones de Hamel - Boltzman

José Alberto Sánchez, Ernesto Farías de la Torre, Danel Abud

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez Sarsfield 1611 – CP 5000 – Córdoba - Argentina
joseasanchez53@yahoo.com.ar, fariasdelatorre@gmail.com, daniel.abud@yahoo.com

Resumen. En el presente trabajo mostramos las ventajas de las ecuaciones de Hamel Boltzman o ecuaciones de Lagrange en cuasi-coordenadas que permiten unificar las ecuaciones de Lagrange ordinarias, las ecuaciones de movimiento de sistemas no holónomos y las ecuaciones dinámicas de Euler para el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo. Asimismo se ha implementado un procedimiento tendiente a facilitar la obtención de esas ecuaciones y se sugiere la conveniencia de utilizar la computación simbólica a los fines de su automatización.

Palabras Clave: Ecuaciones de Hamel, Ecuaciones de Hamel-Boltzman, Ecuaciones de Lagrange en cuasi-coordenadas.

1 Introducción

Un sistema mecánico de n grados de libertad se describe en cada instante de tiempo t mediante el vector q = (q1,...,qn) de coordenadas generalizadas (coordenadas cartesianas, ángulos, longitud de arco de una curva, etc.). El vector $\dot{q}$ = ($\dot{q}$1,...,$\dot{q}$n) representa las velocidades generalizadas

Estas coordenadas q_k $(k = 1,2,\dots,n)$ se pueden considerar como coordenadas verdaderas en el sentido de que si las velocidades $\dot{q}_k$ son funciones conocidas del tiempo, una integración con respecto al tiempo produce las coordenadas correspondientes. Las ecuaciones de movimiento de Lagrange se pueden escribir en la forma matricial siguiente

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right] - \left[\frac{\partial T}{\partial q}\right] = [Q] \tag{1}$$

T: Energía cinética del sistema mecánico
$[Q]$: Vector de fuerzas generalizadas

2 Ecuaciones de Lagrange en cuasi-coordenadas o ecuaciones de Hamel-Boltzman

Es útil la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento que no se reduzca a emplear "coordenadas verdaderas", sino que también admita como variables a n combinaciones lineales independientes u_s $(s = 1,2,\dots,n)$ de las velocidades $\dot{q}_k$, donde a diferencia de las velocidades verdaderas $\dot{q}_k$, estas variables u_s no puedan ser integradas para obtener coordenadas verdaderas [1], [2],[3],[4],[5].

Las variables u_s, que se denominan cuasi-velocidades, pueden escribirse en la forma:

$$u_s = a_{1s}\dot{q}_1 + a_{2s}\dot{q}_2 + \cdots + a_{ns}\dot{q}_n = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}\dot{q}_r \qquad s = 1,2,\dots,n \tag{2}$$

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

donde los coeficientes a_{rs} son funciones conocidas de las coordenadas generalizadas q_k.

Si denominamos a u_s como $\dot{\pi}_s$ donde π_s es la cuasi-coordenada s, tendremos:

$$d\pi_s = \sum_{r=1}^{n} a_{rs} dq_r \qquad s = 1,2,\dots,n \qquad \textbf{(3)}$$

donde los coeficientes a_{rs} son los mismos de la ecuaciones (2). Excepto el caso en que $\partial\alpha_{js}/\partial q_k = \partial\alpha_{ks}/\partial q_j$, las ecuaciones (3) no pueden ser integradas para obtener las variables π_s. Nos interesa especialmente el caso en el que no se cumplen esas condiciones y las ecuaciones (3) no son integrables. En este caso las variables π_s se denominan cuasi-coordenadas. Observemos que las componentes de la velocidad angular de un cuerpo rígido que se mueve con un punto fijo ω_s son derivadas respecto del tiempo de cuasi-coordenadas.

Las ecuaciones (2) pueden escribirse en forma matricial:

$$[u] = A^t[\dot{q}] \qquad \textbf{(4)}$$

Suponiendo que la matriz A es inversible, podemos escribir:

$$[\dot{q}] = B[u], \qquad BA^t = I \qquad \textbf{(5)}$$

Esto nos permite expresar la energía cinética como función de las coordenadas q_k y de las variables u_k.

Denotamos esta forma de la energía cinética por $T^*(q,u)$ en lugar de la forma original $T(q,\dot{q})$.

A continuación reemplazaremos las velocidades generalizadas $\dot{q}_k$ por las cuasi-velocidades u_k en las ecuaciones de Lagrange. Utilizando la ecuación (2) escribimos los momentos conjugados en la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\frac{\partial T^*}{\partial u_i} \qquad k = 1,2,\dots n, \qquad \textbf{(6)}$$

o en forma matricial:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right] = A\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right], \qquad \textbf{(7)}$$

de donde se deduce que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right] = A\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right] + \dot{A}\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right] \qquad \textbf{(8)}$$

Debido a que los coeficientes a_{ij} sólo dependen de las coordenadas, cualquier elemento $\dot{a}_{ij}$ de la matriz cuadrada $\dot{A}$ tiene la forma:

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r}\dot{q}_r = [\dot{q}]^t\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial q}\right] = [u]^t B^t\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial q}\right], \qquad \textbf{(9)}$$

el cual es un escalar. Debe tenerse presente que el triple producto matricial anterior no implica suma sobre los índices de a_{ij}. En consecuencia, podemos escribir la matriz cuadrada correspondiente a la ecuación (9) en la forma

$$\dot{A} = [u]^t B^t\left[\frac{\partial A}{\partial q}\right] \qquad \textbf{(10)}$$

Continuando con el mismo criterio, escribimos

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial T^*}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial \dot{q}_k}$$
$$= \frac{\partial T^*}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial u_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k}\dot{q}_j = \frac{\partial T^*}{\partial q_k} + [\dot{q}]^t\left[\frac{\partial A}{\partial q_k}\right]\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right], \qquad \textbf{(11)}$$

que implica que se suma sobre los índices de a_{ij} pero no sobre el índice de ∂q_k. Esto permite escribir la matriz columna

$$\left[\frac{\partial T}{\partial q}\right] = \left[\frac{\partial T^*}{\partial q}\right] + [\dot{q}]^t \left[\frac{\partial A}{\partial q}\right]\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right], \tag{12}$$

que es equivalente a:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial q}\right] = \left[\frac{\partial T^*}{\partial q}\right] + [u]^t B^t \left[\frac{\partial A}{\partial q}\right]\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right], \tag{13}$$

Donde el triple producto matricial $[\mathrm{u}]^t \mathrm{B}^t \left[\frac{\partial A}{\partial q}\right]$ da una matriz cuadrada de n filas, una para cada índice de ∂q. Introduciendo las ecuaciones (8), (10) y (13) en la ecuación (1) y premultiplicando por B^t obtenemos las ecuaciones de Hamel-Boltzman:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right] + B^t[\gamma]\left[\frac{\partial T^*}{\partial u}\right] - B^t\left[\frac{\partial T^*}{\partial q}\right] = B^t[Q], \tag{14}$$

donde $[Q]$ es el vector columna de las fuerzas generalizadas.

La matriz de n x n $[\gamma]$ se escribe:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} [u_1 \dots u_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial q_n}\end{bmatrix} & \cdots & [u_1 \dots u_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_n}\end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [u_1 \dots u_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_n}\end{bmatrix} & \cdots & [u_1 \dots u_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_n}\end{bmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [u_1 \dots u_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_1}\end{bmatrix} \\ \vdots \\ [u_1 \dots u_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_n}\end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad 15)$$

Lo que también puede escribirse en la forma:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} [u]^t B^t \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial q_n} - \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_1} \end{bmatrix} & \cdots & [u]^t B^t \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_1} - \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_n} - \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_1} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [u]^t B^t \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_1} - \frac{\partial a_{11}}{\partial q_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_n} - \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_n} \end{bmatrix} & \cdots & [u]^t B^t \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_1} - \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_n} - \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \textbf{(16)}$$

O también:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} [u]^t B^t C_1^1 & \cdots & [u]^t B^t C_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [u]^t B^t C_1^1 & \cdots & [u]^t B^t C_n^n \end{bmatrix} = [[u]^t B^t C_1 \cdots [u]^t B^t C_n] \quad \textbf{(17)}$$

Con

$$B^t[\gamma] = [B^t C_1 B[u]^t \cdots B^t C_n B[u]^t] \quad \textbf{(18)}$$

3 Aplicaciones

3.1 Movimiento con un punto fijo – Ángulos de Euler

En el conocido caso del movimiento de un punto fijo se toman como coordenadas generalizadas los ángulos de precesión, nutación y rotación propia, $\emptyset$, θ y ψ respectivamente, denominados ángulos de Euler.

La relación entre las componentes de la velocidad angular de un cuerpo rígido referidas a un sistema de ejes móviles solidarios al cuerpo y las derivadas respecto del tiempo de los ángulos de Euler es:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\,\theta\; sen\,\psi & \cos\psi & 0 \\ sen\,\theta \cos\psi & -sen\,\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \textbf{(19)}$$

Téngase presente que $[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$ es el vector de cuasi-velocidades.

El cálculo de $B^t[\gamma]$ se efectúa utilizando las ecuaciones (16), (17) y (18):

$$B^t[\gamma] = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \right] \quad \textbf{(20)}$$
$$= \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_3 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} \omega_3 \\ 0 \\ -\omega_1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -\omega_2 \\ \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

El último término de la ecuación anterior es la velocidad angular del cuerpo rígido escrita como matriz antisimétrica.

Teniendo presente que en el caso del movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo la energía cinética no depende de las coordenadas generalizadas. En efecto, si elegimos ejes móviles que sean principales de inercia, con los respectivos momentos de inercia I_1, I_2, I_3, la energía cinética se escribe:

$$T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad \textbf{(21)}$$

Considerando también que $[N] = B^t[Q]$ es un vector columna formado por las components del vector momento de las fuerzas exteriores respecto del punto fijo del cuerpo rígido, relativos a los ejes móviles principales antes indicados, las ecuaciones de Hamel (14) coinciden con las conocidas ecuaciones de Euler de la dinámica:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_3 &= N_3 \end{aligned} \quad \textbf{(22)}$$

Las ecuaciones dinámicas (22) conjuntamente con las ecuaciones cinemáticas (19 constituyen un sistema de 6 ecuaciones diferenciales las que, conjuntamente con las condiciones iniciales, permiten determinar el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo.

3.2 Sistemas no holónomos. Ejemplo del disco vertical rodante.

Consideremos el siguiente sistema mecánico no holónomo: un disco vertical homogéneo que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, tal como el que se muestra en la figura 1.

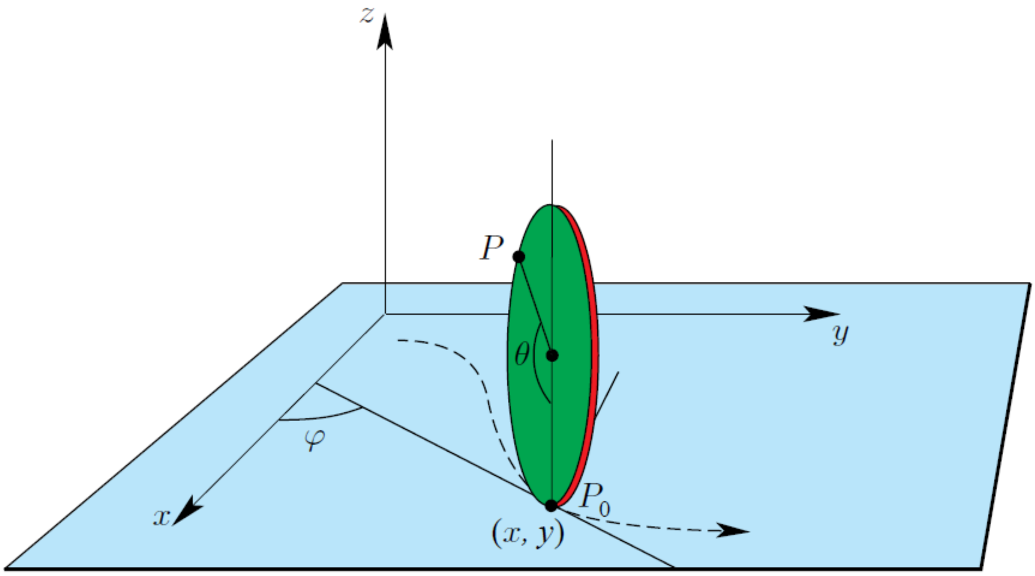


Fig. 1. Disco homogéneo vertical rodante sobre un plano horizontal [4]

Supongamos que tiene un radio R=1. El vector de coordenadas generalizadas es:

$$[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \textbf{(24)}$$

El movimiento del sistema está restringido por dos ligaduras no-holónomas:

$$\dot{x} - (\cos\phi)\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{y} - (\mathrm{sen}\,\phi)\dot{\theta} = 0 \quad \textbf{(25)}$$

Elegimos como cuasi-velocidades a:

$$u_1 = \dot{\theta}$$

$$u_1 = \dot{\phi}$$

$$u_3 = \dot{x} - (cos\phi)\dot{\theta}$$

$$u_4 = \dot{y} - (sen\phi)\dot{\theta} \quad \textbf{(26)}$$

La matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\,cos\phi & -\,sen\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27)}$$

Teniendo presente que $B = A^{-1}$, que la energía cinética del disco es:

$$T(x, y, \theta, \phi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 \quad \textbf{(28)}$$

y previa obtención de la energía cinética T^* como función de las coordenadas y las cuasi-velocidades generalizadas, a través de las ecuaciones (18) y (14) obtenemos:

$$\dot{u}_1 = 0$$

$$\dot{u}_2 = 0 \quad \textbf{(29)}$$

A las que deben agregarse las definiciones de las cuasi-velocidades no sujetas a restricción y las restricciones:

$$\dot{\theta} = u_1$$

$$\dot{\phi} = u_2$$

$$\dot{x} = (\cos\phi)\, u_1 \quad \textbf{(30)}$$

$$\dot{y} = (\mathrm{sen}\,\phi)\, u_1$$

En consecuencia, el movimiento libre de un disco homogéneo vertical sobre un plazo horizontal queda determinado mediante las 6 ecuaciones diferenciales de primer orden (29) y (30) de las que se obtiene que $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ son constantes y, en consecuencia, la trayectoria del centro del disco es una circunferencia [6].

4 Conclusiones y trabajos futuros

El presente trabajo ha intentado explicar de la forma más clara posible, cómo se obtienen las ecuaciones de Hamel-Boltzman de la dinámica analítica y tratando de mostrar que, pese a las complejidades de su cálculo, las mismas son muy simples y además, son de primer orden, lo que facilita su análisis numérico, son las mismas para los sistemas holónomos y no holónomos evitando en este último caso la necesidad de utilizar los multiplicadores de Lagrange.

Lo anterior nos induce a pensar en que a causa de la generalidad de estas ecuaciones, como asimismo de su complejidad, lo más adecuado es orientar su obtención hacia la utilización de programas de computación simbólica [7].

Referencias

1. Hamel, G., Die Lagrange–Eulerschen Gleichungen der Mechanik, Z. für Mathematik u. Physik, 50, 1–57 (1904).
2. Neimark, J., Fufaev N.: Dynamics of Nonholonomic Systems. Translations of Mathematical Monographs, 33 (1972)
3. Meirovitch, L.: Methods of analytical dynamics. New York, McGraw-Hill (1970)
4. Bloch, A.: Nonholonomic Mechanics and Control, number 24 In: Interdisciplinary Texts in Mathematics. Springer Verlag (2003)
5. Greenwood, D. - Advanced Dynamics-Cambridge University Press (2006)
6. Sánchez, J.A., Abud, D.: Obtención de soluciones exactas para problemas de mecánica mediante ecuaciones diferenciales de variable compleja, EMCI 2018,Villa María, Córdoba, 24 al 26 de Octubre de 2018
7. Kwatny, H. G., Blankenship, G. L.: Nonlinear Control and Analytical Mechanics: A Computational Approach. Control Engineering. Boston: Birkhauser (2000)

Acerca de la Imposibilidad de Aplicar Métodos Numéricos Tradicionales en Geometría Unimodular Afín

Salvador Gigena, Daniel Abud

[1] Grupo de Investigación en Geometría Afín, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez Sarsfield 1611, Córdoba, Argentina
sgigena@yahoo.com, daniel.abud@yahoo.com,

Resumen. Este trabajo presenta una breve introducción de la Teoría de Cáscaras Afines desarrollada en los últimos años por los autores, para luego introducir un ejemplo que demuestra por qué no se pueden aplicar los métodos numéricos tradicionales de la geometría euclidiana en esta nueva teoría. Ningún método de aproximación, de los que conocemos en estado actual del arte, tales como Método de Diferencias Finitas, Elementos Finitos, etc. pueden aplicarse, al haber cambiado la geometría, por una no-euclidiana.

Palabras Clave: Cáscaras Afines, Métodos Numéricos, Geometrías No-euclidianas.

1 Introducción

El presente trabajo se inscribe dentro del proyecto “ECUACIONES DIFERENCIALES EN GEOMETRÍA AFÍN, TEORÍA DE CASCARAS, Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, LA FÍSICA Y LA ECONOMÍA EN CARRERAS DE INGENIERÍA Y CIENCIAS NATURALES” Código: 33620180101002CB, (*Differential Equations in Affine Geometry, Shell Theory, and the Teaching of Mathematics, Physics and Economy in Engineering and Natural Sciences*) cuyo Director es Daniel Juan Alberto Abud y demuestra que los muy conocidos métodos de aproximación para el cálculo de estructuras no se pueden aplicar cuando la geometría se ha cambiado, de euclidiana a cualquiera otra, en este caso a la geometría afín. Estos métodos solo son válidos para la geometría euclidiana. Y, realmente, han sido de gran utilidad, ya que los ingenieros le hemos sacado provecho logrando aproximaciones exitosas. Pero, nos hemos empeñado en resolver el inmenso problema de estudiar, analizar, comprender, el problema de las cáscaras desde una geometría que no fuera euclidiana. Como ocurre cuando uno comienza a resolver un problema, se debe, primeramente, iniciar con la formulación del problema. Este es un problema concreto de Ingeniería, ya que ninguna estructura había sido calculada con esta geometría afín (una geometría no euclidiana) ni con ninguna otra geometría que no fuera la euclidiana. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]

Para ello, se ha efectuado un inicio (fundamentado matemáticamente) para generar muchos trabajos posteriores. Y para que estuviera bien fundamentado (matemáticamente) hubo que, no solo estudiar mucha Matemática, sino que, además, se necesitó la guía y supervisión de un Matemático que supiera muy bien de lo que se estaba hablando.

Conviene aclarar que, en este caso, hablaremos de investigación en Ingeniería, más que de la investigación y los ingenieros, que, sin duda, puede ser también objeto de otro tipo de reflexión. Ambos conceptos no son equivalentes, pues hoy en día, dada la evolución del conocimiento científico, es habitual que los equipos investigadores sean multidisciplinares, y estén formados por profesionales de diversa formación, Ingenieros o no. Los países desarrollados necesitan mantener la innovación tecnológica para asegurar su competitividad en el mercado internacional, especialmente, aquellos en los que su Economía no se basa en los Recursos Naturales, como puede ser el nuestro. Además, una

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Economía basada en el conocimiento permite minimizar la influencia de otros factores como el costo de la mano de obra, la energía, las materias primas, etc. Para que esto sea posible es necesario que las universidades formen profesionales Ingenieros capaces de innovar y de manejar conocimientos ajenos a la Ingeniería (por ejemplo, Geometrías no-euclidianas), como así también las nuevas tecnologías. [13], [14], [15], [16], [17], [18]

El desarrollo que hemos efectuado hasta el presente nos permite conjeturar que la nueva teoría puede llegar a ser más ventajosa que la anterior desde el punto de vista computacional ya que la Geometría Unimodular Afín abarca a la Geometría Euclidiana. Es decir, si tenemos en cuenta los invariantes geométricos exclusivamente el hecho de tener esta última un mayor número de invariantes que en la geometría euclidiana, implica que hay una mayor riqueza de invariantes a considerar que la hacen más ventajosa. Si bien se ha trabajado sobre cosas que no se habían visto antes en Matemática Pura, como por ejemplo, hemos definido para la cáscara $\boldsymbol{C}$ una estructura pseudo-métrica que es invariante unimodular afín espacial, y que denotamos por $G = G_{ij}\, du^i du^j$ es decir, la extensión de la métrica riemanniana a la cáscara. Lo que le da un carácter de especialmente útil para la aplicación a la Ingeniería moderna. El insumo de considerar a la Geometría Unimodular Afín en la Teoría de Cáscaras ya representa una utilidad en sí misma. Se abre una alternativa que antes no existía, se abre un abanico de opciones nunca antes consideradas. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19]

1.1 Resumen de notación para Cáscaras Afines (*Affine Shells*)

Introducimos primeramente las denominadas *Coordenadas Normales Afines* de una cáscara. A tal fin, consideramos la superficie media de la cáscara en el sistema no deformado, que denotaremos M_0, parametrizada localmente por una función vectorial, suficientemente diferenciable, expresada por $X_0 : U \to \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$. Las coordenadas del dominio son denotadas (u^1, u^2) de tal forma que se puede expresar, localmente,

$$M_0 = X_0(u^1, u^2) \tag{1}$$

donde se supone que X_0 es una inmersión topológica (*embedding* en Inglés).

Las partículas de la cáscara, en el estado original, tienen coordenadas curvilíneas (Lagrangianas): (U^1, U^2, U^3) y las representamos a través de la ecuación

$$X(U^1, U^2, U^3) = X(u^1, u^2, t) = X_t(u^1, u^2) = X_0(u^1, u^2) + tN_{\text{ua}} \tag{2}$$

con $U^3 = t$. Donde hemos extendido, obviamente, la anterior función a $X : U \times (-h, h) \to \mathbb{R}^3$, con $X(u^1, u^2, 0) = X_0(u^1, u^2)$ y donde N_{ua} es el vector normal afín a la superficie media.

Denotaremos, en general, con el signo de derivación ∂ seguido de subíndices las derivadas parciales ordinarias sucesivas de las funciones escalares y vectoriales:

$$\frac{\partial g}{\partial u^\alpha} := \partial_\alpha g \; ; \qquad \frac{\partial f}{\partial U^i} := \partial_i f \; ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} := \partial_{\alpha\beta} f \tag{3}$$

usando los siguientes rangos indiciales: letras latinas minúsculas serán índices variando entre 1 y 3: $1 \le i, j, k, \ldots \le 3$, esto significa que nos situamos en la cáscara $\boldsymbol{C}$ (considerándola como un volumen); mientras que las minúsculas griegas serán reservadas para denotar una variación entre 1 y 2: $1 \le \alpha, \beta, \gamma, \ldots \le 2$, i.e.: nos referimos a la superficie media M_0 original y sin deformación, o a la superficie media deformada M_0^*.

Recordemos que los invariantes de la geometría unimodular afín se construyen en base a la escogencia, en $\mathbb{R}^3$, de una 3-forma exterior, o función determinante, y que para tal se emplea el símbolo $[\ ,\ ,\ ]=\det$: determinante, resultando que la unidad de medida es el volumen.

A seguir se define entonces, en la superficie media de la cáscara M_0, la matriz de funciones:

$$h_{\alpha\beta}=\left[\frac{\partial X_0}{\partial u^1},\frac{\partial X_0}{\partial u^2},\frac{\partial^2 X_0}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}\right] \quad \textbf{(4)}$$

y se agrega la hipótesis de que la superficie sea no-degenerada, i.e., $H=\det(h_{\alpha\beta})\neq 0$, lo que permite definir la nueva matriz

$$g_{\alpha\beta}=|H|^{-1/4}h_{\alpha\beta} \quad \textbf{(5)}$$

obteniéndose así la *Primera Forma Fundamental Unimodular Afín* representada por

$$I_{ua}=\sum_{\alpha,\beta}g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \quad \textbf{(6)}$$

que es una estructura pseudoriemaniana.

La *Normal Unimodular Afín* se define a seguir a través de la expresión

$$N_{ua}=\tfrac{1}{2}\Delta(X_0) \quad \textbf{(7)}$$

donde Δ es el laplaciano con respecto a la *pseudo-métrica* I_{ua}, i.e.:

$$\Delta X_0=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\sqrt{|g|}\sum_{\beta=1}^{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial X_0}{\partial u^\beta}\right) \quad \textbf{(8)}$$

con $g=\det\left(g_{\alpha\beta}\right)$. Se verifica fácilmente que tal campo vectorial es transversal a la superficie media M_0 y que se obtienen, a partir de todo lo anterior, dos conexiones definidas en la superficie media M_0 :

- La conexión de Levi-Civita con respecto a la *pseudo-métrica* I_{ua}: $\tilde{\nabla}$.
- La conexión inducida normal afín, ∇, o sea la proyección de D, la conexión playa natural de $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial, en la dirección de N_{ua}, i.e.:

$$\nabla_Z Y=\operatorname{proy}_{N_{ua}}\left(D_Z Y\right) \quad \textbf{(9)}$$

donde Z e Y denotan campos vectoriales tangentes a la superficie media M_0 .

La Segunda Forma (cúbica) Fundamental Unimodular Afín se define luego como la derivada covariante normal afín de la Primera Forma Fundamental, i.e. :

$$\nabla\left(I_{ua}\right):=II_{ua} \quad \textbf{(10)}$$

que, en coordenadas locales, se puede representar también por:

$$II_{ua}=\sum_{\alpha\beta\gamma}g_{\alpha\beta\gamma}du^\alpha du^\beta du^\gamma \quad \textbf{(11)}$$

con los coeficientes $g_{\alpha\beta\gamma}$ totalmente simétricos en sus índices.

La *Tercera Forma Fundamental Afín* se introduce a partir de la observación de que las derivadas locales de la Normal Afín yacen en el *espacio tangente* a la superficie en cada punto, i.e.,

$$\frac{\partial N_{\mathrm{ua}}}{\partial u^{\alpha}} = -\sum_{\beta} B_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial X_0}{\partial u^{\beta}} = -B_{\alpha}^{1} \frac{\partial X_0}{\partial u^1} - B_{\alpha}^{2} \frac{\partial X_0}{\partial u^2} \tag{12}$$

lo que permite definir la *Tercera Forma Fundamental Afín* por la expresión:

$$III_{\mathrm{ua}} = B_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} \tag{13}$$

con $B_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} B_{\beta}^{\gamma}$.

En cuanto a la construcción de una métrica, o *pseudo-métrica*, en la cáscara recordemos que se realiza a partir de la pseudo-métrica de la superficie media I_{ua} representando primeramente los coeficientes métricos, sobre la superficie media M_0 por:

$$g_{\alpha\beta} = I_{\mathrm{ua}} \left(\frac{\partial X_0}{\partial u^{\alpha}}, \frac{\partial X_0}{\partial u^{\beta}} \right) \tag{14}$$

Entonces, sobre la cáscara ***C*** definimos una estructura *pseudo-métrica*, invariante unimodular afín, que denotaremos por

$$G = \sum_{i,j} G_{ij} dU^i dU^j \tag{15}$$

por medio de las ecuaciones

$$G_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} - 2tB_{\alpha\beta} + t^2 \sum_{\lambda} B_{\alpha}^{\lambda} B_{\beta\lambda} \tag{16}$$

$$G_{3\alpha} = G_{\alpha 3} = G\left(\frac{\partial X}{\partial U^{\alpha}}, \frac{\partial X}{\partial U^3} \right) = G\left(X_{\alpha}, N_{ua} \right) := 0 \tag{17}$$

y

$$G_{33} = G\left(\frac{\partial X}{\partial U^3}, \frac{\partial X}{\partial U^3} \right) = G\left(N_{ua}, N_{ua} \right) := 1 \tag{18}$$

Por otra parte, los objetos geométricos que pertenecen a la cáscara en el estado deformado son denotados con un asterisco superior derecho: $X_0^* : U \to \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ representa la parametrización de la superficie media de la cáscara deformada $M_0^* = X_0^*(u^1, u^2)$, donde el dominio de definición de esta inmersión, $U \subset \mathbb{R}^2$, y sus parámetros, o coordenadas del dominio, (u^1, u^2), son los mismos que para la superficie media de la cáscara en el estado original, previo a la deformación. Para el resto de los objetos se adapta consecuentemente esta notación y ésta, a su vez, nos permite introducir las correspondientes componentes de los tensores diferencia: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19]

$$\varepsilon_{ij} := \tfrac{1}{2}\left(G_{ij}^* - G_{ij} \right), \quad \sigma_{\alpha\beta\gamma} := g_{\alpha\beta\gamma}^* - g_{\alpha\beta\gamma}, \quad w_{\alpha\beta} := B_{\alpha\beta}^* - B_{\alpha\beta} . \tag{19}$$

2 Demostración de la no aplicabilidad de los métodos numéricos tradicionales

Los métodos numéricos (de uso común en geometría euclidiana) no son aplicables en otras geometrías. Se demuestra, con un sencillo ejemplo, cómo en geometría afín no se pueden aplicar.

Para eso hemos recurrido a mostrar, en el plano, para mayor facilidad, una circunferencia y una elipse con áreas iguales. A futuro se pretende extender a volúmenes en el espacio ordinario. [20], [21]

En el contexto que se ha desarrollado a lo largo de estos años a través de diversas publicaciones que han efectuado estos autores se ha profundizado en cuanto a la aplicabilidad de la geometría afín a la teoría de cáscaras. Pero, subyace entre la comunidad científica cómo se puede aproximar. [20], [21]

2.1 Aproximaciones en Geometría Unimodular Afín

Con respecto a los Métodos Computacionales para esta teoría, si bien se sabe cómo proceder en concreto, aún no existen (a nuestro actual conocimiento) métodos computacionales desarrollados, semejantes a los Métodos de Elementos Finitos, y demás *solvers*, etc.

Cambiar, radicalmente, los paradigmas de pensamiento de cualquier teoría científica nunca ha sido una tarea fácil de llevar a cabo. Es decir, como Ingenieros nos resulta muy difícil pensar cómo sería el mundo real si no lo viéramos desde el punto de vista de la Geometría Euclidiana. Con esto se ha pretendido ampliar el horizonte de los Ingenieros. La aplicación de una geometría diferente, de la Geometría Euclidiana, implica un cambio en las estructuras de pensamiento de cualquier investigador. Se ha trabajado, fuertemente, en el cambio de geometría hacia la Geometría Unimodular Afín en la Teoría de Cáscaras. La conclusión más trascendente que se obtiene a partir de lo expuesto es que, para el caso de la utilización de esta geometría (la Unimodular Afín) da por resultado que todas las aproximaciones numéricas conocidas (en el mundo, en el estado actual del arte) no son aplicables. Y esto ocurre por el cambio sustancial de paradigma. [23]

Se ha partido de una configuración de la cáscara no deformada que, al aplicársele las solicitaciones, pasa a un estado deformado (en equilibrio), usando en ambos estados los invariantes de la Geometría Unimodular Afín de superficies en el espacio ambiente $\mathbb{R}^3$, en este caso: $\bar{x} = -3x$; $\bar{y} = \frac{1}{3} y$; $\bar{z} = z$. Por otro lado, las distancias (euclidianas) determinan los desplazamientos (una medida de la variación de la deformación). Pero, si quisiéramos aproximar a la superficie media deformada en esta nueva teoría, de ninguna manera podríamos usar los invariantes euclidianos, porque la distancia euclidiana no es un invariante afín. Y este impedimento se puede ver en el siguiente ejemplo:

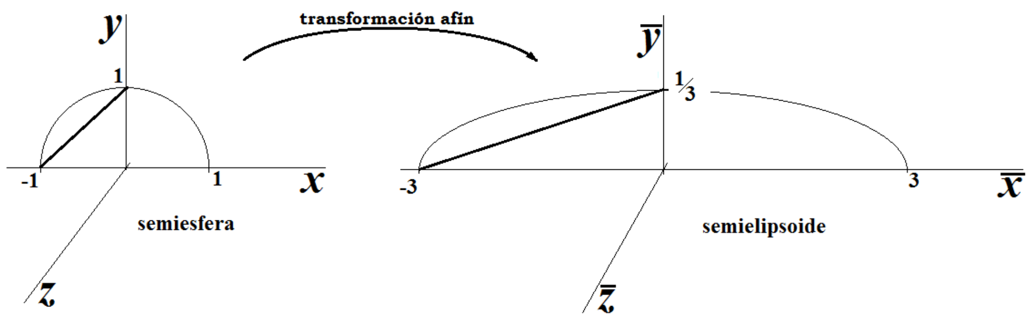


Fig. 1. En estas gráficas se representan una semiesfera y un semielipsoide cuyos volúmenes son idénticos.

En este ejemplo, se puede ver cómo la distancia euclidiana no se ha preservado bajo la transformación afín efectuada. Sin embargo, con la nueva propuesta de Geometría Afín, en lugar de analizar la deformación a través de los desplazamientos (como es lo habitual en geometría euclidiana) se puede analizar considerando que el volumen se ha mantenido, y que, las mediciones que se puedan hacer, buscarán llegar por otros medios que sean invariantes bajo la acción del *Grupo Unimodular Afín* $\mathrm{ASL}(3,\square)$. Pero, esta construcción aproximativa será motivo de análisis y desarrollo futuros. Volviendo a la Geometría Afín en el plano, tomemos la figura, similar a la anterior. Pero, reduciendo el esquema a la semicircunferencia y semielipse en el plano, para una mejor comprensión. Se trata de aproximar con una parábola en lugar de aproximar con una recta.

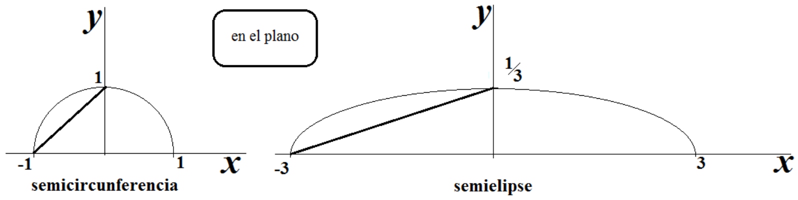


Fig. 2. En estas gráficas se representan, una semicircunferencia y una semielipse, cuyas áreas son idénticas.

Lo que se representa en la figura es el primer paso en la aproximación lineal de los segmentos circular y elipsoidal que, para el caso euclidiano, está constituido por las respectivas *rectas* secantes como se expone y observa. A continuación, vamos a analizar minuciosamente estos segmentos de curvas para demostrar que, si bien, y como se observa intuitivamente, son diferentes en la Geometría Euclidiana, a la vez son iguales en la Geometría Unimodular Afín. [20], [21], [22], [23]

La parábola, (así como la circunferencia, la elipse y la hipérbola) es una curva cuya ecuación es un caso especial de la siguiente ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(20)}$$

El procedimiento será el siguiente: se buscará la parábola, P, que aproxima a la circunferencia de radio uno: C y que comparte las tangentes en los puntos: $(0,1)$ y $(-1,0)$. Seguidamente, se implementa el mismo procedimiento para buscar otra parábola que aproxime a la elipse E y que comparta las tangentes en los puntos situados sobre los ejes: $(0, 1/3)$ y $(-3,0)$. A los efectos que no haya confusiones se trabajará con el cuarto de circunferencia y con el cuarto de elipse, en el segundo cuadrante, como se observa en la siguiente figura:

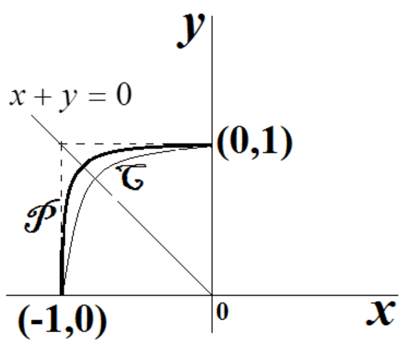


Fig. 3. Cuarto de circunferencia.

Se puede ver, claramente, en el gráfico que la intersección de la recta $x+y=0$ con la circunferencia es $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$ mientras que la intersección de la misma recta con la parábola aproximante es $\left(-3/4, 3/4\right)$ siendo fácil verificar que $\sqrt{2}/2 \approx 0,707... < 0,75 = 3/4$. [21], [24]

Ahora bien, por otro lado,

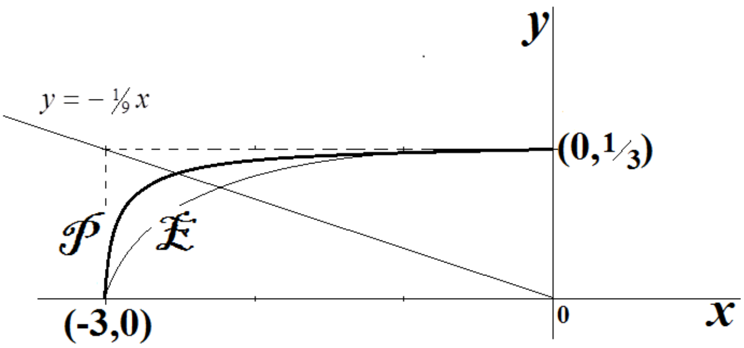


Fig. 4. Cuarto de elipse.

Volvamos, ahora, a la curva que representa un cuarto de circunferencia de radio uno. Considerando los tres puntos: $x_1=(0,1)$; $x_2=(-1,0)$; $x_3=(-1,1)$.

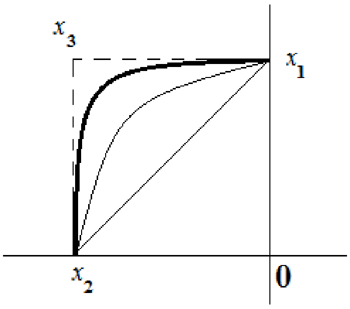


Fig. 5. Cuarto de circunferencia.

Para hacer uso del desarrollo de la Geometría Unimodular Afín en el Plano, consideremos la parábola que pasa por los puntos $x_1=(0,1)$ y $x_2=(-1,0)$ y, que es tangente al arco de circunferencia en ambos puntos, como indicado en la figura. Por lo tanto, usando la fórmula del área conocida, [23]

$$A_{12}=\frac{1}{2}[x_2-x_3, x_1-x_3] \qquad \textbf{(21)}$$

entonces,

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{1}{2}[x_2-x_3, x_1-x_3] \\ &= \frac{1}{2}[(0,-1),(1,0)] \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(22)}$$

lo que resulta,

$$\boxed{A_{12} = \frac{1}{2}} \tag{23}$$

Seguidamente, veamos el cuarto de elipse considerado en la siguiente figura. Considerando los tres puntos: $x_1 = \left(0, \tfrac{1}{3}\right)$; $x_2 = \left(-3, 0\right)$; $x_3 = \left(-3, \tfrac{1}{3}\right)$. [20], [21], [22], [23], [24]

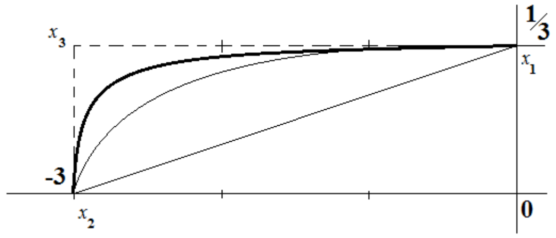


Fig. 6. Cuarto de elipse.

Usando la fórmula del área como ya lo hemos realizado anteriormente. Entonces,

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{1}{2}\left[x_2 - x_3, x_1 - x_3\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(0, -\tfrac{1}{3}\right), \left(3, 0\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -\tfrac{1}{3} \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

lo que resulta idéntico a (23). O sea, como ya lo esperábamos, da exactamente igual. [20], [21]

A modo de ser lo más explícito posible, y haciendo un resumen teórico de lo expuesto en el ejemplo, abundaremos en la siguiente explicación, ya que (tal vez) es desconocida en los ámbitos de la Ingeniería. La *transformación unimodular afín* se puede explicar de la siguiente manera:
Si

$$\bar{X} = \mathbf{A}X + \mathbf{B} \tag{25}$$

Entonces, expresando lo mismo en términos de componentes:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

operando

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}x + b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x + b_2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

se tienen dos posibilidades:

si $\mathbf{A}$ es ortogonal, $\Rightarrow$ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{I}$ *geometría euclidiana*

si $\mathbf{A}$ es unimodular, $\Rightarrow$ $\det\left(\mathbf{A}\right) = 1$ *geometría unimodular afín*

tomemos, por ejemplo, para simplificar: $\mathbf{B} = 0$ (sin traslación), que, en nuestro ejemplo, es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{28}$$

entonces $\bar{X}(t) = \mathbf{A}\,X(t) + \cancel{\mathbf{B}}$ y sus derivadas primera y segunda serán:

$$\bar{X}'(t) = \mathbf{A}\,X'(t) \tag{29}$$

y

$$\bar{X}''(t) = \mathbf{A}\,X''(t) \tag{30}$$

la *norma* es, por definición

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} \tag{31}$$

De manera tal que, siendo $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ y $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ se tiene, $\|X\|^2 = X \cdot X = (x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)$ de tal manera que: $\|X\|^2 = x^2 \underbrace{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1}_{1} + y^2 \underbrace{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2}_{1} + 2xy \underbrace{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2}_{0}$. Obviamente, todo lo anterior se puede extender a $\mathbb{R}^3$ (pretensión para desarrollos futuros). [20], [21], [22], [23], [24]

Por otro lado, y en la notación o nomenclatura como Grupos de Lie, el producto de dos transformaciones como la expresada en (25) se puede representar por el siguiente producto matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Ahora bien, recordemos lo expuesto supra, en cuanto a formular una descripción paramétrica de la parábola, que podremos definir por una ecuación vectorial del tipo de la ecuación $x(t) = x_0 + x_0' t + \frac{1}{2} x_0'' t^2$, que, para nuestro presente propósito, es necesario primeramente escoger convenientemente los vectores $x_0, x_0', x_0'' \in \mathbb{R}^2$, con la condición adicional de que (o mejor aún, que esa condición sea $[x_0', x_0''] = 1$, pues en tal caso, el parámetro será la longitud de arco afín). Se establece un sistema de ecuaciones cuya solución nos determina que $x_0 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Además, y como vimos en el ejemplo mostrado, se trata de determinar valores reales t_1 y t_2 tales que $x(t_1) = (0,1)$ y $x(t_2) = (-1,0)$; para lo cual, derivando la ecuación $x(t) = x_0 + x_0' t + \frac{1}{2} x_0'' t^2$, se tiene: $x'(t) = x_0' + x_0'' t$. Luego, valuando en: $x'(t_1) = (1,0)$ y $x'(t_2) = (0,-1)$, se determina: $x_0, x_0', x_0'', t_1, t_2$. Ahora, volviendo a la representación paramétrica de la circunferencia, i.e., $x(t) = (\cos t, \sin t)$. De una manera sencilla, volviendo al plano, y parametrizando la curva, se puede ver que, tanto en geometría euclidiana como en geometría afín, se obtiene el mismo resultado: $x(t) = (\cos t, \sin t)$ y $\dot{x}(t) = (-\sin t, \cos t)$, entonces, operando, finalmente,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \|\dot{x}(t)\|\, dt = \int_{\pi/2}^{\pi} dt = \frac{\pi}{2} \tag{33}$$

Ahora, en *Geometría Unimodular Afín* (como ya se ha visto) se necesita un orden más de derivación:

$$\ddot{x}(t) = (-\cos t, -\sin t) \tag{34}$$

como se puede ver, claramente, hace falta un orden de derivación mayor. Si calculamos el determinante que va en el integrando:

$$
\begin{aligned}
\left[\dot{x},\ddot{x}\right] &= \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}
\qquad \textbf{(35)}
$$

operando se obtiene exactamente el mismo resultado que en (33), que en definitiva da,

$$
\int_{\pi/2}^{\pi}\left[\dot{x},\ddot{x}\right]dt = \int_{\pi/2}^{\pi} dt = \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(37)}
$$

Mostrando la coherencia de todo lo calculado.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Es interesante ver, en este trabajo, cómo se ha demostrado a través de este ejemplo muy didáctico, la imposibilidad de aplicar métodos numéricos muy conocidos (y muy usados) en la Ingeniería. Y que, de hecho, han sido muy útiles para resolver problemas de Ingeniería muy complicados. Pero, estos conocidos *solvers* tienen la limitación de que sólo se pueden aplicar con geometría euclidiana. Cuando uno cambia la geometría, por otra que es no-euclidiana, como por ejemplo, la unimodular afín, ya no puede aplicarlos.

Referencias

1. John, F. Estimates for the Derivatives of the Stresses in a Thin Shell Interior Shell Equations, *C. Pure Appl. Math* Nº 18, pp. 235-267, (1965).
2. Thomas, G.B. *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, (1966).
3. John, F. Refined Interior Equations for Thin Elastic Shells, *Comm. Pure Appl. Math* Nº 5, 583 – 615, (1971).
4. Koiter, W.T. On the mathematical foundation of shell theory, *Proc. Int. Congr. of Mathematics*, Nice, 1970, Vol. 3, Paris, pp. 123-130, (1971).
5. Millman, R.; Parker, G. *Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall, New Jersey, (1977).
6. Spivak,M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish Inc, Wilmington, Delaware (U.S.A.) (1979).
7. Gigena, S. General Affine Geometry of Hypersurfaces I, *Mathematicae Notae*,V.36, (1992).
8. Gigena, S. Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type, *Proc Symp in Pure Math, Am Math Soc*, V 54, (1993).
9. Gigena, S. El Invariante de Pick para Hipersuperficies Descomponibles, *Mathematicae Notae*, V 37, (1994).
10. Gigena, S. Hypersurface Geometry and Related Invariants in a Real Vector Space, libro 4 cap, (1996).
11. Olver, P.J.; Sapiro, G., Tannenbaum, A. Affine invariant detection: edges, active contours, and segments, in: Proceedings 1996 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings, IEEE Computer Soc. Press, Los Alamitos, CA, pp. 520-525, (1996).
12. Gigena, S. Decomposable Surfaces with Vanishing Equiaffine Scalar Curvature, *Actas IV "Dr. A.R. Monteiro*", pp. 71-83, (1997).
13. Gigena, S. Ordinary Differential Equations in Affine Geometry: Differential Geometric Setting and Summary of Results. *Mathematicae Notae.* Rosario: Instituto de Matemática "Beppo Levi", Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad Nacional de Rosario. Vol.39, pp. 33 - 59. ISSN 0025-553X, (1998).
14. Olver, P.J.; Sapiro, G.; Tannenbaum, A. Affine invariant detection: edge maps, anisotropic diffusion, and active contours, *Acta Appl. Math.* 59 pp. 45-77, (1999).
15. Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D. Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines, *Revista Mecánica Comp*, Vol. XXI, pp. 1862-1881, (2002).
16. Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D. Ecuaciones de Equilibrio en Cáscaras Afines, *Revista Mecánica Comp*, Vol. XXII, pp. 1953-1963, (2003).
17. Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D. Teoría de Cáscaras Afines: Desigualdades Básicas, *Revista Mecánica Comp*, Vol. XXIII, pp. 639-652, (2004).
18. Gigena, S.; Abud, D.; Binia, M. Teoría de Cáscaras Afines: Estimativas de la Tensión y la Deformación, *Revista Mecánica Computacional*, Vol. XXIV, pp. 2745-2758, (2005).

19. Arciniega, R.A.; J.N. Reddy Tensor-based Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Analysis of Shell Structures, Computer Methods in *Applied Mechanics and Engineering* 196, pp. 1048-1073, (2007).
20. Gigena, S.; Abud, D. Theory of Affine Shells: Second Order Estimates of the Strain and Stress Tensors treated by P.D.E. Methods. *Actas del X Congreso "Dr. Antonio Monteiro",* ISSN 0327-9170, pp. 1-17, (2009).
21. Gigena, S.; Abud, D.; Binia, M. Theory of Affine Shells: Higher Order Estimates. *Revista Mecánica Comp*, ISSN 1666-6070, Vol. XXIX, pp. 969-988, (2010).
22. Gigena, S.; Abud, D.; Binia, M. Geometrical and PDE Methods in the Treatment of the Theory of Shells: Comparing Euclidean and Affine Approaches; *Revista GEOMETRY Editorial Hindawi Publishing Corporation*, 15 pages, (2013).
23. Martinez, A., Milan, F., Val, I. Teoría Afín de Curvas Planas*, La Gaceta RSME*, Nº2, pp. 271 – 281, (2013).
24. Abud, D.; Gigena, S. Recuperación de la superficie media deformada en la Teoría De Cáscaras, *Revista Mecánica Computacional*. Vol. XXXIV, ISSN 1666-6070, pp. 2359- 2383, (2016).

Estudando a Curva Característica de um Diodo Semicondutor na disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral: oportunidade para o desenvolvimento de competências matemáticas e gerais na Engenharia

Gabriel Loureiro de Lima[1], Barbara Lutaif Bianchini[1], Eloiza Gomes[2]

[1] Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
gllima@pucsp.br
barbara@pucsp.br

[2] Grupo de Pesquisa Formação Profissional e Educação em Engenharia, Design e Administração, Instituto Mauá de Tecnologia
eloiza@maua.br

Resumo. Apresentamos neste trabalho uma proposta de evento contextualizado (problema integrando a Matemática com áreas específicas da Engenharia), elaborada com subsídio da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC), contemplando elementos iniciais relacionados ao estudo da curva característica de um diodo semicondutor, a ser explorado com estudantes de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, visando uma revisita ao estudo da função exponencial. Entendemos que o evento tem como potenciais: ilustrar ao futuro engenheiro uma aplicação das funções exponenciais em sua futura área de atuação profissional; possibilitar ações visando o enfrentamento e provável superação de alguns obstáculos epistemológicos relacionados à noção de função; desenvolver ou mobilizar competências matemáticas e competências gerais fundamentais ao engenheiro; e explorar elementos que constituem a Base Epistemológica da Engenharia.

Palavras-Chave: Engenharia, Diodo, Função, Teoria A Matemática no Contexto das Ciências, Evento contextualizado, Obstáculos epistemológicos, Dificuldades cognitivas, Competências, Base epistemológica da engenharia.

1 Introdução

Este trabalho insere-se em uma linha de investigação à qual temos nos dedicado desde 2015: o ensino e a aprendizagem de Matemática em cursos que não visam à formação de matemáticos, mas de profissionais que em seus cotidianos laborais farão uso de conceitos, ferramentas e métodos desta área do conhecimento como recursos constituintes de suas culturas profissionais. Voltamos nossa atenção especialmente aos cursos de Engenharia e, subsidiados pela *Teoria A Matemática no Contexto das Ciências* (TMCC), desenvolvida desde o início da década de 1980 pela pesquisadora mexicana Patricia Camarena Gallardo, temos buscado, entre outros aspectos, identificar situações específicas de diferentes habilitações de Engenharia nas quais são mobilizados conceitos matemáticos para, a partir destas, elaborar materiais didáticos compostos por problemas integrando disciplinas matemáticas e não matemáticas.

Tais problemas, na esfera da TMCC, recebem o nome de *eventos contextualizados* [1] e devem ser implementados em aula, conforme um modelo didático específico atrelado a este referencial, o Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo), com o objetivo de incrementar a motivação dos futuros engenheiros para estudar Matemática e possibilitá-los, desde os primeiros semestres, uma abordagem contextualizada desta ciência, vinculada aos objetivos do curso, às questões que os egressos enfrentarão em seus cotidianos profissionais e de forma a contribuir para que estes sejam capacitados a realizar a transferência de seus conhecimentos matemáticos para as atividades profissionais inerentes à carreira para a qual estão se preparando.

Neste artigo, apresentamos um exemplo de evento contextualizado envolvendo elementos iniciais relacionados ao estudo da curva característica de um diodo semicondutor, tendo como principal público-alvo estudantes de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral na qual é prevista uma revisita ao estudo de funções reais de uma variável real e que, embora possa ser trabalhado em outros momentos desta disciplina, nossa sugestão inicial é que seja implementado quando estiverem sendo abordadas as funções exponenciais. Conforme discutiremos nas seções subsequentes, o evento é potencialmente rico para ilustrar ao futuro engenheiro uma aplicação das funções exponenciais em sua futura área de atuação profissional; para possibilitar ações visando o enfrentamento e provável superação de alguns obstáculos epistemológicos, na acepção de [2], identificados por [3], presentes no desenvolvimento da noção de função; desenvolver ou mobilizar competências matemáticas, na acepção de [4], desenvolver ou mobilizar competências gerais fundamentais ao engenheiro, preconizadas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Graduação em Engenharia (DCN) [5] e explorar, de maneira integrada, alguns elementos dos três estratos (conhecimento fundamental; aspectos componentes das competências vinculadas àqueles que devem ser os resultados, em termos de aprendizagem, de um curso de Engenharia; competências requeridas do profissional da Engenharia) que, na concepção de [6] constituem a base epistemológica da Engenharia.

2 Fundamentação Teórico-Metodológica

Para a concretização do trabalho apresentado neste artigo, recorremos a diferentes subsídios teóricos. A elaboração e organização didática do evento contextualizado sustentam-se por preceitos da TMCC, especificamente de duas de suas fases: a epistemológica e a didática, sendo que os procedimentos inerentes à fase epistemológica embasaram a pesquisa também do ponto de vista metodológico. Para estabelecer os objetivos das questões que compõem a organização didático do evento e, consequentemente, os objetivos visados em sua implementação (que, ressaltamos, ainda não foi realizada), recorremos às ideias de: obstáculos epistemológicos [2] relativos ao conceito de função, conforme explicitado por [3], competências matemáticas na visão de [4] e ao modelo de três estratos para a Base Epistemológica da Engenharia, segundo [6].

No âmbito da TMCC, as diferentes problemáticas que têm influência no ambiente de aprendizagem de Matemática em cursos universitários que não visam à formação de matemáticos, organizam-se como um sistema complexo composto por cinco subsistemas (as chamadas fases da Teoria), que não são independentes das condições sociológicas dos atores presentes no processo educativo, e nem desvinculadas umas das outras. Neste trabalho recorremos a duas fases: a epistemológica e a didática, que serão detalhadas nos parágrafos seguintes. Visando proporcionar ao leitor um espectro geral do referencial, destacamos que: conforme sintetizam [7], na *fase curricular* o principal objetivo é a elaboração de um currículo de Matemática para determinado curso que seja objetivo e valorize a vinculação curricular interna (entre as disciplinas matemáticas e não matemáticas), a vinculação curricular externa (entre a educação básica e a graduação e entre a graduação e a pós-graduação), assim como a vinculação entre a universidade e o futuro cotidiano profissional do estudante. Na *fase docente* busca-se estruturar como formar o professor para trabalhar com o currículo construído na fase curricular. Já na *fase cognitiva*, o foco é analisar, do ponto de vista cognitivo, o trabalho dos estudantes em uma situação abordando a Matemática a partir do contexto do curso de graduação em que estão inseridos. Para mais detalhes acerca dessas fases que não serão apresentadas neste artigo, recomendamos a leitura de [1], [8], [9] e [10].

Para a elaboração do evento contextualizado, recorremos às ideias da *fase epistemológica*, por meio da qual visa-se compreender a maneira como os conceitos matemáticos e os conceitos de outras áreas do conhecimento, no caso deste artigo a Engenharia, estão simbioticamente articulados. As análises executadas nesta fase possibilitam a construção de materiais didáticos destinados à abordagem contextualizada da Matemática em determinada graduação e, desta forma, auxiliar os estudantes a desenvolverem a habilidade de realizar o que [11] denomina *transposição contextualizada*, a qual significa o processo de adaptar os conceitos matemáticos aprendidos ao que é requerido por outros domínios do conhecimento, isto é, transpô-los da Matemática para suas áreas de aplicação.

Para a elaboração de tais materiais, conforme explicam [12] e [13], devemos recorrer a uma sequência de procedimentos analíticos a partir de textos de diferentes naturezas.

O primeiro passo é a *análise de livros referenciados nas bibliográficas básicas das disciplinas específicas (não matemáticas)* que compõem a matriz curricular de um curso com o objetivo de compreender como determinado conteúdo matemático é aplicado em situações específicas. No caso do trabalho apresentado neste artigo, os dados obtidos por meio de uma pesquisa inicial acerca das habilitações de Engenharia em ascensão no Brasil nos permitiram identificar a Engenharia de Controle e Automação como uma das sete mais promissoras em 2021. Assim, optamos por elaborar um evento adotando como contexto uma situação inserida nesta habilitação e de interesse também em outras habilitações de Engenharia epistemologicamente aderentes. Analisando diferentes matrizes curriculares da graduação mencionada identificamos, nos anos iniciais do curso, a abordagem da teoria acerca de diodos semicondutores. Nas disciplinas tratando deste conteúdo, a principal referência bibliográfica é [14]. Foi a este material que recorremos para identificar uma situação envolvendo o estudo da curva característica de um diodo semicondutor com potencial de se tornar um evento contextualizado. A situação por nós adaptada refere-se ao conteúdo abordado nas seis seções iniciais do primeiro capítulo deste livro.

O segundo passo previsto é a *análise dos programas e das ementas das disciplinas de Matemática* presentes na matriz curricular do curso e que abordam o conteúdo matemático que se deseja trabalhar por meio do evento, com o objetivo de compreender como é previsto o tratamento a ser dado ao assunto e em que disciplinas ele é abordado. No caso do evento que elaboramos, intentávamos explicitar aos futuros engenheiros uma aplicação, em sua área profissional, das funções exponenciais. Na instituição em que uma das autoras deste artigo leciona, na qual é ofertado o curso de Engenharia de Controle e Automação, a disciplina de Matemática em que as funções exponenciais são trabalhadas é intitulada Cálculo Diferencial e Integral 1, que é anual e ministrada na primeira série. A abordagem prevista para esse conteúdo é a de uma revisita nos mesmos moldes com que ele já deveria ter sido estudado no Ensino Médio (destinado a estudantes entre 15 e 17 anos de idade).

O terceiro passo é realizar uma *análise efetivamente de ordem epistemológica do conteúdo matemático* com o qual se deseja trabalhar, visando compreender como ocorreu seu desenvolvimento historicamente. No caso das funções, objeto matemático presente no evento elaborado, estas se desenvolveram, como ressaltam [15] e [16], como um instrumento para o estudo quantitativo de fenômenos naturais. [15] ressalta o quanto o desenvolvimento deste objeto matemático se deu de maneira embricada à necessidade de expressar matematicamente relações presentes em problemas oriundos da Física envolvendo a ideia de variação (condução de calor, queda livre, movimento de planetas, etc.). Na contemporaneidade, conforme salienta [15], "desdobrarem-se os seus domínios de aplicação, servindo igualmente de instrumento para o estudo de fenômenos e situações das Ciências da Vida, das Ciências Humanas e Sociais, da Gestão, da Comunicação, da Engenharia e da Tecnologia, constituindo um meio de descrição, explicação, previsão e controle" (p. 6). Tais aplicações são possíveis por meio da noção de modelo e em razão do conceito de função ser de importância central para a modelagem, constitui-se como uma noção-chave na Matemática atual.

Nesse terceiro passo, também se dá a *identificação dos obstáculos epistemológicos* relativos ao tema com qual se irá trabalhar. Segundo [2], esses obstáculos são "aqueles dos quais não podemos, e não devemos nos esquivar, em razão de seu papel constitutivo no conhecimento visado. Eles podem ser encontrados na história dos próprios conceitos" (p. 178 – tradução nossa). Em relação à noção de função, [3] identificou dezesseis obstáculos epistemológicos. A nosso ver, o evento elaborado possibilita o enfrentamento de seis deles, conforme evidenciamos Tabela 4.

O quarto passo é *analisar os livros didáticos indicados nas referências básicas da disciplina matemática* na qual o conteúdo visado é trabalhado para compreender a abordagem que se prevê dar ao tema na formação de um certo profissional. No caso da instituição em que atua uma das autoras deste artigo e na qual é oferecido o curso de Engenharia de Controle e Automação, o livro didático indicado é [17]. Neste material, a revisita ao estudo das funções se dá no capítulo 1 intitulado *Funções e Modelos*. Na segunda seção do capítulo, denominada *Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Especiais*, é apresentado o conceito de modelo matemático, um esquema ilustrando o processo de modelagem matemática e a observação de que um modelo matemático "nunca é uma representação completamente precisa de uma situação – é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo" (p. 15 – grifo do autor). Na seção *Funções Exponenciais*, esse tipo de função é definido, revisam-se as propriedades dos expoentes e discutem-se algumas aplicações, destacando que elas estão frequentemente presentes em modelos matemáticos da natureza e da sociedade e que em tal seção serão abordadas as aplicações relativas ao crescimento populacional e ao decaimento radioativo.

O quinto e último passo diz respeito à *análise de aspectos cognitivos relacionados ao conteúdo matemático* visado. Objetiva-se, por meio deste procedimento, depreender, a partir de resultados de investigações cujo propósito foi refletir a respeito de questões cognitivas vinculadas à aprendizagem de determinado conteúdo, da própria experiência docente e da análise de cunho epistemológico anteriormente realizada, as principais dificuldades, de natureza cognitiva, com as quais se deparam os estudantes para aprender certo tema e os elementos fundamentais para a construção de conhecimentos de um objeto matemático específico. No caso do evento em foco neste artigo, entendemos, com base nas pesquisas de [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24] e [25], que são oito as dificuldades cognitivas com as quais os estudantes podem se defrontar, conforme explicitado na Tabela 5.

Além de oportunizar o enfrentamento dos obstáculos epistemológicos e de dificuldades cognitivas, entendemos que o evento elaborado pode oportunizar também o desenvolvimento ou a mobilização da competência matemática geral que, segundo [4], deve possuir um engenheiro, a saber: "a habilidade para entender, avaliar, fazer e utilizar a Matemática em uma variedade de contextos intra e extra-matemáticos e em situações nas quais esta desempenha ou pode desempenhar um papel" [4] apud [26, p. 62]. Tal competência é dividida em oito subcompetências, conforme explicitado na Tabela 6. Correlacionado à essa ideia de oportunizar ao futuro engenheiro, em seu processo formativo, o desenvolvimento de competências, não apenas as matemáticas, está o modelo teórico proposto em [6] por meio do qual os conhecimentos que constituem a Base Epistemológica da Engenharia são organizados em três estratos: *conhecimento fundamental* (E1), *aspectos componentes das competências vinculadas àqueles que devem ser os resultados, em termos de aprendizagem, de um curso de Engenharia* (E2) e *competências requeridas do profissional da Engenharia* (E3). A nosso ver, o evento que apresentamos neste artigo possibilita o desenvolvimento ou a mobilização, de maneira articulada, de alguns elementos desses três estratos, conforme apresentamos nas Tabelas 7, 8 e 9.

Visando atingir, por meio da implementação do evento contextualizado elaborado, os objetivos pretendidos, a saber: ilustrar ao futuro engenheiro uma aplicação das funções exponenciais em sua futura área de atuação profissional; possibilitar o enfrentamento e provável superação de alguns obstáculos epistemológicos relacionados à noção de função; desenvolver ou mobilizar competências matemáticas e competências gerais fundamentais ao engenheiro e explorar elementos dos três estratos que constituem a Base Epistemológica da Engenharia, propomos a organização do trabalho com o evento em sala de aula por meio do Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo).

O mencionado Modelo Didático está inserido na *fase didática* da TMCC e, segundo [27], fundamenta-se em preceitos construtivas de Ausubel e colaboradores, Piaget e Vigotsky. Conforme destaca [27], suas principais características são: "está centrado no estudante, realiza-se um trabalho colaborativo em equipe, o trabalho é interdisciplinar, são favorecidas a formação integral do estudante e a aprendizagem significativa, induz-se a aprendizagem autônoma, etc." (p. 5). A principal estratégia de ensino em tal Modelo é a aplicação de eventos contextualizados, que são problemas ou projetos integrando disciplinas matemáticas e não matemáticas, que são trabalhados em equipes pelos estudantes. Conforme ressaltam [27] e [28], as equipes devem ser compostas por três estudantes, sendo que em cada uma deve haver um líder emocional, um líder intelectual e um líder operativo, cada um com características específicas que lhes conferem papeis complementares no desenvolvimento do trabalho colaborativo. Para maiores detalhes acerca da composição das equipes, consultar [28] e [29]. Ressaltamos que, embora o evento apresentado neste artigo não tenha ainda sido implementado em sala de aula, sugerimos que seja desenvolvido conforme esses preceitos do MoDiMaCo.

3 O evento contextualizado elaborado e uma proposta de intervenção didática

Conforme destacamos na seção anterior, elaboramos um evento contextualizado a partir do contexto de diodos semicondutores, objeto de estudo em disciplinas de Eletrônica de cursos de graduação em Engenharia de Controle e Automação e habilitações de Engenharia de áreas correlatas. O diodo é, segundo [14], um dos mais simples dispositivos eletrônicos, mas que possui uma gama extremamente vasta de aplicações, sendo essencial, portanto, um engenheiro de qualquer habilitação que trabalhe com a área de elétrica compreender seu funcionamento.

Do ponto de vista didático, nossa sugestão para o desenvolvimento do evento contextualizado é, antes de efetivamente propô-lo aos estudantes, possibilitar-lhes uma familiarização com o contexto no qual o problema a ser resolvido está inserido. Para isto, duas semana antes de apresentar de fato aos estudantes o evento e dar início à sua resolução, sugerimos a seguinte atividade de pesquisa e estudo para preparação previa, apresentada na Figura 1, da maneira como seria proposta aos estudantes, que, a nosso ver, deveria ser realizada de maneira interdisciplinar, com uma atividade conjunta das disciplinas de Matemática, Física e Química, uma vez que são conceitos químicos e físicos (estrutura atômica de elementos químicos, ligações atômicas em estruturas cristalinas, componentes fundamentais de um átomo, modelo de *Bohr*, ligações covalentes, isolantes, condutores, tensão, energia, polarização, corrente elétrica, etc.) que fundamentam o funcionamento de um diodo. A ideia é que esta atividade seja proposta em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e que os resultados dela decorrentes sejam também compartilhados neste AVA.

Finalizada a realização desta atividade de preparação prévia, sugerimos, no início do primeiro dos três encontros com os estudantes para a resolução do evento, uma discussão coletiva contando também com a participação dos docentes responsáveis pelas disciplinas de Física e de Química, com o objetivo de sistematizar, com rigor científico, mas de forma acessível a estudantes do início do curso de Engenharia, os conhecimentos por eles construídos por meio da atividade que realizaram. Concluída essa discussão, as equipes de trabalho colaborativo, compostas por três integrantes em cada uma, serão compostas e o evento contextualizado, explicitado por meio da Figura 2, será proposto.

Nosso objetivo ao trabalhar com este evento não é possibilitar às equipes a construção do modelo matemático que descreve o comportamento do diodo e nem as levar a uma compreensão aprofundada dos conceitos de Eletrônica presentes, mas explorar, a partir deste modelo, questões relacionadas às funções exponenciais.

Atividade para Preparação Prévia:
Segundo informações do website http://www.bosontreinamentos.com.br/eletronica/curso-de-eletronica/como-funciona-um-led-diodo-emissor-de-luz/, um LED (*Light-Emitting Diode*) é um tipo especial de diodo, inventado em 1962, pelo engenheiro norte-americano Nick Holonyak, contendo uma junção *pn* semicondutora, a qual conduz corrente apenas em uma direção. Tal dispositivo torna-se condutivo acima de uma tensão limite suficiente para forçar os elétrons na região tipo *n* a se combinarem com as lacunas da região tipo *p*. Sempre que isso ocorre, energia é liberada, criando um fóton, ou *quantum* de luz. A quantidade de energia liberada depende do material semicondutor empregado e de seus dopantes e determina o comprimento de onda e, consequentemente, a cor da luz emitida. Existem LEDs de diversas cores, tais como azul, vermelho, verde, laranja, etc., que possuem inúmeras aplicações, tais como em:

- Painéis de controle industriais, sistemas de áudio, carregadores de baterias, computadores, aparelhos de TV e outros eletrônicos de consumo, para indicar o status desses equipamentos;
- Luzes automotivas, sinalização, placares, jogos eletrônicos;
- Iluminação decorativa (fitas de LED, etc.);
- Aparelhos de controle remoto (LED infravermelho).

Visando compreender o estudo que desenvolveremos em nossas próximas aulas, realize uma pesquisa que lhe possibilite responder às seguintes questões:

1. O que são materiais semicondutores?
2. O que é um Diodo (o D da sigla LED)?
3. O que são materiais intrínsecos?
4. O que é dopagem?
5. O que são materiais do tipo *n* e do tipo *p*?
6. O que é uma junção *pn*?
7. O que é polarização direta de um diodo? E polarização reversa de um diodo?
8. Qual a simbologia usualmente utilizada para trabalhar com um diodo?
9. Quais são as principais aplicações de um diodo?
10. O que é Datasheet de um diodo?

Grave um vídeo de, no máximo 10 minutos, explicando, em uma linguagem acessível aos seus colegas ingressantes em um curso de Engenharia os principais conceitos presentes em tais questões.

Fig. 1. Atividade de preparação prévia da maneira como sugerimos propô-la aos estudantes.

Evento Contextualizado: Um diodo, assim como os demais componentes eletrônicos, precisa de certo tempo para passar do seu estado de condução para não condução; é o chamado tempo de recuperação do diodo. Muitas aplicações práticas exigem diodos que "se recuperem" com facilidade, isto é, que passem no mínimo intervalo de tempo possível do estado de condução para não condução. Um dos diodos de silício com essa característica é o 1N4148, um dos mais empregados na eletrônica e que possui tempo de recuperação de 4 nA. Apresentamos a seguir um trecho do *Datasheet* do diodo 1N4148 no qual são destacadas as características elétricas deste dispositivo.

Electrical Characteristics

T_j=25℃

Parameter	Test Conditions	Type	Symbol	Min	Typ	Max	Unit
Forward voltage	I_F=5mA	1N4448	V_F	0.62		0.72	V
	I_F=10mA	1N4148	V_F		0.86	1	V
	I_F=100mA	1N4448	V_F		0.93	1	V
Reverse current	V_R=20V		I_R			25	nA
	V_R=20V, T_j=150℃		I_R			50	μA
	V_R=75V		I_R			5	μA
Breakdown voltage	I_R=100μA,t_p/T=0.01,t_p=0.3ms		$V_{(BR)}$	100			V
Diode capacitance	V_R=0, f=1MHz, V_{HF}=50mV		C_D			4	pF
Rectification efficiency	V_{HF}=2V, f=100MHz		η_R	45			%
Reverse recovery time	I_F= I_R=10mA, i_R=1mA		t_{rr}			8	ns
	I_F=10mA, V_R=6V, i_R=0.1×I_R, R_L=100Ω		t_{rr}			4	ns

Fonte: https://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/551820/WINNERJOIN/1N4148.html

Considere esse diodo 1N4148 submetido a uma corrente de 30 mA e determine a queda de tensão direta através dele e os valores aproximados de suas correntes de saturação nas seguintes temperaturas: –45 °C, 50 °C e 125°C.

Por meio do estudo de conceitos relacionados à Física do Estado Sólido, demonstra-se que as características gerais de um diodo semicondutor podem ser relacionadas, para as regiões de polarização direta e reversa, por uma equação chamada equação de Schockley, que é a seguinte:

$$I_F = I_R\left(e^{\frac{V_F}{nV_T}} - 1\right) \qquad (1)$$

Na equação **(1)**:
I_F: representa a corrente direta que passa pelo diodo
I_R: representa a corrente de saturação reversa
V_F: representa é a tensão de polarização direta aplicada ao diodo
n: representa um fator de idealidade, que depende das condições de operação e de construção física do diodo.
V_T: representa a tensão térmica, definida por:

$$V_T = \frac{kT_K}{q} \qquad (2)$$

em que k é a constante de Boltzmann cujo valor é $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K, T_K é a temperatura absoluta em Kelvin, que é dada pela adição entre 273 e a medida da temperatura em graus Celsius, q é a magnitude da carga elétrica elementar, que é dada por $1{,}6 \times 10^{-19}\,C$.

Fig. 2. O evento contextualizado da maneira como sugerimos propô-lo aos estudantes.

Para que as equipes possam responder à essa questão principal, elaboramos uma série de questões auxiliares para cada um dos três encontros, sendo cada um com duração de 2 horas, que serão respondidas pelos estudantes e discutidas pelo professor sequencialmente. Para responder essas questões, os estudantes terão liberdade para utilizar *softwares*, calculadoras gráficas ou qualquer outro recurso tecnológico a que possam ter acesso. Por meio das Tabelas 1, 2 e 3 explicitamos o objetivo de cada um dos três encontros e as questões propostos visando atingi-lo.

Tabela 1. Questões auxiliares e objetivo do 1º encontro.

Questões	Objetivo
Q1. A equação de Shockley explicita uma relação funcional? Caso sua resposta seja afirmativa, qual a variável dependente e qual a variável independente? **Q2.** A tensão térmica é função de alguma variável? Explique e, se sua resposta for afirmativa, construa a representação gráfica desta função. **Q3.** Sabendo que o diodo 1N4148 opera entre $-65°C$ e $175°C$, determine a faixa de variação da tensão térmica desse diodo neste intervalo.	Início do processo de resolução do evento por meio da proposição das primeiras três questões auxiliares oportunizando: a retomada de conceitos de: relação funcional, variável dependente, variável independente, domínio, imagem e representação gráfica de uma função.

Tabela 2. Questões auxiliares e objetivo do 2º encontro.

Questões	Objetivo
Q4. Considerando as informações presentes no *Datasheet* do diodo 1N4148, responda: (i) Qual é a sua corrente de saturação reversa (I_R) em $25°C$ a uma tensão de polarização reversa (V_R) de $20\ V$? (ii) Considerando que, conforme apresentado no *Datasheet*, para conduzir uma corrente direta (I_F) de 10 mA, o diodo 1N4148 necessita, em geral, de uma tensão direta (V_F) de $0{,}86\ V$, determine o fator de idealidade deste diodo. **Q5.** Considerando o diodo 1N4148, construa uma representação gráfica para I_F em função de V_F considerando uma temperatura de $25°C$. **Q6.** Analisando a representação gráfica construída na questão 5, responda: (i) O que acontece com os valores de V_F à medida em que os valores de I_F crescem ilimitadamente? Como tal comportamento poderia ser explicado a partir da expressão algébrica de I_F? (ii) O que acontece com os valores de I_F à medida em que os valores de V_F decrescem ilimitadamente? Como tal comportamento poderia ser explicado a partir da expressão algébrica de I_F? (iii) Na representação gráfica construída na questão 5, o primeiro quadrante representa a região de polarização direta do diodo. Você observa, nesta região, um ponto em que há uma mudança no comportamento da função I_F? Se sim, que ponto é esse e qual seu significado no contexto do estudo dos diodos? (iv) Qual é a corrente conduzida quando a tensão direta é de $0{,}86\ V$? Esse comportamento era esperado? Explique. (v) Na representação gráfica construída na questão 5 o terceiro quadrante representa a região de polarização reversa. Nesta região, qual o significado de trabalhar com valores negativos de corrente e valores negativos de tensão? Do ponto de vista físico, tais valores são, de fato, negativos? (vi) Descreva o comportamento de I_F em função de V_F na região de polarização reversa (3º quadrante). **Q7.** A partir de suas respostas à questão 6, por qual expressão algébrica você poderia aproximar a equação de Shockley na região de polarização direta do diodo? E na região de polarização reversa?	Continuação do processo de resolução do evento contextualizado a partir da proposição de questões auxiliares oportunizando: a resolução de uma equação exponencial, a determinação da imagem de uma função para determinado elemento do domínio, a análise do comportamento de uma função a partir da observação de suas representações gráfica e algébrica e a compreensão acerca da importância de se atentar ao contexto com o qual se está trabalhando ao determinar os conjuntos domínio e imagem de uma função.

Tabela 3. Questões auxiliares e objetivo do 3º encontro.

Questões	Objetivo
Q8. Antes de prosseguirmos nas questões que permitirão resolver o problema originalmente proposto, vamos aproveitar para compreender a influência do fator de idealidade no comportamento dos diodos. Considerando a temperatura em $25°C$ (e, consequentemente, $V_T = 0{,}0257025\ V$) e $I_R = 25 \times 10^{-9}\ A$, represente graficamente I_F adotando outros valores para o fator de idealidade n, considerando sempre $n \geq 1$. O que você observa? Qual a influência de n nestas representações gráficas e, consequentemente, no comportamento dos diodos? **Q9.** Sabendo que para um diodo de silício na região de polarização reversa, a corrente reversa dobra a cada elevação de $10°C$ na temperatura, por meio de uma análise gráfica descreva o comportamento do diodo 1N4148 na região de polarização direta à medida em que a temperatura aumenta ou diminui.	Conclusão do processo de resolução do evento contextualizado a partir da proposição, antes de efetivamente solicitar aos estudantes que se detenham à questão principal (QEC), das últimas três questões auxiliares oportunizando: a análise da influência, na representação gráfica de uma função, da variação no valor de uma constante na representação algébrica desta função, determinar, recorrendo à representação gráfica ou à representação algébrica de uma função, o valor de sua

Q10. A partir do que você percebeu por meio da questão 9, determine a corrente conduzida pelo diodo quando este é submetido a uma tensão direta de 0,94 V e está operando nas seguintes temperaturas: (a) 25°C; (b) 35°C; (c) 45°C; (d) 55°C; (e) 15°C; (f) 5°C; (g) −5°C. **QEC.** Considere o diodo 1N4148 submetido a uma corrente de 30 mA e determine a queda de tensão direta através dele e os valores aproximados de suas correntes de saturação nas seguintes temperaturas: −45 °C, 50°C e 125°C.	imagem para um determinado elemento do domínio. Finalmente, responder QEC oportunizará ao estudante determinar, a partir da representação gráfica ou da representação algébrica de uma função, o elemento do domínio que tem como imagem pela função um valor conhecido; optando por trabalhar com a representação algébrica, o discente terá também que resolver uma equação exponencial.

Apresentamos a seguir, por meio das Tabelas 4 e 5 os obstáculos epistemológicos e as dificuldades do ponto de vista cognitivo com os quais as equipes podem se deparar e, consequentemente, serem oportunizadas a enfrentar, dependendo do caminho escolhido pelos estudantes para responder às questões propostas em cada um dos encontros.

Tabela 4. Obstáculos epistemológicos que podem minimizados a partir das questões propostas.

Obstáculo Epistemológico	Questões que permitem o enfrentamento do obstáculo
Ob1: a Matemática não se preocupa com problemas práticos.	Todas, exceto Q4(i)
Ob2: considerar as mudanças como fenômenos, focando em como as coisas mudam, ignorando o que muda.	Todas, exceto Q4 e Q6(iv)
Ob3: considerar a ordem das variáveis como irrelevante.	Todas, exceto Q4 e Q6(v)
Ob4: leis na Física e funções na Matemática não têm nada em comum, pertencem a diferentes domínios (compartimentos) de pensamento.	Todas, exceto Q4(i)
Ob5: o gráfico de uma função é um modelo geométrico de uma relação funcional, não precisa ser fiel, pode conter pontos (x, y) tais que a função não seja definida em x.	Q2, Q3, Q5, Q8, Q9, Q10, QEC
Ob6: as mudanças de uma variável são mudanças em relação ao tempo.	Todas, exceto Q4

Tabela 5. Dificuldades cognitivas que podem minimizadas a partir das questões propostas.

Dificuldade Cognitiva	Questões que permitem a minimização da dificuldade
D1: a não percepção de que os pontos da representação gráfica de uma função representam os pares (x, y) em que x é um elemento do domínio e y é a imagem de x pela função considerada.	Todas, exceto Q1, Q4, Q6(v) e Q7
D2: identificar o par ordenado composto por um elemento do domínio e sua respectiva imagem para funções dadas na forma algébrica quando é fornecido o valor da imagem e se quer o correspondente valor do domínio.	QEC
D3: trabalhar com as diferentes representações de uma função, representar e analisar graficamente uma função.	Todas, exceto Q1 e Q4
D4: trabalhar com a simbologia relacionada ao conceito de função, não compreendendo o conceito de variável, a notação *f(x)*, a distinção entre obter $f(a)$ e encontrar os valores de x para os quais $f(x) = a$.	Todas, exceto Q4, Q6(iii) e Q6(v)
D5: diferenciar a variável dependente e a variável independente.	Todas, exceto Q4 e Q6(v)
D6: fazer distinção entre variável e incógnita.	Q2, Q5, Q4(ii), QEC
D7: o conhecimento sobre funções tende a ser fragmentado.	Todas, exceto Q4 e Q6(v)
D8: inabilidade em perceber as funções como objetos abstratos de alto-nível.	Todas, exceto Q4 e Q6(v)

Na Tabela 6 apresentada a seguir, explicitamos as competências matemáticas, na acepção de [4], que podem ser desenvolvidas ou mobilizadas na resolução do evento contextualizado que elaboramos.

Tabela 6. Competências Matemáticas desenvolvidas ou mobilizadas nas questões trabalhadas.

Competência Matemática	Questões que possibilitam o desenvolvimento ou mobilização da competência
C1: pensar matematicamente.	Todas, exceto Q4(i) e Q6(v)
C2: raciocinar matematicamente.	Todas, exceto Q4(i) e Q6(v)
C3: apresentar e solucionar problemas matemáticos.	Todas, exceto Q4(i) e Q6(v)

C4: modelar matematicamente.	Q4(ii), Q7, Q9, QEC
C5: representar entes matemáticos.	Q2, Q3, Q4(ii), Q5, Q6(iii), Q6(iv), Q7, Q8, Q9, QEC
C6: manipular símbolos matemáticos e trabalhar com o formalismo matemático.	Todas, exceto Q1, Q4(i) e Q6(v)
C7: comunicar em, com e sobre a Matemática.	Todas, exceto Q4(i) e Q6(v)
C8: fazer uso de instrumentos e ferramentas.	Todas, exceto Q1 e Q6(v)

Como destacamos na seção 2 deste artigo, em nossa concepção a intervenção que elaboramos, em seus diferentes momentos, desde a atividade de preparação prévia que os estudantes deverão realizar, é potencialmente rica para a revisita e mobilização de conhecimentos fundamentais que constituem um aspecto do que [6] consideram como o primeiro (E1) dos três estratos que compõem a Base Epistemológica da Engenharia (BEE). É o que salientamos por meio da Tabela 7. A proposta que apresentamos oportuniza também a construção de aspectos componentes das competências vinculadas àqueles que devem ser os resultados, em termos de aprendizagem, de um curso de Engenharia (segundo estrato – E2) e de competências requeridas do profissional da Engenharia (terceiro estrato – E3); é o que evidenciamos por meio das Tabelas 8 e 9.

Tabela 7. Momentos da intervenção elaborada que oportunizam a mobilização de conhecimentos fundamentais.

Primeiro Estrato de BEE (E1)	Momentos oportunizando a revista ou mobilização
Conhecimentos básicos a respeito de linguagens, Matemática, Física, Química, etc., construídos antes do ingresso na universidade.	Na Preparação Prévia e na resolução de todas as questões

Tabela 8. Momentos da intervenção elaborada que oportunizam a construção de aspectos relacionados aos componentes das competências vinculadas àqueles que devem ser os resultados, em termos de aprendizagem, de um curso de Engenharia.

Segundo Estrato de BEE (E2)		Momentos oportunizando a construção ou o desenvolvimento
Conhecimento e Compreensão	a. de princípios científicos e matemáticos relevantes para determinada habilitação de Engenharia.	Preparação Prévia e todas as questões
	b. de maneira sistemática de conceitos-chave da habilitação de Engenharia que está sendo estudada.	Preparação Prévia e todas as questões, exceto Q6(i) e Q6(ii)
	c. do contexto multidisciplinar da Engenharia.	Preparação Prévia e todas as questões
Habilidades requeridas nas análises características em Engenharia	d. aplicar seus conhecimentos e compreensões para identificar, formular e resolver problemas de Engenharia usando métodos estabelecidos.	Q3, Q4(i), Q4(ii), Q6(iii), Q6(iv), Q8, Q9, Q10, QEC
	e. resolver problemas com os quais não se deparou anteriormente.	Todas as questões, exceto Q5, Q6(i), Q6(ii) e Q6(iii)
	f. aplicar métodos diversificados na resolução de problemas.	Preparação Prévia e todas as questões
Habilidade requerida na elaboração ou desenvolvimento de projetos em Engenharia	g. aplicar seu conhecimento e compreensão para planejar soluções de problemas com os quais não se deparou anteriormente e que possivelmente envolvem outras áreas.	Todas as questões
Habilidades de Investigação	h. realizar pesquisas na literatura e usar bases de dados e outras fontes de informação.	Preparação Prévia, Q4(i), Q6(iii), Q6(iv), Q6(v), Q8
	i. identificar, localizar e obter dados requeridos.	Todas as questões, exceto Q1, Q2, Q6(i), Q6(ii), Q6(v) e Q6(vi)
	j. avaliar criticamente os dados e a partir disso elaborar conclusões.	Todas as questões, exceto Q4(i), Q5, Q10 e QEC
Habilidade requerida na prática da Engenharia	k. integrar conhecimentos de diferentes áreas e níveis de complexidade.	Preparação Prévia e todas as questões, exceto Q4(i), Q5, Q6(i), Q6(ii) e Q6(vi)

Habilidades Transferíveis	l. compreender sua função efetiva individualmente e como membro de um grupo ou de uma equipe.	Preparação Prévia e todas as questões dos três encontros.
	m. utilizar diversos métodos para comunicar-se eficazmente.	Preparação Prévia e todas as questões dos três encontros.
	n. reconhecer a necessidade de aprender, continuamente, de maneira independente, ao longo de toda a vida.	Preparação Prévia e todas as questões dos três encontros.
	o. exercer a liderança em uma equipe.	Todas as questões dos três encontros.

Tabela 9. Momentos da intervenção elaborada que oportunizam o desenvolvimento de algumas competências requeridas do profissional da Engenharia.

Terceiro Estrato de BEE (E3)		**Momentos oportunizando o desenvolvimento**
Competências Requeridas do Profissional da Engenharia	a. aplicação apropriada de métodos para analisar e resolver problemas de Engenharia.	Todas as questões, exceto Q1, Q2, Q6(i), Q6(ii) e Q6(vi)
	b. utilização efetiva de habilidades interpessoais e de comunicação.	Preparação Prévia e todas as questões dos três encontros.

Tendo apresentado o evento contextualizado que elaboramos e os aspectos que entendemos serem possíveis de trabalhar por meio dele, apresentamos a seguir algumas reflexões acerca do que foi realizado e de como daremos continuidade ao trabalho futuramente.

4 Conclusões e trabalhos futuros

Após ter elaborado o evento contextualizado apresentado e discriminado os diferentes aspectos, em termos da formação geral e especialmente da formação matemática dos futuros engenheiros que por meio dele podem ser explorados, nosso próximo passo será implementá-lo, na forma de um experimento piloto, junto a um grupo de ingressantes, para então, a partir dos dados coletados por meio de gravações em áudio e vídeo e dos materiais escritos pelos estudantes, analisar, sob distintos pontos de vista, se os objetivos previstos puderam ou não ser atingidos e que ajustes ou reformulações precisam ser propostos para maximizar, em termos da aprendizagem do engenheiro em formação, os resultados de sua utilização em aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Convém ressaltar o alinhamento do tipo de abordagem que estamos propondo para a Matemática nos cursos de Engenharia com as reflexões realizadas em âmbito internacional no que se refere à Educação em Engenharia. Em [30] ressalta-se, por exemplo, que para que os cursos sejam atraentes aos discentes e eficazes na formação de futuros engenheiros, devem, tanto quanto possível, desde o início, oportunizar momentos de trabalhos em grupos com situações nas quais as Ciências Básicas e a Matemática possam ser imediatamente reconhecidas por eles como suportes, alicerces em suas formações e não como conteúdos delas desvinculados. Também neste sentido, [31] destaca que a motivação do estudante de Engenharia para o estudo da Matemática pode ser ampliada por meio da explicitação de como os preceitos desta ciência são empregados na indústria, na sociedade e especialmente em sua futura atuação profissional do estudante o que vem ao encontro das ideias de [32], segundo os quais "a percepção do aluno em relação à Matemática e ao seu ensino têm um impacto sobre seu desempenho acadêmico em Matemática e atitudes e percepções positivas em relação a este assunto irão encorajar o indivíduo a aprendê-lo melhor" (p. 17 – tradução nossa). Para [33], o desenvolvimento das habilidades requeridas do profissional que está sendo formado é potencializado pela resolução, durante o curso, de problemas mais próximos da realidade que ele irá enfrentar em sua carreira. Finalmente, os preceitos do MoDiMaCo, modelo didático vinculado à TMCC também estão em sintonia com as tendências atuais no campo da Educação em Engenharia. Em [33], por exemplo, explicita-se a importância, na formação do engenheiro com as características requeridas no século XXI, de uma abordagem que seja centrada no estudante que, de forma autônoma, recorrendo à reflexão contínua e contando com um elemento de satisfação, uma vez que deverá estar motivado para tal ação, possa explorar diferentes problemas, o que exige do professor, segundo o autor, a criação de contextos de aprendizagem que gerem curiosidade nos estudantes; estimule-os a exercitar a imaginação e que lhes desperte o desejo de aprender algo que percebem ser importante para suas formações.

Agradecimentos. Agradecemos à Patrícia Camarena Gallardo por todas as suas contribuições para o ensino de Matemática na Engenharia e, especialmente, pelos ensinamentos e pela generosidade em compartilhar conosco sua experiência, sua amizade e seu exemplo de dedicação à pesquisa até seus últimos momentos de vida.

Referências

1. Camarena, P.: A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Revista Innovación Educativa*, Vol. 13, No. 62, pp. 17-44 (2013a)
2. Brousseau, G.: Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 4, No. 2, pp. 165-198 (1983)
3. Sierpinska, A.: On understanding the notion of function. Dubinsky, E.; Harel, G. (Eds): *The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America, pp. 25-58 (1992)
4. Niss, M.: Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM project. Gagatsis, A; Papastravidis, S. (Eds): *3º Mediterranean Conference on Mathematics Education*. Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, pp.115-124 (2003)
5. Brasil.: Resolução CNE/CES n. 2/2019, de 23 de abril de 2019. *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia*. https://bityli.com/1pxvh (2019). Acesso em 06 de maio de 2020
6. Grimson, W.; Murphy, M.: The Epistemological Basis of Engineering, and Its Reflection in the Modern Engineering Curriculum. Christense, S. H. et al. (Eds): *Engineering Identities, Epistemologies and Values (Engineering Education and Practice in Context, volume 2)*. Springer, pp. 161-178 (2015)
7. Lima, G. L.; Bianchini, B. L.; Gomes, E.: Elaboração de eventos contextualizados para aulas de Cálculo Diferencial e Integral em diferentes cursos de graduação. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 32, No. 2, pp. 186-194 https://bityli.com/SMSgX (2019). Acesso em 21 de janeiro de 2021
8. Camarena, P.: Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, https://bityli.com/GjeSQ (2010). Acessado em 02 de julho de 2020
9. Camarena, P.: El conocimiento de las ciências básicas en profesores de ingeniería. Carrillo, A. J.; Ontiveros, H. V.; Ceceña, T. P. (Eds): *Formación docente: Un análisis desde la práctica*. Red Durango de Investigadores Educativos A.C., pp. 212-249 (2013b)
10. Lima, G. L.; Bianchini, B. L.; Gomes, E.: Dipcing: uma metodologia para o planejamento ou redirecionamento de programas de ensino de Matemática em cursos de Engenharia. *Anais do XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*, pp. 1-10. https://bityli.com/quKeN (2016). Acesso em 21 de janeiro de 2021
11. Camarena, P.: Constructos Teóricos de la Metodología Dipcing en el Área de la Matemática. *3º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, pp. 1-7 (2004)
12. Camarena, P.; González, L. G.: Contextualización de las series en ingeniería. *The Mexican Journal of Electromechanical Engineering*, Vol. 5, No. 4, pp. 201-206 (2001)
13. Camarena, P.: Epistemología de las impedancias complejas en ingeniería. *Revista Innovación Educativa*, Vol. 12, No. 58, pp. 35-54 (2012)
14. Boylestad, R. L.; Nashelsky, L.: *Dispositivos Eletrônicos e Teoria dos Circuitos*. Pearson (2013)
15. Ponte, J. P.: O conceito de função no currículo de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, Vol. 15, pp. 3-9 (1990)
16. Caraça, B. J.: Conceitos Fundamentais da Matemática (1ª edição conjunta das partes I, II e III). Sá da Costa (1951)
17. Stewart, J.: *Cálculo – Volume 1*. Cengage Learning (2017)
18. Markovits, Z.; Eylon, B. S.; Bruckheimer, M.: Dificuldades dos Alunos com o Conceito de Função. Sgulte, A. P.; y Coxford, A. (Orgs): *As Ideias da Álgebra*. Atual, pp. 49-69 (1994)
19. Oliveira, N. de.: *Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. https://bityli.com/ITQoO (1997), Acesso em 15 de fevereiro de 2021
20. García Quiroga, L.; Vázquez Cedeño, R. A.; Hinojosa Rivera, M.: Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías*, Vol. 7, No, 24, pp. 27-34 (2004)
21. Igliori, S. B. C.: Uma contribuição para o Ensino-aprendizagem de Noções de Cálculo Diferencial Integral. *Atas do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, pp. 1-10 (1997)
22. López, J.; Sosa, L.: Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Edu*cativa, Vol. 22, pp. 308-318 (2008)

23. Akkoç, H.; Tall, D.: The Simplicity, Complexity and Complication of the Function Concept. *Proceedings 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 25-32 (2002)
24. Dubinsky, E.; Wilson, R. T.: High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 32, pp. 83–101 (2013)
25. Brendefur, J. L.; Hughes, G.; Ely, R.: A Glimpse into Secondary Students' Understanding of Functions. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, pp.1-22 (2015)
26. Bianchini, B. L.; Lima, G. L.; Gomes, E.; Nomura, J. I.: Competências matemáticas: perspectivas da SEFI e da MCC. *Educação Matemática Pesquisa*, Vol.19, No. 1, p. 49-79 (2017) DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i1p49-79
27. Camarena, P.: Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, Vol. 19, No. 2, pp. 01-26 (2017) DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26
28. Lima, G. L.; Bianchini, B. L.; Gomes, E.; Philot, J. M. P.: Ensino da Matemática na Engenharia e as atuais Diretrizes Curriculares Nacionais: o Modelo Didático da Matemática em Contexto como possível estratégia. *Currículo sem Fronteiras*, Vol. 21, No. 2 (no prelo)
29. Lima, G. L.; Bianchini, B. L.; Gomes, E.: Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. *Educação Matemática Debate*, Vol. 2, No. 4, pp. 116-135 (2018) DOI http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06
30. Pitt, M.: Why go to university? The past and future of engineering education. Kapranos, P. (Ed): *The interdisciplinary future of engineering education: breaking through boundaries in teaching and learning*. Routledge Taylor & Francis Group, pp. 17-27 (2019)
31. Pohjolainen, S. Mathematics Education in EU for STEM Disciplines. Pohjolainen, S. et al. (Eds): *Modern Mathematics Education for Engineering Curricula in Europe (A Comparative Analysis of EU, Russia, Georgia and Armenia)*. Springer, pp. 1-16 (2018)
32. Mercat, C. et al.: Perceptions of Mathematics. Pohjolainen, S. et al. (Eds). Modern Mathematics Education for Engineering Curricula in Europe (A Comparative Analysis of EU, Russia, Georgia and Armenia). Springer, pp. 17-31 (2018)
33. Kapranos, P.: Personal and professional skills: something they to teach you at university. Kapranos, P. (Ed): *The interdisciplinary future of engineering education: breaking through boundaries in teaching and learning*. Routledge Taylor & Francis Group, pp. 113-132 (2019)

Herramientas estadísticas aplicadas al estudio del color en muestras de morteros arquitectónicos

Alicia M. Gaisch[1], Miriam B. Cocconi[1], Anahí López[2]

[1] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Av. del Valle 5737, B7400JWI Olavarría, Buenos Aires, Argentina.
agaisch@fio.unicen.edu.ar, mcocconi@fio.unicen.edu.ar

[2] LEMIT: Laboratorio de Entrenamiento Multidisciplinario para la Investigación Tecnológica, CICPBA, Calle 52 e/121 y 122, B1900AYB La Plata, Buenos Aires, Argentina y LEMaC-UTN-FRLP/Centro Asociado CICPBA.
colores@lemit.gov.ar

Resumen. El cambio del color gris habitual en las mezclas cementíceas incorporando pigmentos según el peso de cemento Portland valora las cualidades estéticas de la superficie en la industria de la construcción. En esta presentación se analizó la variación del color en morteros preparados con cantidades variables de colorante en función del tiempo, con el objetivo de modelizar dicha variación y determinar la influencia de cada parámetro (concentración, tiempo). Se trabajó con un pigmento de base ferrítica, de color amarillo. El color se midió con un espectrómetro BYK-Gardner programado para funcionar con el sistema CIELAB. Se trabajó con un diseño factorial, lo que permitió identificar y seleccionar los factores de mayor incidencia. Además, se aplicaron regresiones lineales múltiples para obtener un modelo predictivo. El análisis estadístico se realizó aplicando el programa InfoStat Profesional.

Palabras Clave: Morteros pigmentados, Diseño factorial, Regresión lineal múltiple

1 Introducción

El empleo de hormigones coloreados es una tendencia que se incrementa día a día y que ha generado el interés en áreas que tradicionalmente no lo utilizaban. Las principales causas del aumento de su uso se deben al menor costo que presentan frente a otros materiales, sumado a la versatilidad que ofrece este material realizado a base de cemento Portland. Una de las maneras más eficaces de conseguir el cambio de color gris es mediante la adición de pigmentos en la masa. Estos son polvos cuyo color depende de su naturaleza, composición química, modo de fabricación, pureza, forma, granulometría, superficie específica de las partículas y otras propiedades de la materia. En la actualidad se cuenta con una extensa gama de pigmentos inorgánicos que permiten colorear al hormigón en prácticamente cualquier tono [1].

Este tipo de hormigón debe cumplir, además de las propiedades físicas, mecánicas y durables para las que fue diseñado, con exigencias visuales como lo son la homogeneidad y la estabilidad del color. La homogeneidad del color está vinculada a los materiales, a la fluidez del hormigón y a la colocación del mismo. La estabilidad del color depende de la calidad del pigmento y de la durabilidad del hormigón en la superficie [1]. La estabilidad o solidez del color "indica la resistencia de un material a las variaciones cromáticas producidas por acción de la radiación o de las variables climáticas y lo ideal para medir la decoloración, es aplicar cualquier fórmula de diferencia de color" [2].

Es importante tener en cuenta que, si el agregado grueso no está expuesto, el mortero es el responsable de aportar el color final. Es por esto que los estudios en morteros permiten verificar la reproducción del color evitando la elaboración de hormigones de prueba.

La percepción de los colores es una impresión sensorial, como resultado de la luz reflejada en un determinado objeto. Debido al carácter subjetivo de la sensación visual del color, la descripción objetiva

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

de un color resulta compleja, puesto que representa un atributo psicofísico de los objetos. La definición de color en la industria de la construcción ha sido estudiada por muchos investigadores [3-7] y el modelo que se utiliza habitualmente para cuantificarlo es el espacio CIELAB. En la Figura 1 se muestra una representación de este sistema de medición del color.

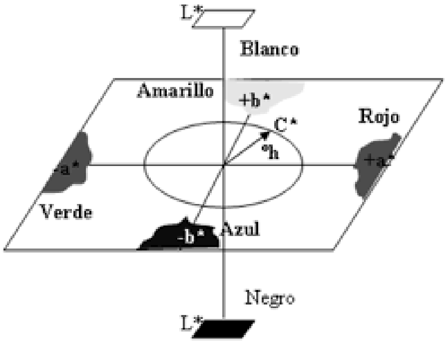


Fig. 1. Modelo o espacio de color CIELAB.

Este modelo queda definido por tres variables que se representan en sistemas cartesianos o polares. En un sistema ortogonal se lo representa por un eje vertical denominado luminosidad (L*), que indica claridad u oscuridad, y un plano horizontal conformado por los ejes a* y b*. El eje a* refleja la variación rojo-verde, siendo positivo para el primero (+a*) y negativo para el segundo (-a*). El eje b* indica la variación amarillo-azul, siendo positivo para el primero (+b*) y negativo para el otro (-b*). Por otro lado, la saturación o croma (C*) está asociada a cuán vívido es un color y el tono (h*) es el ángulo que indica si el color es rojo (0°), amarillo (90°), verde (180°) o azul (270°) [7-8]. En las ecuaciones 1 y 2 se presentan las fórmulas que relacionan los parámetros antes mencionados.

$$C^* = (a^{*2} + b^{*2})^{1/2} \qquad \textbf{(1)}$$

$$h^* = arctg\ (b^*/a^*) \qquad \textbf{(2)}$$

Las coordenadas L*, a* y b* se utilizan como indicador del color. Para cuantificar diferencias o cambios de color entre distintas muestras, evaluar la similitud o realizar reproducciones de color se puede utilizar el parámetro diferencia de color total (ΔE*76) todavía sugerido en la norma BS EN12787:2014. Esta diferencia de color entre los puntos a y b de un objeto es la distancia euclidiana entre el estímulo de color en ambos puntos y representa, aproximadamente, la diferencia de color percibida por el estímulo de color en el espacio CIELAB. En la ecuación 3 se muestra la fórmula correspondiente, la cual depende de las diferencias de los parámetros ΔL*, Δa*, Δb*. Éstos calculados según registros realizados en los puntos considerados a y b. Para aplicaciones industriales hay una escala que indica que valores de ΔE* menores a 1,5 son imperceptibles al ojo humano y difíciles de medir con instrumentos [7-9]. Sin embargo, estudios visuales verificaron que este umbral puede ascender a 3 para detectar variaciones del color si existe un criterio de diseño por color de mezclas arquitectónicas. [4]

$$\Delta E^* = (\Delta L^{*2} + \Delta a^{*2} + \Delta b^{*2})^{1/2} \qquad \textbf{(3)}$$

El uso de hormigones arquitectónicos se ha incrementado en este último tiempo, incluso en aplicaciones no tradicionales como los son esculturas, monumentos y elementos decorativos. Estos nuevos usos originan otra situación a tener en cuenta, la elección del color y la posibilidad real de obtenerlo. Además de tener en cuenta que el costo de algunos colorantes suele incrementar hasta el 100% el metro cúbico de la mezcla. Es por esto que la decisión respecto de los materiales a utilizar adquiere suma importancia para conseguir los colores deseados, siendo determinante en esto la selección adecuada del tipo y proporción de los mismos.

En este sentido, el diseño de experimentos se puede aplicar en situaciones como las mencionadas en el párrafo anterior. El diseño de experimentos es una metodología de trabajo que aplica técnicas estadísticas a situaciones prácticas, usando diferentes principios y cálculos sobre un conjunto de datos experimentales previamente seleccionados. Consiste en un plan ordenado de trabajo experimental para asegurar información apropiada la cual permite obtener conclusiones válidas en relación al objetivo concreto de la experiencia. Reunida la información relacionada al proceso bajo estudio, se establecen las variables que se denominan factores en el estudio estadístico. Los cambios debidos a las variables, que se observan sobre una determinada propiedad de interés, constituyen la respuesta. Permite determinar la importancia relativa de las variables seleccionadas, la interacción de los factores involucrados y la predicción de la influencia de las variables de control en la respuesta del proceso. Sumado a esto, es posible utilizar regresiones lineales múltiples, las cuales permiten analizar de manera conjunta la influencia de varias variables independientes sobre otra variable dependiente o respuesta. De este modo es posible obtener un modelo que permita inferir el comportamiento de la variable dependiente, identificando el efecto de cada parámetro considerado [10].

La presentación analizó el comportamiento del parámetro colorimétrico saturación (C*) en morteros elaborados con cantidades variables del colorante en función del tiempo, con el objetivo de formular una ecuación que permita modelizarlo. Además, se estudió el efecto de los parámetros edad y porcentaje de pigmento adicionado sobre el mismo.

2 Fundamentos

2.1 Diseño Bifactorial

En este trabajo se ha utilizado un diseño factorial que consta de dos factores, cada uno de los cuales con dos niveles, cuyas unidades experimentales cubren todas las posibles combinaciones de esos niveles en todos los factores [11]. Al realizar el experimento, el hecho de variar los niveles de todos los factores al mismo tiempo en lugar de uno a la vez permite estudiar las interacciones entre los factores.

Tratamiento = factor A + factor B + interacción AB

El modelo para un experimento bifactorial es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \textbf{(4)}$$

La Tabla 1 presenta cada uno de los factores de la expresión (4).

Tabla 1. Referencias correspondientes a la expresión (4)

Nomenclatura	
Y_{ijk}	Respuesta de la k-ésima repetición en el i-ésimo nivel del factor A y j-ésimo nivel del factor B
μ	Media general
α_i	Efecto que produce el i-ésimo nivel del factor A
β_j	Corresponde al efecto al j-ésimo nivel del factor B
δ_{ij}	Efecto de la interacción para la combinación de los niveles i del factor A y j del factor B
ε_{ijk}	Error aleatorio asociado a la observación ijk-ésima

2.2 Regresión Lineal Múltiple

Los modelos que se presentan en este trabajo se realizaron utilizando como herramienta matemática a las regresiones lineales múltiples, las cuales permiten analizar de manera conjunta la influencia de varias variables independientes o explicativas (edad, porcentaje de colorante) sobre otra variable dependiente o respuesta (parámetros colorimétricos). Estos modelos además de utilizarse para la predicción de respuestas a partir de variables explicativas, permiten seleccionar aquéllas que estadísticamente son significativas en la respuesta y descartar las que no aporten información de manera de simplificar la ecuación [12]. Un modelo de regresión lineal múltiple tiene el siguiente aspecto que se muestra en la ecuación (5):

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n \qquad \textbf{(5)}$$

donde, Y es la respuesta y los términos X_i representan a las independientes. Los coeficientes del modelo (b_i) son calculados mediante el programa estadístico, de modo que se minimicen los residuos. Cuando los coeficientes presentan valores no significativos, la variable asociada se elimina del modelo. A través del valor R^2 se expresa la bondad de ajuste. Este término es una cantidad que se interpreta como un factor o porcentaje de reducción de la incertidumbre cuando son conocidas las variables independientes. Cuanto más se acerque a uno, más poder explicativo tendrá el modelo. En esta presentación se informan valores de R^2 ajustada, que es más adecuado para comparar modelos con más de una variable independiente. Para llevar a cabo el procesamiento estadístico de los datos se utilizó el programa InfoStat Profesional [13].

3 Desarrollo y Resultados

Las variables colorimétricas se evaluaron sobre morteros elaborados con cemento Portland compuesto (CPC 40) y con la combinación de dos arenas silíceas de la zona (La Plata, Argentina). La relación agua/cemento se mantuvo fija en 0,40. Se trabajó con un pigmento de base ferrítica de color amarillo. Este fue incorporado a razón del peso de cemento en 0,5%, 3%, 6% y 9%. Se confeccionaron muestras testigos sin agregado de colorante. Los morteros fueron mezclados según la secuencia especificada en la norma IRAM 1622 2006. Los moldes utilizados fueron cilindros, de 10 cm de diámetro y 3 cm de alto, con base de madera. La misma fue acondicionada con un agente desmoldante a base vegetal, a razón de 1 mL cada 78 cm^2. Transcurridas 24 horas después del moldeo, cada muestra fue colocada en una cámara húmeda a 21 °C y 95% de humedad relativa. Se realizaron medidas a 7 y 28 días. Para cada condición de trabajo se realizaron 5 mediciones. Las coordenadas L*, a* y b* se midieron con un espectrómetro BYK-Gardner. A partir de estos datos se calculó la saturación o croma (C*) y la diferencia de color (ΔE*).

Con los datos obtenidos se plantearon regresiones lineales múltiples, con el objetivo de analizar la influencia simultánea de las variables independientes seleccionadas: concentración del pigmento y edad ensayada, sobre la variable dependiente, la saturación. En la Tabla 2 se presentan los resultados de ajustar a un modelo de regresión lineal múltiple, para el pigmento amarillo. La ecuación del modelo ajustado es:

$$C^* = 5{,}10 + 2{,}23 * \%\ \text{pigmento} + 0{,}01 * \text{edad ensayada} \qquad \textbf{(6)}$$

Tabla 2. Resultados obtenidos al ajustar a un modelo de regresión lineal múltiple.

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T	Valor-P
Constante	5,10	1,55	3,28	0,0060
% pigmento	2,23	0,20	11,11	<0,0001
Edad	0,01	0,06	0,15	0,8867

El estadístico R^2 presenta un valor de 0,89. Respecto al Valor-p obtenido para la variable edad de ensayo, el cual es de 0,8867, dado que es mayor a 0,05 este término no es estadísticamente significativo con un nivel de confianza del 95%. Esto indicaría que es posible eliminar esta variable del modelo. El valor positivo obtenido para el coeficiente % de pigmento, se condice con el hecho experimental que a medida que la cantidad de colorante empleado se incrementa, es mayor la intensidad del color [14].
En la Figura 2 se presenta el Q-Q plot, donde se verifica de manera gráfica la normalidad de los errores.

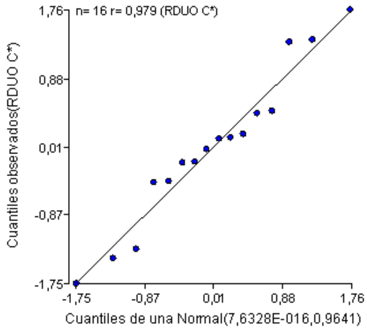


Fig. 2. Q-Q Plot

En la Tabla 3 se informan los valores de los parámetros colorimétricos obtenidos para morteros confeccionados con 0,5% y 3% de colorante amarillo. Los cambios de color en todos los casos no son posibles de ser percibidos a simple vista y de difícil medición. Esto se condice con lo obtenido anteriormente respecto a que la edad no es una variable que afecte a la saturación de manera significativa.

Tabla 3. Valores promedios de los parámetros colorimétricos obtenidos en mezclas con un 0,5% y 3% de pigmento amarillo adicionado.

0,5% pigmento	Edad	
	7 días	28 días
L*	67,2 ± 1,3	67 ± 1,9
a*	1 ± 0	0,9 ± 0,1
b*	6,3 ± 0,2	6,3 ± 0,4
ΔE*		2,1 ± 1,1
3 % pigmento	**Edad**	
	7 días	28 días
L*	66,2 ± 0,2	65,2 ±5,4
a*	2,4 ± 0,2	2,7 ± 1
b*	10,3 ± 1	13,6 ± 4,5
ΔE*		2,29 ± 1,5

En la Tabla 4 se muestran los valores de los estadísticos obtenidos con el Diseño Factorial.

Tabla 4. Estadísticos obtenidos aplicando Diseño factorial.

Variable	R^2	R^2 Aj	CV
C*	0,99	0,98	7,83

El valor del estadístico R^2 ajustado (0,98) indica que los efectos incluidos en el modelo explican el 98% de la varianza de la variable dependiente.

También se realizaron tablas de análisis de varianza (ANOVA) para estudiar la influencia o no, sobre el parámetro C*, entre las edades ensayadas y el porcentaje de pigmento adicionado. En la Tabla 5 se muestran los resultados obtenidos, comparando para las muestras adicionadas con pigmento amarillo.

Tabla 5. Cuadro de Análisis de la Varianza.

Fuentes Variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F calculado	p-valor
Modelo.	435,73	4	108,93	72,93	0,0026
% de pigmento	435,72	3	145,24	97,24	0,0017
Edad	0,01	1	0,01	0,01	0,9448
Error	4,48	3	1,49		
Total	440,21	7			

A partir del análisis de la misma es posible inferir que es significativo el porcentaje de colorante sobre el valor de C*, dado que el p-valor es 0,0017.

El estudio se completó realizando el test de Tukey mostrado en la Tabla 6 [10].

Tabla 6. Test Tukey α=0,05.

Edad	Medias	n	Error estándar	
7 días	15,64	4	0,61	A
28 días	15,57	4	0,61	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0,05)

A partir del Test de Tukey es posible corroborar lo que se observa en la tabla de ANOVA, que no hay diferencias significativas sobre el C* si se considera la edad de 7 o 28 días (p-valor 0,9498).

En lo que respecta a los porcentajes ensayados, se concluye que al incrementar pigmento aumenta la saturación de la muestra. De los datos presentados en la Tabla 7 es posible inferir que las variaciones de C* en relación con el porcentaje de pigmento adicionado, no son significativamente diferentes entre los porcentajes más pequeños (0,5% y 3%) y los más elevados (6% y 9%). Estos resultados van en el mismo sentido que los que se reportan en cuanto a que la saturación aumenta inicialmente de forma lineal hasta llegar a un punto a partir del cual el incremento de tonalidad por unidad de colorante adicionado es prácticamente nulo [14]

Tabla 7. Test Tukey α=0,05.

% pigmento	Medias	n	Error estándar		
0,50	6,70	2	0,86	A	
3	9,99	2	0,86	A	
6	22,01	2	0,86		B
9	23,73	2	0,86		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0,05)

4 Conclusiones

La ecuación obtenida (C* en función del porcentaje del pigmento y la edad), con las variables analizadas y en las condiciones establecidas presenta un valor aceptable de correlación. De la fórmula es posible inferir el comportamiento colorimétrico a edades y porcentajes no ensayadas, pudiendo establecer tendencias a largo plazo. Respecto de los factores que modifican el valor de la saturación se concluye que no hay diferencias estadísticas significativas sobre el C* si se considera la edad de 7 ó 28 días. Además, el modelo estadístico planteado concuerda con observaciones visuales realizadas en otras experiencias. En esta línea, se prevé continuar el análisis completando el estudio con los resultados obtenidos para muestras a las cuales se les añadió porcentajes similares de colorante rojo y negro.

Finalmente, consideramos que el compartir situaciones como las aquí presentadas con nuestros estudiantes permite que los futuros profesionales de la ingeniería puedan reconocer la potencialidad que brinda la estadística como una herramienta básica para interpretar datos y decidir sobre un proceso o situación determinada.

Agradecimientos. El trabajo conjunto entre docentes investigadores de Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires e investigadores del Laboratorio de Entrenamiento Multidisciplinario para la Investigación Tecnológica es un inicio de las investigaciones aplicadas que se desarrollarán en el marco de un convenio de cooperación en redacción.

Referencias

1. Mailvaganam, N.: Concrete Admixtures Handbook: Properties, Science and Technology. V.S. Ramachandran (1995)
2. Lozano, R.: *El color y su medición*. Americalee S.R.L. 640 (1978)
3. López, A.; Tobes, J.M.; Giaccio, G.; Zerbino, R.: Advantanges of mortar-base designed for coloured self-compacting concrete. *Cement and Concrete Composites*, Vol. 31, No. 10, pp. 754-761 (2009)
4. López, A.: Patrimonio Moderno. Evaluación de los aspectos estéticos. *Actas Jornadas de Técnicas de Reparación y Conservación del Patrimonio (COIBRECOPA) III Congreso Iberoamericano y XI Jornada de Técnicas de Reparación y Conservación del Patrimonio* (La Plata) pp. 1-13. (2013)
5. López, A.; Guzmán, G.A.; Di Sarli, A. R; Color stability in mortars and concretes. Part 1: Study on architectural mortars, *Construction and Building Materials*, Vol. 123, pp. 617-622 (2016)
6. López, A.; Guzmán, G.A.; Di Sarli, A. R;Color stability in mortars and concretes. Part 2: Study on architectural concretes, *Construction and Building Materials,* Vol. 123, pp. 248–253 (2016)
7. Teichmann, G.: The use of colorimetric methods in the concrete industry. *Betonwerk+Fertigteil-Technik*, No 11, pp. 58-73 (1990)
8. Wyszecki, G.; Stiles, W.S.: *Color Science, Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulas.* John Wiley & Sons (2000)
9. Melgosa, M.; Pérez, M.; Yebra, A.; Huertas, R.; Hita, E.: Algunas reflexiones y recientes recomendaciones internacionales sobre evaluación de diferencias de color. *Óptica Pura y Aplicada*, Vol. 34, pp. 1-10 (2001)
10. Montgomery Douglas, C.: *Diseño y Análisis de Experimentos.* Editorial Limusa (2004)
11. Kuehl,R.: *Diseño de experimentos: principios estadísticos para el diseño y análisis de investigaciones.* Thomson-Learning (2000
12. Walpole, R.E.; Myers, R.H.; Myers, S.L.; Ye, K.: *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Pearson Educación (2012)
13. Di Rienzo, J.A.; Casanoves, F.; Balzarini, M.G.; Gonzalez, L.; Tablada, M.; Robledo, C.W. InfoStat versión 2019. Grupo InfoStat, FCA, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. http://www.infostat.com.ar
14. Schleußer, W.: Colouring concrete with pigments. *Betonwerk+Fertigteil-Technik,* Vol. 57, pp. 44-53 (1991)

Análisis de la Convergencia de Sucesiones y Series Basado en el Desarrollo Competencial Aplicando el Concepto de Recursividad en Ingeniería

Mónica B. Dádamo, Sara E. De Federico, Ángel E. Riva

Departamento de Materias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario, Zeballos 1341, Rosario, Argentina
{mbdadamo, saraedf}@gmail.com, aeriva@hotmail.com

Resumen. Este trabajo propone el diseño e implementación de una propuesta didáctica para el aprendizaje del concepto de convergencia de sucesiones y series numéricas en la asignatura Análisis Matemático I en las carreras de Ingeniería. Está basada en el desarrollo competencial e incluye el concepto de recursividad. La articulación entre la conceptualización teórica y las prácticas de Laboratorio son importantes para desarrollar las problemáticas de contextos reales en diferentes semióticas. La programación de los modelos matemáticos favorece a la comprensión, tanto de la matemática como de la lógica existente en los algoritmos internos que poseen las herramientas informáticas. Se busca modificar los enfoques tradicionales de enseñanza, para mejorar el nivel de comprensión general de la asignatura, mostrando una fuerte convergencia entre la Matemática y el uso de recursos tecnológicos, permitiendo generar ambientes de aprendizaje que ayuden a la generación de procesos de construcción del conocimiento matemático.

Palabras Clave: Recursividad, Estrategia de enseñanza, Sucesiones y series, Competencias.

1 Introducción

En las carreras de Ingeniería de las Universidades argentinas hay un consenso generalizado por modificar los enfoques tradicionales de enseñanza para mejorar el nivel de comprensión general de las asignaturas de la formación inicial de las carreras. Particularmente, en la asignatura Análisis Matemático I (AMI), el énfasis está puesto en establecer una fuerte convergencia entre la Matemática y el uso de recursos tecnológicos en su enseñanza, que permitan generar ambientes de aprendizaje que ayuden a la generación de procesos de construcción del conocimiento matemático.

La transferencia de conocimiento es un tema elemental en el análisis del proceso de aprendizaje y desarrollo, que no debe ser sólo para estimular la reproducción de conceptos, ni la repetición ni la memorización [1]. En el campo de la investigación de la didáctica de las matemáticas se admite, desde hace décadas, el interés de utilizar software matemáticos, tanto por las ventajas pedagógicas que se observan desde el punto de vista educativo como por la gran capacidad de almacenamiento, la propiedad de simular fenómenos naturales difíciles de observar en la realidad, la interactividad con el usuario y la posibilidad de llevar a cabo un proceso de aprendizaje y evaluación individualizada, entre muchas aplicaciones educativas que estos softwares proporcionan [2].

Pero si bien en la mayoría de los claustros académicos se utilizan las TIC en la enseñanza de las matemáticas, éstas no trascienden más allá de una proyección de un contenido, que en su medida reemplazan la tiza y el tablero, pero la metodología todavía sigue siendo la misma que cuando no se las utilizaba, sin despertar una motivación genuina en el estudiante.

Como refirió Benjamín Franklin, *"dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo"* [3]. Con el desarrollo del tema Sucesiones y Series se pretende involucrar al alumnado mediante explicaciones matemáticas que se desarrollan en su entorno, tanto natural como social; qué mejor manera de involucrarlos mediante la explicación matemática de algunos fenómenos observables, productos de la simulación en el Laboratorio. Este acercamiento al funcionamiento natural del mundo que nos rodea pretende motivar al alumnado en el tema en cuestión, y sobre todo, despertar en ellos un interés que sirva de base para propiciar un aprendizaje significativo.

Por otra parte, los requerimientos actuales han promovido innumerables conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos, pero no han sido suficientes para dejar sentada la importancia de la recursividad para las restantes asignaturas del plan de estudios de las carreras de Ingeniería en Sistemas de Información. Considerando que esta demanda proviene, entre otras, de la Teoría de la Computación, los docentes hemos reconocido la importancia de ampliar los métodos de enseñanza para abordar este contenido en la asignatura AMI.

Este trabajo presenta una estrategia de enseñanza que utiliza la tecnología como una importante herramienta de modelado, utilizando el software Maxima para mejorar el proceso de aprendizaje del tema sucesiones y series y el pensamiento de progresión de los estudiantes, abordando el concepto de recursividad. Creemos que la tecnología puede proporcionar una mejor comprensión de algunos conceptos matemáticos e ideas que todavía son abstractas para los estudiantes.

2 Justificación

Los estudiantes poseen dificultades relevantes en el aprendizaje del tema de progresiones (aritmética y geométrica). No relacionan a la progresión con el concepto de función ni con los conceptos de variación, ecuación, tasa de cambio, razones y proporciones. Al trabajar con progresiones aritméticas, generan una habilidad algorítmica de cálculos y aplicación de fórmulas, pero sin comprender la idea matemática que se está trabajando. No identifican los diferentes tipos de representaciones que pueden tener las progresiones (tabular, algebraica, verbal, gráfica, etc.) y no relacionan a las progresiones en un contexto de la vida cotidiana (crecimiento de poblaciones, interés simple, interés compuesto, entre otros) [4]. Estas dificultades no son nuevas. Los estudiantes de cálculo integral se les dificulta la solución de algunos problemas que tienen que ver con sucesión y series, reflexionando que *"una posible razón es que no exploramos (los docentes) otras alternativas de solución de estos u otros problemas similares"* [5].

Los saberes científicos y tecnológicos están relacionados con representaciones matemáticas y procesos de medición específicos que pueden abordarse desde la programación de los modelos matemáticos que favorece a la comprensión tanto de la matemática como también de la lógica existente en los algoritmos internos que poseen las herramientas informáticas. El estudio de la Física requiere el abordaje de magnitudes escalares y vectoriales, lo que tiene implicaciones en los modelos matemáticos programables. El curso de lenguajes de programación puede servir para comprender la complejidad de algunos fenómenos de las ciencias naturales y las ciencias sociales. De hecho, la lógica que subyace a los algoritmos, la programación, y los resultados obtenidos en la ejecución del programa, son una forma de aproximación al análisis de la estructura matemática, y una estrategia de validación de la conjetura, en el marco del desarrollo de competencias matemáticas. Se recomienda fomentar el trabajo colaborativo, en tanto que permiten desarrollar de manera transversal las competencias genéricas [6].

Además de su uso como herramienta de apoyo para la comprensión de temas, la simulación interactiva es un objeto de programación que exige la modelización de elementos de matemática y el uso de estructuras lógicas, creación de conjuntos de variables interdependientes y recursividad [7].

El uso de funciones recursivas, propias del área de la programación, introduce al alumno a la lectura de sencillos algoritmos basados en estructuras de control donde se focalizan contenidos de la Matemática Discreta (resolver situaciones problemáticas mediante el pensamiento inductivo, el deductivo y el recursivo).

Buscando replantear la fusión de los contenidos disciplinares y tecnológicos, así como establecer el bucle recursivo de los mismos como una estrategia de enseñanza, nos preguntarnos ¿Qué contenidos se abordan y cómo se espera que se aborden con soporte tecnológico? ¿Qué capacidades tecnológicas están embebidas en esos programas?

Es muy importante señalar que, con el desarrollo de la pandemia de COVID-19 derivada de la enfermedad ocasionada por el virus SARS-CoV-2, los actuales escenarios educacionales a nivel mundial también se hallan convulsionados, y ha impactado en todos los órdenes de la actividad humana, no escapando a ello la educación en ingeniería, exigiendo no solamente nuevos modos de hacer, sino nuevos modos de ser educadores/formadores.

La innovación educativa generada por la propuesta didáctica que se presenta en este trabajo, usando recursos tecnológicos (simulación interactiva) aporta información para diseñar secuencias de enseñanza-aprendizaje que apoyen a los estudiantes a progresar hacia niveles de pensamiento más sofisticados. Además de su uso como herramienta de apoyo para la comprensión de temas, la simulación interactiva es un objeto de programación que exige la modelización de elementos de matemática y el uso de estructuras lógicas, creación de conjuntos de variables interdependientes y recursividad [7].

3 Marco Teórico

3.1 Enfoque competencial

La educación por competencias ha resurgido en todo el mundo con gran fuerza desde finales del siglo XX. El concepto competencias incluye a la formación, aprendizaje, evaluación y currículo, entre otros. Se alude a las competencias profesionales para la educación superior.

La competencia es un concepto polisémico y difícil de aprehender. Existen distintos enfoques y clasificaciones, según el marco teórico y cultural que se adopte. El paradigma emergente de las competencias profesionales centra su atención en el aprendizaje, estableciendo nuevos roles y compromisos para los estudiantes, participantes activos y constructores de su propio aprendizaje. En la bibliografía se pueden encontrar distintas posturas.

El enfoque por competencias es mucho más amplio y comprensivo, y está orientado por una perspectiva socioconstructivista. Refiere que las competencias no son sólo conocimientos, habilidades o actitudes, sino que más bien movilizan, integran y orquestan tales recursos. Dicha movilización u orquestación es pertinente a cada situación educativa, pero como cada (situación) es única, necesariamente la competencia implica flexibilidad. Para Perrenoud, la descripción de una competencia implica tres elementos: las situaciones, los recursos que moviliza, y la naturaleza de los esquemas de pensamiento que permiten la movilización y orquestación de los recursos pertinentes en situaciones complejas y en tiempo real [8][9].

Las competencias no sustituyen a los objetivos, al contrario, traducir contenidos de aprendizaje en objetivos es una competencia valiosa para los docentes. Los trabajos de investigación señalan que existen tres momentos de la enseñanza en los que intervienen los objetivos: en la planificación didáctica, en el análisis de situaciones y actividades y en la evaluación. Una comparación formal entre competencias y objetivos nos muestra que tanto las competencias como los objetivos se definen mediante un verbo en infinitivo, pero las competencias se definen de manera amplia, sin definir las circunstancias y sin criterio de ejecución. En cambio una buena definición de objetivos implica especificar las circunstancias en las que se ha de ejecutar y el criterio para considerarlo correcto [10].

El enfoque socioconstructivista amplía el sentido de escolaridad y lo vincula a las prácticas sociales y a la vida. Desde esta lógica, este enfoque podría otorgarle mayor sentido a la profesión docente y modificar la relación pedagógica, al imprimirle un significado más cooperativo y menos conflictivo. En el desarrollo de competencias, el formador debe estar junto al estudiante, acompañándolo como un asesor y estimulándolo a reflexionar, en lugar de sólo volcarse en los conocimientos que deberán ser asimilados [11].

En relación con los dominios conceptuales, entendiendo campo conceptual como un conjunto informal de problemas o de situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes pero íntimamente relacionados, la revisión de los contenidos programáticos de las facultades de ingeniería de distintas universidades nacionales coincide en considerar los siguientes dominios conceptuales: Variación y cambio, Medición, Convergencia, Estructuras y Aleatoriedad. Específicamente, el dominio convergencia incluye el estudio de situaciones relacionadas con la convergencia de sucesiones y series, aproximaciones polinómicas de funciones y aproximación de integrales. Los conceptos que contiene este dominio son: sucesiones, límites de una sucesión, series, serie geométrica, telescópica, series alternantes y convergencia absoluta, criterios de la integral, comparación, cociente y de la raíz. Series de potencias, radio e intervalo de convergencia, diferenciación e integración término a término, series de Taylor y Mclaurin.

En Argentina, para el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI) las reformas del sistema educativo en la enseñanza superior tienen un elemento en común: un currículo con un enfoque basado en competencias de acceso y egreso de las Universidades. Particularmente, es de interés del trabajo focalizar sobre las competencias de acceso, que se clasifican: Competencias básicas (competencia lectora, producción de textos, interpretación y resolución de problemas), competencias transversales (capacidad para que el alumno autorregule su propio aprendizaje, individual o en grupo, y sus destrezas cognitivas generales) y competencias específicas (capacidades que permiten desempeños satisfactorios en el estudio de las carreras de ingeniería) [12].

Las planificaciones curriculares de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) de nuestro país delinearon sus objetivos basados en competencias, donde se aboga por una formación integral (finalidad) del estudiante, sustentada en el saber (recursos cognitivos, saber conocer), en el hacer (desempeño de tareas), en el ser (actitudes), en el sentir y en el comunicarse: principio rector que orienta el modelo de formación por competencias para la Educación Superior.

3.2 Perspectiva de recursividad

Para la teoría constructivista la construcción del conocimiento realizada por cada sujeto se modela recursivamente a partir del conocimiento previo del mismo. Las técnicas de enseñanza-aprendizaje derivadas de este modelo teórico involucran explícitamente dicho proceso de construcción de conocimiento. Para la teoría constructivista la meta es que el sujeto que aprende logre alcanzar conocimientos significativos, es decir, modelos mentales adecuados que estén disponibles para ser utilizados en diferentes contextos [13].

En las asignaturas iniciales de todas las carreras de Ingeniería, la recursividad resulta ser uno de los temas más complejos. Esta complejidad no reside en el uso de la computadora, ni tampoco en el hecho de que las facilidades provistas por la matemática computacional para incluir recursividad resulten difíciles de entender. La dificultad consiste en "plantear" soluciones recursivas. La recursividad resulta una forma diferente de pensar y razonar acerca de ciertos problemas. Es justamente desde este punto de vista que se encara la presentación del tema en la asignatura AMI.

Los términos “recurrente” (castellano), “recursivo” y “recursión” (informáticos) se consideran "equivalentes" para el concepto de “definirse en función de sí mismo". Un objeto es recursivo si queda definido mediante un proceso basado en su propia definición

Se sabe que una ecuación recurrente es un tipo específico de relación de recurrencia. Una relación de recurrencia para la sucesión $a_0, a_{1,}, a_2, \ldots$ es una ecuación que relaciona a_n con alguno de sus predecesores $a_0, a_1, \ldots\ a_{n-1}$. Las condiciones iniciales para la sucesión son valores dados en forma explícita para un número finito de términos de la sucesión. Resolver una relación de recurrencia consiste en determinar una fórmula explícita (cerrada) para el término general a_n, es decir una función no recursiva de n. Un ejemplo de una relación de recurrencia es el siguiente: $x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$.

3.2.1 Antecedentes y experiencias sobre diferentes metodologías de enseñanza de la Recursividad

Existen antecedentes y experiencias sobre diferentes metodologías de enseñanza de la Recursividad que permitieron argumentar la imbricada fusión de esta temática como eje para mejorar la interdisciplinariedad entre la Matemática con otras Ciencias.

La lógica de la sucesión de Fibonacci aparece en una gran cantidad de situaciones de la naturaleza; se encuentra en múltiples configuraciones biológicas y químicas, donde aparecen números consecutivos de la sucesión, como en la distribución de las ramas de los árboles, la distribución de las hojas en un tallo, los frutos de planta de ananá o piña tropical, las flores de la alcachofa, en las piñas de las coníferas, en el "árbol genealógico" de las abejas melíferas, las cadenas de carbonos.

En las asignaturas iniciales de programación se introduce el concepto de recursividad, que resulta ser uno de los temas de mayor complejidad, ya que no reside en el uso de la computadora ni tampoco en el hecho de las facilidades provistas por los lenguajes de programación para soportar procedimientos recursivos que resulten difíciles de entender, sino que ésta consiste en el "plantear" soluciones recursivas, o sea una forma diferente de pensar y razonar ciertos problemas [14].

En la búsqueda de estrategias de enseñanza que aporten a la mejor comprensión de la temática, se propone la enseñanza de la recursividad mediante problemas combinatorios equivalentes. En esta experiencia, se presenta a la recursividad como concepto básico de programación, concepto que juega un papel importante en la adquisición de competencias asociativas a la abstracción funcional y descomposición de problemas a través del concepto de inducción [15]. Si bien es una herramienta muy poderosa para resolver problemas complejos; la recursividad es uno de los conceptos más difíciles de entender para los alumnos cuando están aprendiendo a programar [16].

4 La Propuesta Didáctica

La propuesta pedagógica es la presentación de un taller en donde se hace énfasis en el tema Sucesiones y Series y su estudio guiado por bibliografía seleccionada [17]. El tema elegido provee la posibilidad de ejecutar y analizar algoritmos recursivos y modelados, base de métodos de cálculo numérico disponibles en aplicaciones informáticas.

El taller consta de clases guiadas sobre teoría de Sucesiones y Series, acompañada de actividades donde el alumno, en forma creativa y personal, genera algoritmos que permiten observar las propiedades y características destacadas del tema. Inicialmente se hace un estudio de la estructura teórica que acompaña al razonamiento y se concluye en la construcción de distintas series, de las que se analiza su convergencia o divergencia.

El taller se lleva a cabo en formato online, con características de *bootcamp*, es decir en grupo colaborativo de trabajo. Se provee una guía base en software Maxima para trabajar en forma dinámica y poder modificar y crear nuevas series en tiempo real. Se realizan actividades prácticas como las descriptas a continuación.

Actividad I Se plantea la siguiente situación problemática:
"Dada la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ observar como las sumas parciales de la serie están acotadas por arriba. Dada la siguiente expresión: $s_n < f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$. ¿Qué significa? ¿Qué criterio se está utilizando para determinar la misma? Construya una serie a partir de la serie dada, analizar su tendencia e intentar concluir acerca de su convergencia"
En las Figuras 1 a y b se puede observar la gráfica de la sucesión y la función asociada representada visualmente, de tal manera que pueda apreciarse muy claramente la correlación junto con el análisis de su convergencia, haciendo la suma infinita y aplicando el criterio de la integral, dando como resultado la convergencia, tal como se preveía. Se puede observar la forma drástica de decaimiento y aplastamiento asintótico.

El Algoritmo 1 muestra el código realizado por los alumnos durante el taller. Se puede observar el uso de estructuras lógicas de programación aprendidas en otras asignaturas también de primer año, generando una articulación horizontal durante el cursado del año académico. Esta propuesta también permite que el estudiante pruebe, según su criterio, el uso de varios comandos y líneas de código para construir y comprobar la tendencia local y global de la serie, culminando con la ejecución del criterio de la integral.

Algoritmo 1. Análisis de la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

```
kill(x);
x[n]:=1/(n)^2;
float(sum(x[n],n, 1, 100));
1.634983900184893
sol:makelist(x[n],n,1,100)$
wxplot2d([[discrete,sol],[discrete,sol]],[style,[lines,2,7],[points,2,2]],
[legend,"f[x]=1/(x)^2","x[n]=1/(n)^2"],[xlabel,"n"], [ylabel,"x(n)"])$
kill(f);
f[x]:=1/(x)^2;
wxplot2d(f[x],[x,0.0001,0.001],[style, [lines,2,3]],
[xlabel,"x"], [ylabel,"f(x)"])$
suma:float(sum(x[n],n,1,10000));
```

```
12.73506019676165
area:float(integrate(f[x],x,1,10000));
12.01290546492023
for a:10 thru 10000 step 1000  do display(float(integrate(f[x],x,1,a)));
float(log(9)+2/5)=2.597224577336219
float(log(1009)+252/505)=7.415724921343708
float(log(2009)+502/1005)=8.104894852377123
float(log(5009)+1252/2505)=9.018791972559214
float(log(6009)+1502/3005)=9.200847234982847
float(log(7009)+1752/3505)=9.354807663147971
float(log(8009)+2002/4005)=9.488196344378615
done
limit(f[x],x,inf);
0
limit(x[n],n,inf);
0
limit(sum(x[n],n, 1, inf),n,inf);
```

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx$$

```
float(integrate(f[x],x,1,inf));
1.0
  draw2d(
          line_width=2,
          color=blue,
          explicit(f[x],x,0.001,0.05),
          fill_color=lightblue,
          filled_func = x,
  explicit(f[x],x,0.001,0.05))$
```

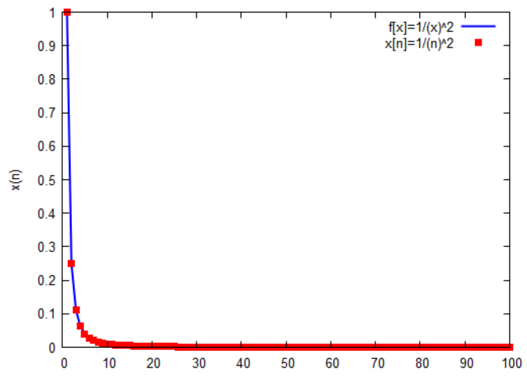


Fig. 1a. $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$

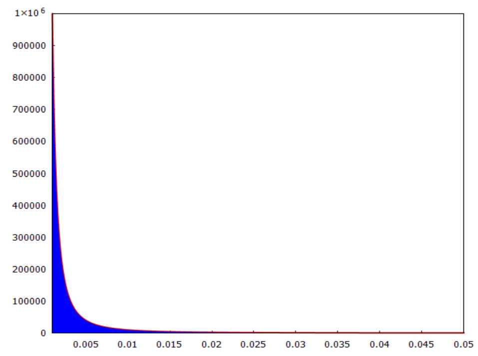


Fig. 1b. Convergencia de la integral impropia.

Las Figuras 2 a y b muestran el gráfico de la serie de términos $\sum_2^\infty \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$ a partir de n= 2, creada por los alumnos y la no convergencia de la integral impropia. Los algoritmos muestran parte del código que utilizan para observar la tendencia de la serie. Se presentan truncados debido a que Maxima brinda una precisión extremadamente larga (*bfloat*), por lo que los decimales son demasiado extensos. El código obtiene los términos y sumas parciales, realizados con estructura lógica recursiva, y uso anidado de comandos. El análisis de la serie concluye en que la misma diverge. Este resultado es una prueba fáctica de la no existencia del recíproco en el Teorema: Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge, entonces $a_n \to 0$.

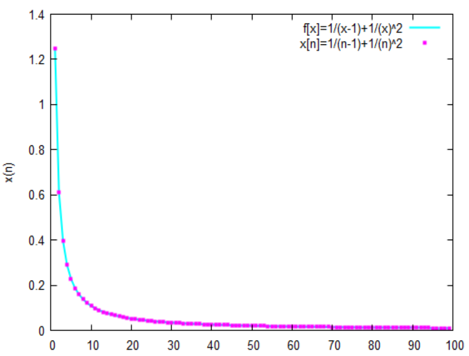


Fig. 2.a Serie $\sum_2^\infty \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$

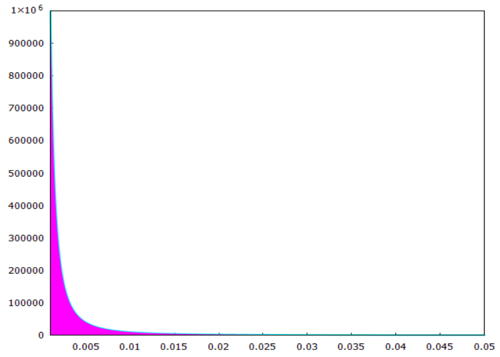


Fig.2.b La integral impropia no converge

Algoritmo 2. Pruebas con la serie $\sum_2^\infty \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$

```
x[n]:=1/(n-1)+1/(n)^2;
float(sum(x[n],n, 2, 100));
5.812361417824513
float(sum(x[n],n, 2, 100000));
12.73506019676165
for n:2 thru 10 step 1 do display(float(1/(n-1)+1/(n)^2));
float(5/4)=1.25
float(11/18)=0.6111111111111112
float(19/48)=0.3958333333333333
float(29/100)=0.29
float(41/180)=0.2277777777777778
float(55/294)=0.1870748299319728
float(71/448)=0.1584821428571428
float(89/648)=0.1373456790123457
float(109/900)=0.1211111111111111
done
sol:makelist(x[n],n,2,100);
for a:10 thru 100000000 step 10000000  do display(float(integrate(f[x],x,2,a)));
float(log(9)+2/5)=2.597224577336219
float(log(10000009)+2500002/5000005)=16.61809645095801
float(log(20000009)+5000002/10000005)=17.31124323151819
float(log(30000009)+7500002/15000005)=17.71670820629306,
float(log(40000009)+10000002/20000005)=18.00439021207819
float(log(50000009)+12500002/25000005)=18.22753372339241
float(log(60000009)+15000002/30000005)=18.4098552535197
float(log(70000009)+17500002/35000005)=18.56400591429934
float(log(80000009)+20000002/40000005)=18.69753729263815
float(log(90000009)+22500002/45000005)=18.81532031718342
done
limit(f[x],x,inf);
0
limit(x[n],n,inf);
0
limit(sum(x[n],n, 2, inf),n,inf);
```

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\, dx$$

```
float(integrate(f[x],x,2,inf));
```

defint: integral is divergent.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Actividad II

Analizar la convergencia de la serie de términos $\sum_1^\infty 2 + \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$. Hacer pruebas con series relacionadas. En la Figura 3 se puede observar la gráfica de la sucesión asociada y la función representada visualmente, mostrando la oscilación y tendencia hacia el valor 2. El Algoritmo 3 muestra el uso del criterio de D'Alembert para analizar el carácter de la serie, la que no es concluyente.

Algoritmo 3. Estudio de la serie de términos $\sum_1^\infty 2 + \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$utilizando el criterio de D'Alembert

```
kill(x);
x[n]:=2+ (-1)^(n+1)/n;
float(sum(x[n],n, 1, 100));
200.6881721793102
sol:makelist(x[n],n,1,100);
[3,3/2,7/3,7/4,11/5,11/6,15/7,15/8,19/9,19/10,23/11,23/12,27/13,27/14,31/15,31/16,35/17,35/18,39/19,39/20,43/
21,43/22,<>,
131/66,135/67,135/68,139/69,139/70,143/71,143/72,147/73,147/74,151/75,151/76,155/77,155/78,159/79,159/80,
163/81,163/82,167/83,167/84,<>,
171/85,171/86,175/87,175/88,179/89,179/90,183/91,183/92,187/93,187/94,191/95,191/96,195/97,195/98,199/99
,199/100]
for a:10 thru 1000 step 100  do display(float(sum(x[n],n,1,a)))$
suma:float(sum(x[n],n,1,100));
200.6881721793102
suma:float(sum(x[n],n,2,inf));
```

$$\sum_1^\infty 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

```
limit(f[x],x,inf);
```

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

```
limit(x[n],n,inf);
2
limit(x[n+1]/x[n],n,inf);
1
```

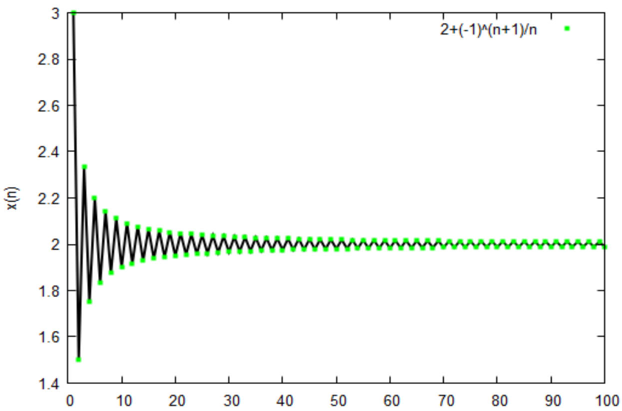


Fig. 3. Serie $\sum_1^\infty 2 + \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$

Por otro lado se presenta la serie relacionada de la forma $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$, cuya gráfica es muy similar a la anteriormente analizada. Los alumnos trabajan con la serie (Algoritmo 4) observan el error de aplicar el criterio de D'Alembert, cuyo límite es menor que 1, pero no se puede concluir la convergencia, ya que este criterio es solo aplicable a las series de términos positivos.

Algoritmo 4. Estudio de la serie $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$ y error en utilizar criterio de D'Alembert

```
x[n]:=(-1)^(n+1)/n;
suma:float(sum(x[n],n,1,1000000));
0.6931421805849453
limit(f[x],x,inf);
0
limit(x[n],n,inf);
0
limit(x[n+1]/x[n],n,inf);
-1
```

En el Algoritmo 5 los alumnos hacen pruebas observando el comportamiento del valor absoluto de la serie, haciendo comparación con el cociente con una serie convergente y comparación directa, ambos utilizando la serie convergente vista en el ejercicio 1. En esto pasos se obtienen resultados fallidos, para finalmente utilizar el criterio de Leibniz, siendo éste último positivo, por lo que se concluye que la serie es condicionalmente convergente. La Figura 4 muestra la gráfica de la serie $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Algoritmo 5. Estudio de la convergencia de la serie $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$ indagando diferentes criterios.

```
/*valor absoluto*/
x2[n]:=abs((-1)^(n+1)/n);
x2[n]:=abs((-1)^(n+1)/n)
f2[x]:=abs((-1)^(x+1)/x);
suma:float(sum(x2[n],n,1,100));
limit(f2[x],x,inf);
0
limit(x2[n],n,inf);
0
limit(x2[n+1]/x2[n],n,inf);
1
/*criterio de comparación con el cociente usando (1/n^2)*/
x3[n]:=abs((-1)^(n+1)/n)/(1/n^2);
limit(x3[n],n,inf);
∝
/*criterio de comparación directa*/
sol5:makelist(x2[n+1]-x2[n],n,1,100);
[-1/2,-1/6,-1/12,-1/20,-1/30,-1/42,-1/56,-1/72,-1/90,-1/110,-1/132,-1/156,-1/182,-1/210,-1/240,-1/272,-1/306,-
1/342,-1/380,-1/420,-1/462,-1/506,-1/552,-1/600,<>,
-1/650,-1/702,-1/756,-1/812,-1/870,-1/930,-1/992,-1/1056,-1/1122,-1/1190,-1/1260,-1/1332,-1/1406,-1/1482,-
1/1560,-1/1640,-1/1722,-1/1806,<>,-1/8742,-1/8930,-1/9120,-1/9312,-1/9506,-1/9702,-1/9900,-1/10100]
/*todos negativos, bn es menor*/
/*criterio de Leibniz*/
limit((-1)*x2[n],n,inf);
0
sol6:makelist(x2[n]-x2[n-1],n,2,100);
[-1/2,-1/6,-1/12,-1/20,-1/30,-1/42,-1/56,-1/72,-1/90,-1/110,-1/132,-1/156,-1/182,-1/210,-1/240,-1/272,-1/306,-
1/342,-1/380,-1/420,-1/462,-1/506,-1/552,-1/600,<>,
-1/650,-1/702,-1/756,-1/812,<>,-1/7656,-1/7832,-1/8010,-1/8190,-1/8372,
-1/8556,-1/8742,-1/8930,-1/9120,-1/9
312,-1/9506,-1/9702,-1/9900]
/*criterio de Leibniz: Es condicionalmente convergente*/
```

Los alumnos aplican el criterio de la serie alternante considerando las dos condiciones para determinar su convergencia:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 2) $a_{n+1} < a_n$, *para todo n*

Analizan la serie aplicando valor absoluto a cada término, por lo que se concluye que la serie es condicionalmente convergente. La Figura 4 muestra la gráfica de la $\sum_1^\infty \left|\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\right|$.

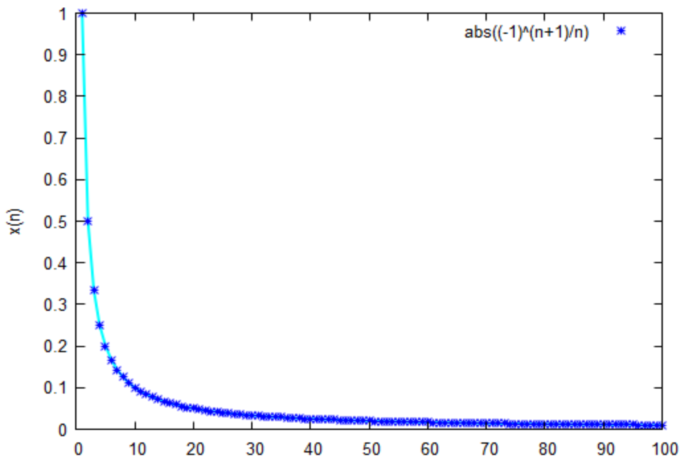


Fig. 4. Serie $\sum_1^\infty \left|\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\right|$

5 Conclusiones y Trabajos Futuros

El interés de esta propuesta didáctica estuvo en lograr que los alumnos integren la intuición con la razón y que prueben, según su criterio, el uso de comandos y líneas de código que inciden en la dinámica de la construcción de sucesiones y series.

Esta secuencia didáctica buscó evitar la mera manipulación de símbolos en la programación que dificulta la adquisición de competencias ingenieriles. Permitió utilizar metodologías adecuadas para reconocer/identificar y resolver diferentes tipos de problemas relacionados con los contenidos desarrollados en el campo ingenieril específico, generando, gestionando y explorando en forma individual y grupal.

Es importante ponderar la articulación horizontal generada entre asignaturas del primer año de la carrera a través del uso de estructuras lógicas de programación aprendidas, aportando al tan buscado vínculo entre disciplinas.

El trabajo en formato de bootcamp favorece la colaboración y retroalimentación constante entre los alumnos, con la mediación y guía de los docentes, en una estructura ágil, en donde se desdibujan las jerarquías y se promueve el intercambio cognitivo, la interrelación docente-alumno y alumno-alumno, en un marco de estudio y de priorización del aprendizaje.

Referencias

1. D'Ambrosio, U.: Mathematical Modeling as a Strategy for Building-Up Systems of Knowledge in Different Cultural Environments. En: Stillman, G.; Blum, W. and Bibemgut, M. S. (eds) *Mathematical Modeling in Education Research and Practice*. New York: Springer. Chapter 2, pp. 35-44 (2015).
2. Cuicas Avila, M.; Debel Chourio, E.; Casadei Carniel, L.; Alvarez Vargas, Z.: El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, Universidad San Pedro de Montes de Oca, Costa Rica. Vol. 7, No. 2, mayo-agosto (2007).
3. Blog Educación y Tecnología. "En Educación. Cantidad o Calidad" https://www.educoteca.com/filosofiacutea-educativa/en-educacion-cantidad-o-calidad. Accedido el 24/04/2021
4. Ortega, M.: Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas [Trabajo de Máster], *Universidad de Granada (España)*. http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Ortega_Manuel_2012.pdf (2012). Accedido el 19/03/2021
5. Posada, O.; Jaramillo, C.: El placer de doblar el papel. *Educación y Pedagogía* Vol XV Nro 35 Facultad de Educación de Medellín, Colombia pp. 11-25 (2003). https://www.researchgate.net/publication/277174082_EL_PLACER_DE_DOBLAR_PAPELMOSTRACIONES_Y_ALGUNAS_APLICACIONES_MATEMATICAS/citations (2003) Accedido el 20/03/2021
6. Secretaría de Educación Pública (México). Programa del curso "Lenguajes de Programación. México DF: Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación. https://www.cevie-dgespe.com/documentos/1446cb.pdf (2020) Accedido el 30/03/2021
7. Feurzeig, W; Roberts, N: W; Roberts, N.: *Modeling and Simulation in Science and Mathematics Education*. New York (USA): SpringerVerlag Inc. (1999).
8. Perrenoud, P.: *Construir competencias desde la escuela*. Santiago de Chile: J. C. Sáez editor (primera reimpresión, México) (2010).
9. Perrenoud, P.: *Diez nuevas competencias para enseñar*. *Invitación al viaje (5° ed)*. Barcelona: Graó (2007).
10. Hinojosa, G.: La enseñanza de competencias y las competencias para enseñar. Trabajo presentado en el *Primer Foro de Modelos y Políticas Educativas. Competencias; de la intención a la acción*. Universidad Iberoamericana, Puebla (México), 24 Febrero 2010. https://www.iberopuebla.mx/sites/default/files/informacion-adicional/descargas/ensenanzacompetencias_0.doc#:~:text=Las%20competencias%2C%20dice%20Perrenoud%2C%20no,necesariamente%20la%20competencia%20implica%20flexibilidad. Accedido el 26/03/2021
11. Moreno Olivos, T.: La evaluación de competencias en educación. *Sinéctica*, (39), pp. 01-20 (2012). http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-109X2012000200010&lng=es&tlng=es Accedido el 22/03/2021.
12. CONFEDI. Competencias en Ingeniería. *CONFEDI Web* (2014). https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf. Accedido el 02/10/2019.

13. Chesñevar, C.I.; Maguitman, A.G.; González, M.P.; Cobo, M.L.: Tecnología Informática en un curso de Lenguajes Formales y Teoría de Autómatas: un enfoque constructivista. *IX Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC)*, pp.245-255 (2003). http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/22599 Accedido el 23/03/2021.
14. Rueda, S.; Castro, S.: Recursividad Esencial en la Resolución de Problemas. *II Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*. Bahía Blanca-Universidad Nacional del Sur (2013). https://core.ac.uk/download/pdf/296350292.pdf Accedido el 08/03/2021.
15. Rubio Sanchez, M.: Enseñanza de la recursividad mediante problemas combinatorios. *III Seminario de Investigación en tecnologías de la Información aplicadas a la Educación,* pp. 41-54 (2011). https://libros-revistas-derecho.vlex.es/vid/mediante-problemas-equivalentes-380521178 Accedido el 26/03/2021.
16. Lacave, C.; Molina, I.; Giralt, J. Identificando algunas causas del fracaso en el aprendizaje de la recursividad. *Actas del XIX Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática,* pp. 225- 232 (2013). https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/15370/p28.lac_iden.pdf?sequence=1&isAllowed=y Accedido el 26/03/2021.
17. Thomas, G. *Cálculo Una Variable (*11° Ed). México DF: Pearson Educación de México, (2006).

Análisis de Caso en el campo de la Ingeniería haciendo uso de tópicos de las Ciencias Básicas. Un enfoque basado Diseño Instruccional

Alejandro Hossian, Maximiliano Alveal

Grupo de Investigación en Ciencias Básicas aplicadas a la Ingeniería – Facultad Regional Neuquén – Universidad Tecnológica Nacional – Plaza Huincul – Provincia de Neuquén – Argentina.
alejandrohossian@yahoo.com.ar, maximilianoalveal@hotmail.com

Resumen. La presente propuesta metodológica se enmarca dentro del proyecto de investigación con asentamiento en el departamento de Ciencias Básicas de la Facultad Regional Neuquén de la Universidad Tecnológica Nacional. La metodología propuesta incluye cuatro fases que se llevan a cabo en forma gradual, de manera que el estudiante se sienta capaz de desarrollar un análisis conceptual del caso de estudio. Por consiguiente, se analiza un caso de aplicación en el campo de la Ingeniería con una marcada inclinación a la exploración de las ecuaciones que conforman el modelo matemático del caso en cuestión, en aras de la consecución de un diseño robusto que sea alcanzable por un estudiante medio de la carrera de Ingeniería. Los autores se basan en las teorías prescriptivas del diseño instruccional para su investigación, habida cuenta de que las mismas están orientadas hacia la práctica y estimulan el análisis crítico y reflexivo de situaciones problemáticas ingenieriles.

Palabras Clave: Desarrollo cognitivo, Instrucción, Modelo matemático, Teorías prescriptivas, Energía.

1 Introducción

La columna vertebral de esta labor de investigación es la tesis de maestría en el campo de la Ingeniería de Software desarrollada y defendida en la Universidad Politécnica de Madrid: *"Sistema de Asistencia para la Selección de Estrategias Instruccionales"*, que consistió en la construcción de un sistema experto que recomienda estrategias y actividades de enseñanza en función de variables educativas tales como: características del estudiante, tipo de contenido a enseñar, objetivos y ambiente de aprendizaje entre otras [1]. Se asume como hipótesis de partida del presente trabajo de investigación que el estudiante medio de la carrera de ingeniería atraviesa por una serie de fases hasta adquirir el grado de madurez suficiente para elaborar y resolver un modelo simplificado de la realidad asociada con un determinado problema que se le presenta. En este sentido, se analiza un caso de estudio en el campo de la Ingeniería con una fuerte impronta de tópicos de las Ciencias Básicas, entre los cuales se destacan contenidos curriculares pertenecientes a asignaturas tales como: Análisis Matemático I, Análisis Matemático II, Álgebra y Geometría Analítica y Física I; entre otras. En esta interesante experiencia interdisciplinaria colaboran los equipos de las cátedras de las materias mencionadas a los efectos de que los estudiantes logren un análisis robusto y satisfactorio del caso presentado, tiene lugar en un escenario de cooperación entre las asignaturas que intervienen en el proceso de instrucción tal como se ilustra en la Fig. 1:

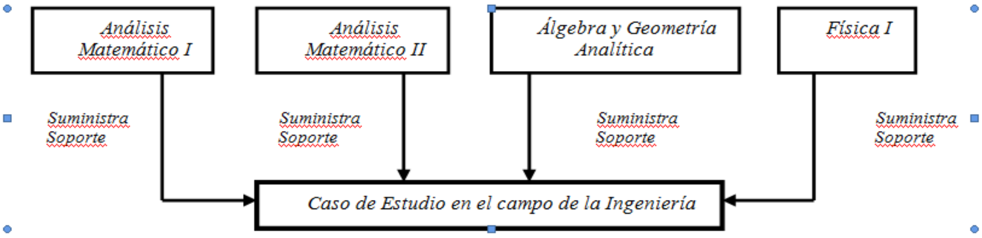


Fig. 1. Vinculación entre las asignaturas del Ciclo Básico que dan soporte caso de estudio en Ingeniería

Mediante este proceso de instrucción se intenta dotar al alumno de las herramientas necesarias que le permitan abordar de manera satisfactoria la tarea de construcción y resolución de modelos asociados a un problema real.

2 Marco Teórico

En esta sección se exponen los fundamentos de los conceptos de *"instrucción"* y de las *"teorías de la instrucción"*, los cuales constituyen la base teórica de este proceso de instrucción.

2.1 Concepto de Instrucción

La instrucción puede ser vista como la creación intencional de condiciones en el ambiente de aprendizaje con el objeto de facilitar la obtención de ciertos objetivos educacionales [2, 3]. Desde un punto de vista didáctico, la instrucción consiste en un conjunto de actividades de aprendizaje que se vinculan con todo lo que se espera que realicen los estudiantes con la finalidad de aprender, practicar, aplicar y evaluar entre otras cosas [4]. Estas actividades se articulan en determinadas estrategias de instrucción [5], las cuales ofrecen una guía explícita acerca de la forma más adecuada de implementar estas actividades.

2.2 Teorías de Instrucción

Los fundamentos teóricos que sustentan lo expuesto en la sección anterior se pueden analizar desde una perspectiva *"descriptiva"* o *"prescriptiva"* [6]:

- Perspectiva Descriptiva: se consideran a estas teorías como un conjunto de descripciones concernientes a qué resultados se observan como consecuencia de la aplicación de un proceso de instrucción dado y bajo ciertas condiciones del entorno de aprendizaje. Es decir, ayudan a describir los efectos que se producen cuando tiene lugar una determinada clase de sucesos causales.
- Perspectiva Prescriptiva: estas teorías pueden ser vistas como un conjunto de prescripciones tendientes a identificar cuál será el proceso de instrucción óptimo para obtener los resultados deseados bajo determinadas condiciones del ambiente educativo. A estas teorías se las llama "Teorías del Diseño Instruccional" o "Teorías de Diseño Educativo" [7, 8] y están orientadas hacia la práctica o hacia un objetivo. Por ejemplo, si se desea fomentar la retención a largo plazo de algún tipo de información nueva (un objetivo educativo), se sugiere ayudar al estudiante a que relacione esa información con otro tipo de conocimientos asociados que haya recibido con anterioridad (un método educativo).

3 Caso de estudio en el campo de la Ingeniería

Este caso de estudio se focaliza en un proceso de instrucción que se compone de cuatro *"etapas"*, a partir de las cuales el estudiante introduce aquellos conceptos que constituyen la base del dominio de conocimiento del problema que analiza, para luego elaborar las asociaciones existentes entre estos conceptos [9, 10], confecciona el modelo matemático que mejor representa la realidad del caso y resuelve el modelo haciendo uso de una batería de tópicos de las Ciencias Básicas que dispone en esta instancia del proceso de instrucción. A continuación, se detallan cada una de las cuatro etapas del proceso de instrucción propuesto.

Etapa I: Incorporación de los conceptos base del domino del problema a la estructura cognitiva del estudiante.

En esta etapa el estudiante incorpora los conceptos más relevantes en relación con el dominio que se le presenta. Los procesos cognitivos que se presentan con mayor frecuencia en esta etapa son la adquisición de conocimientos y la comprensión, y las estrategias de enseñanza más apropiadas son:

1) Formulación de preguntas con una fluida retroalimentación acerca de las respuestas que brinda el estudiante.
2) Estrategias que promueven la asociación de los conocimientos previos que posee el estudiante con los conceptos que están presentes en el problema.

Se presenta un caso de estudio a nivel de proyecto preliminar sin datos numéricos (lo que permite realizar un análisis más profundo de la situación), tomando como base un modelo ingenieril de un bloque descendiendo por un plano inclinado que luego se conecta con una superficie circular en ausencia de fricción. Se le presentan al estudiante dos situaciones, donde en ambas debe obtener la altura mínima desde la cual se debe dejar caer el bloque (que se corresponde con la altura del plano), de manera tal de que se cumplan ciertos requisitos de diseño.

Situación 1: el rizo circular es ***sin corte*** y se debe obtener la altura mínima desde la cual debe caer el bloque para que el mismo pueda llevar a cabo la vuelta completa sin desprenderse del rizo, tal como se ve en Fig. 2. Asimismo, el estudiante debe verificar que la fuerza normal máxima que el bloque ejerce sobre la superficie de deslizamiento, no exceda de un valor admisible establecido a nivel de proyecto para esa altura mínima.

Situación 2: el rizo circular es ***con un corte*** simétrico reflejado por el ángulo α que forma la línea que une el centro de la circunferencia con el punto A y la vertical que pasa por el centro, tal como se ve en Fig. 3. Ahora el estudiante debe obtener la altura mínima desde la cual debe caer el bloque para que el mismo pueda volar en tiro oblicuo bajo el efecto de la fuerza de gravedad, llegando a la continuación del rizo en el punto B (el detalle de esta consigna se vislumbra mejor en Fig. 6). También en este caso el estudiante debe verificar que la fuerza normal máxima que el bloque ejerce sobre la superficie de deslizamiento, no exceda de un valor admisible establecido a nivel de proyecto para la altura mínima obtenida en para esta situación.

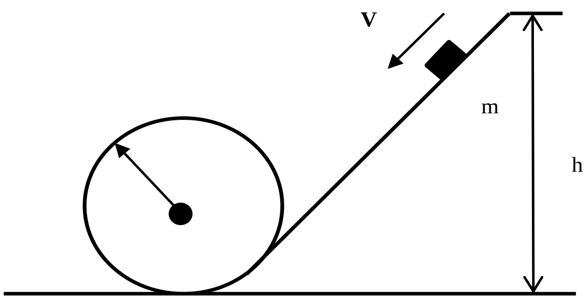


Fig. 2. Primera situación real del caso de estudio. Rizo normal sin corte.

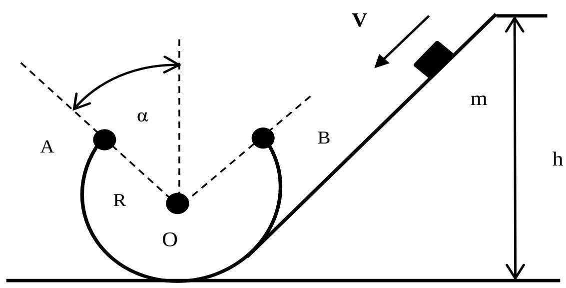


Fig. 3. Segunda situación real del caso de estudio. Rizo normal con un corte.

Tanto para la situación 1 como para la 2, los conceptos sustanciales que se presentan en la estructura cognitiva del estudiante en esta instancia son numerosos y corresponden a las asignaturas mencionadas. Entre los más relevantes se destacan los siguientes: fuerza, masa, aceleración, relaciones trigonométricas, descomposición de fuerzas, conservación de la energía y leyes de la dinámica [11]. El estudiante identifica estos conceptos y va reflexionando acerca de la necesidad de vincularlos, pasando así al desarrollo de la siguiente etapa del proceso.

Etapa II: *Construcción de un modelo conceptual del problema en la estructura cognitiva del estudiante.*

A partir de esta etapa se plantea el caso para la situación 1 de rizo sin corte. En esta etapa el estudiante asocia los conceptos reconocidos en la etapa anterior y añade otros que le pueden ser de utilidad. Los procesos cognitivos vinculados a esta etapa consisten en la aplicación de leyes y teoremas. Las estrategias que mejor se ajustan son:

1) Articulación de los contenidos.
2) Procesamiento de la información teórica.
3) Articulación las diferentes ideas que surgen del proceso de análisis del problema.

Se implementan estas estrategias con experiencias en laboratorio transparencias que hace más ágil del proceso de instrucción. Asimismo, el estudiante incorpora al análisis del problema conceptos como el de aceleración centrípeta, balance de energía y el concepto de tiro parabólico para la situación 2 del rizo con corte. Estos conceptos se asocian con los identificados en la etapa I por medio del planteo del *"diagrama de cuerpo en libertad"* realizado para un punto D genérico de la trayectoria del bloque, como se puede observar en Fig. 4.

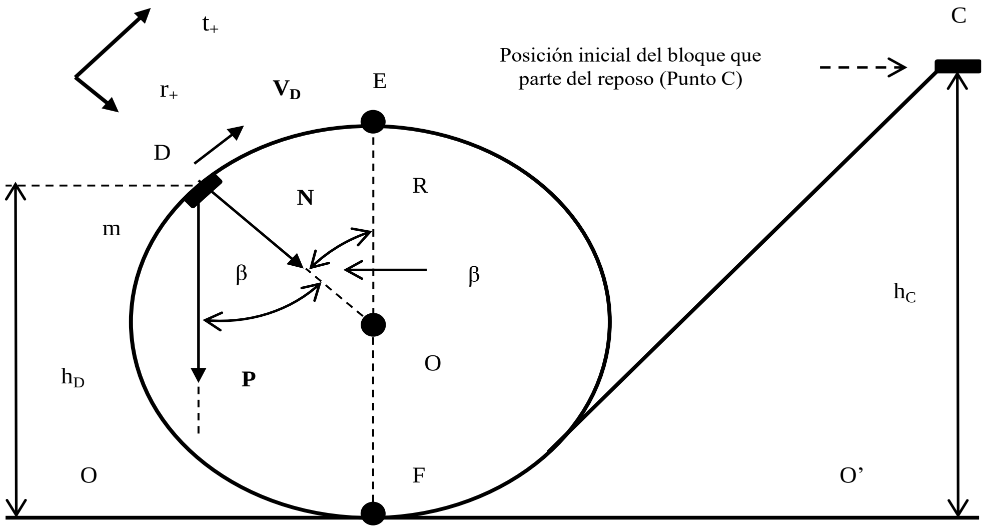


Fig. 4. Diagrama de *Cuerpo Libre* en un punto D genérico de la curva con **P** = mg es el peso del cuerpo, N es la fuerza normal que el plano ejerce sobre el cuerpo y β es el ángulo entre **P** y **N**. Se observan las alturas h_C y h_D para el cálculo de las energías potenciales gravitatorias con respecto al plano de referencia O – O'.

En base a las 3 estrategias mencionadas, el estudiante identifica 2 fuerzas que actúan sobre el bloque en el punto genérico D que surgen del diagrama de cuerpo libre: la fuerza normal **N** dirigida por la normal a su superficie hasta el centro O del rizo y la fuerza peso **P** vertical hacia abajo; y β el ángulo entre ambos vectores.

Etapa III: Construcción del modelo matemático representativo del problema.

En esta etapa el estudiante diseña un modelo matemático ajustado a la situación real del problema que se plantea. Los procesos cognitivos que se implementan en esta etapa consisten en sintetizar e integrar los conceptos que se identificaron en las etapas anteriores. Las estrategias que se aplican son:

1) Estimular en el estudiante la tarea de reflexión e inferencia.
2) Estimular en el estudiante la tarea de asociación de conceptos.

Para realizar estas estrategias, se diseñan actividades tales como experiencias más avanzadas en laboratorio y la simulación de mecanismos haciendo uso del software apropiado. El estudiante exige su capacidad de abstracción por medio de un proceso mental que le permite sintetizar e integrar todos los conceptos identificados en las etapas I y II. Para esto, aplica 2 leyes claves para la obtención modelo matemático de la situación real:

- Leyes Newton de la Dinámica.
- Ley de Conservación de la Energía.

En base al cuerpo de conocimientos adquirido por el estudiante y las dos leyes mencionadas, se poseen las herramientas para confeccionar las ecuaciones que conforman el modelo matemático en cuestión. De la primera ley el estudiante infiere que es una ecuación vectorial (ecuación 1) y debe descomponer la misma en una dirección tangente al movimiento y otra normal (ecuaciones 2 y 3); siendo a_t y a_r las aceleraciones tangencial y radial respectivamente, y v_D la velocidad del bloque en el punto genérico D. El planteo de un nuevo diagrama de cuerpo libre como el de Fig. 5 facilita el planteo de estas ecuaciones. De la ecuación 3 se obtiene N (ecuación 4).

$$\vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a} \qquad \textbf{(1)}$$

$$mg(sen\beta) = ma_t \qquad \textbf{(2)}$$

$$mg(\cos\beta) + N = ma_r \Rightarrow mg(\cos\beta)\; mg(\cos\beta) + N = m\frac{v_D^2}{R} \qquad \textbf{(3)}$$

$$N = mg\left(\frac{v_D^2}{gR} - cos\beta\right) \qquad \textbf{(4)}$$

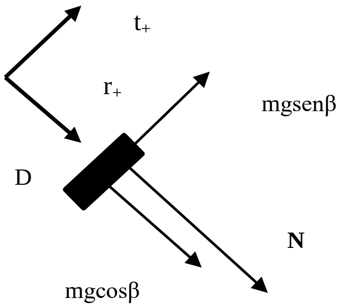


Fig. 5. Diagrama de *Cuerpo Libre* en un punto D genérico de la curva donde la fuerza **P** = mg ha sido descompuesta en la dirección radial (r_+) y la dirección tangente a la superficie circular (t_+).

En esta instancia de esta etapa el estudiante observa que la ecuación 2 no es utilizada en el proceso de resolución de caso de estudio, aunque la misma pone de manifiesto una ley de *causa – efecto* en la dirección de movimiento del bloque. No obstante, es instructivo que observe que esta ecuación refleja la naturaleza del movimiento. En este sentido la a_t es causada por la componente del peso en la dirección tangente a la circunferencia (mgsenβ); y como esta fuerza depende del ángulo β, también a_t depende de β. Si el estudiante analiza esta situación en función del tiempo observa que conforme el bloque va subiendo por el rizo disminuye β, por ende el senβ, la componente mgsenβ y a_t. Por lo tanto, es un movimiento circular desacelerado (no uniformemente variado), donde la velocidad v disminuye en el tiempo.

Hallar la velocidad en un punto genérico del rizo como el D (v_D) es importante para hallar N en la ecuación 4; lo cual requiere, por las razones expuestas, del cálculo integral. Por tal motivo, el estudiante emplea la ley de conservación de la energía mecánica en ausencia de fuerzas de carácter no conservativo, como las de rozamiento. Luego como la fuerza normal N con la que la superficie del rizo acciona sobre el bloque es perpendicular a la velocidad del mismo en todo punto (como el D), esta fuerza no realiza trabajo. De esta manera, la reserva total de energía mecánica entre 2 puntos cualesquiera queda invariable.

Con este esquema conceptual, el estudiante plantea el balance de energía mecánica entre el punto inicial más alto de la configuración (punto C en Fig. 4 que se corresponde con la altura h_C y desde donde el bloque parte del reposo) y un punto genérico (punto D en Fig. 4 que se corresponde con la altura h_D y donde el bloque está animado de una velocidad v_D).

De forma consecuente con este análisis, el estudiante asocia en su estructura cognitiva que la energía mecánica en un punto es la suma de energía potencial y cinética. En el contexto del presente caso, observa que en el punto C el bloque solo posee energía potencial gravitatoria y en D posee energía potencial gravitatoria. E esta manera, al efectuar el balance de energía mecánica entre los puntos C y D, y deduciendo de Fig. 4 que: $h_D = R + R\cos\beta \rightarrow h_D = R(1 + \cos\beta)$, obtiene la ecuación (5). Luego despeja v_D de ésta obteniendo la ecuación (6).

$$E_{MC} = E_{MD} \Rightarrow mgh_C = mgR\left(1 + cos\beta\right) + \frac{mv_D^2}{2} \qquad \textbf{(5)}$$

$$v_D^2 = 2gR\left(\frac{h_C}{R} - 1 - cos\alpha\right) \qquad \textbf{(6)}$$

Y sustituyendo esta última en la expresión (4) se obtiene para N la expresión (7):

$$N = mg\left(2\frac{h_C}{R} - 2 - 3cos\beta\right) \qquad \textbf{(7)}$$

Si el estudiante analiza esta expresión como función del ángulo β (N (β)), para un mismo R y h_C, infiere que la fuerza normal N con la que la superficie del rizo acciona sobre el bloque adquiere su valor máximo para β = π (cos π = – 1); es decir, en el punto inferior del rizo (punto F de FIG. 4). Cabe señalar, a efectos de incorporar en el estudiante aspectos vinculados al diseño, que este valor máximo de N no debería superar un valor admisible (N_{ADM}) de fuerza normal estipulada por el diseñador. Este valor admisible puede depender del tipo de material y otros requisitos establecidos en el diseño del rizo. Estos aspectos el estudiante los sintetiza en la ecuación (8).

$$N_{MAX} = mg\left(2\frac{h_C}{R}+1\right) \leq N_{ADM} \tag{8}$$

De la expresión (7) se infiere que N presenta un comportamiento monótonamente decreciente con el ángulo β; con lo que su valor disminuye a medida que el bloque asciende por el rizo, llegando a su valor mínimo en el punto superior E de Fig. 4, al que corresponde β = 0 (cos β = 1). Se obtiene la expresión (9):

$$N_{MIN} = mg\left(2\frac{h_C}{R}-5\right) \tag{9}$$

Cuando el estudiante lleva a cabo un análisis físico de la expresión (9), si a partir de la misma establece que el bloque no se separa del rizo en el punto superior E de Fig. 4, significa que no se va a separar de el en ningún otro punto. En otras palabras, para un h_C dado el valor mínimo para N va a estar dado por la expresión (9). Ahora bien, si se desea obtener la altura inicial mínima (h_{CMIN}) a partir de la cual el bloque es capaz de llevar a cabo una vuelta completa sin separarse del rizo, esta se obtiene mediante la expresión (9) anulando N_{MIN}. Desde un punto de vista más fino, el estudiante concibe en su estructura cognitiva que N_{MIN} es función lineal de h_C (N_{MIN} (h_C)). Por lo que debe obtener el valor de la variable h_C que anula la función, es decir N_{MIN} (ecuación (10)).

$$h_{CMIN} = \frac{5}{2}R = 2{,}5R \tag{10}$$

El estudiante infiere que para un valor de h_C menor de 2,5R el bloque se desprende del rizo antes de llegar al punto superior E de Fig. 4, volando en tiro oblicuo bajo la acción de la gravedad. Para un valor de h_C mayor de 2,5R el bloque da la vuelta completa soportando en el punto superior E de Fig. 4 (es importante que no se pierda de vista este concepto, dado el N_{MIN} obtenido en la expresión (9) se obtuvo especializando la expresión (7) para β = 0 (cos β = 1)) una fuerza normal $N_{MIN} > 0$ que el rizo ejerce sobre él.

Etapa IV: Resolución del modelo matemático y análisis crítico y discusión de los resultados obtenidos

En esta etapa el estudiante resuelve el modelo matemático planteado en la etapa III. Los procesos cognitivos asociados a esta fase consisten en:

- Resolución del modelo matemático en función de los parámetros que establece el problema y con las herramientas matemáticas disponibles.
- Análisis crítico y discusión de los resultados obtenidos a partir del desarrollo del proceso 1.

En esta etapa del proceso de instrucción el estudiante desarrolla modelos mentales de la situación que analiza con una mayor flexibilidad cognitiva respecto a las etapas anteriores. Las estrategias que se adoptan consisten en técnicas de comunicación que activen formas de pensamiento cooperativo y el trabajo grupal; y se implementan actividades tales como el uso de software de matemática para agilizar los cálculos y el manejo de las funciones que se ajusten al caso, para que el estudiante se focalice en el análisis de los resultados.

En lo concerniente a la situación 1 del rizo sin corte, se asume a efectos prácticos que esta etapa el estudiante la ha ido cumplimentando en la etapa anterior, conforme ha ido obteniendo las expresiones en forma de razonamiento encadenado. De esta manera, la discusión y análisis crítico ha ido tomando forma en su estructura cognitiva al obtener expresiones N_{MAX}, N_{MIN} y h_{CMIN}. Para esta situación clásica del rizo sin corte, el estudiante atravesaría esta etapa IV dotando de valores numéricos al modelo para analizar los resultados encontrados.

En virtud de lo expuesto, los autores consideran que es importante profundizar en el caso de estudio proponiendo al estudiante el abordaje de la situación 2 del rizo con corte. Por razones de espacio para el desarrollo del presente trabajo, se hará referencia a aquellas cuestiones distintivas entre una situación y otra. En este sentido, las cuestiones de carácter conceptual referidas al proceso de instrucción son similares a la situación 1, al igual que también son válidas las ecuaciones (1) a (8) y el diagrama de cuerpo libre de Fig. 5 para un punto genérico del rizo. De esta manera, se adiciona para cada etapa los elementos que el estudiante debe incorporar en su estructura cognitiva, a los efectos de abordar en forma satisfactoria el análisis y modelado de la situación 2.

Etapa I: *Incorporación de los conceptos base del domino del problema a la estructura cognitiva del estudiante.*

El estudiante hace uso de la Fig. 3 de rizo con corte como modelo físico, a la vez que incorpora a su modelo mental los conceptos referidos a tiro parabólico, dado que así es como sale el bloque del punto A en Fig. 3. Los demás conceptos base del domino del problema le son de utilidad al estudiante para abordar esta situación.

Etapa II: *Construcción de un modelo conceptual del problema en la estructura cognitiva del estudiante.*

Cabe recordar que en este caso el rizo circular presenta un corte simétrico reflejado por el ángulo α que forma la línea que une el centro de la circunferencia con el punto A y la vertical que pasa por el centro, tal como se ve en Fig. 3. El desafío que se le presenta al estudiante en esta situación consiste en obtener la altura mínima desde la cual debe caer el bloque para que el mismo pueda volar en tiro oblicuo bajo el efecto de la fuerza de gravedad, llegando a la continuación del rizo en el punto B. En una instancia más avanzada, debe analizar cómo se relaciona esta altura con el ángulo que caracteriza al corte. Las características fundamentales del movimiento del bloque por el rizo con corte se ilustran con detalle en la Fig. 6.

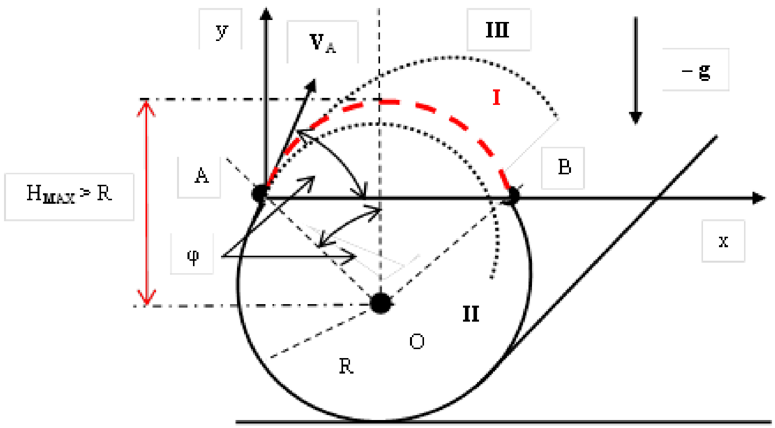


Fig. 6. Movimiento del sólido por el rizo con corte entre los puntos A y B.

En lo que se refiere al modelo conceptual para esta situación 2, además de lo puntualizado para la situación 1 es preciso considerar la necesidad de colocar en forma adecuada el sistema de referencia x – y, el vector g vertical hacia abajo y en sentido contrario al eje y^+ y las posibles trayectorias (I, II y III referidas en Fig. 6) que puede seguir el bloque luego de abandonar el rizo en el punto A. En línea con este análisis conceptual, el estudiante se percata de que debe obtener la relación entre la velocidad con la que el bloque debe abandonar el rizo en el punto A (o sea v_A), de tal manera que este respete la trayectoria parabólica I. En otros términos, que aterrice en el punto B como consecuencia de desarrollar esta trayectoria en tiro oblicuo. También es preciso que conecte estas consideraciones cinemáticas con las vinculadas al balance de energía y las leyes de la dinámica.

Etapa III: *Construcción del modelo matemático representativo del problema.*

Como ya se mencionó, en esta etapa el estudiante diseña un modelo matemático ajustado a la situación real del problema que se plantea, agregando los conceptos que son necesarios para esta situación 2. El elemento distintivo que detectó el estudiante con respecto a la situación anterior es el hecho de que el bloque sale en tiro parabólico; por lo tanto y atento a lo descripto en la Fig. 6, se plantean las ecuaciones horarias (11) y (12) que vinculan la posición del bloque según los ejes x e y con respecto al tiempo, respectivamente:

$$y(t)=v_A sen\varphi t-\frac{1}{2}gt^2 \quad \textbf{(11)}$$

$$x(t)=v_A cos\varphi t \quad \textbf{(12)}$$

Estas 2 ecuaciones completan el modelo matemático representativo de la situación 2.

Etapa IV: *Resolución del modelo matemático y análisis crítico y discusión de los resultados obtenidos*

El estudiante comienza sintetizando el primer proceso cognitivo asociado a esta etapa: *Resolución del modelo matemático*. La dependencia de las posiciones x e y con respecto al tiempo que proporcionan las ecuaciones (11) y (12), le permiten al estudiante inferir 2 condiciones que se deben cumplir en forma simultánea, a saber: el estudiante identifica que en el mismo instante t_B en que el bloque alcanza el punto B, la coordenada en x de posición del bloque toma el valor 2R y la coordenada en y es nula. Este hecho queda expresado por medio de las ecuaciones (13) y (14), que constituyen lo que se denomina "condiciones de borde" para esta situación.

$$0=v_A sen\varphi t_B-\frac{1}{2}gt_B^2 \quad \textbf{(13)}$$

$$2R sen\varphi=v_A cos\varphi t_B \quad \textbf{(14)}$$

Despejando t_B de la ecuación (13) y reemplazando en la (14) se obtiene para v_A la expresión (15):

$$v_A^2=\frac{gR}{cos\varphi} \quad \textbf{(15)}$$

Este es el valor de velocidad con que el bloque debe abandonar el rizo con corte en el punto genérico A para que aterrice "exactamente" en el punto simétrico B, del otro lado del rizo. Para obtener la altura h_C de Fig. 4 (en este caso para el rizo con corte) en función del ángulo de corte φ, es preciso igualar las dos expresiones (6 y 15) evaluadas en un punto genérico, sustituyendo el ángulo α por φ en la expresión (6). Se obtiene la expresión (16).

$$h_C(\varphi)=R\left[1+cos\varphi+\frac{1}{(2cos\varphi)}\right] \quad \textbf{(16)}$$

Tomar el punto D o el A para el análisis de cuerpo libre y balance de energía (D para el rizo sin corte y A con corte), no influye en la obtención de las expresiones (6) y (15). Es importante señalar que la expresión (6) fue obtenida a partir de consideraciones energéticas y la expresión (15) a partir de consideraciones cinemáticas. La expresión (16) proporciona la altura h_C con la cual el bloque vence el rizo con corte atendiendo; tanto a las condiciones de borde (13) y (14), como al balance de energía que brinda la expresión (6). La expresión (16) no conforma el modelo matemático obtenido en la etapa III, sino que es consecuencia del trabajo del estudiante con las ecuaciones del mismo. Con la idea de adentrarse en la fase de diseño el estudiante explora la expresión (16) y detecta que para un radio R del rizo, existe una dependencia funcional entre la altura h_C y el ángulo de corte φ conforme a (16). En esta línea de análisis, el estudiante considera sustancial abordar la representación funcional $h_C(\varphi)$ obteniendo la curva de Fig. 7 con los valores que presenta la misma.

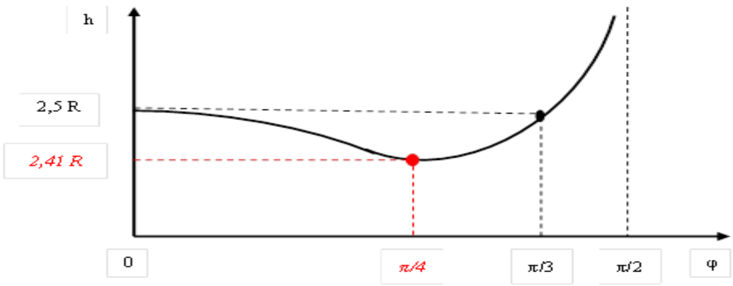


Fig. 7. Variación de la altura inicial h con el ángulo de corte del rizo φ.

Con estos elementos, el estudiante continúa con la síntesis del segundo proceso cognitivo asociado a esta etapa: *Análisis crítico y discusión de los resultados obtenidos*. El estudiante analiza los siguientes factores:

- Conforme a especificaciones de diseño se debe cumplir que $N_{MAX} \leq N_{ADM}$; el estudiante debe prestar suma atención a esta condición, dado que si se diese el caso de que $N_{MAX} > N_{ADM}$, entonces puede que también deba ajustarse el valor de h_C en la expresión (8) para que N_{MAX} sea a lo sumo igual al valor N_{ADM} en el punto inferior F del rizo en Fig.4. Este análisis es válido para ambas situaciones 1 y 2 (rizo sin corte y con corte).
- El estudiante lleva a cabo un análisis conjunto de la expresión (16) y su correspondiente representación gráfica de Fig. 7. Cabe señalar que si bien el estudio y análisis de esta función $h_C(\varphi)$ el estudiante lo pudo haber realizado en el proceso cognitivo anterior correspondiente a *Resolución del modelo matemático*; los autores se permiten suponer una pequeña alteración en el orden del desarrollo. En este sentido, se puede colocar la función en software apropiado y así obtener puntos de interés (intersección con ejes, extremos relativos y puntos de inflexión, entre otros), o también que el estudiante proceda a resolver en forma manual.
- Teniendo en cuenta de que para cada valor de φ entre 0 y π/2 se obtiene una altura inicial h_C desde la cual se deja caer el bloque conforme a la expresión (16), se obtienen las siguientes conclusiones de interés:
    1) En caso de que se elija un valor de h_C ***igual*** al que proporciona la expresión (16), y suponiendo que el bloque llega el punto A de Fig. 6, este desarrollará una trayectoria parabólica como la I en esa figura. Así el bloque aterriza en el punto B del rizo; y dada la simetría de la ubicación de los puntos A y B, el bloque alcanza el punto B con una velocidad dirigida por la tangente a la circunferencia (el estudiante puede demostrar este hecho a partir del cálculo diferencial, comprobando que la pendiente a la ecuación de la trayectoria I en el punto B es igual a la pendiente de la circunferencia en dicho punto).
    2) En caso de que se elija un valor de h_C ***menor*** que el proporciona la expresión (16), e inclusive suponiendo que el bloque alcanza el punto A de Fig. 6, este desarrollará una trayectoria parabólica como la II en esa figura. En consecuencia, el bloque pega contra el rizo debajo del punto B.

3) En caso de que se elija un valor de h_C ***mayor*** que el proporciona la expresión (16), el bloque abandona el rizo a través del corte desarrollando una trayectoria parabólica como la III, que se ilustra en Fig. 6.
4) Otra conclusión importante que se infiere de la expresión (16), es que para $\varphi = 0$ (situación 1 de rizo sin corte) $h_C = 2{,}5R$. Este valor coincide con la altura inicial mínima de ecuación (10) de rizo cerrado.
5) Del análisis de la función $h_C(\varphi)$ de la expresión (16) representada en la gráfica de Fig. 7, el estudiante calcula que esta función presenta un mínimo en $\varphi = \pi/4$, al cual le corresponde un $h_{CMIN} = 2{,}41R$. Lo que significa que para un rizo con un radio R y un corte de $\varphi = \pi/4$, la altura inicial mínima desde la que se debe dejar caer al bloque para que llegue al punto A y alcance el punto B, es de $h_{CMIN} = 2{,}41R$.Asimismo, si con un ángulo de corte $\varphi = \pi/4$ se adoptara una h_C menor que 2,41R, entonces el bloque no llega al punto A de Fig. 6 y desarrollaría una trayectoria como la II en dicha figura.
6) El estudiante asocia en esta instancia, de que este valor de $h_{CMIN} = 2{,}41R$ (si se adoptara en el diseño) debe sustituirse en la expresión (8), a los efectos de verificar la condición de que $N_{MAX} \leq N_{ADM}$.
7) En lo que se refiere al comportamiento global de la función $h_C(\varphi)$ de la expresión (16), se observa que la misma decrece en el intervalo $[0, \pi/4]$ hasta llegar a su mínimo en $\varphi = \pi/4$. A partir de este punto la función comienza a crecer, observando que para un rizo con un ángulo de corte de $\varphi = \pi/3$ se verifica que $h_C = 2{,}5R$, que es el valor de altura inicial mínima para la situación 1 de rizo sin corte. Luego se observa que la altura inicial h_C tiende al infinito conforme $\varphi \rightarrow \pi/2$.
8) De este último punto el estudiante deduce que para ángulos de corte en el intervalo $\pi/4 < \varphi < \pi/3$, la altura inicial que se necesita para que el bloque pase del punto A del rizo al punto B de Fig. 6 está en el intervalo $2{,}41R < h_C < 2{,}5R$. Es decir, que h_C es menor que la altura mínima de rizo sin corte.

- Una última consideración que se le puede plantear al estudiante en esta instancia, consiste en verificar que la altura máxima que alcanza el bloque cuando desarrolla la trayectoria parabólica I mostrada en Fig. 6 siempre está por arriba de la continuación de la circunferencia que representa al rizo. Operando con las ecuaciones horarias de tiro parabólico se obtiene la expresión (17) para la altura máxima (y_{MAX}):

$$y_{MAX} = \frac{v_A^2\, sen^2\varphi}{2g} \qquad \textbf{(17)}$$

Y sustituyendo en esta expresión υ_A^2 de la ecuación (12) se obtiene para y_{MAX} la expresión (18):

$$y_{MAX} = \frac{Rsen^2\varphi}{2gcos\varphi} \qquad \textbf{(18)}$$

Se obtiene así la expresión (19) para H_{MAX} (altura máxima de la trayectoria 1 en Fig. 6 y medida desde el centro O de la circunferencia); expresión esta que es mayor que R para todo intervalo $0 < \varphi < \pi/2$.

$$H_{MAX} = Rcos\varphi + \frac{Rsen^2\varphi}{2gcos\varphi} \Rightarrow H_{MAX} = \frac{R}{2}\left[cos\varphi + \frac{1}{cos\varphi}\right] \qquad \textbf{(19)}$$

4 Conclusiones y trabajos futuros

Teniendo en cuenta que el presente proyecto se encuentra en pleno desarrollo, tanto las conclusiones como los futuros lineamientos a considerar son de carácter parcial.

Respecto a las conclusiones:

- El desarrollo del proceso de instrucción en etapas, se adapta al estadio del desarrollo cognitivo que posee el estudiante.
- Se observa un ligero incremento de la maduración cognitiva de los estudiantes cuando logran comprender el significado de las expresiones analíticas obtenidas.
- Se observa un incremento en el nivel de motivación de los estudiantes cuando analizan situaciones que se corresponden con actividades vinculadas al diseño.
- Se observa que ciertos estudiantes intentan superarse para ubicarse en niveles cognitivos similares a otros que se encuentran en un nivel mayor.

Respecto a las actividades futuras:

- Potenciar el grado de interacción con asignaturas del ciclo básico, logrando así una instrucción más integral.
- Actualmente, está en desarrollo una V etapa cuyo objetivo consiste en la elaboración de una base de casos de análisis, los cuales no se almacenan como entidades aisladas, sino que se relacionan y se integran dando lugar a la conformación de ciertos *"patrones"* de análisis [12].
- Promover una mayor articulación con los ciclos superiores para realizar un seguimiento adecuado del proceso en dichos ciclos.
- Incorporar casos con espíritu crítico y analítico de manera gradual en el curso de ingreso/nivelación a la facultad de ingeniería.

Referencias

1. Hossian Alejandro. *Sistema de Asistencia para la Selección de Estrategias Instruccionales*. Tesis de Maestría no publicada. Tesis de Magíster en Ingeniería del Software. Instituto Tecnológico de Buenos Aires. Universidad Politécnica de Madrid. España. (2003).
2. Gagné R. M., Briggs L. J. & Wager W. W., *Principles of Instructional Design*., Ed. Wadsworth/Thomson Learning. Belmont, CA. USA., 1992.
3. Adler, M. The Paedeia proposal: *An Educationmanifiesto*., Ed. *Nueva York: Mc Millan*., 1982.
4. Merrill, M. D., *Instructional Transaction Theory: Instructional Design Based on Knowledge Objects*., Ed. Educational Technology, 36, 30-37., 1996.
5. Hossian Alejandro A., Cejas Lilian., *Una propuesta de diseño instruccional para su aplicación en carreras de ingeniería. Un caso de estudio en asignaturas del ciclo básico*. Jornada de enseñanza de la ingeniería. Facultad Regional Buenos Aires. Universidad Tecnológica Nacional. Buenos Aires. 2011.
6. Reigeluth, Charles. M. *Instructional design theories and models: a new paradigm of instructional theory*., Ed. Lawrence Erlbaum Associates., 1999.
7. Jonassen, D. H. Certainty., *Determinism and Predictability in Theories of Instructional Design: Lessons from Science*., Ed. Educational Technology., 1997.
8. Perkins, D. N. Smart schools: *Better thinking and learning for every child*., Ed. Nueva York: The Free Press., 1992.
9. Ausubel, D. P. Psicología Educativa., *Un punto de vista cognoscitivo*., 2° Edición., Ed. Trillas., México., 1983.
10. Schuel, T. J., *Cognitive Conceptions of Learning*., Ed. Review of Educational Research., Vol 56 (4) pp. 411-436., 1996
11. Bútikov, M., Bíkov, A. & Kondrátiev, A., *Física en ejemplos y problemas*., Ed. Mir., Moscú., 1991.
12. Alexander C., *A Timeless Way of Building*., Ed. Oxford University Press., 1999.

EMCI 2021

Eje 4: Experiencias de Cátedra

Uso de la plataforma educativa Moodle en el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemática en el primer año de carreras de Ingeniería

Carlos Berejnoi, Claudia Mariela Vidoni, Beatriz Emilce Copa

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta
Avda. Bolivia Nº 5150, (4400) Salta, Argentina
berejnoi@gmail.com
marielavidoni15@gmail.com
beaemil@gmail.com

Resumen. En este trabajo se describe, y analiza, el uso de la plataforma educativa Moodle en la asignatura Análisis Matemático I (AMI) de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta, Argentina. La plataforma es utilizada por la cátedra desde el año 2008, pasando de ser un canal de comunicación y repositorio de material didáctico a un espacio con actividades interactivas y recursos didácticos. Desde el año 2018, en la plataforma se implementan cuestionarios para los temas desarrollados en los trabajos prácticos, con incidencia en la calificación final, favoreciendo el seguimiento y el proceso de aprendizaje continuo. Luego de más de una década de uso de la plataforma, con docentes capacitados en el uso de las TIC, y con una población estudiantil nativa digital, se concluye que el uso de plataformas educativas como Moodle es una excelente alternativa para mejorar la calidad del proceso educativo.

Palabras Clave: Moodle, Matemática, Estrategias de enseñanza-aprendizaje.

1 Introducción

La asignatura AMI, en los planes de estudios de las carreras de ingenierías de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta, se ubica en el primer cuatrimestre del primer año, es de régimen promocional y posee redictado en el segundo cuatrimestre. Esto posibilita que los alumnos que no promocionan la asignatura, no pierdan el año, favoreciendo la retención. La matrícula inicial es elevada y variable, dependiendo del cuatrimestre, por lo que se presenta la problemática de aulas saturadas y un plantel docente reducido en número.

Los contenidos de AMI corresponden al Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable real, separándose para su dictado en clases teóricas y clases prácticas, siendo obligatorias sólo éstas.

El sistema de promoción resulta difícil de implementar en las asignaturas del primer cuatrimestre de primer año, por la relación alumnos/docentes y por la duración del cursado, ya que en 15 semanas se debe cumplir con su dictado, siendo un ritmo de estudio muy exigente para los alumnos, quienes muchas veces no tienen la posibilidad de realizar consultas en forma presencial.

Teniendo en cuenta esta problemática, y las competencias informáticas de los alumnos, referidas al uso de redes sociales y plataformas digitales, resulta atractivo el uso de Moodle como plataforma educativa, para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que permite una comunicación más efectiva entre los actores educativos, además de facilitar a los alumnos el acceso a materiales didácticos fuera del horario de clases presenciales.

Si bien se comenzó a usar Moodle, en el año 2008, como un canal de comunicación, su utilidad en la mediación pedagógica fue tomando fuerza al transcurrir los años. Con la capacitación de algunos docentes de la cátedra en entornos virtuales de aprendizaje, sumado al cambio que impulsa el CONFEDI (Consejo de Decanos de Ingeniería de Argentina) en el paradigma educativo con el modelo de

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

"Aprendizaje Centrado en el Estudiante" (ACE) en las carreras de ingeniería (modelo de formación por competencias) [1], se avanzó en el uso de las TIC en la cátedra.

La plataforma dejó de ser meramente un canal de comunicación, difusión de fechas importantes y foros de consulta, para incorporar actividades interactivas que favorecieran el proceso de aprendizaje (básicamente en la forma de SCORMs, cuestionarios de Moodle y applets construidos usando Geogebra), y finalmente a partir del año 2018, cuestionarios evaluativos llamadas Actividades Obligatorias, con incidencia en la calificación final.

La nota final (NF) se compone de tres ítems: parciales (se aprueban con un mínimo de 40 puntos sobre 100), evaluaciones por tema y tareas varias, siendo necesario alcanzar 70 puntos o más para promocionar. NF se calcula con una fórmula polinómica, en la que se asigna diferentes pesos a cada item. Las Actividades Obligatorias pueden sumar hasta 10 puntos en NF (medida de 0 a 100). Los otros recursos y actividades presentadas no influyen de manera directa en la promoción de la asignatura, siendo las instancias evaluativas presenciales (parciales y otras evaluaciones) las que más incidencia tienen. Una vez que el alumno aprueba, su calificación de promoción se calcula a partir de una tabla, en una escala de 7 (siete) a 10 (diez).

Actualmente estamos atravesando el proceso de adaptación del dictado de la asignatura para adecuarlo al ACE. Si bien CONFEDI definió las competencias a desarrollar en la formación de un ingeniero [1], también son de interés para la asignatura aquellas competencias matemáticas definidas por Niss [2],[3], que seguramente siempre estuvieron presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a pesar de no siempre ser evaluadas como tales.

El uso de las TIC, en la enseñanza de materias de ingeniería, ayudaría en gran medida a que el estudiante desarrolle algunas de las competencias requeridas; sin embargo, existen algunas que resultan dificultosas de ser trabajadas si se utilizara únicamente la modalidad virtual. Según Arranz [4], es muy complicado desarrollar competencias usando sólo esta modalidad. En cambio, combinando los recursos de enseñanza presencial con la tecnología no presencial se aprovecha un amplio abanico de medios y combinaciones posibles para el aprendizaje y la mejora de la formación.

Por ello, si bien la experiencia en la cátedra lleva más de una década [5],[6], se debe avanzar en el uso de las TIC en el proceso educativo, en el marco de la formación por competencias en carreras de Ingeniería, aprovechando el uso de plataformas educativas como Moodle en la mediación pedagógica.

2 Actividades y recursos en Moodle

Se detallan y describen a continuación las actividades y recursos utilizados en Moodle en la cátedra de AMI.

2.1 Etiquetas, cronograma, avisos, correo interno

Estos son los recursos básicos usados en la plataforma, para difundir información sobre fechas importantes en el cursado, distribución de comisiones en aulas, modificaciones en el cronograma, publicación de calificaciones, etc. Son de carácter netamente informativos, utilizándose la plataforma como un canal de comunicación.

2.2 Videos, material de lectura y actividades con Geogebra

La implementación de estos recursos tuvo como finalidad dar respuesta a las necesidades de los alumnos, de disponer de material de estudio de los temas desarrollados en clase; esto principalmente en las primeras semanas del dictado de la materia, momento en el cual existe una gran limitación para el acceso de los estudiantes a las aulas, debido a la población inicial. También, los videos y actividades interactivas (en este caso desarrolladas en Geogebra) aportan significativamente en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

En la plataforma existen numerosos apuntes de los temas que se dictan en la asignatura. Estos fueron los primeros recursos que se utilizaron en la plataforma, desde 2008.

Para la confección de los videos, se tuvo en cuenta la duración y contenidos de los mismos, de modo de producir materiales atractivos, y a la vez de utilidad, para los estudiantes.

2.3 Foros

Moodle presenta varias utilidades que favorecen la comunicación entre los actores del proceso (estudiante-docente y estudiante-estudiante), eficaces en el aprendizaje colaborativo; entre ellas están los foros. Durante algunos años la cátedra habilitó foros de consulta.

2.4 SCORMs

Los SCORMs (Sharable Content Object Reference Model en inglés), permiten crear objetos de aprendizaje, se caracterizan por ser portables, siendo fáciles de compartir y reutilizables. En la cátedra se utilizó el programa libre y gratuito eXeLearning [7].

En la Fig. 1 se observa el aspecto de la página inicial para la construcción de un SCORM usando eXe-Learning, con el listado de actividades y recursos detallados a la izquierda de la imagen.

Por medio de estos SCORMs el docente puede plantear conceptos teóricos o una clase virtual, para ir avanzando según el alumno responda algunas preguntas, redireccionando el aprendizaje de acuerdo a las respuestas. Y si bien se pueden hacer clases completas con este editor para ser ejecutados en Moodle, en la cátedra se lo utilizó principalmente para diseñar cuestionarios, no con fines evaluativos, sino para favorecer el aprendizaje de los alumnos. La Fig. 2 muestra una de estas actividades, referida a trigonometría: se puede observar la estructura de la actividad, separada en diferentes temas.

Fig. 1. Aspecto del ámbito de trabajo para el diseño de SCORMs usando eXeLearning.

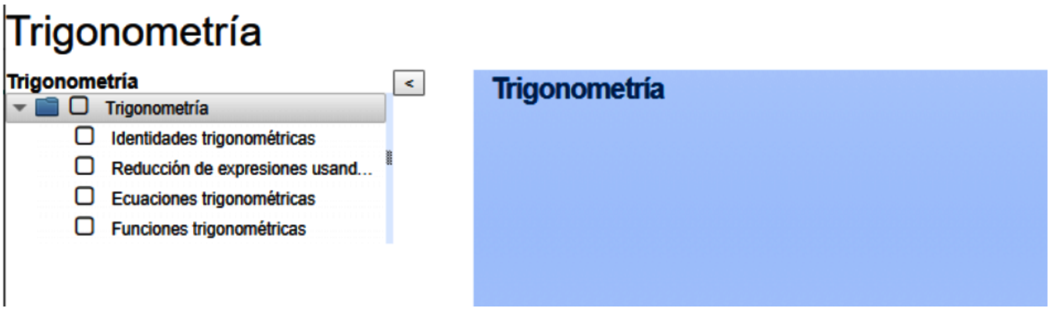


Fig. 2. Ejemplo de un SCORM y una posible estructuración en subtemas.

2.5 Cuestionarios de Moodle

Se utilizaron los cuestionarios propios de Moodle. Las posibilidades de preguntas disponibles en la plataforma son de: Opción Múltiple, Respuesta Corta, Numérica, Verdadero/Falso, Emparejamiento, Arrastrar y Soltar sobre Texto, y Elegir la Palabra Perdida.
Los cuestionarios tuvieron como objetivo:

1. Favorecer el aprendizaje de los alumnos presentando actividades interactivas, en forma de preguntas, con la devolución correspondiente tanto en caso de respuestas correctas o incorrectas. En la Fig. 3 se muestra una pregunta de un cuestionario sobre el tema funciones, y en la Fig. 4 se observa una pregunta de un parcial evaluado en años anteriores, puesto a disposición de los alumnos como forma de autoevaluación antes de rendir el parcial en forma presencial.

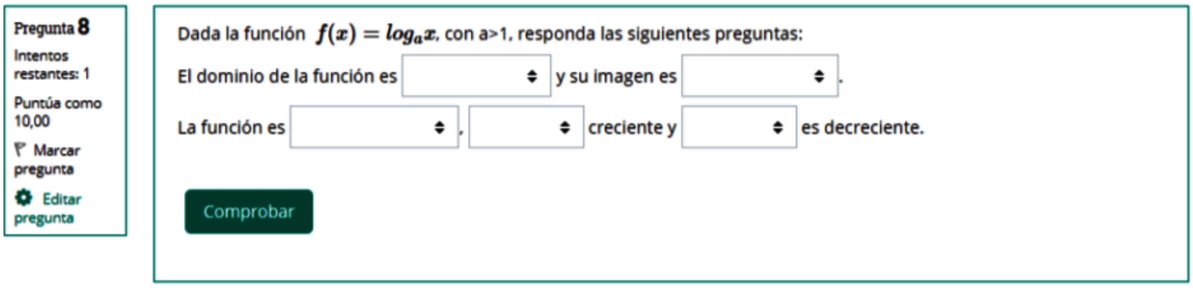


Fig. 3. Ejemplo de una pregunta del tipo "Elige la Palabra Perdida" en un cuestionario en Moodle.

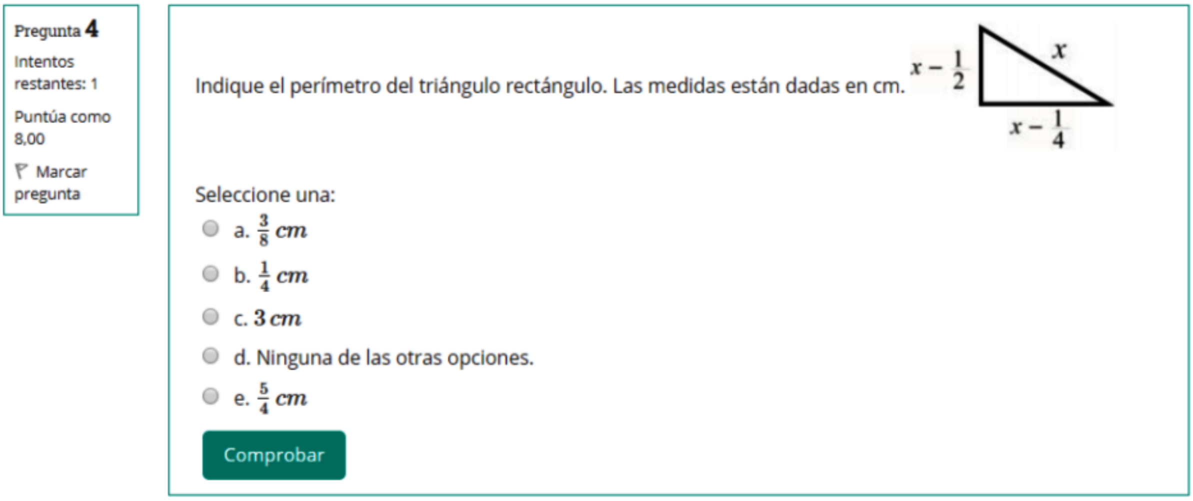


Fig. 4. Ejemplo de una pregunta de un modelo de examen parcial, en este caso del tipo “Opción Múltiple”.

2. Plantear a los estudiantes actividades de carácter obligatorio, que influyen en la calificación final. Tienen un carácter formativo de mayor peso que los cuestionarios anteriores.
   Cada actividad contiene preguntas referidas a un trabajo práctico con contenidos teóricos y prácticos. Las preguntas incluyen contenidos para trabajar la resolución de ejercicios prácticos (Fig. 5), el razonamiento mediante preguntas conceptuales (Fig. 6) y la comprensión lectora (Fig. 7).
   Los puntajes obtenidos en los cuestionarios inciden en la calificación final en un 10% máximo.
   Estas actividades se pusieron en marcha desde 2018. Se pretende desarrollar las competencias sociales referidas a responsabilidad y autonomía en el aprendizaje, ya que el 80% de la calificación posible de cada cuestionario se basa en su realización, y no en la calificación obtenida en la respuesta, que tiene sólo un peso de 20%. Cada cuestionario tiene una fecha de inicio y finalización, siendo suficiente el lapso entre ambas para ser realizado.

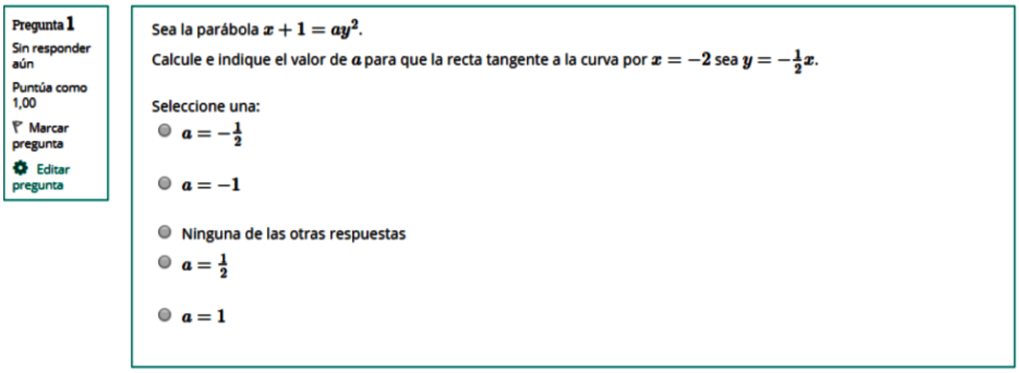
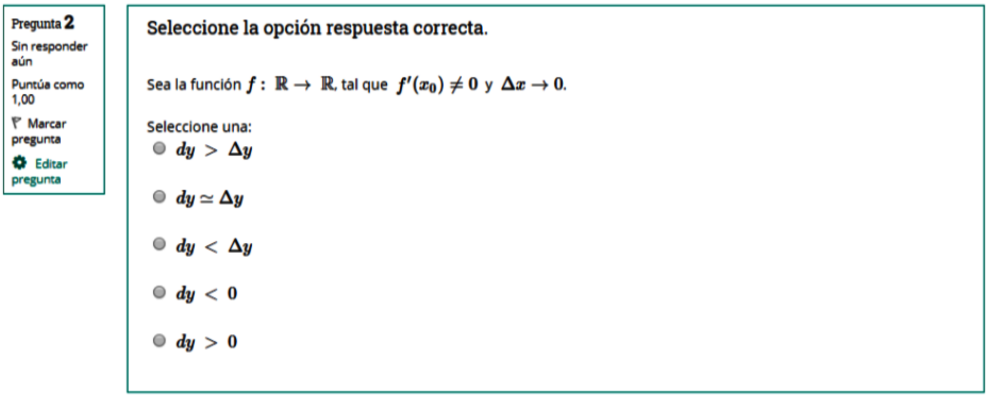


Fig. 5. Ejemplo de una pregunta de una actividad obligatoria, del tipo “Opción Múltiple”, para evaluar la resolución de ejercicios prácticos.



Pregunta **2**
Sin responder aún
Puntúa como 1,00
Marcar pregunta
Editar pregunta

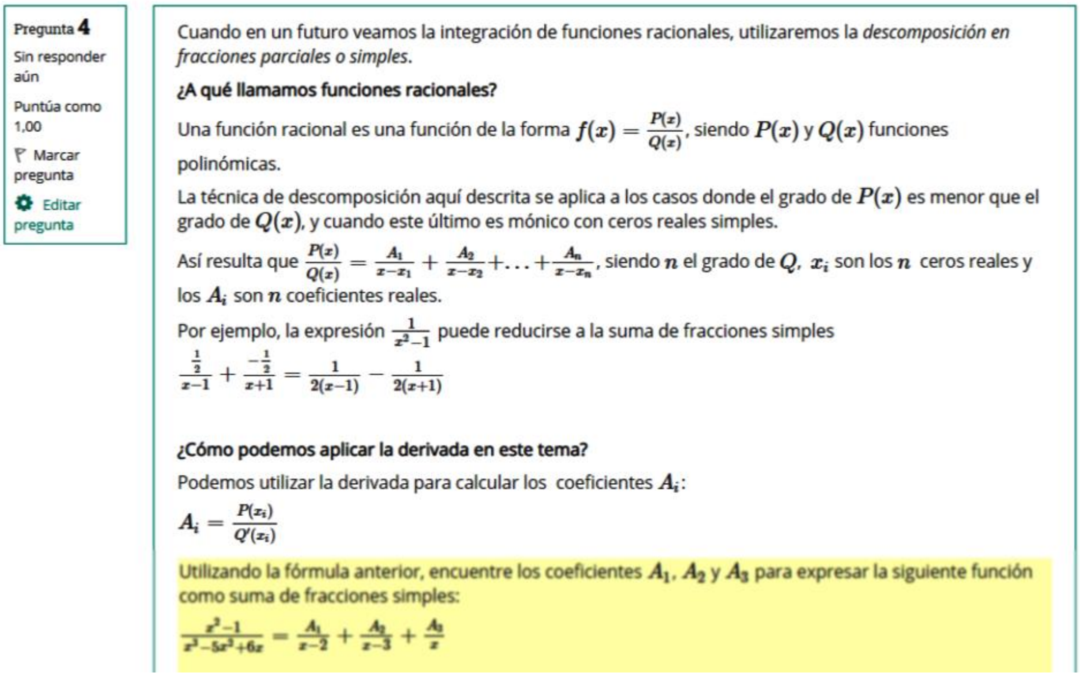
Seleccione la opción respuesta correcta.

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f'(x_0) \neq 0$ y $\Delta x \to 0$.

Seleccione una:

- $dy > \Delta y$
- $dy \simeq \Delta y$
- $dy < \Delta y$
- $dy < 0$
- $dy > 0$

Fig. 6. Ejemplo de una pregunta de una actividad obligatoria, del tipo "Opción Múltiple", para evaluar contenidos conceptuales.



Pregunta **4**
Sin responder aún
Puntúa como 1,00
Marcar pregunta
Editar pregunta

Cuando en un futuro veamos la integración de funciones racionales, utilizaremos la *descomposición en fracciones parciales o simples.*

¿A qué llamamos funciones racionales?

Una función racional es una función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas.

La técnica de descomposición aquí descrita se aplica a los casos donde el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, y cuando este último es mónico con ceros reales simples.

Así resulta que $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$, siendo n el grado de Q, x_i son los n ceros reales y los A_i son n coeficientes reales.

Por ejemplo, la expresión $\frac{1}{x^2-1}$ puede reducirse a la suma de fracciones simples

$\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$

¿Cómo podemos aplicar la derivada en este tema?

Podemos utilizar la derivada para calcular los coeficientes A_i:

$A_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}$

Utilizando la fórmula anterior, encuentre los coeficientes A_1, A_2 y A_3 para expresar la siguiente función como suma de fracciones simples:

$\frac{x^2-1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x}$

Fig. 7. Ejemplo de una pregunta de una actividad obligatoria, del tipo "Arrastrar y Soltar sobre Texto, para trabajar la comprensión lectora.

3 Resultados y análisis

3.1 Rendimiento en el segundo cuatrimestre de 2019

El cursado de la asignatura exige que el estudiante apruebe tres parciales, el primero de ellos dentro de las primeras tres semanas de clase. En la Tabla 1 se detallan el número de alumnos que rindieron, y aprobaron cada parcial, en el segundo cuatrimestre de 2019.

Tabla 1. Detalle de rendimientos en cada parcial, 2do cuatrimestre de 2019.

	Cantidad de alumnos que rindieron	Aprobados	Porcentaje de aprobados
Primer Parcial	669	286	42,75
Segundo Parcial	250	178	71,2
Tercer Parcial	165	152	92,12

El rendimiento en el primer parcial es muy bajo, aumentando en los dos últimos. Existe un desgranamiento de alumnos que habiendo aprobado la instancia previa no se presentan a rendir algún parcial, además del propio debido a no aprobar un parcial.

Luego del tercer parcial, en el segundo cuatrimestre de 2019 (hasta el momento), promocionaron la asignatura 100 alumnos. Los 52 estudiantes que aprobaron los tres parciales, pero que no llegaron a promocionar, deben rendir un examen integrador de todos los contenidos de la materia.

Tomando como población inicial a los individuos que aprobaron el primer parcial, se tiene hasta el momento para el cuatrimestre considerado, un rendimiento de 34% de alumnos promocionados.

Respecto a las calificaciones, 70 alumnos promocionaron con 7 (siete), 24 con 8 (ocho) y 6 con 9 (nueve).

3.2 Actividades en Moodle

La experiencia en la cátedra en el uso de foros de consulta, en general, no es positiva: en un principio, y durante varios años, se habilitaron algunos, donde los estudiantes podían plantear dudas. Pero fueron discontinuados, debido a que la plataforma no enviaba a los docentes, en un tiempo razonable, las notificaciones para que respondieran las consultas; se llegó al caso de una notificación, de participación de un estudiante en un foro, con una demora de dos años. No obstante, resultaron positivas algunas interacciones entre estudiantes, cuando algún alumno contestaba las consultas de un compañero.

En el cuatrimestre analizado, los estudiantes en promedio hicieron el 32% de las actividades planteadas, incluyendo obligatorias y no obligatorias. La población tomada en este análisis es de aproximadamente 350 personas, incluyendo muchos alumnos que no aprobaron el primer o el segundo parcial.

No se observó una clara relación entre nota final de promoción y participación en la plataforma. Los alumnos promovidos con 9 (nueve) no tuvieron una participación destacada en la plataforma, en promedio realizaron el 50% de las actividades. Hay que resaltar que aquí se cuentan actividades obligatorias y no obligatorias. No se incluyen los recursos, tales como videos o material didáctico de lectura en formato digital. Aquellos estudiantes que obtuvieron nota final de 8 (ocho) realizaron en promedio 54% de las tareas, los alumnos que alcanzaron una nota de 7 (siete) desarrollaron en promedio 51.8% de las actividades, y los que deben rendir el examen integrador desarrollaron el 49% de las tareas. Por otro lado, se dio un caso particular, un alumno que quedó libre en el segundo parcial realizó el 95% de las actividades.

Referido a las actividades obligatorias, sólo un alumno de los 165 que rindieron el tercer parcial no realizó ninguna de ellas; pero este estudiante desaprobó esta instancia evaluativa y su rendimiento en el cursado fue muy bajo. Si analizamos la participación de los estudiantes que aprobaron el tercer parcial (los promovidos y aquellos a la espera del examen integrador), se observa que sobre un aporte máximo de 10 puntos en la NF, los alumnos que promocionaron con 7 tienen en promedio 8,83 puntos, mientras que los promovidos con 8 y con 9 tienen en promedio 9,22 puntos. En este último caso se presenta un alumno que hizo sólo 7 actividades de 10 obligatorias. Respecto a los alumnos que aprobaron el tercer parcial pero que no promocionaron, el promedio obtenido fue de 8,06 puntos. Estos datos marcan una clara incidencia de estas actividades en el rendimiento de los estudiantes.

Las actividades obligatorias fueron implementadas con anterioridad en el segundo cuatrimestre de 2018 y en el primero del 2019. La motivación que generó en los alumnos fue notable, tanto en las clases prácticas como en las clases de consultas presenciales, ya que planteaban en las mismas algunas dudas que surgían al responder los cuestionarios [8]. Los resultados obtenidos en esos cuatrimestres motivó que se sigan implementando los cuestionarios. Se realizó una encuesta anónima a los alumnos que formaron parte del cursado con el objetivo de reflejar su visión respecto de las actividades; participaron

430 estudiantes [8]. El 98% de los encuestados las consideran útiles, entre las numerosas razones que expresaron:

- los cuestionarios les permitía llevar métricas de sus conocimientos (autoevaluación), posibilitándoles identificar los temas en que estaban fallando o necesitaban enfocarse;
- las actividades les obligaba a asumir el compromiso de llevar al día los trabajos prácticos, ya que para poder responder correctamente las preguntas debían tener en claro los conceptos en cuestión.

4 Conclusiones y trabajos futuros

La plataforma educativa Moodle, con sus actividades y recursos, es una excelente alternativa para la mediación pedagógica usando TIC. Se observa un gran avance de la cátedra en el uso de estos recursos, y en la aceptación de los alumnos. A lo largo de los años, se capacitaron la mayoría de los docentes de la planta estable de la cátedra, ya sea con especializaciones brindadas formalmente por instituciones o por medios propios.

Los cuestionarios obligatorios, implementados a partir de 2018, resultaron una gran herramienta en el proceso de aprendizaje, observándose una relación directa entre la calificación obtenida en estas actividades y la nota de promoción. En cambio, no se observa una relación de este tipo entre el rendimiento de los alumnos en la asignatura y la totalidad de los recursos y las actividades (incluyendo aquellas no obligatorias).

Los resultados son alentadores. Sin embargo, se debe profundizar en el uso de todos los recursos posibles (plataformas educativas, sistemas de creación de encuestas como Mentimeter, Geogebra, videos, etc), que favorezcan el proceso de aprendizaje y el desarrollo de competencias.

Agradecimientos. Se agradece al plantel docente de la cátedra de Análisis Matemático I de la Facultad de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta, ya que gracias a su trabajo y predisposición fue posible implementar estas actividades en la plataforma MOODLE.

Referencias

1. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería – CONFEDI: Propuesta de Estándares de Segunda Generación para la Acreditación de Carreras de Ingeniería en la República Argentina - “Libro Rojo de CONFEDI”. Giordano Lerena, R.; Cirimelo, S. (Eds): Universidad FASTA Ediciones (2018)
2. Niss, M.: Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*. Gagatsis, A.; Papastravidis, S. (Eds.): Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, pp. 115-124 (2003)
3. A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education. A Report of the Mathematics Working Group. Alpers, B. (Ed.): European Society for Engineering Education (2013)
4. Arranz, V.; Aguado, D.: Desarrollo de competencias mediante blended learning: un análisis descriptivo. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, Vol. 26, pp. 79-88 (2005)
5. Berejnoi, C.; Ornass, V.O.: Uso de MOODLE como plataforma educativa en la modalidad b-learning: experiencia en la cátedra de Análisis Matemático I de las Carreras de Ingeniería de la U.N.Sa. *Jornada: Aula Virtual en la Universidad ¿Un espacio para todos?*, Salta-Argentina (2009)
6. Berejnoi, C.; Barros, M.A.; Ornass, V.O.: La modalidad b-learning como alternativa en el proceso enseñanza-aprendizaje en primer año de carreras científico-tecnológicas. II Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas, Salta-Argentina (2010)
7. Editor de recursos educativos eXeLearning. https://exelearning.net/. Accedido 15 de Febrero de 2020
8. Vidoni, C.M.; Copa, B.E.; Berejnoi, C.: Implementación de Cuestionarios en la Plataforma de Aprendizaje Moodle de la cátedra de Análisis Matemático I. *XIV Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA*, Tucumán-Argentina (2019)

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: resultados de una experiencia de aula basada en problemas interdisciplinarios

Gabriela Righetti, Silvia Seminara

Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Mozart 2300, C1407IVT - CABA
righettigab@gmail.com; seminarasilvia@gmail.com

Resumen. En este trabajo presentamos los resultados de una experiencia destinada a la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Fue llevada a cabo con alumnos de Análisis Matemático II, asignatura del segundo año de las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional, en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Empleo de problemas interdisciplinarios en asignaturas de matemática en carreras de ingeniería". La experiencia consistió en proponer a los estudiantes el abordaje de dos problemas basados en modelos matemáticos sencillos pero realistas de dos situaciones diferentes: la caída de un paracaídas y la evolución del índice de colesterol en sangre. El trabajo, que integró los registros analítico, gráfico y numérico, permitió a los estudiantes poner en juego los conceptos y los métodos recientemente aprendidos en situaciones contextualizadas, más significativas que los acostumbrados ejercicios de aplicación, además de propiciar ciertas estrategias metacognitivas como el análisis crítico de los resultados y la evaluación de la pertinencia de los modelos propuestos. Se describe la experiencia, se analizan producciones de los alumnos, así como los resultados de una encuesta realizada a posteriori, y se presentan algunas conclusiones.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Diferentes registros de representación, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

Muy a menudo los docentes de matemática nos encontramos con el problema de que nuestros estudiantes "no le encuentran sentido" a algunos de los objetos matemáticos con los que proponemos trabajar. En particular, los futuros ingenieros quieren entender "para qué les va a servir" en su práctica profesional aquello que están estudiando, y hallan – con justa razón – poco atractivos los ejercicios rutinarios y descontextualizados que en general se les proponen en las Guías de Trabajos Prácticos.

Este problema de "falta de significado" de los contenidos abordados no sólo resulta desmotivador para los alumnos, sino que, además, conspira contra un aprendizaje genuino y permanente en el tiempo. En efecto: son numerosos los autores que han destacado, en base a experiencias realizadas, los beneficios del aprendizaje de la matemática *en situaciones contextualizadas* y la conveniencia de presentar la matemática como *recurso de modelización* para la ciencia y la técnica. Biembengut, por ejemplo, se ha referido en [1] a lo importante que resulta integrar la matemática con las áreas del conocimiento que la utilizan como herramienta, para de este modo desarrollar un mayor interés por su aplicabilidad y lograr una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos; según este autor, la capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones problemáticas, la creatividad en la formulación y resolución de problemas, la habilidad en el uso de la tecnología y la capacidad para actuar en grupo contribuyen al aprendizaje efectivo de la matemática y son competencias que se deben estimular en el aula.

Es necesario mencionar, además, que nos encontramos ante un importante cambio de paradigma en la educación superior, que impulsa acciones en este mismo sentido.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

La *formación orientada por competencias* es un enfoque centrado en la demostración, por parte del estudiante, de los resultados deseados del aprendizaje, buscando que el egresado sea capaz de un desempeño profesional autónomo y de calidad.

Buscando la homologación mutua de los títulos universitarios, los países europeos realizaron en 1999 la Declaración de Bolonia, que propició en la educación superior europea la formación por competencias. El proceso se replicó rápidamente en Latinoamérica y en particular, en nuestro país, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) publicó en 2006 el "Primer Acuerdo sobre Competencias Genéricas", [2], que estableció diez competencias, separadas en cinco competencias tecnológicas y cinco sociales, políticas y actitudinales.

Una de las principales competencias tecnológicas mencionadas por CONFEDI es la de "identificar, formular y resolver problemas de ingeniería" para lo cual los estudiantes deben "ser capaces de organizar los datos del problema, realizar el diseño de la solución tecnológica y planificar la resolución" (ver [3], [4]).

Para lograr el desarrollo de estas competencias es necesario trabajar en la resolución de problemas desde los primeros años de las carreras, tanto dentro de cada ámbito disciplinar como en forma interdisciplinaria, pero en las materias básicas como Análisis Matemático II puede resultar dificultoso resolver verdaderas situaciones problemáticas contextualizadas, ya que los estudiantes poseen aún escasos conocimientos acerca de los fenómenos reales que pueden modelizarse mediante las herramientas del cálculo. Los docentes de física, química, etc., mencionan con insistencia lo difícil que les resulta rescatar los contenidos matemáticos para aplicarlos a problemas de su área: los estudiantes no alcanzan a establecer espontáneamente la conexión, a veces ni siquiera pueden identificar los conceptos matemáticos involucrados y, mucho menos, aplicarlos.

En el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Empleo de problemas interdisciplinarios en asignaturas de matemática en carreras de ingeniería" del que participamos, decidimos plantear una serie de actividades que permitieran a nuestros estudiantes aplicar contenidos matemáticos a la resolución de problemas realistas que no exigieran conocimientos demasiado avanzados de otras disciplinas, contribuyendo simultáneamente al trabajo matemático contextualizado y al desarrollo de competencias propias de la resolución de problemas. Hallamos en las ecuaciones diferenciales el contenido ideal para abordar naturalmente la utilización de la matemática como herramienta de modelización y diseñamos, entonces, una propuesta didáctica [5] destinada a los alumnos de Análisis Matemático II, asignatura de segundo año en las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional (FRBA UTN). Con inspiración en propuestas que hallamos en los textos de Blanchard [6] y Nagle, [7] elaboramos dos problemas, uno del ámbito de la física y otro del ámbito de la salud, con la consigna de que los alumnos eligieran el de su preferencia y trabajaran durante un par de semanas en la resolución del mismo, respondiendo diversos requerimientos que incluían los aspectos analíticos, cualitativos y numéricos de la resolución de ecuaciones diferenciales.

Las actividades fueron realizadas a comienzos de 2019 con dos grupos de alumnos que accedieron voluntariamente a la propuesta (la calificación en estas actividades no fue vinculante para la aprobación de la materia). Se decidió hacerlo de este modo para poder evaluar, de alguna forma, el interés que la actividad despertaba en nuestros estudiantes.

2 Marco teórico

Blanchard y Nagle destacan, en los prólogos de sus respectivos textos sobre ecuaciones diferenciales [6] y [7], cómo el trabajo interdisciplinario en áreas como la física (cinemática, dinámica, mecánica de fluidos), la química y otras ramas de la ciencia, favorece la comprensión de los principales conceptos relativos a las EDO, sobre todo en lo que se refiere a implementación e interpretación de modelos matemáticos que expresen fenómenos reales. Por otra parte, el trabajo simultáneo en los tres registros de representación – analítico, gráfico y numérico – no sólo resulta imprescindible para la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos involucrados [8], sino que además se encuentra más próximo al modo de trabajo profesional de científicos, técnicos e ingenieros en esta área, y supone una superación del esquema meramente algorítmico con que suelen tratarse los tópicos relacionados a las EDO en las clases tradicionales, que sólo proporcionan aprendizajes poco significativos y de corta duración.

Artigue y Rogalski [9] consideran que el enfoque tradicional en la enseñanza de las EDO - que consiste en una mera enunciación de métodos de resolución seguida de su aplicación a ejercicios elegidos ad hoc - resulta ya insostenible debido, principalmente, a lo atractivos que resultan los sistemas complejos (cuyo comportamiento puede visualizarse fácilmente pero involucran modelos matemáticos avanzados) y a la presión social que existe con respecto a la utilización de las herramientas informáticas en la enseñanza; las ecuaciones diferenciales aparecen, en este sentido, como un dominio privilegiado, debido a la simplicidad con que pueden abordarse los aspectos numérico y gráfico mediante utilitarios de fácil acceso.

Estos mismos autores sugieren acciones concretas para superar el esquema tradicional de enseñanza:
- recurrir a herramientas tecnológicas;
- desarrollar capacidades de tratamiento cualitativo y geométrico de las funciones, antes de comenzar con el estudio de las EDO;
- limitar a un mínimo la complejidad de cálculo en el enfoque algebraico;
- propiciar el trabajo autónomo de los estudiantes suministrando un documento con los principales métodos de resolución algebraica;
- enseñar explícitamente los métodos para el análisis cualitativo;
- trabajar en paralelo con los enfoques analítico, numérico y gráfico y
- poner en foco el carácter de las EDO como modelizadoras de la realidad.

3 Nuestra experiencia

Con el fin de abordar un enfoque superador del esquema tradicional de enseñanza de las EDO, y basándonos en las sugerencias de los autores consultados, elaboramos una propuesta de trabajo alrededor de problemas realistas, solicitando a los alumnos estudios cualitativos de soluciones, obtención de soluciones analíticas cuando resulte posible, y cálculo de soluciones numéricas aproximadas.

Elaboramos dos problemas, con inspiración en situaciones problemáticas propuestas en los textos mencionados de Nagle y Blanchard. Los denominaremos “Problema del paracaídas” (Fig. 1) y “Problema del colesterol” (Fig. 2). Ambos comienzan con una breve introducción a la situación real a la que se refieren y una explicación del modelo a utilizar. A continuación, se plantean diversos requerimientos de cálculo, solicitando siempre una representación gráfica que permita una visualización de la plausibilidad de las soluciones obtenidas. Para finalizar se introduce un método numérico sencillo para construir soluciones en intervalos acotados y realizar comparaciones con las soluciones exactas halladas previamente. En la Fig. 3 se puede ver el inciso correspondiente del “Problema del paracaídas”.

Un modelo para describir la caída de un paracaidista.

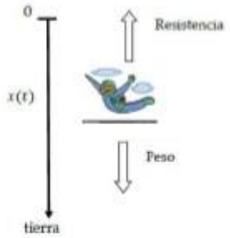
Cuando un objeto cae por acción de la gravedad, el aire ejerce una cierta resistencia que se opone al movimiento. Esta fuerza de resistencia es mayor cuanto más elevada sea la velocidad del móvil y cuanto más grande sea su superficie.
Cuando un paracaidista se arroja de un avión, o de un helicóptero, actúan sobre él, entonces, dos fuerzas: la acción de la gravedad y la resistencia del aire.
A partir de la Ley de Newton se puede escribir una ecuación sencilla que modeliza su movimiento:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = m.g - k.v(t)$$

m representa la masa del paracaidista,
$v(t)$ representa su velocidad en cada instante t,
g es la aceleración de la gravedad, que se considera constante $\left(\sim 10\frac{m}{s^2}\right)$, y
k es una constante de proporcionalidad que permite expresar la fuerza de resistencia del aire, y que tendrá un cierto valor mientras el paracaídas está cerrado y otro valor (mayor) desde el momento en que el paracaídas se abre.

Además, como la velocidad es la variación del espacio recorrido, se tiene

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$



Un paracaidista tiene una masa de $75\ kg$ y *se deja caer* desde un helicóptero, detenido sobre su objetivo a $2000\ m$ sobre el suelo. Suponga que la constante de resistencia del aire es $k = 30\frac{Newton.\ seg}{m}$ mientras el paracaídas está cerrado y $k = 90\frac{Newton.\ seg}{m}$ cuando el paracaídas se abre. Se sabe que el paracaídas no se abre hasta que el paracaidista alcanza una velocidad de $20\frac{m}{s}$.

a) ¿Cuál es la velocidad inicial del paracaidista? ¿Cómo varía la velocidad con respecto al tiempo desde que se arroja hasta que se abre el paracaídas? (encuentre la función $v_{cerr} = v_{cerr}(t)$). Resuelva mediante métodos algebraicos y utilizando el GeoGebra o algún otro software.

b) ¿Cuánto tiempo demora en abrirse el paracaídas? (redondee los cálculos)

c) ¿Cómo varía la velocidad con respecto al tiempo desde que se abre el paracaídas? (encuentre la función $v_{ab} = v_{ab}(t)$). Realice un gráfico de $v = v(t)$ desde el momento en que se arroja del helicóptero hasta que llega al suelo.

d) ¿Qué velocidad lleva el paracaidista después de un minuto de arrojarse? ¿A qué altura se encuentra en ese momento?

e) ¿Cuánto tarda, *aproximadamente*, el paracaidista en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad aproximada llega? (**Ayuda:** para poder hacer esta estimación, observe que la cantidad $e^{-a.t}$ puede despreciarse frente a t cuando el tiempo transcurre).

Tomado de R. Nagel, E. Saff y A. Sneider (2012) *Fundamentals of Differential Equations*, Pearson.

Fig. 1. “Problema del paracaídas”.

Un modelo sencillo para los niveles de colesterol en sangre.

El organismo naturalmente produce colesterol para construir las paredes de las células, pero además lo absorbe de los alimentos que lo contienen.

Si $C(t)$ es la concentración de colesterol en sangre (miligramos de colesterol por cada decilitro de sangre) en determinado tiempo t (medido en días), la velocidad con que cambia esta concentración puede calcularse aproximadamente de la siguiente forma:

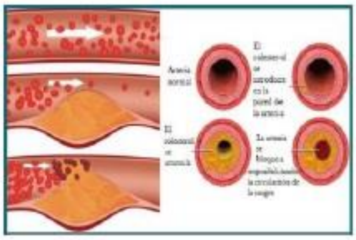
$$\frac{dC(t)}{dt} = k_1\big(N - C(t)\big) + k_2 E$$

N representa la concentración de colesterol que naturalmente está presente en el cuerpo y se considera constante,

E representa la cantidad de colesterol que aportan los alimentos ingeridos cada día y se puede suponer constante, ya que el individuo tiene determinadas costumbres alimentarias adquiridas, más o menos rutinarias,

k_1 es un coeficiente constante llamado "parámetro de producción"

k_2 otro parámetro constante llamado "coeficiente de absorción".



a) Suponga que para cierta persona $N = 20$, $k_1 = k_2 = 0.1$, $E = 400$ y que cierto día se mide su nivel de colesterol, y resulta $C = 250$. ¿Cuál sería, aproximadamente, su nivel de colesterol a los dos días de esa medición? ¿Y a los 5 días? Resuelva mediante métodos algebraicos y utilizando GeoGebra o algún otro software.

b) ¿Cuál sería el nivel de colesterol de la persona si continúa con el mismo tipo de alimentación durante mucho tiempo?

c) Esta persona concurre al médico quien, para disminuir el riesgo cardíaco, le prescribe una dieta baja en colesterol con $E = 200$. Si el día que comienza la dieta el colesterol es de 250, ¿cuál será el nivel de colesterol a los dos días de comenzada la dieta? ¿Y a los 5 días? ¿Y después de mucho tiempo de hacer dieta?

d) A los 5 días de hacer dieta el médico considera que no es suficiente y le prescribe, además, un medicamento que bloquea la absorción del colesterol de los alimentos ingeridos, llevando k_2 a 0.075. ¿Cuál será el nivel de colesterol a los dos días de comenzar a tomarlo? ¿Y a los 5 días? ¿Y después de mucho tiempo de tomarlo?

e) Compare la efectividad de los dos tratamientos ("dieta por tiempo indefinido" o "dieta por 5 días y continuar con dieta más medicamento") e ilustre su comparación con algún gráfico adecuado. Utilice GeoGebra u otro software para realizar los gráficos.

Tomado de P. Blanchard, R. Devaney y G. Hall (2011) *Differential Equations*, Cengage Learning.

Fig. 2. "Problema del colesterol".

f) No todas las ecuaciones diferenciales pueden resolverse encontrando la solución analítica exacta; algunas no son de ninguno de los tipos que conocemos (variables separables, lineales, etc.) y en ese caso lo que se puede hacer es buscar una *solución numérica aproximada*. Una forma sencilla de hacerlo es reemplazar la ecuación

$$y'(x) = f(x, y)$$

por la expresión aproximada

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \cong f(x_n, y(x_n))$$

que permite obtener puntos $(x_n, y(x_n))$ a partir de un punto inicial $(x_0, y(x_0))$ y un "paso" elegido $x_{n+1} - x_n = h$, y de ese modo trazar una curva aproximada.

Para ver cómo funciona este método, encuentren una aproximación de la solución del inciso a) comenzando en el punto $(0, v(0))$ y concluyendo en $(4, v(4)_{aprox.})$, luego de elegir un paso h. Pueden utilizar la Hoja de Cálculo de GeoGebra; con ella es fácil tomar distintos pasos y ver cómo mejora la aproximación cuanto más pequeño sea h. Para comparar, grafiquen en un mismo gráfico la solución exacta y la aproximada para el inciso a) con tres pasos distintos. ¿Qué ocurre si prolongan las soluciones aproximadas a (20, $v(20)_{aprox.}$)?

Fig. 3. El método numérico y la actividad sugerida para el "Problema del paracaídas".

En el "Problema del paracaídas" se requieren algunos conocimientos de cinemática, mientras que en el "Problema del colesterol" no se requieren prácticamente conocimientos de otras áreas. Decidimos explicitar en ambos problemas el modelo que describe el fenómeno correspondiente ya que, en base a nuestra experiencia, consideramos que no suministrarlo constituiría una dificultad infranqueable para muchos de nuestros estudiantes.

Luego de una exposición, por parte de los docentes, de los conceptos fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias y de la introducción de algunos métodos de resolución analítica, se propuso la actividad a los estudiantes.

La consigna fue que eligieran el problema de su preferencia y lo resolvieran con todo detalle, explicitando y justificando todos los procedimientos. Se les indicó que podían recurrir al material teórico de clase, a la bibliografía sugerida por la cátedra, y a toda otra fuente que les resultara de ayuda. Se les sugirió el uso de GeoGebra para la parte gráfica, analítica y numérica, aunque podían recurrir también a cualquier otro utilitario. Se les dijo que la entrega del trabajo resuelto era optativa y no vinculante en cuanto a la calificación para aprobar la asignatura; nuestro propósito al decidir una entrega optativa fue observar el interés que despertaba este tipo de tarea en nuestros estudiantes.

El trabajo se realizó en dos cursos de Análisis Matemático II de FRBA UTN durante el primer cuatrimestre de 2019: uno de 40 alumnos, de los cuales 14 entregaron el trabajo resuelto en el plazo requerido, y otro de 60, de los cuales 11 alumnos participaron de la propuesta.

Una vez devueltos los trabajos corregidos se les solicitó a los alumnos participantes que completaran la encuesta que se muestra en la Fig. 4, con el fin de conocer la opinión y las sensaciones de los estudiantes con respecto a varios tópicos relacionados con este tipo de trabajos interdisciplinarios.

Nos interesa conocer tu opinión con relación a trabajos de aplicación como el que te propusimos para ecuaciones diferenciales.

¿Cuál de los problemas elegiste? El del paracaídas ☐ El del colesterol ☐

¿Podés decirnos por qué lo elegiste? Me pareció más fácil ☐ Me interesaba el tema ☐ Otras razones: ....

Valora cada una de las siguientes expresiones. 5 es "totalmente de acuerdo". La encuesta es anónima.

	1	2	3	4	5
1- "Considero que realizar este tipo de actividades favorece mi aprendizaje".	☐	☐	☐	☐	☐
2- "La actividad sirvió para mejorar mi preparación no sólo en ecuaciones diferenciales sino también en aspectos tales como expresión escrita, uso de la información, capacidad crítica de análisis, etc.".	☐	☐	☐	☐	☐
3- "En las actividades en general, desarrolladas en clase, prefiero que se presenten situaciones problemáticas que despierten mi curiosidad, a pesar del grado de dificultad que pudieran tener".	☐	☐	☐	☐	☐
4- "Es interesante para mí poder establecer relaciones entre los contenidos de las diferentes asignaturas".	☐	☐	☐	☐	☐
5- "En las clases de las distintas materias trato de relacionar los conceptos desarrollados con otros adquiridos previamente".	☐	☐	☐	☐	☐
6- "Considero que podré aplicar los conceptos aprendidos sobre ecuaciones diferenciales en otras áreas de estudio".	☐	☐	☐	☐	☐
7- "Consulté con otros compañeros y eso me ayudó a poder responder las consignas del TP."	☐	☐	☐	☐	☐
8- "Para resolver el TP fueron suficientes los apuntes de clase y los links sobre GeoGebra"	☐	☐	☐	☐	☐
9- "Trabajo con más dedicación en clase cuando le encuentro algún sentido o aplicación al modelo teórico que estamos estudiando".	☐	☐	☐	☐	☐
10- "Pude comprender sin esfuerzo los conceptos no matemáticos de los problemas planteados"	☐	☐	☐	☐	☐

¡Muchas gracias!...

Fig. 4. Encuesta a posteriori.

4 Resultados

En líneas generales observamos que los estudiantes hicieron poco uso del GeoGebra o de algún otro utilitario. Se explayaban sobre todo en las resoluciones analíticas, prefiriendo el método de resolución para EDO lineales (a pesar de que es más sencillo resolver por separación de variables). Aun cuando en un ítem se les pedía la resolución por software, al tener que resolver luego alguna otra EDO con la misma estructura volvían a realizar la resolución analítica manualmente. La mayoría no advirtió que las soluciones debían explicitarse junto con el dominio correspondiente (de hecho, varios alumnos consideraron como dominio todo el conjunto de los números reales en la representación gráfica) y muchos tuvieron dificultades para representar las funciones definidas por tramos. Varios alumnos tuvieron problemas para trabajar con los distintos orígenes de tiempo. En general soslayaron la resolución numérica solicitada, entregando el ítem en blanco, o calculando manualmente tan sólo unos pocos puntos de aproximación.

Pocos alumnos respondieron a los requerimientos de realizar un análisis comparativo o a un estudio crítico de las soluciones.

En el curso de 40 alumnos eligieron mayoritariamente el problema del paracaídas y en el otro curso se repartieron en mitades, pero en ambos cursos justificaron mayoritariamente su elección (entre un 60 y un 70% de los participantes) por "el interés que la temática del problema les despertaba"; algunos otros argumentos interesantes fueron "(lo elegí) porque podía controlar mejor los resultados", "(lo elegí) porque aún no cursé física" (fue acertado incluir un problema que no requiriera conocimientos extra matemáticos previos) y "(lo elegí) porque se planteaba una situación que no conocía".

Todos los alumnos participantes estuvieron de acuerdo en que este tipo de actividades favorece el aprendizaje (todos eligieron entre 4 y 5 en la escala). En el resto de los incisos las respuestas fueron más diversificadas y es aventurado extraer conclusiones; en la Fig. 5 se muestra la dispersión de respuestas y los promedios ponderados para cada uno de los cursos. Hay, sin embargo, un par de respuestas que consideramos destacables: la primera es el masivo acuerdo con "es interesante para mí poder establecer relaciones entre los contenidos de las diferentes asignaturas" (pregunta 4) que expresa la demanda de integración entre las distintas áreas del conocimiento; al respecto Edgar Morín afirma en [10] que "la formación basada en competencias requiere asumir una nueva racionalidad que trascienda la parcelación y la fragmentación, con el fin de abordar la realidad en su multidimensionalidad", y éste parece ser un requerimiento que nace de los propios estudiantes. También es de destacar la respuesta a la pregunta 7: a pesar de tener amplia libertad para consultar fuentes de todo tipo, son pocos los alumnos que manifiestan haber recurrido a la consulta con algún compañero; interpretamos este dato como una manifestación de la escasa práctica del trabajo colaborativo que tienen nuestros estudiantes.

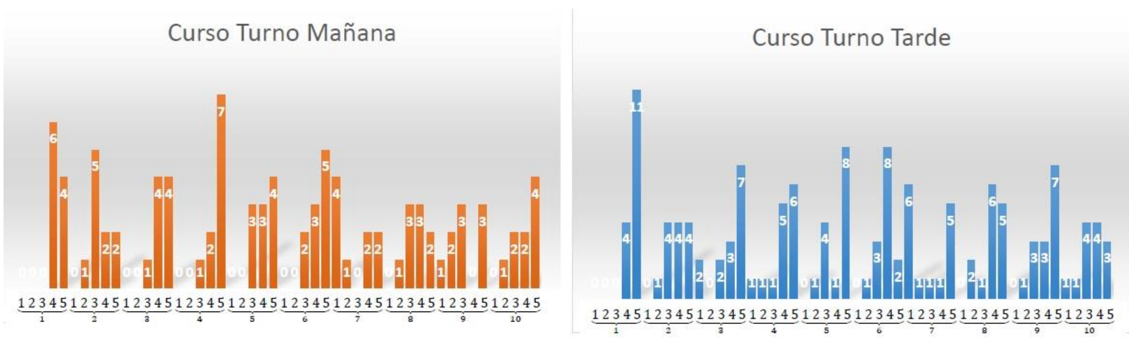


Fig. 5a. Resultados de la encuesta (por cursos).

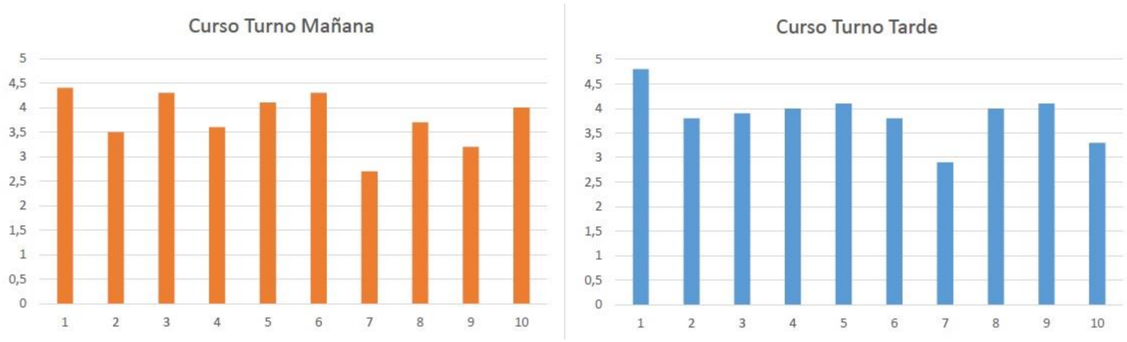


Fig. 5b. Resultados de la encuesta (promedios ponderados).

A continuación, seleccionamos fragmentos de algunas respuestas de los alumnos, para ilustrar su desempeño.

En la Fig. 6 se muestra el trabajo de un alumno que, no sólo incluyó una graciosa ilustración del problema, sino que también hizo una cuidadosa resolución por el método de variables separables.

En la Fig. 7 se ve una parte de la completa resolución numérica realizada por otro alumno, que constituye uno de los pocos casos entre todos los trabajos recibidos.

En la Fig. 8, una interesante fundamentación cuantitativa de la efectividad de los tratamientos para bajar el colesterol, aunque este tipo de análisis fue evitado por la mayor parte de los estudiantes.

En la Fig. 9 se muestra el trabajo de un alumno que hizo uso correcto del GeoGebra para graficar la función por tramos, mientras que en la Fig. 10 se ilustra un uso erróneo de los orígenes de tiempo.

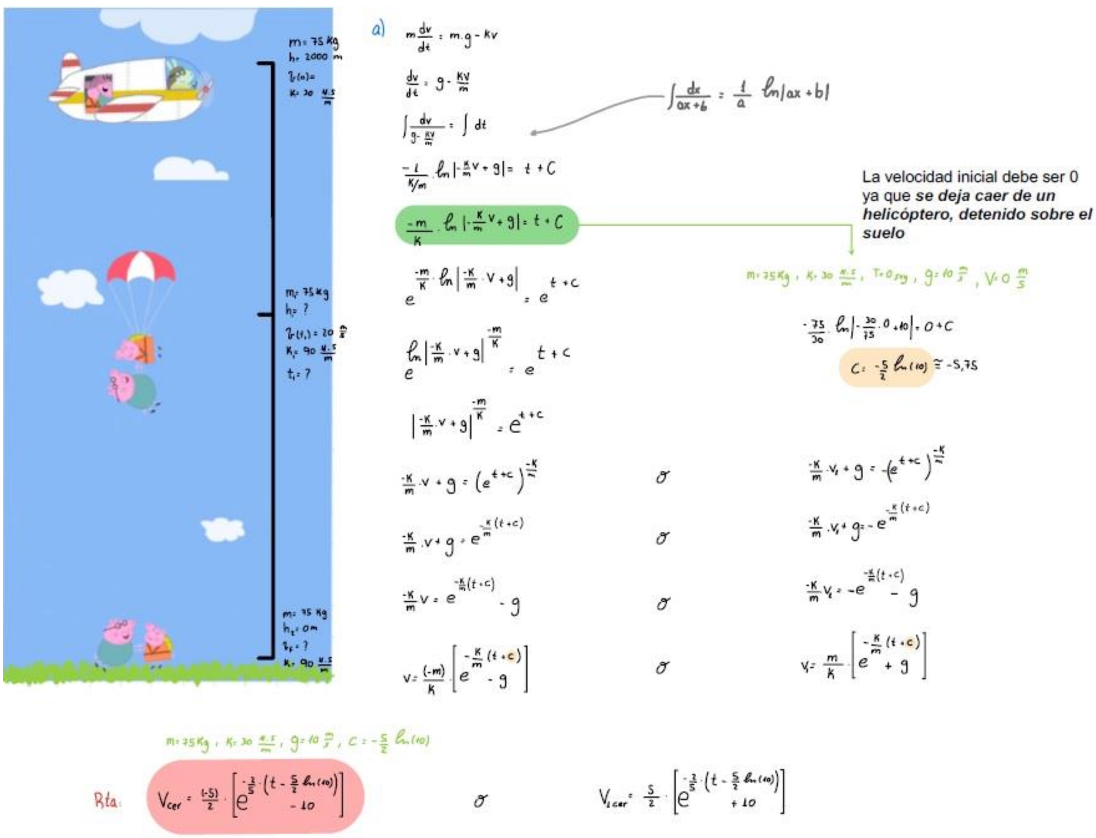
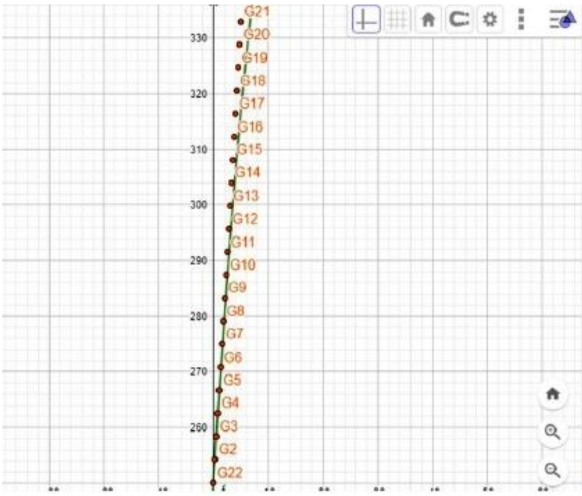


Fig. 6. En el trabajo de este alumno se observa una cuidadosa resolución por el método de variables separables.



		B	C	D	E	F	G
1		C(Tn)	T(n+1)	T(n+1)-Tn	f(Tn,C(Tn))	C(Tn+1)	Punto
2	0	250	0.25	0.25	17	254.25	(0.25, 254.25)
3	.25	254.25	0.5	0.25	16.58	258.39	(0.5, 258.39)
4	0.5	258.5	0.75	0.25	16.15	262.54	(0.75, 262.54)
5	.75	262.75	1	0.25	15.73	266.68	(1, 266.68)
6	1	267	1.25	0.25	15.3	270.83	(1.25, 270.83)
7	.25	271.25	1.5	0.25	14.88	274.97	(1.5, 274.97)
8	1.5	275.5	1.75	0.25	14.45	279.11	(1.75, 279.11)
9	.75	279.75	2	0.25	14.03	283.26	(2, 283.26)
10	2	284	2.25	0.25	13.6	287.4	(2.25, 287.4)
11	.25	288.25	2.5	0.25	13.18	291.54	(2.5, 291.54)
12	2.5	292.5	2.75	0.25	12.75	295.69	(2.75, 295.69)
13	.75	296.75	3	0.25	12.33	299.83	(3, 299.83)
14	3	301	3.25	0.25	11.9	303.98	(3.25, 303.98)
15	.25	305.25	3.5	0.25	11.48	308.12	(3.5, 308.12)
16	3.5	309.5	3.75	0.25	11.05	312.26	(3.75, 312.26)
17	.75	313.75	4	0.25	10.63	316.41	(4, 316.41)
18	4	318	4.25	0.25	10.2	320.55	(4.25, 320.55)
19	.25	322.25	4.5	0.25	9.78	324.69	(4.5, 324.69)
20	4.5	326.5	4.75	0.25	9.35	328.84	(4.75, 328.84)
21	.75	330.75	5	0.25	8.93	332.98	(5, 332.98)
22							(0, 250)

Fig. 7. En la respuesta de este alumno se aprecia una minuciosa resolución numérica utilizando GeoGebra, pero se trata de un caso excepcional en el grupo de alumnos que participaron.

e)

Con C(0) = 250.
En el caso A, de seguir con la dieta por tiempo indefinido, C(t) tenderá a 220.
En el caso B, de hacer la dieta por 5 días y continuar con dieta más medicamento, C(t) tenderá a 170.

250 --- 100%
220 --- 88%
170 --- 68%

=> El caso B es un 20% más efectivo que el caso A.

Gráfico: Caso A Caso B

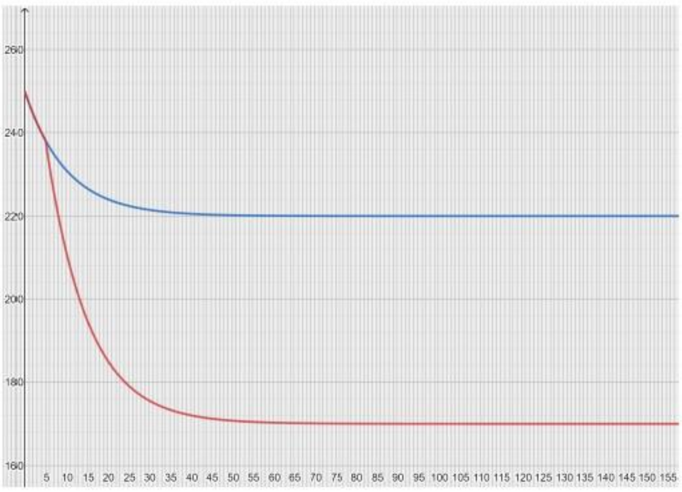


Fig. 8. En la resolución presentada por este alumno se puede ver una interesante ponderación de la efectividad de los tratamientos para bajar el colesterol.

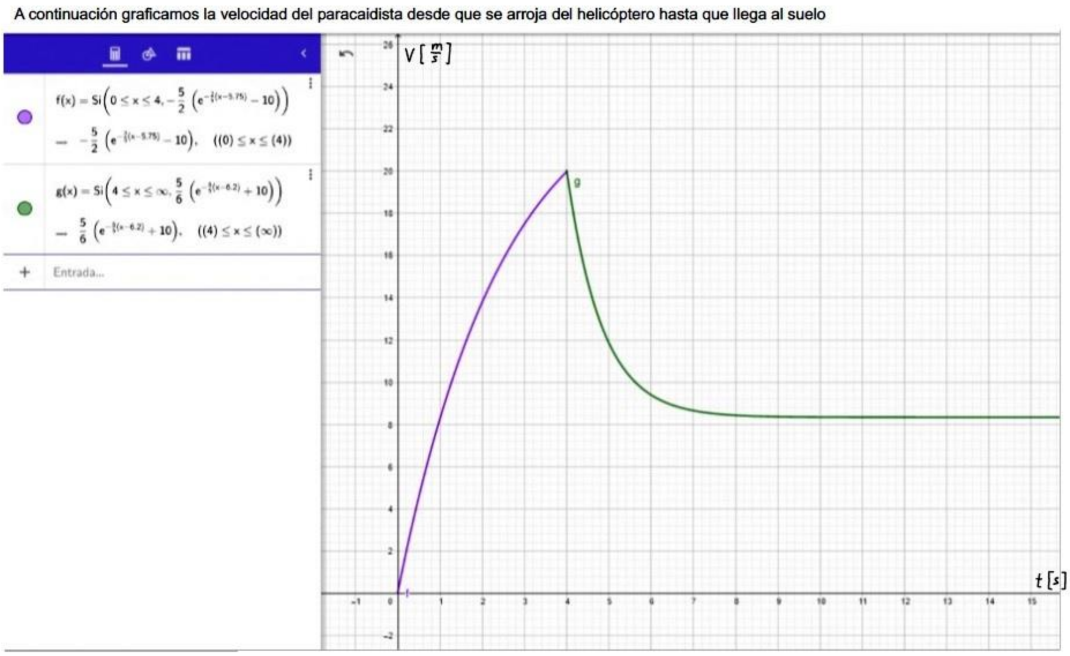
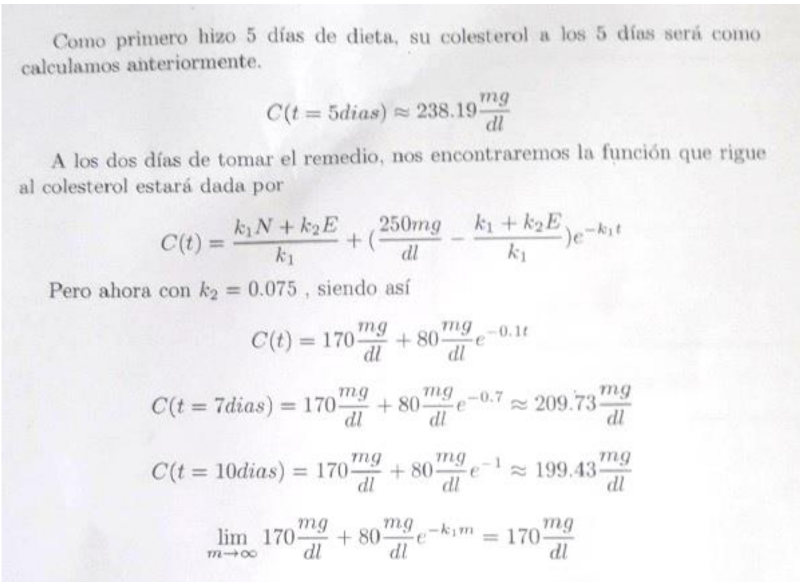


Fig. 9. Uso correcto del GeoGebra para graficar la velocidad del paracaídas por tramos.



Como primero hizo 5 días de dieta, su colesterol a los 5 días será como calculamos anteriormente.

$$C(t = 5dias) \approx 238.19\frac{mg}{dl}$$

A los dos días de tomar el remedio, nos encontraremos la función que rigue al colesterol estará dada por

$$C(t) = \frac{k_1 N + k_2 E}{k_1} + (\frac{250mg}{dl} - \frac{k_1 + k_2 E}{k_1})e^{-k_1 t}$$

Pero ahora con $k_2 = 0.075$, siendo así

$$C(t) = 170\frac{mg}{dl} + 80\frac{mg}{dl}e^{-0.1t}$$

$$C(t = 7dias) = 170\frac{mg}{dl} + 80\frac{mg}{dl}e^{-0.7} \approx 209.73\frac{mg}{dl}$$

$$C(t = 10dias) = 170\frac{mg}{dl} + 80\frac{mg}{dl}e^{-1} \approx 199.43\frac{mg}{dl}$$

$$\lim_{m\to\infty} 170\frac{mg}{dl} + 80\frac{mg}{dl}e^{-k_1 m} = 170\frac{mg}{dl}$$

Fig. 10. En la resolución realizada por este alumno se observa que no ha tenido en cuenta que la función "concentración de colesterol" debe ser definida por tramos para hallar los valores correctos: para el caso "dieta + medicamento" utiliza la fórmula con medicamento desde $t = 0$.

5 Conclusiones

Es innegable la necesidad de reemplazar el paradigma tradicional de enseñanza de ecuaciones diferenciales. El esquema usual, consistente en un listado de métodos de resolución analítica seguido de ejemplos de aplicación, que finaliza luego con un listado de ejercicios más o menos rutinarios, contribuye muy poco a dar significatividad y propicia un aprendizaje algorítmico, carente de creatividad y de corta duración para un contenido de particular importancia en la ciencia aplicada y en la ingeniería. Por otra parte, no estimula el desarrollo de competencias imprescindibles en la formación de los futuros profesionales, como la capacidad de resolver problemas, la capacidad de comunicar resultados y ejercer un pensamiento crítico, la aptitud para modelizar, etc.

La propuesta didáctica que pusimos en juego fue un intento de proveer a los alumnos de una oportunidad para comprender y aplicar los conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales en situaciones realistas que favorezcan un aprendizaje significativo y de larga duración. El trabajo con problemas interdisciplinarios contribuye a dar significatividad al contenido y parece responder a inquietudes de los mismos estudiantes en cuanto a un aprendizaje menos fragmentado, que integre las distintas áreas de conocimiento. Por otro lado, la facilidad con que se accede hoy en día a herramientas tecnológicas de uso sencillo - que posibilitan la visualización de curvas solución y el cálculo de soluciones numéricas aproximadas sin demasiado esfuerzo - permite situar la resolución en un ámbito más próximo al profesional. Ambos aspectos – multidisciplinariedad y uso de la tecnología - están en consonancia con el nuevo paradigma de formación por competencias que está tratando de introducirse en la educación superior.

Se advierte aún, sin embargo, cierta resistencia por parte de los alumnos a abandonar la "zona de confort" constituida por "aplicar un método de resolución conocido y llegar a la fórmula final": les cuesta trabajar en los registros gráfico y numérico, así como realizar análisis y juicios críticos; tampoco eligen espontáneamente consultar con un compañero o resolver en forma colaborativa.

El cambio de paradigma tardará en producirse; se necesita no sólo de la decisión de los docentes de elaborar propuestas didácticas acordes, sino también de que los alumnos acepten el desafío y adquieran cierta sensación de seguridad, aun trabajando en tareas abiertas y con requerimientos poco usuales que exijan la iniciativa, el juicio crítico y el manejo de la incertidumbre, que son propios del verdadero trabajo profesional y que es necesario emular lo más cercanamente posible durante la etapa de formación universitaria.

Por otro lado, en el marco del PID, es nuestra intención extender las propuestas de plantear actividades interdisciplinarias cuya base sean otros contenidos de Análisis Matemático II.

Referencias

1. Biembengut, M. S.; Hein, N.: Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (2), pp. 105-125, (2004).
2. CONFEDI: Primer Acuerdo sobre Competencias Genéricas. *3er. Taller s/ Desarrollo de Competencias en la Enseñanza de la Ingeniería Argentina*. Villa Carlos Paz, 14 y 15 de agosto 2006, 3er. Informe, (2006)
3. CONFEDI: *Competencias en Ingeniería*, 1ra. Edición. Mar del Plata: FASTA Ediciones, (2014).
4. CONFEDI: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina: Libro Rojo de CONFEDI*. Mar del Plata: FASTA Ediciones, (2018).
5. Righetti, G. y Seminara, S.: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: una propuesta didáctica basada en problemas interdisciplinarios, trabajo presentado en la JEIN 2019, Jornada de Enseñanza de la Ingeniería, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional La Plata, octubre de 2019.
6. Blanchard, P.; Devaney, R.; Hall, C.: *Ecuaciones Diferenciales*. México: International Thomson Editores, (1999).
7. Nagle, R.; Saff, E.; Snider, A.: *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4ta. edición. México: Pearson Educación, (2005).
8. Duval, R.: *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*, 2nda. Edición. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, (2004).
9. Artigue, M. y Rogalski M.: Enseigner autrement les équations différentielles. En: DEUG Commission interIREM Université (ed.): *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG a première année*. Lyon: LIRDIS, pp. 113–128 (1990). http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/WN/IWN90004/IWN90004.pdf. Accedido el 28 de diciembre de 2019.
10. Morín, E.: *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Barcelona: Paidós Ibérica, (2001).

Una experiencia de “Gamificación” del aula de Cálculo

Damián Silvestre, Silvia Seminara

Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Mozart 2300, C1407IVT - CABA
dsilvestre@gmail.com; seminarasilvia@gmail.com

Resumen. En este trabajo relatamos experiencias de aula llevadas a cabo en varios cursos de segundo año de ingeniería, en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional, en la asignatura Análisis Matemático II. Se basan en la utilización de videojuegos en los que los alumnos avanzan de nivel resolviendo ejercicios de aplicación sobre los diversos contenidos de la asignatura. Recogimos la opinión de los estudiantes que manifestaron su beneplácito, y aseguraron sentirse más motivados a realizar las actividades mediante este recurso lúdico.

Palabras Clave: Gamificación, Motivación, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

Es conocida la importancia que tiene la motivación en los procesos educativos: es imprescindible si se quiere asegurar un aprendizaje efectivo y duradero en el tiempo. Aebli, en [1], llega a afirmar que, sin motivación, el aprendizaje lisa y llanamente no se produce.

Aunque en educación superior muchas veces es soslayada, la motivación también es importante en la universidad, especialmente en los primeros años de las carreras, cuando los alumnos se enfrentan con las materias básicas que raras veces tienen relación con situaciones realistas o con el desempeño profesional futuro. En algunas ocasiones la motivación puede provenir del interés que el mismo contenido despierta en el estudiante, pero esto es poco frecuente en las matemáticas de primero y segundo años que son eminentemente formativas, e incluyen algunos contenidos difíciles de anclar en la realidad; los docentes debemos realizar un marcado esfuerzo para que esos contenidos resulten significativos para los estudiantes y éstos se convenzan de que todo eso “les va a servir alguna vez”.

Como docentes de Análisis Matemático II nos hemos enfrentado en numerosas ocasiones con falta de interés por parte de los estudiantes, que suelen recurrir a un aprendizaje mayormente memorístico y de corta duración para tratar de sortear (con escaso éxito) las evaluaciones sumativas periódicas a las que se ven sometidos. Demuestran, en particular, escaso interés por trabajar con las guías de trabajos prácticos, y limitan su ejercitación a resolver “modelos de examen” en fechas cercanas a las evaluaciones.

Ante esta realidad, buscamos una motivación “extrínseca”, como la participación en juegos, para acaparar su atención y lograr su compromiso con las actividades de la asignatura, principalmente con la resolución de ejercicios y problemas en forma continuada a lo largo de la cursada.

En este trabajo relatamos la experiencia, comentamos algunos de los resultados obtenidos y enumeramos algunas intenciones de nuestro trabajo futuro.

2 Marco teórico

El término “gamificación” ha sido acuñado recientemente, y comenzó a utilizarse masivamente en la última década. Proviene de la palabra inglesa “game” (juego) y se refiere, según la definición que dan Deterding et al. en [2], a la utilización de elementos típicos del diseño de juegos en ámbitos no lúdicos, como pueden ser el laboral o el educativo. El término se utiliza, sobretodo, con referencia a juegos digitales o videojuegos, tan populares en la actualidad, y el propósito de recurrir a ellos es “involucrar a la persona que participa y aumentar su motivación, concentración, esfuerzo y fidelización”, como puntualiza Werbach en [3].

En el ámbito educativo el proceso de gamificación se basa en la hipótesis de que el grado de compromiso que un jugador experimenta cuando está jugando puede trasladarse al contexto del aprendizaje, para facilitarlo, y para influir positivamente en el comportamiento de quien aprende [4]. Elementos propios de los juegos como son la narrativa, la retroalimentación inmediata, la maestría para subir de nivel, el progreso escalonado, los indicadores de progreso (puntos, insignias, carteleras de rankings, etc.), la interacción social y la diversión, pueden utilizarse para captar el interés de los estudiantes, más aún si tenemos en cuenta que nuestros alumnos son “nativos digitales” que suelen pasar horas de su tiempo libre jugando videojuegos y demuestran gran maestría en ellos.

Si bien incentivos tales como puntos, premios o rankings constituyen motivaciones de tipo extrínseca – tradicionalmente valoradas en forma negativa en el ámbito educativo – algunos autores como Malone se han ocupado de analizar cuán difusa es esta separación entre motivación intrínseca y extrínseca, y hacen notar que aspectos como el desafío, la fantasía y la curiosidad, que están presentes en los juegos, dan origen, en realidad, a motivaciones internas en el sujeto que juega [5].

Algunos de los beneficios que ofrece la gamificación en educación son la atmósfera relajada que se provoca en relación a los errores que se cometan (ya que el alumno puede, simplemente, intentarlo nuevamente), el clima distendido y de diversión que puede lograrse en el aula, la devolución inmediata de indicadores de progreso que tienen los participantes y, en definitiva, la sensación por parte de los estudiantes de que son dueños de su propio aprendizaje [4].

3 Nuestra experiencia

Llevamos a cabo la experiencia en varios cursos cuatrimestrales de Análisis Matemático II, así como en cursos de verano de la misma materia, correspondiente al segundo año de las carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Regional Buenos Aires.

Análisis Matemático II es una asignatura en la que la deserción y el porcentaje de alumnos que deben repetir el cursado es elevado. Los contenidos comprenden cálculo multivariado y ecuaciones diferenciales ordinarias. Los cursos son numerosos y los cronogramas muy ajustados, por lo que resultan casi inevitables las clases expositivas, y son escasas las oportunidades que se les dan a los alumnos para trabajar en el aula, ya sea de modo individual o cooperativo.

Se trata de subsanar estas falencias poniendo a disposición de los estudiantes múltiples canales de comunicación (aula virtual, grupo de WhatsApp, grupo de Facebook) y proponiéndoles breves tareas periódicas de entrega voluntaria, para realizar una evaluación continua y así poder monitorear las dificultades que se pudieran presentar. A pesar de todo ello, notábamos escasa motivación en el alumnado y poco interés por la resolución de las guías de trabajos prácticos y por la entrega de las tareas adicionales.

Decidimos, entonces, recurrir a los juegos.

Su introducción en el aula fue paulatina. Elegimos, por simplicidad, diseñar juegos del tipo “visual novel”, vale decir al estilo “elige tu propia aventura". En la web se dispone de tutoriales que explican cómo elaborar este tipo de juegos y a qué programas se puede recurrir.

En el primer cuatrimestre de 2018 comenzamos por utilizar un primer juego con el propósito de que los alumnos resolvieran una selección de ejercicios correspondientes a los contenidos del primer parcial, a modo de revisión. Se trataba de un juego diseñado y elaborado ad hoc mediante el motor de videojuegos (libre) RenPy, que utiliza lenguaje Python. Consistía en una búsqueda del tesoro en una casa embrujada, y para lograr cada objetivo que permitiera avanzar en cada nivel del juego (abrir un maletín, desactivar una alarma, abrir una caja fuerte, etc.) se requería un código de cuatro números, coincidente con las cuatro primeras cifras significativas del resultado correcto del ejercicio correspondiente. El videojuego se puso a disposición de los alumnos mediante una aplicación de celular, con la idea de que lo jugaran individualmente en sus casas y compartieran sus avances a través de los grupos de WhatsApp y de Facebook. Cada nivel superado tenía un incentivo (descubrir un escondite, una salida, etc.), y al superar el último nivel (resolver el último ejercicio) se encontraba el “tesoro”. Se cuidó la estética en el diseño, de modo que resultara atractivo, y no faltaron las notas de humor. Se dio un pequeño premio a los tres primeros alumnos que lograron llegar al final del juego. La aceptación fue mayoritaria, a juzgar por los comentarios recibidos, y logramos un alto grado de motivación en los estudiantes, que se abocaron con entusiasmo a resolver los ejercicios elegidos.

En las Fig. 1a, 1b, 1c y 1d se ven algunas pantallas de este primer videojuego.

El personaje principal, "Fantasmín", había ya aparecido en las clases como símbolo de "objetos matemáticos que no son lo que parecen" (por ejemplo, una ecuación implícita que "parece" representar una curva pero que no lo hace en realidad).

En ocasión del segundo parcial repetimos la experiencia con otro videojuego con los mismos personajes, pero con la consigna de jugar en clase y trabajando en grupos. El éxito fue aún mayor en cuanto a interés y participación de los alumnos.

Luego de esta segunda experiencia se les realizó a los alumnos la encuesta que se ve en la Fig. 2. Fue respondida por 25 alumnos de los cuales el 75% había jugado a ambos juegos; aproximadamente un 30% pudo llegar al final del primer juego y un 50% al del segundo. En la Fig. 3 se muestran los promedios ponderados de las respuestas con escala numérica.

Entre los comentarios adicionales podemos citar los siguientes:

– *"Muy buena cursada, me encantó el juego".*
– *"Me parece buena idea la de agregar el juego, hace de la clase algo no tan estructurado y es divertido. Y quizás se aprende lo mismo".*
– *"Que esté disponible para IOS".*
– *"Estaría bueno que sea una web app, así está en todas las plataformas".*
– *"Cursé en el primer cuatrimestre y en éste, y siento que los juegos o ejercicios adicionales me ayudaron a mejorar y ver como venía".*
– *"Tendría que tener una ayuda informando la teoría para resolver el siguiente ejercicio".*
– *"La inclusión de un videojuego para estudiar ayudó mucho a repasar los temas para el parcial".*
– *"¡La idea de los juegos es genial!"*
– *"Muy buena la cursada, hay muy buen ambiente".*
– *"Gran forma de enseñar, profe, es un genio."*

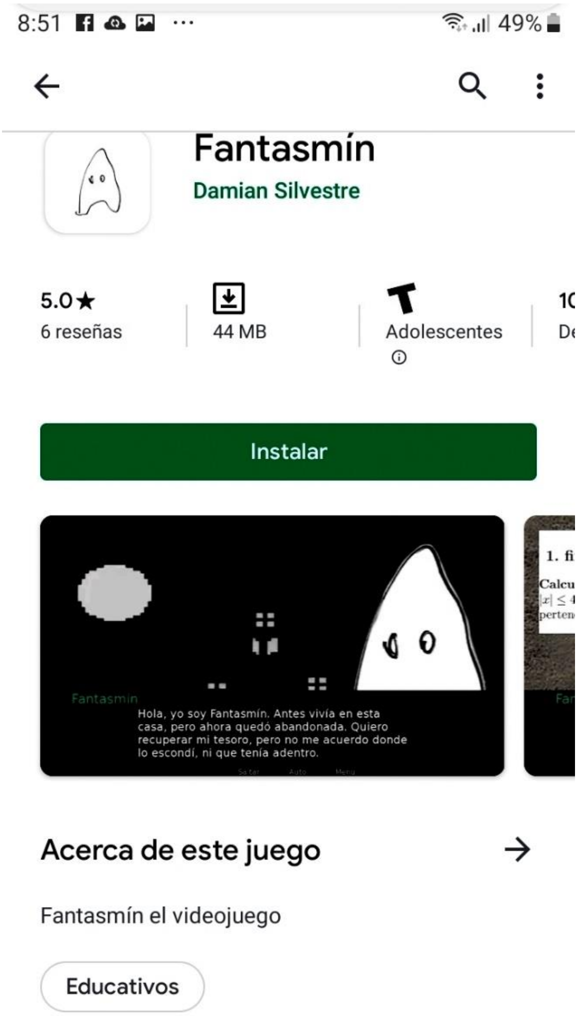


Fig. 1a: La pantalla de instalación del primer videojuego.

Fig. 1b: La pantalla de inicio del videojuego.

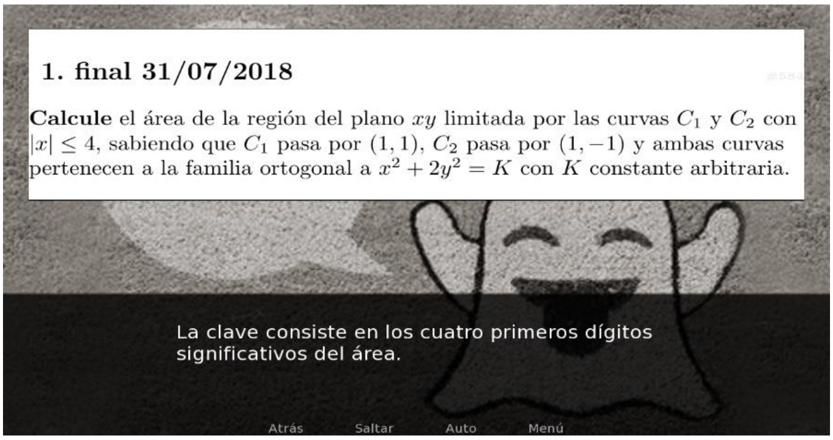


Fig. 1c: Uno de los ejercicios a resolver.

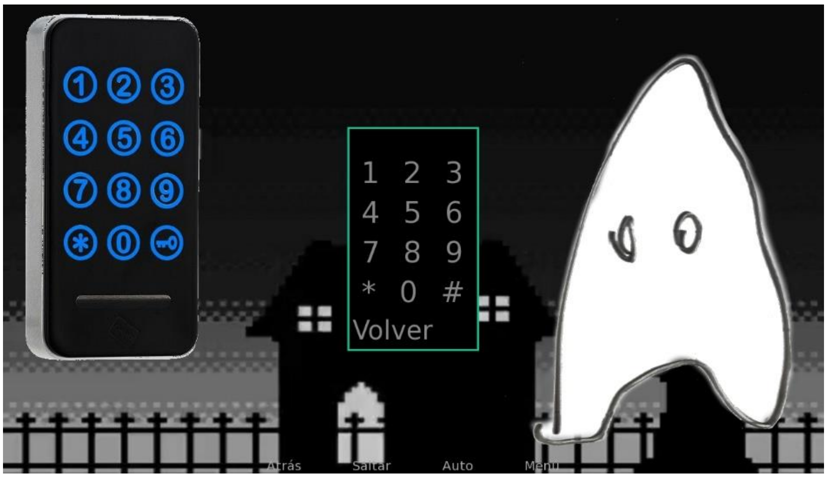


Fig. 1d: Una de las pantallas para ingresar códigos.

Entre los motivos por los cuales algunos alumnos manifestaron no haber jugado se destacaban la falta de tiempo fuera del horario de cursada, y la imposibilidad técnica de jugar, por no contar con un dispositivo compatible con el soporte del juego.

Pseudónimo:……………………………………………..

Queremos conocer tu opinión, para mejorar…

Nos interesa saber cuál fue tu experiencia de cursada, en particular porque introdujimos por primera vez los juegos como parte de las actividades de aprendizaje.

¿Jugaste a …

…Fantasmín I? *sí* ☐ *Llegaste hasta el final?* *sí* ☐ *no* ☐

no ☐ (*)

…Fantasmín II? *sí* ☐ *Llegaste hasta el final?* *sí* ☐ *no* ☐

no ☐ (*)

(*) *Por qué no jugaste?*……………………………………………………………………………………

………

Si jugaste a alguno de los juegos, te pedimos que expreses tu acuerdo, en una escala de 1 a 5 (5 es acuerdo máximo) con las siguientes afirmaciones:

	1	2	3	4	5
A) *"Los jueguitos me ayudaron a preparar los temas para el parcial. "*					
B) *"Me hubiera ayudado igual que me dieran los mismos ejercicios en un listado."*					
C) *"Ir sorteando los niveles de juego me estimulaba a seguir adelante."*					
D) *"Aprendí cosas que no sabía al resolver los ejercicios de cada nivel."*					
E) *"Me interesaba avanzar para saber cómo seguía la historia de Fantasmín."*					
F) *"Me interesaba llegar hasta el final para obtener el premio."*					
G) *"Estaba más concentrado que de costumbre al resolver los ejercicios del juego"*					
H) *"Fue provechoso trabajar con mis compañeros para resolver los problemas."*					
I) *"Usualmente juego a los videojuegos."*					

Si querés hacernos algún comentario adicional o alguna sugerencia, estaremos muy agradecidos……………………………………………………………………………………

………

………

¡Mucha suerte en el parcial! …. 

Fig. 2: Encuesta administrada luego del segundo juego.

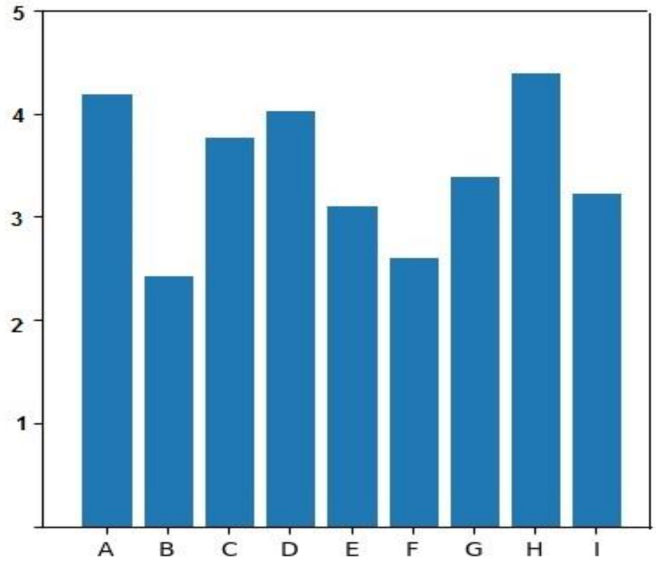


Fig. 3: Los resultados de la parte numérica de la encuesta.

Durante el curso de verano y en los siguientes cuatrimestres los juegos se multiplicaron. Introdujimos uno por cada par de contenidos de la asignatura a través del aula virtual, siempre con alguna anécdota humorística o un misterio para resolver como incentivo; algunos de los juegos eran técnicamente más sofisticados, como por ejemplo un emulador de Game Boy (que se implementó con la herramienta GB Studio) o un decodificador de textos, ocultos en una vieja computadora. Al incluirlos en el aula virtual respondimos a los requerimientos de los estudiantes que nos solicitaban que fueran accesibles desde cualquier dispositivo. Los alumnos jugaban en clase todas las semanas, en grupos de a dos o tres y utilizando sus teléfonos celulares, y de ese modo no necesitaban tiempo extra fuera del aula. El entusiasmo era visible (a modo de anécdota mencionemos que, en una oportunidad, hubo un corte de energía eléctrica en la facultad y los alumnos continuaron jugando a media luz, usando sus celulares). Los ganadores recibían un pequeño premio y aparecían en una "cartelera de la fama" en la misma aula virtual. Mediante las herramientas de la plataforma Moodle podíamos seguir a los distintos grupos y saber quiénes habían pasado cada nivel y quiénes no. Durante esa hora y media por semana que destinábamos a jugar los docentes recorríamos los grupos de trabajo, contestábamos las consultas y brindábamos ayudas a los más rezagados, de modo que el entusiasmo no decayera. De este modo nos asegurábamos de que, al menos durante una hora y media a la semana, los estudiantes realizaran actividades sobre los distintos contenidos de la asignatura, elegidos convenientemente.

En las Figuras 4, 5, 6, 7 y 8 se pueden ver algunas de las pantallas de distintos juegos. En una de las oportunidades, mientras los alumnos jugaban, los avances se podían ver en la pantalla mediante las posiciones de caballos en una carrera imaginaria (Fig. 9).

Fig. 4: La pantalla de inicio de una búsqueda de tesoro.

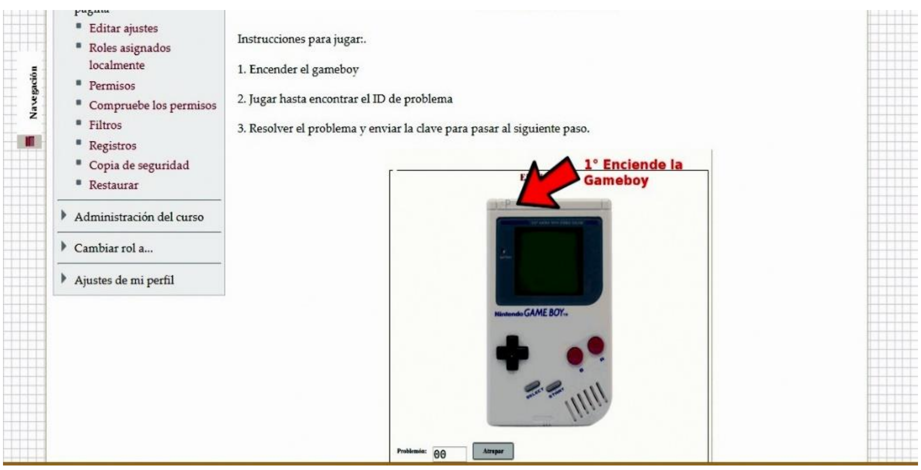


Fig. 5: Una de las primeras pantallas del emulador de Game Boy.

Fig. 6: Una de las pantallas del emulador de Game Boy.

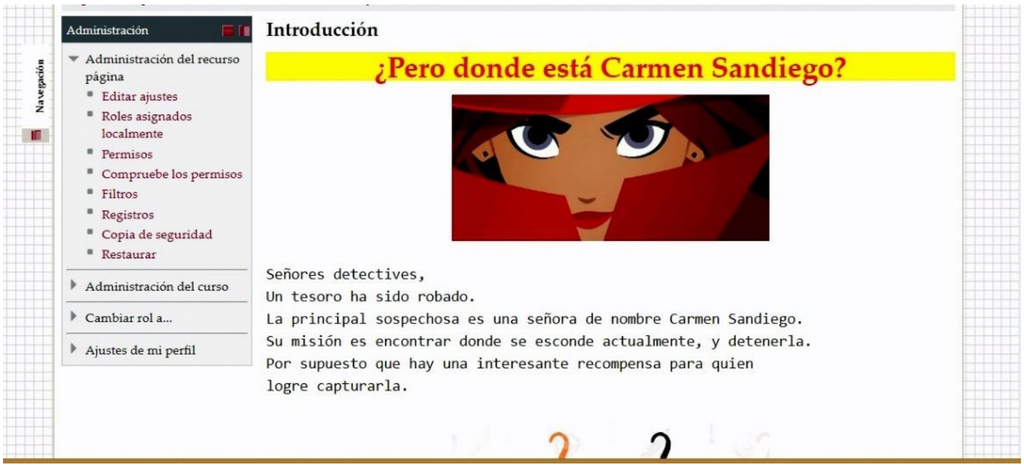


Fig. 7: Pantalla de inicio de otro de los juegos.

Fig. 8: En este juego el resultado correcto de un ejercicio de integración permitía descifrar un código secreto para leer un mensaje en la vieja computadora.

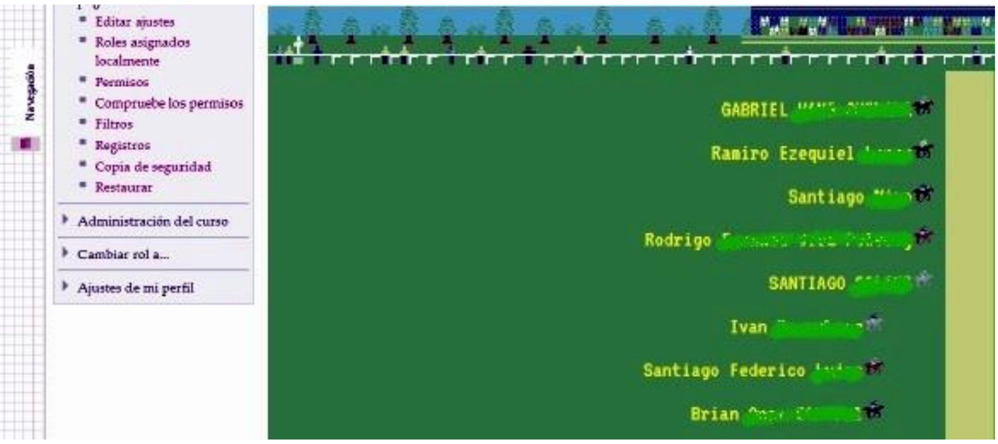


Fig. 9: El ranking de los participantes, mostrado con el aspecto de un certamen hípico.

4 Conclusiones

La motivación es esencial para que se produzca el aprendizaje y una tarea atractiva puede producir en el alumno la motivación que un determinado contenido no logra provocar por sí mismo. Para nuestros alumnos – nativos digitales – un juego con niveles a superar, metas a alcanzar, misterios a develar, puede resultar un estímulo para encarar tareas que de otro modo no serían abordadas o serían postergadas.

Nos propusimos utilizar juegos digitales para motivar a nuestros alumnos y asegurarnos de que resolvieran periódicamente ejercicios relacionados con los diferentes contenidos de nuestra asignatura.

Los objetivos de la experiencia se cumplieron en cuanto a lograr una mayor motivación del alumnado: lo observamos a través del clima que se creó en el aula, la predisposición al trabajo que demostraban en cada jornada de juegos y los resultados de la encuesta realizada, en la que hicieron explícito su beneplácito. También se cumplió nuestro objetivo de que los alumnos tuvieran cierta continuidad en la realización de actividades de la asignatura, ya que logramos que semanalmente se abocaran a la resolución de ejercicios y problemas embebidos dentro de un juego. Como valor agregado, el clima cordial, la buena predisposición y el ambiente cooperativo se mantenían en las clases en las que no jugaban.

Es prematuro aún asegurar que estas experiencias lúdicas mejoran el rendimiento de los alumnos y la calidad de los aprendizajes, pero existen indicios positivos. Así lo muestra, por ejemplo, la Figura 10, donde se observa la correlación lineal entre las notas obtenidas por los alumnos de un curso en el primer parcial (eje vertical) y la cantidad de ítems de juegos que resolvieron (eje horizontal); en ese mismo grupo de alumnos se observó que todos los alumnos que promocionaron resolvieron más de 30 ítems de juegos (sobre un total de 38).

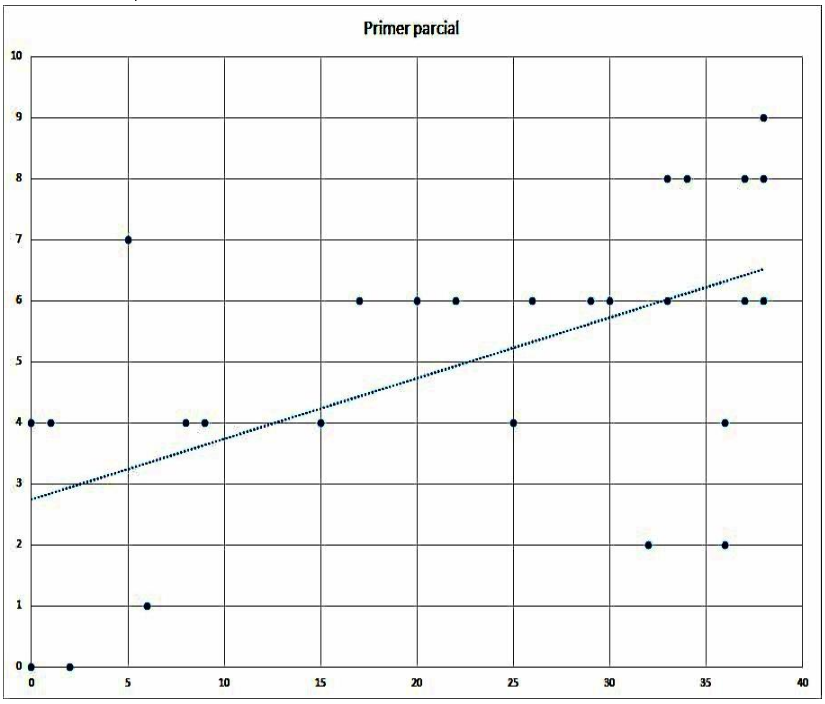


Fig. 10: Correlación lineal entre la nota del primer parcial y la cantidad de ítems de juegos resueltos, para un grupo de nuestros alumnos.

Por el momento sí podemos asegurar que hemos logrado mejorar el ambiente de trabajo en el aula, y que los alumnos se "involucren" en forma directa en el logro de sus aprendizajes.

Entre los trabajos futuros nos proponemos mejorar la calidad de las actividades matemáticas incluidas en los juegos, diversificar el tipo de respuestas admisibles para sortear los distintos niveles e introducir algunos refuerzos teóricos, o pequeñas ayudas, que aparezcan a lo largo del juego cuando las respuestas sean incorrectas, de acuerdo con sugerencias de algunos alumnos.

Referencias

1. Aebli, H.: Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo. Madrid: Marcea (2001).
2. Deterding, S., Dixon D., Khaled, R. and Nacke, L.: Gamification: Toward a Definition, CHI 2011, May 7–12. Vancouver, BC, Canada: ACM 978-1-4503-0268-5/11/05 (2011).
3. Werbach, K.: Gamificación. Fundació Factor Humà. Unidad de Conocimiento (2013).
4. David L.: Gamification in Education. Learning Theories. https://www.learning-theories.com/gamification-in-education.html (2016). Accedido el 7 de enero de 2020.
5. Malone, T. W.: What makes things fun to learn? A study of intrinsically motivating computer games. Stanford University: Cognitive and Instructional Science Series (1980).

Propuesta de aprendizaje activo vía TIC con interfaz de usuario para un curso de matemática aplicada a mediciones indirectas

Fernando A. Otero[1,2], André F. Pontis[1], Carlos A. Chiuro[1], Gloria L. Frontini[1,2]

[1] Grupo de Matemática Aplicada a Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
7600

[2] Grupo de Evaluación No Destructiva, División de Ciencia e Ingeniería de Polímeros,
Instituto de Investigaciones en Ciencia y Tecnología de Materiales, Universidad Nacional de Mar del Plata
y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
7600
{foterovega, cchiuro, gfrontin}@fi.mdp.edu.ar, apontis@alumnos.exa.unicen.edu.ar

Resumen. En este trabajo presentamos una propuesta de modalidad educativa para un curso de matemática aplicada a través del aprendizaje basado en problemas. En este caso particular el problema planteado es el de analizar la factibilidad y de ser posible construir un proceso alternativo a los tradicionales testeos de calidad de los generadores de números pseudoaleatorios. Dicho problema ha sido inspirado en un juego introducido en presentaciones de divulgación científica en escuelas secundarias en Mar del Plata, debidamente adaptado y reformulado a fin de emplearse para este curso de posgrado. El esquema de resolución esbozado ha sido implementado computacionalmente usando TICs mediante un esquema de gamificación y sigue el de la metodología de problemas inversos considerado en el marco de la matemática aplicada a las mediciones indirectas, materia actualmente dictada en carreras de posgrado de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Nacional de Mar del Plata. En la propuesta brindamos el desarrollo de una aplicación integrada que permite a los alumnos un aprendizaje activo en las diferentes etapas del esquema de resolución sugerido, donde asimismo mostramos su correspondiente articulación con varios ejes conceptuales del plan de la materia.

Palabras Clave: Aprendizaje basado en problemas/proyectos, Aprendizaje activo, TIC, Gamificación, Optimización basada en Simulación

1 Introducción

Las estrategias de aprendizaje activo (AA) proponen la transmisión de conceptos en carreras con competencias duras mediante la realización de experimentos que permiten fijar conceptos teóricos [1]. Por otro lado, enseñar y aprender con TIC implica plantearse cualquier aplicación informática o cualquier medio electrónico, tanto en línea como fuera de línea– como una herramienta cognitiva, pero además cuando el aprendizaje es de TIC el estudiante elabora un dominio de contenido de una manera determinada de modo que la herramienta informática se puede convertir en una herramienta de conocimiento [2]. En efecto, cuando la aplicación informática es empleada para realizar simulaciones computacionales su uso en el área de educación favorece el enfoque por competencias a través de una estrategia basada en el aprendizaje basado en problemas: permiten al estudiante llegar al conocimiento por medio del trabajo exploratorio, la inferencia, el aprendizaje por descubrimiento y el desarrollo de habilidades implicadas en la investigación de un determinado fenómeno, así como también desarrollar ciertas acciones, habilidades y hábitos del tema o especialidad y resolución de problemas [3].

En relación a nuestro objetivo específico, la propuesta que se muestra en este trabajo ha sido inspirada en una serie de presentaciones de divulgación científica que se han venido realizando en escuelas de

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

enseñanza media desde el año 2016. En las mismas se hace uso de un enfoque basado en el uso de TICs para catalizar el interés de los estudiantes. Se emplean algunas estrategias de gamificación haciendo uso de la definición de Gartner dada como "el uso de la mecánica del juego y el diseño de la experiencia digital para interesar y motivar a la gente a alcanzar sus metas" [4]. Por otra parte, la enseñanza de matemática aplicada en el área de educación superior si bien presenta desafíos distintos, también posee una manifiesta necesidad de interesar y atraer estudiantes. En este sentido, la materia de posgrado de matemática aplicada a las mediciones indirectas puede considerarse una suerte de encrucijada para alumnos de diversos doctorados (de Ingeniería orientación electrónica, de Ingeniería en Materiales, de Modelado y Simulación Computacional y de Ingeniería Mecánica) en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Resulta una materia de un vasto contenido conceptual y variada aplicación y posee entre sus objetivos principales, el de plantear y evaluar posibles modelos que relacionen magnitudes directamente observables con las magnitudes deseadas a través de las denominadas metodologías de resolución de problemas inversos. En el rol clásico de docentes con frecuencia se hace hincapié en los conocimientos que deberían poseer los alumnos para luego lograr un determinado nivel de experticia. Actualmente, la mayor cuestión relativa al cambio de paradigma es el cambio en el rol del docente que ahora no debe priorizar en transmitir conocimientos sino desarrollar habilidades creativas [5]. Es entonces en el contexto de este paradigma que se ha considerado diseñar e implementar una propuesta a partir de un desafío inicialmente llevado a cabo en escuelas secundarias, adaptando la complejidad de los conceptos, así como el nivel de conocimiento previo de los alumnos, pero buscando satisfacer cuatro objetivos básicos de enseñanza como son:

1) Seleccionar una temática con un marco teórico relevante y transversal para las áreas de conocimiento involucradas en la materia de posgrado;
2) Plantear un problema sencillo que relacione alguna temática de uso coloquial, -particularmente atractiva para los estudiantes- con contenido curricular de la materia de posgrado, preferentemente con algún contenido básico de la misma
3) Aplicar los ejes conceptuales principales de la materia en forma práctica y comprensible;
4) Mostrar un esquema de desarrollo conceptual/computacional fácil de seguir.

En relación a los puntos 1 y 2, la temática encaja perfectamente tanto en los contenidos de las materias de posgrado como en aquellos dados en las nuevas carreras de grado, ingeniería en computación e ingeniería informática. Adicionalmente vale la pena mencionar que una segunda finalidad de este trabajo reside en la preparación de nuevo material para mejorar futuras presentaciones en escuelas secundarias. Esto incluye principalmente a la plataforma de simulación construida, aunque también a modo ilustrativo todo el esquema de desarrollo de la sección 1.4.

1.1 Formulación del Problema

El problema que aquí se plantea se deriva del introducido en diversas presentaciones en escuelas de enseñanza media, y en el marco de introducción del concepto de correlación entre variables aleatorias, a través de una pregunta sencilla: ¿es posible que dos jugadores pudieran ponerse de acuerdo en sus elecciones para lograr exitosamente que un tercer jugador pierda en el conocido juego infantil Piedra-Papel-Tijera (PPT)? Para intentar dar una primera respuesta en las presentaciones tres estudiantes participaban del desafío al mejor de 5 elecciones (Fig. 1), considerando cuatro posibles estrategias o configuraciones de los dos jugadores en complicidad, como se detallan más adelante en la sección de Implementación

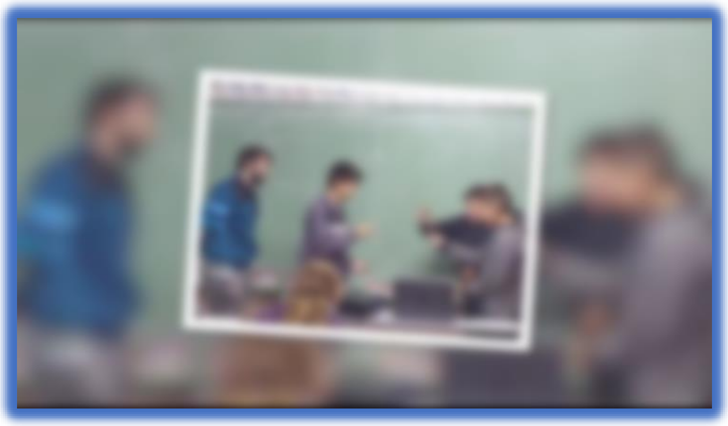


Fig. 1. Estudiantes de una escuela secundaria participando del experimento para responder la pregunta planteada

La reformulación del problema propuesto de modo de adaptarlo a los intereses del curso de posgrado es lógicamente un tanto más compleja: ¿es posible construir un esquema basado en un juego como el de PPT que sea útil para evaluar la calidad de un generador de números pseudoaleatorios? y ¿Cómo podría construirse tal esquema en el marco de la matemática aplicada a las mediciones indirectas y de la resolución de problemas inversos?

En términos más concretos la idea de la propuesta es expresar las preguntas del párrafo anterior como un problema de optimización de parámetros asociados a un procedimiento para la medición indirecta de la calidad de generadores de números pseudoaleatorios o PRNG (por sus siglas en inglés) a través de un esquema de gamificación del mismo.

Partimos de dos hipótesis o premisas estadísticas de trabajo:

1) una premisa de que la calidad de un PRNG está directamente relacionada con los valores de correlación obtenidos entre dos secuencias generadas de longitud N (con un valor de N arbitrario pero fijo dentro de un rango típico). En principio, la premisa supone razonablemente que la optimalidad del PRNG está asociada a la correlación nula, de modo que la primera manera de estimar una medida de calidad del generador es mediante el cálculo de esta correlación y su cercanía con el cero.
2) una premisa de que el juego PPT (o alternativamente otro juego no transitivo como los denominados “dados de Efron” [6]) en la modalidad de “complicidad” planteada a comienzos de esta subsección maximiza la cantidad de éxitos para elecciones no correlacionadas entre los dos jugadores complotados.

Vale la pena observar que este planteo de hipótesis de trabajo permite a los alumnos construir en el aprendizaje un nivel adicional a los tradicionales: el problema que se analiza se encuentra abierto y parte de hipótesis no consolidadas. En oposición al aprendizaje basado en problemas considerados como “ya resueltos” donde el mismo se encuentra en cierta forma condicionado con una metodología y/o solución preestablecidos. Entendemos que el análisis de la realimentación de los experimentos sobre las premisas básicas es más realista. Aún para el caso en que los resultados de las simulaciones iniciales obtenidas por los estudiantes no validen dichas premisas el problema pueda ser abordado nuevamente con la consiguiente elaboración de variantes sobre las consideraciones originales.

1.2 Marco Teórico de la aplicación

La temática concerniente a los números pseudoaleatorios, principalmente referida a los métodos de generación de los mismos, así como sus métodos de testeo, resulta de enorme importancia en el área de ciencias exactas y naturales en la actualidad, y posee una naturaleza que corta transversalmente a todas las carreras y orientaciones de ingeniería. Ya en libros pioneros como [7] se remarcaba la suma utilidad de los números pseudoaleatorios en cuatro áreas básicas de ingeniería como son simulación, muestreo, análisis numérico y programación. Es más, existen trabajos relativamente recientes en nuestra facultad que han aplicado y desarrollado métodos de generación de números pseudoaleatorios al área de bioingeniería [8].

Por otra parte, la gamificación se encuentra intrínsecamente vinculada a los números pseudoaleatorios. Tal es así que uno de los testeos más conocidos de la batería de Diehard [9] que se emplean en la validación de resultados es el llamado test de Craps, basado en el juego de azar de casino.

1.3 Ejes conceptuales considerados en la propuesta

Una de las prioridades que se han considerado en la propuesta es la de hacer hincapié a través del problema de aplicación de manera natural en varios ejes conceptuales fundamentales de la materia de posgrado. Los ejes considerados son:

- *Formulación del Problema y sus cuestiones:* Discutir la mejor forma de definir del problema, en términos coloquiales y matemáticos, de modo de establecer un problema directo de optimización bien planteado, así como un apropiado diseño del experimento con su espacio de búsqueda determinado.
- *Optimización libre de modelo o tipo caja negra:* Plantear un procedimiento, así como estrategias de análisis instanciándolos para este problema específico, dentro del marco de una optimización sin un modelo analítico que relacione las magnitudes observables y las deseadas (es decir en un esquema tipo caja negra o libre de modelo)
- *Definición de un Modelo Subrogado:* Para los problemas de optimización libre de modelo resulta de suma utilidad definir un modelo subrogado (MS).
- *Parametrización*: Analizar y establecer los principales parámetros a optimizar así como opciones (mapeos, normalizaciones, etc.) para su implementación en código, dados el software y librerías disponibles.
- *Métodos de Resolución, Optimización o Inversión Numérica*: Estudiar posibles métodos numéricos para realizar la optimización paramétrica.
- *Vinculación con Contenidos Anteriores*: Relacionar alguna/s parte/s de la estrategia de resolución con contenido de otras materias de matemática (análisis matemático, álgebra)
- *Aspectos generales de Programación*: Interpretar el código proporcionado así como desarrollar código propio.
- *Validación*: Emplear paquetes de test de referencia para validar los resultados, así como establecer un análisis comparativo de performance entre la metodología desarrollada y los testeos de referencia disponibles.

1.4 Esquema de desarrollo

El esquema de desarrollo propuesto puede dividirse en cinco partes: 1. Elaboración de la estrategia de resolución; 2. Construcción de la App de Matlab como plataforma de simulación del experimento; 3. Diseño de los experimentos numéricos y Generación de un MS; 5. Desarrollo de la optimización; 6. Test de referencia y Validación de resultados; 7. Análisis de Resultados y Conclusiones.

La inclusión en la propuesta de las etapas del esquema de desarrollo con un análisis de los ejes conceptuales en cada una de ellas es discutida en la sección de implementación que se detalla a continuación.

2 Implementación Propuesta

2.1 Elaboración de la Estrategia de Resolución

Hemos optado por seguir los pasos de la estrategia de resolución de los problemas inversos sugeridos en [10] adaptados en notación a nuestro problema; los cuales resultan (haciendo particular énfasis en los procedimientos marcados en negrita) :

1) Analizar el problema
2) **Identificar los procesos involucrados en el problema y las restricciones presentes**: en nuestro ejemplo, teniendo en cuenta las dos hipótesis planteadas en la formulación del problema, surge un proceso de tipo estocástico con un análisis desdoblado:
    a. el primero se refiere al análisis de uniformidad en las secuencias generadas a partir de los generadores de números pseudoaleatorios. Para ello usamos un recurso de validación externa (la batería de testeos de Diehard, como se verá más adelante) y analizamos el grado de veracidad de que la medida relativa de uniformidad aumenta con la tendencia a la correlación nula entre las secuencias.
    b. el segundo análisis se enfoca en considerar que la maximización de éxitos de los dos jugadores complotados ocurre cuando la correlación entre sus secuencias es nula. Una idea interesante en este sentido es emplear la contrarrecíproca como sistema de validación, es decir, considerar el aumento relativo de fracasos a medida que nos alejamos de la correlación nula.

   Tres algoritmos se han considerado en el trabajo: el algoritmo multiplicativo congruencial (usado por default en la versión 4 de Matlab®), la versión modificada de sustracción de Marsaglia (usada como default en Matlab®desde la versión 5 hasta la versión 7.3), y el algoritmo Mersenne Twister (usada como default desde el Matlab® 7.4 en adelante). De hecho, para este último algoritmo contamos con la interfaz gráfica de la generación de números pseudoaleatorios como se ve en la Fig. 2.

   Las restricciones consideradas corresponden al mapeo o clasificación de los números generados sobre etiquetas pertenecientes al conjunto {-1, 0, 1} en relación con las tres opciones de Piedra, papel y tijera.
3) **Manejar las dificultades relacionadas con los datos y con el mapeo de los mismos en las variables/factores deseados**
    a. Tener en mente las problemáticas relativas al proceso de inversión numérica u optimización.

       Prestar estrecha atención al diseño numérico experimental: Esta tarea está incluida en la sección 2.3
    b. Diseñar la distribución de los datos para obtener una buena cobertura del espacio de parámetros
    c. Diseñar el experimento para obtener datos de alta calidad
4) Generar datos de alta calidad
5) Preprocesar los datos
6) **Definir un modelo subrogado:** planteado en la sección 2.4.
7) **Explorar diferentes métodos de inversión** (en particular en la llamada “Optimización basada en simulación”)
8) **Analizar la solución final (Metodología de V&V)**

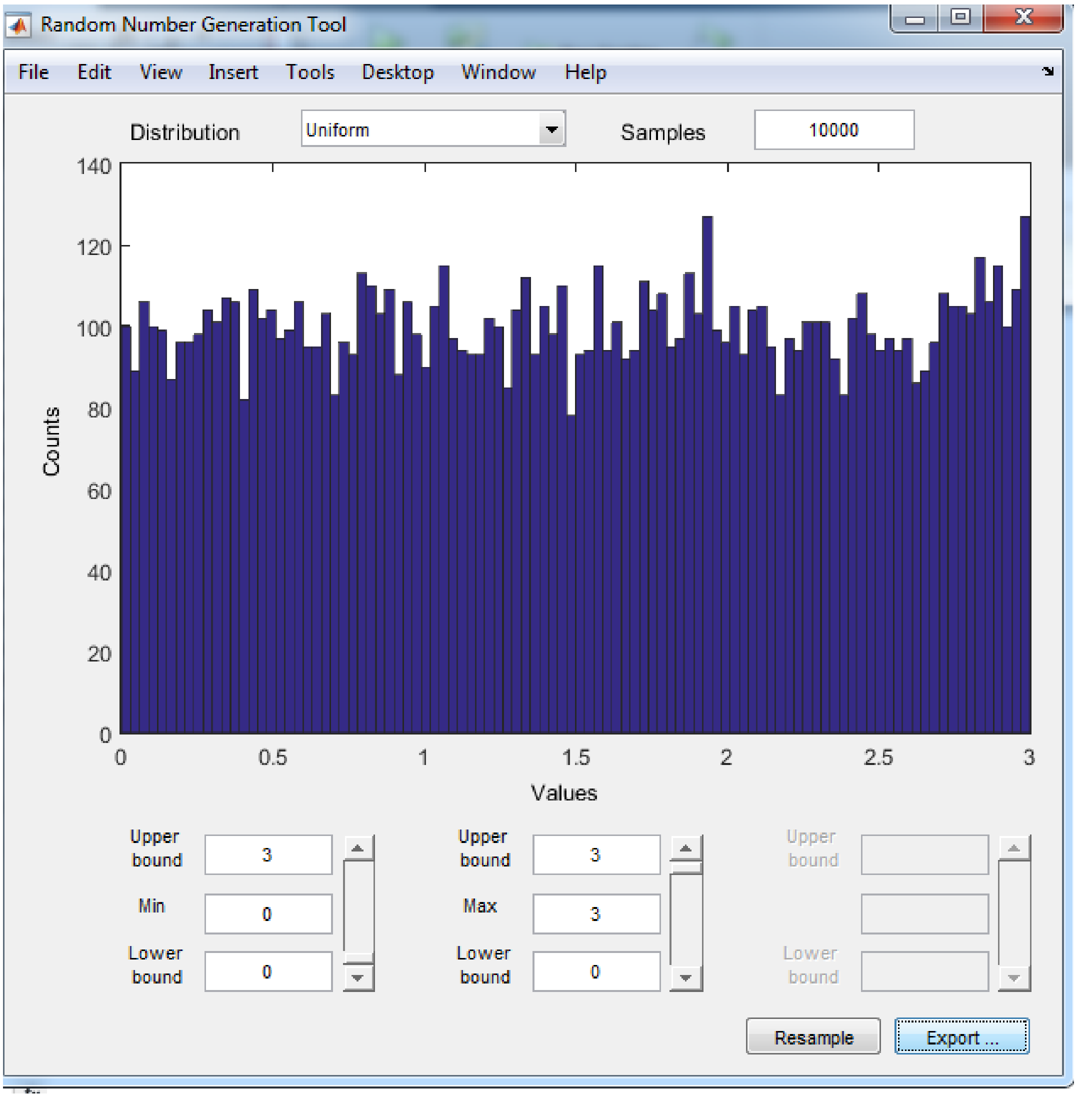


Fig. 2. Interfaz gráfica del generador de muestras con distribución uniforme con algoritmo Mersenne-Twister.

2.2 Construcción de la App de Matlab

La aplicación ha sido desarrollada usando el software Matlab® y específicamente las librerías (cada una de ellas conocida como toolbox) de GUIDE (Graphical User Iterface Design Environment), y de estadística y de optimización [11]. La elección en el uso de este software se basa en varias razones: 1) su entorno de desarrollo que integra funciones y recursos de distintas áreas de matemática aplicada, 2) su relativa simplicidad en la sintaxis para programar código, 3) su uso extendido en varias materias de grado dictadas en la Facultad y 4) la experiencia de los autores en el manejo de dicho software. Entre varios trabajos recientes donde se emplea Matlab® para desarrollar aplicaciones de resolución de problemas inversos podemos citar a [12]. Entendemos sin embargo que existen varias razones para efectuar próximamente la migración del diseño realizado hacia lenguajes de programación y entornos alternativos debido principalmente a la importancia del paradigma actual en educación de desarrollar código abierto en software no privativo, así como también ciertas dificultades halladas en el manejo del GUIDE.

En esta primera versión del entorno de usuario hemos obviado varias cuestiones de diseño gráfico y programamos una interfaz simplificada como se ve en la Fig. 3, considerando los parámetros de optimización fundamentales: **N** = longitud de las secuencias que definen las elecciones de PPT para cada jugador; **Nsim** = Número de simulaciones por ronda; **Nrondas** = Número de rondas; así como el coeficiente de correlación **corr** y las opciones para ingresar los métodos de generación y un display pequeño con las estadísticas y resultados de las simulaciones. Internamente, las salidas de las simulaciones se procesan al formato de entrada que emplean los testeos de referencia de Diehard y se guardan en el archivo prueba1.out. que luego es empleado en la sección 2.5 de Test de Referencia y Validación de Resultados. Se ha optado por emplear predominantemente en el código máquinas de estados finitos siguiendo la metodología propuesta en [13]

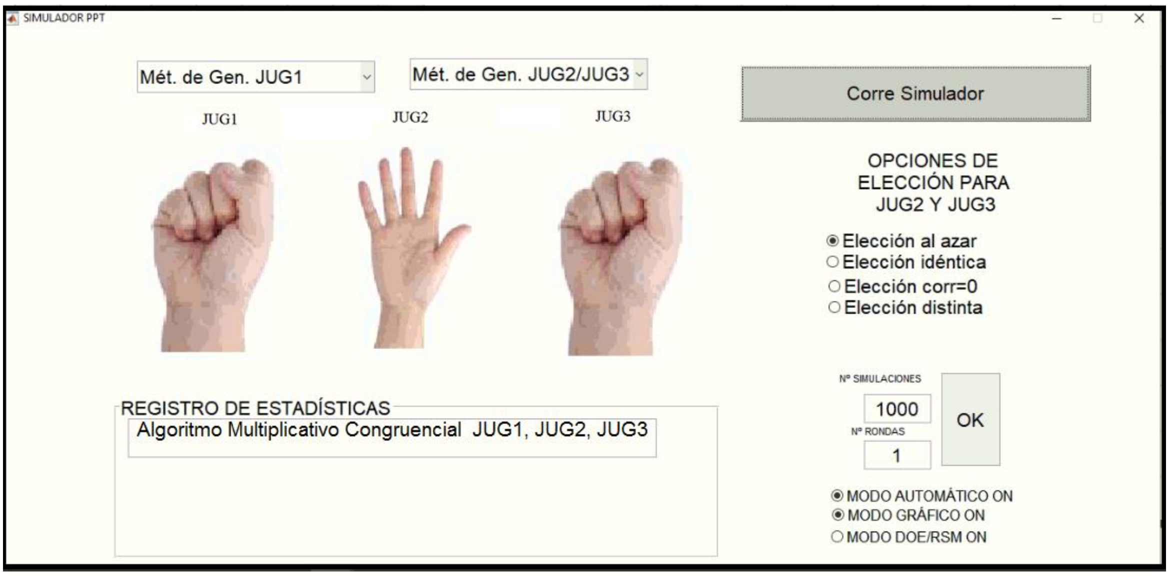


Fig. 3. Interfaz gráfica del simulador implementado con la GUIDE de Matlab®

2.3 Diseño de los experimentos numéricos y metodología de superficie de respuesta

Una parte fundamental en la implementación computacional de las metodologías de resolución de los problemas inversos recae en el diseño de los experimentos numéricos. Determinar qué factores se van a estudiar y analizar su influencia sobre la respuesta es la tarea inicial que debe realizarse en la resolución de este problema; más aún considerando que se trata, como dijimos anteriormente, de una optimización tipo caja negra. En este sentido, es necesario delimitar el problema: definir las hipótesis, que en nuestro caso corresponden a i) la variable respuesta definida como el grado de uniformidad respecto de la correlación entre dos secuencias generadas; y ii) la variable respuesta definida como el número de éxitos en el juego con respecto a la correlación nula entre las elecciones de los jugadores 2 y 3.

Ante la ausencia de un modelo explícito es importante minimizar el número de experimentos numéricos en lo que se conoce como Diseño Óptimo de Experimentos (DOE). En particular para el caso de problemas sin una contrapartida de mediciones reales, es decir salidas del tipo de Machine Learning (ML) como éste que aquí se trata (o sea con un modelo donde experimentos repetidos producen idénticos resultados y por lo tanto no hay necesidad de replicación de experimentos) es denominado Aprendizaje Activo (AA) (de modo semejante pero en un contexto diferente al caso referido a los alumnos) [14]. Entonces consideramos como partida los factores mencionados **N, Nsim, Nronda** y **corr**; y un diseño factorial completo de cuatro factores de acuerdo a [15] y siguiendo el diagrama de la Fig. 4 obtenemos el diseño óptimo.

Para el diseño seguimos a modo de ejemplo el demo *rsmdemo*, también programado usando GUIDE, y que abre un subgrupo de interfaces gráficas de usuario para investigar interactivamente la denominada “metodología de superficie de respuesta” (RSM), que no es otra cosa que una aproximación de la función objetivo, a partir de la simulación del sistema en una cantidad limitada de puntos, que vienen a estar dados por el AA del párrafo anterior.

En la actualidad la RSM ha sido perfeccionada por el uso de redes neuronales transformándose en una metodología de superficie de Neuro-Respuesta (NRSM), donde la idea original de interpolar mediante regresión, es reemplazada por el uso de una red neuronal. Recapitulando: a partir de los resultados del AA (o DOE para mayor generalidad) se puede realizar la RSM para definir un modelo subrogado o metamodelo, que pueda simplificar los tiempos a la hora de hacer los cálculos computacionales. En este sentido es recomendable en una primera instancia, y con el fin de familiarizarse con el manejo de DOE (o AA) y RSM, el uso de Design Expert® como software específico para esta tarea de realizar la optimización de la superficie de respuesta y obtener el modelo subrogado, debido a la sencillez en su uso [16].

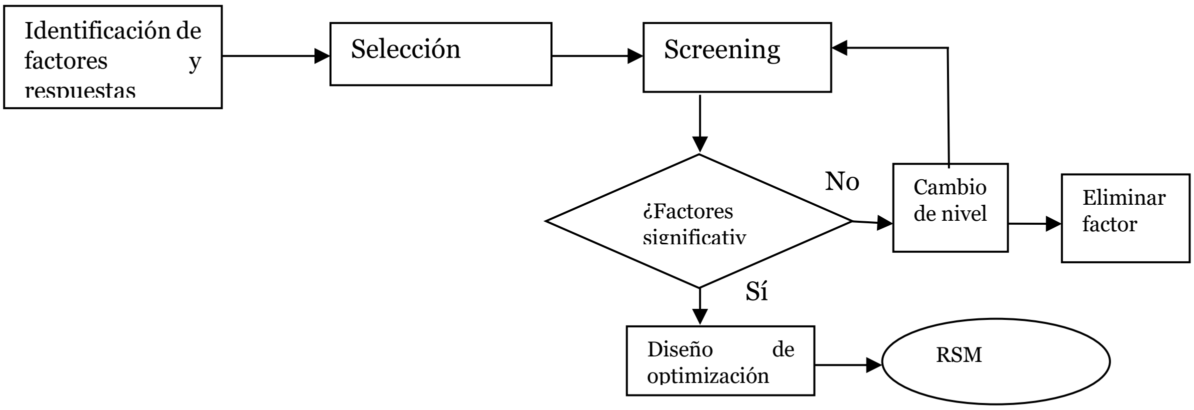


Fig. 4. Diagrama de Flujo que representa el proceso de diseño óptimo para luego aplicar la metodología de superficie de respuesta

2.4. Explorar diferentes métodos de inversión: desarrollo de la optimización paramétrica

En esta etapa central del esquema de resolución queda la tarea de optimización, exploración de posibles métodos de inversión o resolución del problema inverso. Es un ejercicio importante para el aprendizaje considerar una resolución de tipo Monte Carlo, permitiendo enfocar el problema de dos formas distintas, a saber: i) resolviendo la optimización de los parámetros en un esquema libre sin modelo explícito, es decir sin considerar el modelo subrogado obtenido de la RSM; así como ii) considerando el metamodelo hallado en la sección anterior.

Hemos tomado como referencia el esquema desplegado en [17], que describe con detalle el proceso de optimización paramétrica. La estrategia de optimización paramétrica considerando RSM (o NRSM) sigue tres pasos:

a) Elegir un número finito de puntos y evaluar la función en un número finito de puntos
b) Suponer un metamodelo para la función objetivo y usar regresión o redes neuronales para ajustar la ecuación del metamodelo a los datos comprendidos por el número de puntos de a) y sus respectivos valores
c) Si el metamodelo es aceptable se usa para determinar el óptimo, sino se vuelve a b)

En este sentido, la bondad de la aproximación es difícil de conseguir ya que aún en casos de dos variables de decisión, donde por ejemplo el metamodelo supone linealidad del tipo $z=ax+by+c$, existen innumerables posibilidades de combinaciones no-lineales incluso con una sola variable, tales como $y=a+bx^2$

El análisis de la bondad del metamodelo es un problema estadísticamente profundo, pero un test preliminar es el coeficiente de determinación definido como

$$r^2 = 1-(SSE/SST) \quad \textbf{(1),}$$

con

$$SST = \sum_{p=1}^{n}(y_p - \bar{y})^2 \quad \textbf{(2),}$$

y

$$SSE = \sum_{p=1}^{n}(y_p - y_{p*})^2 \quad \textbf{(3),}$$

donde y_p son los valores en los puntos experimentales y y_{p*} son los valores predichos por el metamodelo en esos mismos puntos.

Continuamos la sección con una breve introducción a varios métodos de estimación paramétrica basados en optimización basada en simulaciones. El método del descenso del gradiente, conocido por sus siglas en inglés Steepest Descent (SD), que aún sin poseer un modelo explícitamente definido puede emplearse ya que su cálculo numérico es posible. La denominada perturbación simultánea es una técnica producto de un nuevo enfoque en el área de derivación debida al trabajo de Spall [18], que provee un método no sólo muy eficiente en términos de evaluaciones de función sino también de comprobada convergencia. Nelder-Mead [19] es otro método que puede usarse sin un modelo de forma cerrada ya que no emplea el cálculo de las derivadas que ha ganado bastante popularidad por obtener buenos resultados en la mayoría de los casos si bien tiene detractores en el ámbito de los métodos libres de derivadas como [20], que es a su vez una referencia muy completa para buscar este tipo de métodos (para problemas en los que carecemos de modelo analítico).

Si se diera el caso de que la superficie de respuesta fuera muy complicada y poseyera muchos mínimos, sería necesario recurrir a los llamados métodos meta-heurísticos, entre los que destacan Simulated Annealing, los denominados Algoritmos Genéticos, Particle Swarm, Tabu Search y una Técnica de Búsqueda de Aprendizaje Automático (LAST) entre otros. Existen muchos más algoritmos de estimación paramétrica, pero que en su gran mayoría responden a funciones objetivo analíticas y explícitas, razón por la cual han sido omitidos en esta selección.

Finalmente, nos ocupamos de los llamados métodos de Monte Carlo (MC), que en realidad se encuentran en el corazón del modelado y simulación de sistemas aleatorios. Este tipo de métodos proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando precisamente la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora (los mismos que analizamos en este trabajo). Es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista. Y a diferencia de los métodos numéricos que se basan en evaluaciones en N puntos en un espacio M-dimensional para producir una solución aproximada (como RSM, por ejemplo), los métodos de tipo MC tienen un error absoluto de la estimación que decrece como $1/\sqrt{n}$ en virtud del teorema del límite central. Así es como aun sin un modelo definido podemos aplicar MC una enorme cantidad de iteraciones para obtener excelentes resultados, a costa de mayores recursos computacionales.

Recomendamos nuevamente la lectura de los capítulos 4 a 7 de [17] para una mayor comprensión de todos estos métodos mencionados así como de los conceptos de optimización basada en simulación.

2.5. Verificación y Validación de Resultados. Testeos de Referencia

Un aspecto fundamental en el área de problemas inversos y mediciones indirectas ya mencionado en los ejes conceptuales de la sección 1.3 es la metodología de verificación y validación (V&V). La verificación se refiere a la aplicación de enfoques para determinar si los algoritmos resuelven el problema correctamente y para estimar la incertidumbre numérica producto de la discretización del problema. La validación se refiere al proceso de determinar el grado de exactitud de un modelo como representación del mundo real. En particular, la problemática de la validación en el área de problemas inversos es intrínsecamente complicada ya que va dirigida hacia la pregunta de qué tan buenas son las predicciones al comparar los resultados con los datos experimentales [21]. En particular para el caso específico considerado en este trabajo podemos realizar una validación del modelo de computadora desarrollado usando directamente datos simulados aplicando por ejemplo la técnica de [22]. En el caso específico de la validación sobre métodos de generación de números pseudoaleatorios vale la pena recordar que muchas secuencias generadas pueden tener la apariencia de aleatoriedad pero en cambio ser fáciles de predecir por lo que resulta de suma importancia testear los generadores. Los números auténticamente aleatorios pueden hallarse por ejemplo en el decaimiento radiactivo, pero en las computadoras debemos lidiar con números aleatorios artificiales. Después de todo, sin un PRNG "libre" de error en la generación no tendría sentido continuar hablando de "optimización basada en simulación" [17]. En este sentido, si bien es cierto que no existe un test concluyente respecto de la aleatoriedad de una secuencia, es posible que con suficiente cantidad de testeos, los usuarios de los PRNGs tengan la certeza de que la secuencia es lo suficientemente aleatoria. En la práctica, el término de secuencia aleatoria alude a aquella que no puede describirse por una secuencia menor que la misma [23]. Existen diferentes tipos de testeos, entre los que destacan los testeos estadísticos, el test de Chi-cuadrado, el test de corridas, el test del próximo bit, los testeos basados en matrices y el denominado análisis exploratorio [24]. Existen asimismo baterías o paquetes de varios test aplicados en conjunto, siendo los más reconocidos, la referencia de testeos de aleatoriedad en página del National Institute of Standards and Technology (NIST) [25] y el paquete de testeos de Diehard [9] que es usado en este trabajo como referencia sobre los tres generadores de uso estándar en Matlab® mencionados en la sección 2.1.

> Vale la pena mencionar que existen generadores verdaderamente aleatorios en contraposición con los considerados en este análisis. De hecho, puede resultar un ejercicio bastante interesante observar los resultados de aplicar alguno de los testeos disponibles a secuencias generadas por Random.org (https://www.random.org/sequences/), un sitio web que distribuye libremente secuencias generadas.

En relación a los tres generadores considerados aquí, el segundo método es considerado de rendimiento muy superior al primero, en tanto que el último generador de Mersenne-Twister es más rápido y de mejor calidad que los dos anteriores de acuerdo a [26].

3 Conclusiones y trabajos futuros

Si bien los resultados y conclusiones de este trabajo recién podrán ser debidamente analizados después de su efectiva implementación durante este año en la materia de posgrado, podemos realizar un análisis predictivo de las ventajas y desventajas de su uso en clase con respecto a los desarrollos y a los ejercicios proporcionados hasta ahora. En principio, el simulador ha sido previamente utilizado y analizado por colegas que han contribuido a la mejora sustancial del diseño original. Es importante destacar asimismo que en ningún momento se hace referencia a la validez o veracidad de las hipótesis y de hecho, una de las fortalezas de la propuesta es la cantidad de grados de libertad de los que disponen los estudiantes, desde la formulación del problema (la formulación dada es simplemente un puntapié inicial) que puede ser reciclada en función de la evidencia muestral hasta las numerosas técnicas de optimización sugeridas. Una de las principales características que resaltan de este enfoque en combinación con la temática de aplicación seleccionada es el desarrollo integral para un problema específico que facilita una mayor comprensión de la propia materia a los estudiantes graduados que ya poseen experiencia en aplicaciones concretas de ingeniería o bien que se encuentran trabajando o próximos a trabajar en un desarrollo específico. Vale la pena destacar que en estos ensayos hemos omitido el análisis de la influencia del ruido dadas las consideraciones ya mencionadas en la sección 2.3 de los experimentos numéricos. Uno de los aprendizajes esenciales que pretendemos de esta experiencia es que los alumnos se familiaricen con esa relación de compromiso omnipresente entre calidad de resultado y tiempo/costo computacional; y de manera análoga respecto del software y código empleados: una relación de compromiso entre usar paquetes ya desarrollados como cajas negras y desarrollar "artesanalmente" todo el código propio ad-hoc, recordando el denominado teorema del "almuerzo gratuito", según el cual, para cualquier algoritmo de elevado rendimiento en cierta clase de problemas, aparece como contrapartida otra clase de problemas sobre la cual, la aplicación es de bajo rendimiento.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer a sus respectivas instituciones, UNMdP y CONICET, así como también la ayuda económica por parte del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Referencias

1. García, A.G.; Vera, C.; Dotti, F.: El Enfoque por Competencias en las Ciencias Básicas. Casos y ejemplos en educación en Ingeniería, Cukierman, U. R.; Kalocai, G. C. (Eds): Confedi-CIIE, pp. 104-112 (2019)
2. Alabart Vilà, A. Escofet Roig, A. y Vilà Bosqued, G.: Enseñar y aprender con TIC en la Universidad: Octaedro, pp. 9-13 (2008)
3. Castro, S.: Juegos, Simulaciones y Simulación-Juego y los entornos multimediales en educación: ¿mito o potencialidad?. Revista de Investigación 65, pp.223-245 (2008)
4. Otero, F. A.: Experiencias de Divulgación científico-motivacional del Área Superior en Institutos de Enseñanza Media empleando estrategias de gamificación, Malbernat L. R.; Finochietto J.R.; Cormons, M. A.; Varela A.E. (Comps.): Tecnología, Innovación y Creatividad: III JATIC 2017, pp. 230-236 (2017)
5. Nicki Newton. Math Problem Solving in Action Getting Students to Love Word Problems, Grades 3–5, pp. (2017)
6. Rump, C. M.: Strategies for Rolling the Efron Dice. Mathematics Magazine, 74(3), pp. 212-216 (2001)
7. Knuth, D. E.: The Art of Computer Programming: Volume 2, Seminumerical Algorithms, Addison–Wesley, pp. 1-10 (1969)
8. Uriz, A. J.; Agüero, P. D.; Moreira, J.C.; Hidalgo, R. M.; González, E. L. and Tulli, J. C.: Flexible pseudorandom number generator for tinnitus treatment implemented on a dsPIC. IEEE Latin Am Trans, 14(1), pp.72–77 (2016)
9. Marsaglia, G.: The Marsaglia random number CDROM including the diehard battery of testeos of randomness. https://tams.informatik.uni-hamburg.de/paper/2001/SA_Witt_Hartmann/cdrom/Internetseiten/stat.fsu.edu/diehard.html. Accedido el 7 de febrero de 2020
10. Santamarina, J. C. and Fratta, D.: Discrete Signals and Inverse Problems. An Introduction to Engineers and Scientists, J. Wiley & Sons, pp. 315-345 (2004)
11. MATLAB 8.5.0.197613 GUI Layout Toolbox, Statistics and Machine Learning Toolbox Version 10.0, Optimization Toolbox Version 7.2 (R2015a) The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States (2015)
12. Iglesias, M. M., Vilas, C. and García, M. R.:"Model-based design of smart active packaging systems with antimicrobial activity. Matlab codes. Zenodo (2019).
13. Wagner, F., Schmuki, R., Wagner, T. and Wolstenholme, P.: Modeling Software with Finite State Machines. A Practical Approach, Taylor and Francis, pp. 63-75 (2006)
14. Gazut, S.; Martínez, J-M.; Dreyfus, G. and Oussar, Y.: Towards the Optimal Design of Numerical Experiments. IEEE Transactions on Neural Networks, 19(5), pp. 874-882 (2008)
15. Gutiérrez Pulido, H. and de la Vara Salazar, R. Análisis y diseño de experimentos. McGraw-Hill, pp. 143-149 (2008)
16. Williams, C. L.: Design expert: An expert system application to clinical investigations, Expert Systems with Applications, 2(4), pp. 361-371 (1991)
17. Gosavi, A.: Simulation-based Optimization: Parametric Optimization Techniques and Reinforcement Learning. Springer, pp. 29-36 (2003)
18. Conn, A. R., Scheinberg, K. and Vicente, L. N., Introduction to Derivative-Free Optimization, SIAM, pp.1-250 (2009)
19. Nelder, J. A. and Mead, R.: A simplex method for function minimization, Comput. J., 7, pp. 308–313(1965)
20. Spall, J.C.: Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation. IEEE Transactions on Automatic Control, 37, pp. 332-341 (1992).
21. Coleman, H. W. and Steele, W. G.: Experimentation, Validation, and Uncertainty Analysis for Engineers. John Wiley & Sons, Inc., pp. 276-278 (2018)
22. Bayarri, M. J., Berger, J. O., Paulo, R., Sacks, J., Cafeo, J. A:, Cavendish, J., Lin, C-H. and Tu, J.: A Framework for Validation of Computer Models, Technometrics, 49(2), pp. 138-154 (2007)
23. L'Ecuyer, P.: Testing random number generators. Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference, IEEE Press, pp. 305-313 (1992)
24. Di Carlo, D.: Random Number Generation: Types and Techniques. A Senior Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for graduation in the Honors Program. Liberty University, pp. 21- 27 (2012)
25. National Institute of Standards and Technology, https://csrc.nist.gov/Projects/Random-Bit-Generation/Documentation-and-Software/Guide-to-the-Statistical-Testeos. Accedido el 7 de febrero de 2020
26. C++ in Visual Studio, https://docs.microsoft.com/en-us/cpp/standard-library/subtract-with-carry-engine-class?redirectedfrom=MSDN&view=vs-2019. Accedido el 3 de marzo de 2020

La enseñanza del concepto de distribución Normal en carreras de ingeniería enmarcado en la pedagogía de la investigación

María V. Calandra[1], Viviana A. Costa[2]

[1] UIDET Gamefi
mava@mate.unlp.edu.ar,

[2] UIDET IMApEC
Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 116 entre 47 y 48, La Plata 1900, Argentina
vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se muestran algunos resultados de una propuesta de enseñanza implementada en la Universidad Nacional de La Plata en un curso integrado por alumnos de grado y postgrado de carreras de Ingeniería. La actividad se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard. La misma tuvo como objetivo re significar el estudio de la distribución Normal a partir de la enseñanza de algunas temáticas relacionadas con el Control Estadístico de Procesos. El estudio parte de buscar respuesta a una pregunta que está relacionada con el control estadístico de calidad.

Palabras Clave: Enseñanza, Control Estadístico de Procesos, Distribución Normal, Didáctica de la Matemática.

1 Introducción

La distribución Normal es sin duda, el modelo continuo más importante en estadística, tanto por su aplicación directa, porque veremos que muchas variables de interés general pueden describirse por dicho modelo, como por sus propiedades, que han permitido el desarrollo de numerosas técnicas de inferencia estadística [1], [2], [3]. En realidad, el nombre de Normal proviene del hecho de que durante un tiempo se creyó, por parte de médicos y biólogos, que muchas de las variables naturales de interés seguían este modelo. La otra razón de su relevancia es su aplicación para aproximar a otras distribuciones como la Binomial, la Poisson, chi cuadrado, t-Student, gamma, etc., para determinados valores de sus parámetros. En el campo de la ingeniería cumple un rol trascendental en el control de calidad de los procesos industriales. Una aplicación importante, además, es el Teorema Central del límite en cálculo de probabilidades, que asegura que la media de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas tiene una distribución aproximadamente Normal para muestras de tamaño suficientemente grandes, incluso en poblaciones no Normales. Muchos métodos estadísticos requieren la condición de Normalidad para su correcta aplicación.

Muchas veces en la educación universitaria la noción de distribución Normal es presentada a los estudiantes como un producto acabado de la actividad matemática, y muchas veces se observa que los mismos resuelven las situaciones problemáticas planteadas de un modo mecánico sin entender realmente el significado y la razón del procedimiento realiza. En cuanto al aprendizaje de la distribución Normal en alumnos universitarios Huck y otros [4] han identificado dos concepciones erróneas sobre las puntuaciones Normales tipificadas: algunos alumnos consideran que todas las puntuaciones tipificadas han de tomar un valor comprendido entre -3 y +3, lo que podría estar relacionado con que el hecho de que el 99,7 % de las observaciones se encuentra entre la media ± 3 desviaciones típicas o a la interpretación inadecuada de las tablas de distribución. Hawkins y otros [1] describen errores que

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

cometen alumnos universitarios en la aproximación de una distribución Binomial mediante la distribución Normal ya que aplican la corrección por continuidad de una forma mecánica, sin entender su significado. Algunos estudiantes confunden la estandarización de una variable aleatoria con la transformación en Normal estándar [5], Tauber [6], centra su estudio en el aprendizaje de alumnos universitarios de la distribución Normal y advierte sobre la existencia de ciertas dificultades de los alumnos para distinguir la distribución teórica y empírica, sobre todo cuando se ven en la necesidad de resolver problemas abiertos.

En la enseñanza de probabilidades, dirigida a alumnos de las carreras de ingeniería, una de las tareas fundamentales es dotarlos de herramientas adecuadas que les permitan obtener conclusiones acerca de poblaciones, de modo que, aprovechando esta información puedan diseñar procedimientos, tomar decisiones, controlar productos y procesos, auditar organizaciones y muchas actividades propias de la profesión. Se pretende que los alumnos se apropien del conocimiento matemático teniendo en cuenta la aplicación en su práctica profesional, sin perder la rigurosidad matemática pero teniendo en cuenta el perfil de estudiantes a los que se enseña.

El presente trabajo muestra los resultados de la aplicación de una propuesta didáctica tendiente a encontrar la razón de ser del estudio de estos objetos matemáticos mencionados desde su especialidad, de modo de combatir la pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en un curso de probabilidades de nivel universitario. La misma es una alternativa para el abandono paulatino del antiguo paradigma de formación de ingenieros basado en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos. Se basa en la utilización de técnicas de control estadístico de procesos (CEP), en particular en el diseño y análisis de cartas de control. Las cartas de control se usan en el CEP para detectar si los procesos de elaboración de productos o servicios son defectuoso; o bien, para indicar que el proceso de producción se ha modificado y los productos o servicios se desvían de sus respectivas especificaciones de diseño. Uno de los pilares en los que se basa el diseño y la interpretación de una carta de control son la distribución Normal, el Teorema Central del Límite, la aproximación Normal a la distribución Binomial y a la distribución de Poisson.

2 Marco teórico

En esta investigación se adoptó como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard [7], [8], [9] que ha definido con precisión los fenómenos denominados: monumentalización del saber y pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en la escuela media y en la universidad. El fundamento de estas definiciones y constructos se encuentran en lo que Chevallard ha denominado Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) [10]. La respuesta de la TAD al problema de la desarticulación, del monumentalismo de los saberes y de la falta de sentido de la enseñanza de la matemática, se materializa mediante un dispositivo didáctico que denomina Actividad de Estudio e Investigación (AEI). Para ello, las AEI se organizan en torno a una pregunta Q, seleccionada por el profesor, que tenga el potencial de generar el estudio por parte de los alumnos de ciertos contenidos matemáticos. La búsqueda de respuesta a la pregunta, también generará más preguntas derivadas cuyas respuestas llevarán a la reconstrucción de determinadas organizaciones matemáticas (OM). Las respuestas a las preguntas junto con una actividad específica llevarán al estudio de técnicas y de elementos tecnológicos-teóricos específicos para resolver la actividad y serán una excusa para el estudio de las OM que se quieran cubrir del programa de estudio. La introducción de la noción de las AEI en los sistemas de enseñanza conduce, a plantear la necesidad de (re)definir los programas de estudio en términos de un conjunto de actividades cruciales. La gestión de las AEI dentro del proceso de enseñanza, exige a la comunidad de estudio integrada por los docentes y los alumnos, una transformación de su relación con el saber, pues deja de ser algo que se conoce de antemano para volverse una construcción (o reconstrucción) de común acuerdo en el transcurso de la clase. En la práctica para cada saber matemático que se ha de enseñar, la TAD propone diseñar una o varias actividades de estudio e investigación (AEI) para las cuales la búsqueda de respuesta requiera del estudio de ese saber. Esto es en contraposición con la enseñanza monumentalista donde los saberes son construidos *per se* sin conocer su utilidad. La AEI propuesta además debe ser de interés para el grupo de alumnos a los que va dirigido y lo suficientemente abierta de modo de actuar como eje articulador del proceso de estudio.

2.1 Implementación de la AEI

En este caso la propuesta ha sido implementada como una prueba piloto extracurricular destinada a la enseñanza de temáticas relacionadas con el control estadístico de procesos (CEP). La AEI permitió el estudio de un modo funcional las organizaciones (OM) relativas a la distribución Normal y sus aplicaciones en un curso de la Facultad de Ingeniería de la UNLP (FI-UNLP).

En FI-UNLP se dictan 12 especialidades: Aeronáutica, Agrimensura, Civil, Computación, Mecánica, Electricista, Electromecánica, Electrónica, Industrial, Química, Hidráulica y Materiales.

El curso estuvo integrado por 24 alumnos de grado y 14 graduados. Los alumnos inscriptos en el curso fueron todos ingenieros o estudiantes de ingeniería que ya habían cursado probabilidades y estadística .Hubieron estudiantes de distintas especialidades: 7 de Ingeniería Industrial, 4 de Aeronáutica, 4 de electrónica, 3 de Mecánica, 3 de Química, 2 de Agrimensura, 1 de computación.

El desarrollo de la AEI tuvo una duración de cinco encuentros arreglados de cuatro horas cada uno con una periodicidad semanal. En el presente trabajo se muestran algunas de las actividades desarrolladas.

Durante la AEI, los estudiantes y el profesor, trabajaron conjuntamente. Los alumnos se dispusieron en grupos y el profesor les presentó una pregunta que inició el estudio del saber a construir. Se necesitó que los alumnos trabajen en forma colaborativa y que sean responsables de su aprendizaje.

La propuesta fue motivada a partir del debate sobre la fabricación de piezas de automóviles en serie. Es decir, si se trata, por ejemplo, de la manufactura de una gran cantidad de ejes en serie, los bujes respectivos producidos deben cumplir ciertos criterios de calidad de modo de ajustar uno con otro exactamente, indistintamente del buje o eje seleccionado.

Se propuso una investigación y debate, centrado en torno a la pregunta generatriz:

Q_0: ¿Cómo producir partes intercambiables para automóviles?

La respuesta a esta pregunta originó una AEI que introdujo las razones de ser de la enseñanza de la distribución Normal. Esta pregunta generatriz Q_0 actuó como eje articulador para la reconstrucción de la OM de los temas relativos a la distribución Normal. A su vez esta pregunta Q_0 derivó en otras preguntas $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ y $Q_{1,3}$. (Ver Fig. 1).

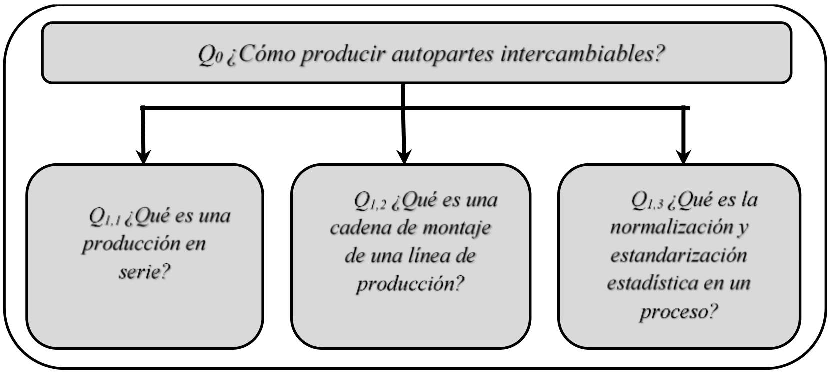


Fig. 1. Esquema de preguntas

Para el desarrollo de las actividades se requirió el estudio de algunos elementos teóricos, técnicos y tecnológicos relativos al Control de Calidad: Control Estadístico de Procesos y Cartas de Control, de importancia profesional para estudiantes de carreras de ingeniería.

Durante las clases el profesor reguló los tiempos didácticos, registró las respuestas de los grupos de estudiantes y los nuevos interrogantes que motivaron el trabajo de la distribución Normal. Los recursos disponibles fueron computadoras personales con acceso a internet, libros de cátedra [11], [12], [13], [14], software estadístico de uso libre (InfoStat) [15] y el Lenguaje de programación R [16], también el software comercial Statgraphics Centurion [17]. En el comienzo de la actividad el profesor tuvo un mayor protagonismo en la construcción del medio que condujo a las preguntas derivadas para la reconstrucción de las organizaciones matemáticas que se pretendieron estudiar. Se muestran algunas actividades desarrolladas durante el curso.

- ***Actividad 1***: en una primera etapa la característica de calidad considerada para la AEI fue la longitud de árboles de levas producidos en una planta automotriz. Para ello se les presentó una muestra de 100 datos y los alumnos debieron verificar si se estaban produciendo piezas intercambiables en la planta, sabiendo que deben tener una longitud de 600 mm (+/-) 2mm para cumplir con las especificaciones.

La búsqueda de respuestas de la AEI llevaron a plantear preguntas derivadas tales como: **¿Qué medidas descriptivas calcularía?¿Qué parámetros de la producción es importante estimar? ¿Cuál es la variabilidad del proceso de producción? ¿Cómo hallarla? ¿Cómo encontrar un modelo de distribución para la producción y cómo representarlo? ¿Cómo caracterizaría el desempeño del proceso?**

El desarrollo de la AEI permitió que los alumnos calcularan medidas descriptivas de una muestra. También ver la posible adecuación de la distribución Normal a la muestra, que estimaran los parámetros de la distribución y la probabilidad de cumplir con las especificaciones.

Al comienzo de la actividad algunos alumnos se limitaron a analizar la muestra sin hacer inferencia estadística sobre la producción de la planta automotriz. Es decir, contaron que cantidad o proporción de artículos no cumplían con las especificaciones (Ver Fig. 2).

Las clasificaría en tres conjuntos:

- A = {596,8; 597,6; 597,2; 596,4; 597,6; 597,0; 597,8; 596,2; 597,6; 597,6; 596;8}
- B = {601,6; 600,4; 598,4; 600,0; 599,8; 599,8; 601,0; 601,6; 600,8; 601,6; 600,2; 601,8; 601,2; 598,4; 599,6; 600,6; 598,4; 599,8; 600,0; 599,6; 598,2; 602,0; 599,4; 599,4; 600,8; 601,8; 602,0; 600,8; 598,6; 600,0; 600,4; 600,8; 600,8; 600,2; 600,4; 600,2; 600,8; 600,4; 599,8; 598,0; 598,4; 600,8; 600,4; 598,2; 598,6; 599,6; 599,0; 601,6; 599,8; 598,2; 599,4; 599,4; 600,2; 599,0; 600,6; 599,4; 598,0; 598,0; 601,4; 599,2; 601,6; 600,4; 598,0; 601,2; 599,0; 600,4; 600,6; 599,0; 601,2; 600,2; 600,0}
- C = {602,2; 602,8; 603,6; 604,2; 602,4; 603,4; 602,8; 602,2; 603,8; 603,6; 603,6; 602,2; 602,8; 603,4; 602,4; 602,2; 602,4; 604,2}
- Conjunto A: Elementos ubicados por debajo del límite inferior de tolerancia (598 mm). Total: 11 elementos.
- Conjunto B: Elementos ubicados entre los límites inferior y superior de tolerancia (598 y 602 mm respectivamente). Total: 71 elementos.
- Conjunto C: Elementos ubicados por encima del límite superior de tolerancia (602 mm). Total: 18 elementos.
- Cantidad total de elementos: 100.

Fig. 2. Ejemplo de respuesta inicial de un alumno.

El análisis de otros grupos de estudiantes consistió en construir un histograma e identificar en el mismo los límites de tolerancia, para ver qué proporción del mismo quedaba entre las líneas verticales. También para ver si su distribución estaba centrado en el valor nominal de las especificaciones. (Ver Fig. 3)

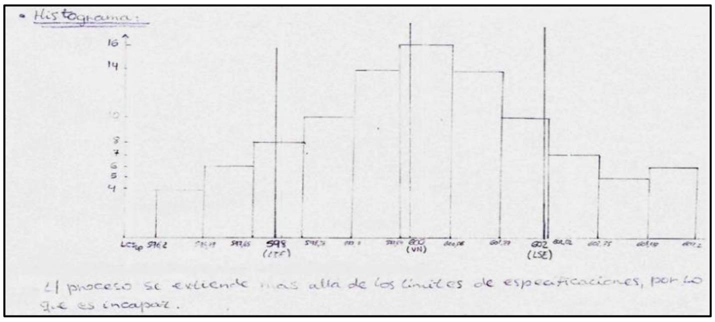


Fig. 3. Ejemplo de un histograma graficado por un alumno.

Luego se decidió hacer inferencia a toda la producción y para ello definieron la variable aleatoria X=longitud del árbol de levas. Supusieron que en el caso de que la muestra provenga de una distribución Normal, la probabilidad de que la longitud X se encuentre entre 598 y 602 debería ser de al menos 99,7% para cumplir con lo especificado. También estimaron las probabilidades de la planta de producir árboles de levas con longitudes mayores y menores a lo especificado para ver si el proceso estaba descentrado. (Ver Fig. 4). Para estimar el parámetro μ (media) de la distribución Normal usaron la media de los datos y para estimar el parámetro σ (desviación estándar) calcularon la dispersión de los datos con respecto de la media.

Además

$P(598 \leq X \leq 602) = P(\frac{598-\mu}{\sigma} \leq X \leq \frac{602-\mu}{\sigma})=0{,}6687$ pero debería ser 0,9975 o más para que la planta automotriz esté operando adecuadamente.

En este caso se observa que $P(X < 598) = P(X<\frac{598-\mu}{\sigma})=0{,}1430$

$P(X > 602) = 1 - P(X<\frac{602-\mu}{\sigma})=0{,}1883$

Por lo tanto el proceso está descentrado dado que estas respuestas tendrían que haber dado lo mismo.

Fig. 4. Ejemplo de la estimación de las probabilidades.

Para ver si la muestra provenía de una distribución Normal algunos alumnos realizaron un gráfico de probabilidad, otros simplemente un histograma y otros un test de Normalidad. (Ver Fig. 5)

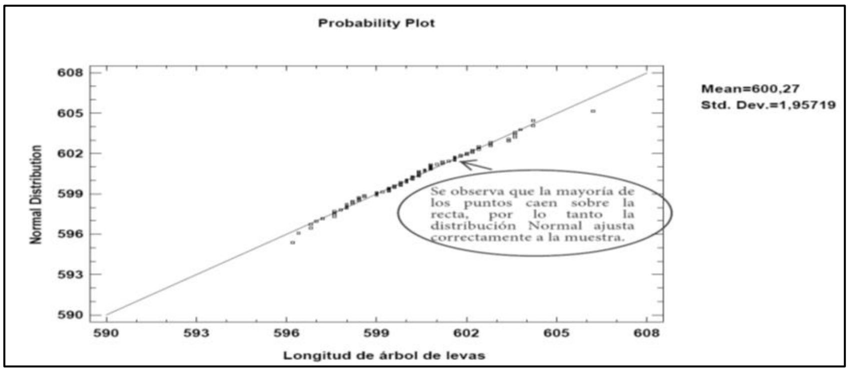


Fig. 5. Gráfico de probabilidad y estimación de parámetros**.**

- ***Actividad 2***: se les propuso a los estudiantes evaluar el comportamiento de las longitudes de los árboles de levas a largo plazo, para la misma planta automotriz con los mismos estándares de calidad. Para ello se les dio muestras aleatorias de tamaño 5 de árboles de levas producidos durante 20 días consecutivos. La pregunta fue: ¿Cómo evaluaría en este caso el desempeño del proceso en el tiempo?

La búsqueda de respuestas de la AEI llevaron a las preguntas derivadas tales como: **¿Se podría evidenciar un cambio en la variación del proceso algún momento o algún cambio en la media?¿ El proceso está bajo control? ¿El proceso es apto?¿ Qué herramienta estadística le permitiría evaluar esto?**

El desarrollo de la AEI requirió que los alumnos primero construyan una carta de control para la media de la producción diaria para poder estimar los parámetros del proceso en control para poder luego evaluar la aptitud del proceso es decir la adecuación a los estándares de calidad.

Un diagrama de control o carta de control es una gráfica donde los valores de la característica de calidad estudiada se disponen en distintos momentos de tiempo que se identifican sobre el eje de las abscisas. Tres líneas acompañan la serie graficada: la línea media (trazada a nivel de la media μ de los valores de la serie para un estado bajo control) y las líneas correspondientes a los límites inferior y superior de control (límites entre los que se espera queden comprendidas casi la totalidad de las observaciones de un proceso bajo control $\mu \pm 3\sigma$). Esta característica de calidad en nuestro caso debe tener distribución Normal o aproximadamente Normal. Puntos fuera de la región determinada por ambos límites sugieren que el proceso no está bajo control. Aún si los valores de la serie observada se encuentran entre estos límites, el proceso puede cuestionarse por no poseer un patrón de distribución aleatoria con distribución Normal en torno a la línea media. Valores sistemáticamente mayores o menores al esperado sugieren un proceso fuera de control.

Fig. 6. Diagrama de Control de media.

Para la construcción de los límites de la Carta de Control de la Figura 6, fue necesario suponer que la longitud media diaria proviene de una distribución Normal con media igual a 600,23 y varianza 1,6352. Estos parámetros fueron estimados con los datos.

Para cumplir estos objetivos fue necesario que el estudiante utilice el siguiente conocimiento: Si X es una variable aleatoria con distribución Normal con media μ y varianza σ^2 de la que se extrae una muestra aleatoria de tamaño n, entonces la media muestral $\bar{X}$ se distribuyen según otra ley Normal con media μ y varianza σ^2/n. En todo el desarrollo de la actividad se buscó que los alumnos argumentaran en términos de la utilización de la distribución Normal.

Actividad 3: la característica a analizar es un atributo del producto (el producto es defectuoso o no, una pieza encaja o no en otra, un mecanismo funciona o no, etc.) Para esta etapa se utilizó el archivo de datos Diagrama p del Software estadístico InfoStat. En este caso se trata de una línea de producción de elásticos para autos en la que se toman 30 muestras de tamaño 200 cada una y se registra el número de defectuosos por muestra. ¿El proceso está bajo control?

El objetivo de esta propuesta fue que construyeran una carta de control de atributos para controlar la proporción de disconformidades (carta p) o la cantidad de disconformidades (carta np) (Ver Fig. 7). Además, para el diseño e interpretación de la misma se tratará la OM relativa a la aproximación Normal a la distribución Binomial.

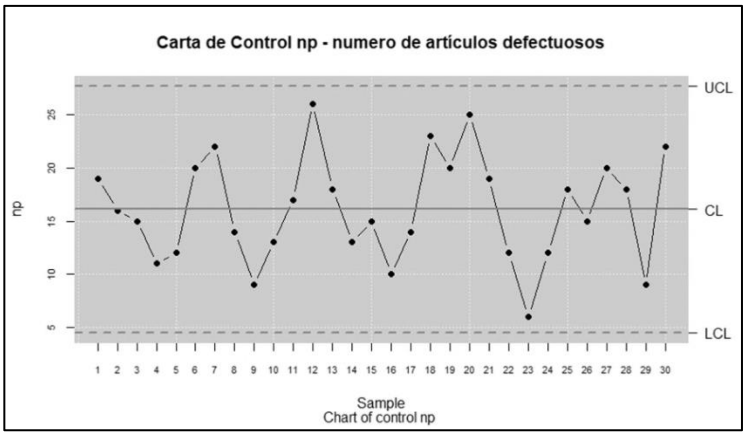


Fig. 7. Carta de Control por atributos.

Entre las aplicaciones del Teorema Central del Límite se encuentra la aproximación Normal a la distribución Binomial. Una variable aleatoria X es Binomial si representa el número de éxitos en n ensayos independientes con sólo dos posibilidades en cada uno de ellos éxitos/fallas. El Teorema Central del Límite permite aproximar (para n suficientemente grande) la distribución de la variable aleatoria X y de la variable aleatoria X/n a la distribución Normal. El tamaño de la muestra necesario depende del valor de p [12].

3 Cuestionario a los estudiantes

Al finalizar los encuentros se les solicitó a los alumnos responder un cuestionario que fue entregado en la plataforma Moodle mediante un link al módulo de formularios de Google. El mismo fue anónimo y estuvo compuesto por diez preguntas.

Algunas preguntas del cuestionario fueron las siguientes:

1) Considera que el curso y su contenido le brindó una:
   - nueva visión sobre las temáticas involucradas.
   - nueva información que no conocía.
   - mejor comprensión en los contenidos ya conocidos.
2) ¿Logró darle una utilidad al concepto de la distribución Normal, mayor respecto a lo visto durante su carrera de grado?
3) ¿Logró otorgarle un significado a la distribución Normal para el estudio de procesos?
4) ¿Consiguió interpretar el concepto de intercambiabilidad de una pieza, su importancia en la temática de calidad, y el rol que juega la estadística en ello?
5) ¿El curso le dio una utilidad a las herramientas estadísticas en temas de su interés?
6) ¿Le parece que los temas estudiados tendrían una utilidad importante para su profesión?
7) ¿Considera que un mejor conocimiento de las herramientas estadísticas es fundamental para lograr una mejor interpretación del concepto de control de un proceso?

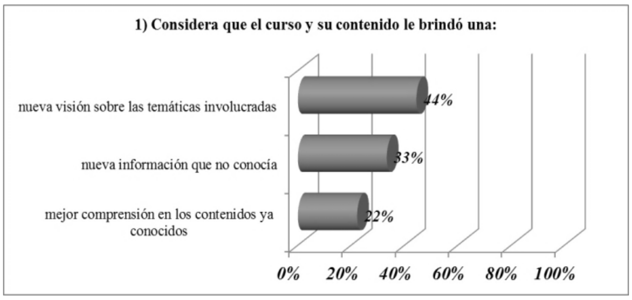


Fig. 8. Resultados de la pregunta 1).

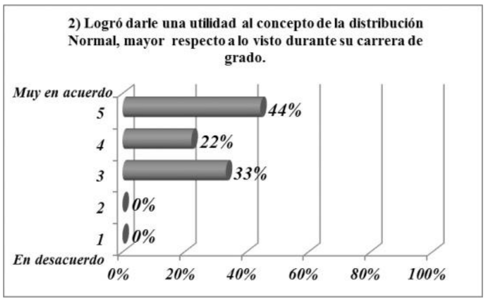


Fig. 9. Resultados de la pregunta 2).

Las respuestas a las preguntas 2), 3), 4), 5) y 7) (Ver Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11, Fig. 12 y Fig. 14) tienen categorías que van de 1 a 5, siendo la más baja *En desacuerdo* y la más alta *Muy en acuerdo*.

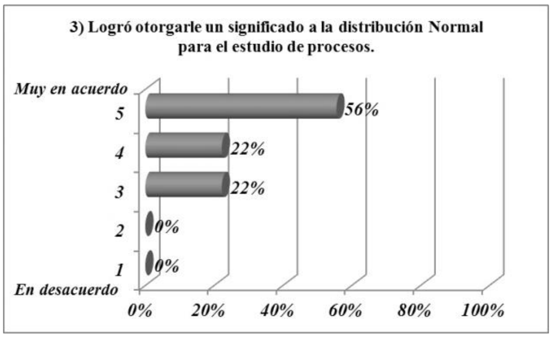


Fig. 10. Resultados de la pregunta 3).

Fig. 11. Resultados de la pregunta 4).

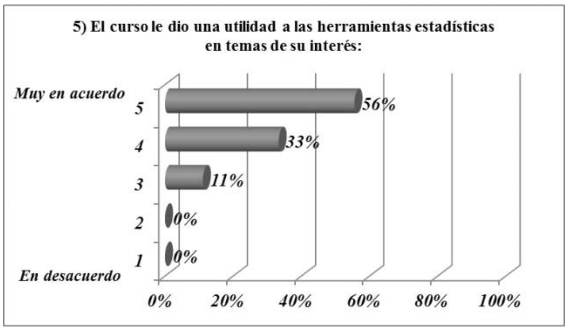


Fig. 12. Resultados de la pregunta 5).

Fig. 13. Resultados de la pregunta 6).

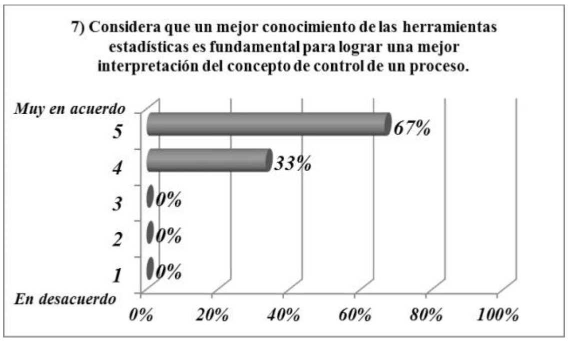


Fig. 14. Resultados de la pregunta 7).

La respuesta a la pregunta 6), tiene categorías de 1 a 5, siendo la más baja *Nada* y la más alta *Mucho*. (Ver Fig. 13)

Del análisis de los gráficos se desprende que el 44 % de los alumnos opina que el curso les brindó una nueva visión sobre las temáticas involucradas, el 56% logró otorgarle a la distribución Normal un significado para el estudio de control de procesos, más del 66% logró darle mayor utilidad al concepto de la distribución Normal que el visto durante la carrera, el 100% de los alumnos opinan que los temas estudiados tendrían importancia para su profesión.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Se expusieron los resultados de una propuesta de enseñanza alternativa a las existentes en el marco de la TAD que pretende el estudio con sentido de alguna organización matemática, en este caso la distribución Normal, a partir de la búsqueda de respuestas a un problema de control de calidad. Se puso en juego una actividad de estudio e investigación que requirió determinar qué saberes eran pertinentes y funcionales para la construcción de las respuestas.

En el grupo de alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial algunas actividades pudieron implicar algún reencuentro con algunos conceptos, con utilización de fórmulas ya conocidas en algunos casos, pero desde la argumentación del rol de la distribución Normal.

En general, se observó, que los métodos pictóricos de representación estadística de datos se encontraban disponibles en los saberes previos del grupo de alumnos, pero muchos debieron hacer un reencuentro con esos recursos.

A lo largo del curso se fue estableciendo qué conocimientos eran pertinentes y merecían ser aclarados, analizados, etc., mientras se dejaban, si era necesario, ciertos saberes a enseñar en un "nivel de gris" si no eran necesarios para responder la pregunta generatriz o sus preguntas derivadas.

En cuanto a la distribución Normal, el curso, permitió la utilización de distintos recursos para su evaluación. También se pudieron realizar actividades que abordaran todas sus aplicaciones como el Teorema Central del Límite, la aproximación Normal a la distribución Binomial y la aproximación Normal a la distribución de Poisson.

Esta propuesta abriría las puertas para pensar en otras AEI para el estudio de otros temas de probabilidades y además evaluar las posibles restricciones de la enseñanza actual de la noción de distribución Normal en el ámbito de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. La AEI permitió el estudio de un modo funcional las OM relativas a la distribución Normal, distribución del promedio de variables con distribución Normal y al Control Estadístico de Procesos.

Referencias

1. Hawkins, A; Joliffe, F.; Glickman, L. *Teaching statistical concepts*. Essex: Longman. (1992).
2. Wilensky, U. Paradox, programming, and learning probability: A case study in a connected mathematics framework. Journal of Mathematical Behavior, 14, 253-280. (1995).
3. Wilensky, U. What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. Educational. Studies in Mathematics, 33, 171-202. (1997).
4. Huck, S; Cross, T.L.; Clark, S.B.. Overcoming misconceptions about z-scores. Teaching Statistics, Vol. 8, No.2, pp.38-40. (1986).
5. Calandra, M.V.; Costa, V.A. La problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable aleatoria continua y de función de densidad de probabilidad. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y Naturales*.: Departamento de Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (UNLP). (2015). ISSN 2250-8473.
6. Ruiz, B.R. Un Acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria. *Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa*, México. (2006).
7. Chevallard, Y. Vers une didactique de la codisciplinarité. *Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. (2004).
8. Chevallard, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En Ruiz, L.H.; Estepa, A.; Garcia, F. J. (eds), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Universidad de Jaén, pp.705-746. (2007).
9. Chevallard, Y. Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. Texte préparatoire à la regular lecture qui sera donnée dans le cadre du congrès *ICME-12*. (2012).
10. Otero, M.R.; Fanaro, M.R.; Llanos, V.C. La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. *Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias*, vol. 8, No. 1, pp.77-89. (2013).
11. Meyer, P.L. *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana. (1992).
12. Devore, J.L. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Séptima edición. México: Cengage Learning. (2008).
13. Ross, S.M. Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists. John Wiley & Sons. (2014).
14. Montgomery, D.C.; Runger, G.C. *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. México: Limusa Wiley. (2006).
15. Infostat versión estudiantil: https://www.infostat.com.ar
16. Lenguaje de Programación R: https://www.r-project.org/
17. Statgraphics Centurion: https://statgraphics.net/

Una Experiencia de Aprendizaje Combinado, con la Incorporación de Videos Didácticos

Sandra M. Mansilla[1], Fabián R. Pogliacomi[1], Diana E. Martínez[2], Néstor H. Gázquez[2]

[1] Departamento Ciencias Básicas, Departamento Alumnos, Facultad Regional Rosario, Universidad Tecnológica Nacional
Zeballos 1341 – Rosario - Argentina
smmansi@frro.utn.edu.ar, fpogliacomi@frro.utn.edu.ar

[2] Área Ingreso Universitario, Facultad Regional Rosario, Universidad Tecnológica Nacional
Zeballos 1341 – Rosario - Argentina
dianaemartinez@yahoo.com.ar, ngazquez@frro.utn.edu.ar

Resumen. En el marco del proyecto de investigación Estrategias didácticas con uso de herramientas digitales para la enseñanza de Matemática y Física en el curso de Ingreso y primer año de la FRRo de la UTN, se incorporó la utilización de videos didácticos como herramienta para incentivar al alumno a ser corresponsable de su aprendizaje, con el objetivo de desarrollar habilidades y competencias necesarias para enfrentar con éxito la primera etapa de la carrera de grado, sin perjuicio de la excelencia académica que se requiera. Sabiendo que la educación es cambiante y dinámica, resulta necesario un cambio en la forma de interrelación docente-alumno, donde coexistan la comunicación formal y la digital de manera equitativa. En esta presentación, se exponen los resultados de la incorporación de videos didácticos a las clases de Análisis Matemático I, y Álgebra y Geometría Analítica, en dos cursos de primer año de Ingeniería en Sistemas de Información.

Palabras Clave: Estrategias didácticas, Aprendizaje combinado, Herramienta digital, Videos.

1 Introducción

El carácter federal que posee la Universidad Tecnológica Nacional, y en particular la ubicación geográfica de la Facultad Regional Rosario, permite tener una población de ingresantes que provienen de diversos institutos de nivel medio (públicos y privados), tanto de la propia ciudad de Rosario como de otras localidades del país e incluso del extranjero. Esta particularidad deja a la vista la disparidad existente entre los ingresantes, respecto a los conocimientos adquiridos en el nivel secundario. Estas diferencias nos obligan a ser creativos a la hora de diseñar las estrategias de enseñanza, desde el mismo curso de nivelación. Ya no es posible hacer frente a los problemas educativos desde una única visión, debiendo incorporar nuevas herramientas que, sin perjuicio de la excelencia académica que se requiera, utilicen nuevas tecnologías de apoyo. No hay que perder de vista que hoy el mundo vive una explosión tecnológica tan grande y vertiginosa que ya cambió el paradigma de comunicación y relaciones interpersonales. En consecuencia, es necesario también un cambio de paradigma en la forma de interrelación entre alumnos y docentes, debiendo buscar un equilibrio entre la demanda, generalmente silenciosa del estudiante, y la formación propia del profesor.

Para los jóvenes actuales, el uso de internet es algo tan natural como para sus padres ver televisión, o para sus abuelos escuchar la radio. Consideramos entonces que la incorporación de herramientas digitales en general, y de los videos didácticos en particular, resultaría beneficiosa en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto para el curso de nivelación como para las materias del cursado de la carrera.

e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Dentro de este marco, la utilización de estas herramientas digitales debe ser planificada, de manera tal que el estudiante incorpore los conocimientos necesarios dentro de un contexto donde coexistan la comunicación formal y la digital de forma equitativa, dado que el rango etario en el aula varía de una generación anterior a la de los *Z* y/o *Nativos Digitales* a otra que es autodidacta.

En el marco del proyecto de investigación *Estrategias didácticas con uso de herramientas digitales para la enseñanza de Matemática y Física en el curso de Ingreso y primer año de la FRRo* de la UTN, se incorporó la utilización de videos didácticos como una herramienta para incentivar al alumno a ser corresponsable de su aprendizaje.

En este trabajo se presentan algunos resultados de la incorporación de videos didácticos a las clases de Análisis Matemático I y Álgebra y Geometría Analítica, de dos cursos de primer año de Ingeniería en Sistemas de Información.

2 Justificación y marco teórico

Dentro de la temática que nos ocupa en este trabajo, se han desarrollado varias estrategias con diferentes orientaciones y metodologías de investigación que incluyen eficientemente el uso de tecnologías comunicacionales tendientes a complementar las técnicas y métodos de enseñanza actuales.

En las definiciones de las estrategias se distinguen tres líneas de pensamiento, a partir de las cuales se han desarrollado investigaciones sobre la inclusión de tecnologías en la educación.

Por un lado, se encuentran aquellas que analizan el impacto en el aprendizaje, vinculado a las diversas posibilidades del uso de herramientas digitales y su asociación a las características específicas de las distintas aplicaciones.

Otra, se encuentra relacionada con el impacto producido por el uso de estas herramientas y las características de la institución educativa como entorno de su uso.

Y, por último, el impacto en el aprendizaje, vinculado a las características personales y socioculturales del estudiante.

Para el primer gran grupo, diversos estudios han demostrado que la naturaleza visual de algunas tecnologías involucra más a los estudiantes y refuerza la comprensión de conceptos. Contribuye a la motivación del estudiante, dado que puede asociar a las posibilidades dinámicas e interactivas que tienen estas herramientas digitales con los conceptos estudiados, favoreciendo de este modo el aprendizaje y la comprensión intuitiva, desarrollando además destrezas y habilidades cognitivas.

El segundo eje investigativo, a su vez, pone de manifiesto las condiciones pedagógicas en cuanto a su entorno, tanto desde el punto de vista material como humano, donde el ambiente, el acceso a los recursos y la experiencia de los docentes, juegan un papel importantísimo en el estudiante a la hora de asimilar los saberes impartidos.

En tercer lugar, y completando los ejes citados, la investigación de este grupo se encuentra enfocada en el aprovechamiento de las herramientas digitales, en cuanto al uso e interacción del estudiante con ellas, la capacidad de éste en usar las oportunidades que le abren durante el proceso y los beneficios que obtiene, donde la eficacia del método y su eficiencia dependerán de una conjunción de factores, relacionados sobre todo con las características cognitivas, culturales y socio-demográficas del estudiante.

Otro enfoque queda definido por las experiencias de los docentes, presentes en un sinnúmero de trabajos publicados. En éstos se comparten las experiencias propias de cada uno de ellos, conformando comunidades o espacios de práctica que le permiten al docente ir construyendo el conocimiento en el área de aplicación.

Estos trabajos, conjuntamente con los debates asociados, le brindan al docente ventanas a nuevas tecnologías digitales, instrucciones de forma directa o indirecta del modo de aplicación de la nueva herramienta junto con los resultados obtenidos y/o esperados.

Sobre la difusión masiva de los portales educativos, Maggio [1] señala: *lo que se presenta en los entornos web adquiere el carácter de público. Este carácter público podría encuadrarse en el postulado bruneriano de la externalización, donde las obras, las producciones, como principal función de una actividad cultural colectiva, adquieren existencia propia, producen y sostienen la actividad grupal, ayudan a hacer una comunidad y plasman en un grupo formas compartidas y negociables de pensar.*

Para llevar a cabo la implementación del uso de videos didácticos en dos cursos, uno de Análisis Matemático I, y el otro de Álgebra y Geometría Analítica, ambos en la FRRo – UTN, se recurrió al denominado Aprendizaje Combinado (blended learning), una forma de diseño instruccional que trata de tomar lo mejor de dos mundos: el de las clases presenciales y el de la educación en línea, y fusionarlo para lograr una experiencia de aprendizaje que facilite tanto la comprensión de los contenidos, como el desarrollo de habilidades en los estudiantes. Es una metodología de trabajo que se puede adaptar a diferentes situaciones, se puede ajustar a los horarios y a la conveniencia de todos sus usuarios, ya sean estudiantes o docentes.

La principal habilidad que necesita un estudiante para el aprendizaje combinado es saber manejar los tiempos, poder planificar en qué momentos realizar las actividades. Uno de los grandes cambios que exige este tipo de aprendizaje es la responsabilidad que recae sobre el estudiante, y ya no sobre el docente. Éste puede planificar de cierta manera las actividades, pero está en el alumno saber organizar sus tiempos para poder realizarlas.

Uno de los grandes retos de la educación superior en este nuevo siglo es no formar profesionales que simplemente repitan lo que vieron en la universidad, sino que puedan aprender por su cuenta para responder eficientemente a los cambios que tan velozmente se dan en la sociedad en la que vivimos.

Muchas veces se pretende que cuando el alumno egrese de la universidad con su título bajo el brazo, pueda llevar a cabo un aprendizaje autónomo, aunque durante todo el cursado de la carrera se lo someta a un aprendizaje guiado.

La modalidad de aprendizaje combinado capacita a los estudiantes a que vayan aprendiendo por su cuenta durante el proceso de instrucción, para que una vez que terminen su carrera esa habilidad ya esté desarrollada y puedan seguir aprendiendo de manera autónoma.

3 Objetivos

El principal objetivo de este trabajo ha sido evaluar la influencia del uso de videos didácticos como una herramienta para incentivar al estudiante a ser corresponsable de su aprendizaje y como apoyo en la construcción de conceptos matemáticos, sin dejar de lado las clases presenciales referidas a los temas sobre los cuales se realizó esta investigación.

Para alcanzar este objetivo principal se buscó dar cumplimiento a otros, más específicos, que han sido los siguientes:

- Diseñar estrategias didácticas que integren el uso de la tecnología digital de los videos como una herramienta en cursos de Análisis Matemático I y de Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Rosario – UTN.
- Aplicar dichas estrategias didácticas en los temas seleccionados para la utilización de los videos, en un entorno de aprendizaje colaborativo.
- Diseñar instrumentos de evaluación de procesos y rendimiento del aprendizaje apoyado en el uso de videos didácticos.

4 Metodología

En la búsqueda de dar cumplimiento a los objetivos planteados, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

- Recopilación de datos.
- Selección de los contenidos a desarrollar a través del uso de videos didácticos.

  En Álgebra y Geometría Analítica se seleccionaron para trabajar a través de videos didácticos temas referidos a Vectores (definición, características, operaciones, versor asociado a un vector no nulo, componentes, cosenos directores), Matrices (notación, clasificación, operaciones) y Sistemas de ecuaciones lineales.

  En Análisis Matemático I se trabajó con el apoyo de videos didácticos en temas referidos a repaso de Trigonometría, Funciones (definición, dominio, imagen, función suryectiva, inyectiva, biyectiva, funciones elementales), Derivación logarítmica y Regla de L´Hopital.

- Diseño del material digital (guion, filmación, edición).
- Implementación del uso de la herramienta digital: La metodología de trabajo consistió, en algunos casos, en proponer como una actividad fuera del aula, que los estudiantes vieran un video, a veces dos, donde se desarrollaba cierto tema, para después trabajar en clase aplicando lo visto a través de la herramienta digital. En otros casos, los videos se propusieron con posterioridad a haber desarrollado una parte del tema en el encuentro presencial, para complementar y/o reforzar lo visto en clase.
  Para cada uno de los videos propuestos, se indicaba el link correspondiente para acceder a él en el canal de YouTube de la docente a cargo de la experiencia. Esta información se publicaba en el grupo cerrado de Facebook de la comisión respectiva y, debido a que no todos los estudiantes tenían cuenta en esa red social, esa publicación también se daba a conocer en un grupo de WhatsApp, en el que se comunicaban los alumnos del curso entre sí.
- Obtención de resultados de la experiencia de aprendizaje combinado con el uso de videos didácticos: En ambas asignaturas, durante el desarrollo de cada uno de los temas incluidos en el trabajo con apoyo de la herramienta digital, se llevó a cabo un seguimiento continuo del desempeño de los alumnos durante la experiencia, observando la frecuencia e intensidad de uso de la herramienta digital, y la posterior utilización de la información suministrada en los videos, en la resolución de actividades de aplicación.
- Realización de encuestas a los estudiantes al final del periodo de implementación de la estrategia.
- Análisis de los resultados.

5 Resultados de las observaciones de la experiencia

Se categorizaron las observaciones hechas por las docentes del siguiente modo:

- Relación estudiante-herramienta digital.

Se pudo observar que todos los estudiantes de las dos comisiones que trabajaron con esta modalidad, tanto en Análisis Matemático I como en Álgebra y Geometría Analítica, hicieron uso de los videos didácticos propuestos cuando se lo solicitaba desde la cátedra, pero también los volvieron a utilizar en varias oportunidades posteriores, y con una mayor asiduidad en fechas cercanas a las evaluaciones parciales de las asignaturas.

- Relación estudiante-aprendizaje.

Se observó que, después de comenzar las actividades de utilización de los videos en horario fuera de clase, los estudiantes se fueron mostrando en los encuentros presenciales más participativos, tanto para proponer cómo abordar la resolución de problemas planteados, como para trabajar en grupos de manera colaborativa.

Se observó también que, al plantear sus dudas, lo hicieron con un buen manejo del vocabulario específico de cada tema tratado. El tema del lenguaje matemático es algo que, en la mayoría de los casos, les cuesta dominar cuando inician su camino en la Matemática universitaria.

6 Resultados de la encuesta a los estudiantes

La encuesta diseñada se puso a disposición de los estudiantes a través de los grupos de Facebook que cada comisión comparte con sus docentes y sus bedeles.

Vale aclarar que los estudiantes miembros de estos grupos son todos los que cursan alguna materia en la comisión en cuestión, y tienen cuenta de Facebook. Es así que la encuesta les llegó, además de a aquellos alumnos que participaron de la experiencia con los videos didácticos, a otros estudiantes que cursaron otras materias en ese curso, y no las que interesan en el presente trabajo.

Para esta encuesta, que fue respondida por 76 estudiantes, las variables que se observaron especialmente han sido:

- Nivel de compromiso en la utilización de la herramienta digital propuesta.
- Nivel de aprovechamiento de la metodología utilizada con la incorporación de videos didácticos para lograr un aprendizaje autónomo.
- Valoración del trabajo hecho con apoyo de la herramienta digital elegida para esta experiencia.

A partir del análisis de los datos obtenidos con las respuestas, con respecto a la primera variable en estudio, se pudo saber que el 60,5% de los encuestados vio la totalidad de los videos propuestos, mientras que el 25% de ellos sólo vieron algunos videos en forma completa. Un total de 11 estudiantes refirieron no haber visto ninguno de los videos, aduciendo entre las razones que no lo vieron necesario, porque su formación previa era suficientemente sólida, o que no les habían indicado trabajar con videos. Se supone que esta última respuesta corresponde a aquellos estudiantes que no cursaban en esa comisión la materia bajo estudio.

En cuanto al nivel de aprovechamiento de la metodología utilizada con la incorporación de videos didácticos para lograr un aprendizaje autónomo, se les dieron varias opciones de respuesta, y se obtuvieron 64 devoluciones. Fue así que el 42% de los encuestados respondió que la utilización de estos videos le sirvió para comprender el tema desarrollado, sin necesidad de reforzarlo en la clase presencial. La respuesta más elegida por los estudiantes (casi un 66%) fue que les sirvió para avanzar en la resolución de ejercicios sobre el tema, sin recurrir a la ayuda del docente. El 22% indicó que esta manera de trabajar les fue útil para ayudar a algún compañero que no haya logrado entender por completo el tema en cuestión. Uno de los alumnos afirmó que le sirvió para complementar lo visto en los videos con la explicación recibida en los encuentros presenciales; y otro respondió que le fue útil para ayudarse a entender la teoría de los primeros temas del programa de la materia.

Con respecto a la valoración del trabajo hecho con apoyo de la herramienta digital elegida para esta experiencia, se recibieron 73 respuestas, de las cuales, un 47% y un 52% evaluaron como muy útil o útil respectivamente, el hecho de trabajar algunos temas a través de los vídeos didácticos. Sólo uno de los encuestados respondió que lo considera poco útil.

Para finalizar la encuesta, se les invitó a dejar algún comentario o sugerencia con respecto de la utilización de videos didácticos. Se obtuvieron 13 respuestas que, por lo significativas, se muestran a continuación.

- Los videos me fueron muy útil para entender los temas del segundo parcial.
- Si mal no recuerdo la calidad del vídeo y sonido no era muy buena pero la explicación si, estaría bueno que refuercen eso
- Muy útiles, los videos de vectores me sirvieron para entender mejor las propiedades geométricas.
- Faltan varios temas de la materia, y algunos ejemplos son muy básicos, y suele ocurrir que buscando vídeos explicativos muchas veces nos topamos con vídeos de personas explicando algo de manera incorrecta, sería más seguro ver vídeos hechos por algún profe de la cátedra
- ¡Tendría que haber videos de todos los temas!! Son muy muy útiles.
- Tiene muchas utilidades los vídeos, te ayudar a entender los temas y te facilita entender más fácil cuando el profesor está viendo el tema en clase.
- Sería muy bueno lograr hacer videos de una gran variedad de temas para reforzar el conocimiento, suele ocurrir que el tema no queda muy claro en clases y uno no puede ir a consulta en ese caso un vídeo explicativo de las bases del tema sería de mucha ayuda.
- Me sirvieron mucho también para repasar temas que no vi en el colegio, como trigonometría.
- Me pareció muy bueno tener los videos, porque tuve que faltar algunas clases y me sirvieron para entender los temas que se dieron cuando no fui.
- Me parece que la implementación de algunos videos fue de ayuda para avanzar un poco en algunos temas y además si tenés alguna duda podés ver el vídeo de nuevo.
- ¡Me sirvieron un montón los videos! Y también use en el cursillo. Son muy utieles para terminar de entender temas.
- Me parecieron muy útiles y claros.
- ¡Más videos!! Explican súper bien.

7 Análisis de los resultados finales

Al terminar el cursado de ambas materias, y la consiguiente finalización de la experiencia de aprendizaje combinado con la utilización de videos didácticos, se realizó un análisis cuantitativo del desarrollo de las instancias evaluativas de cada asignatura, comparando los resultados obtenidos en cuanto al rendimiento académico con lo sucedido en los dos años anteriores.

Como se muestra en la Tabla 1, el porcentaje de estudiantes que lograron regularizar Álgebra y Geometría Analítica (AyGA) aumentó considerablemente en el año 2019, donde se trabajó en algunos temas de la materia con el aprendizaje combinado. Del mismo modo, se puede observar un incremento en el porcentaje de alumnos que obtuvieron la aprobación directa de la asignatura en el mismo año. Y entre ambos porcentajes cubren el 55% del total de inscriptos.

Tabla 1. Comparación de rendimiento académico en Álgebra y Geometría Analítica en los últimos tres ciclos lectivos, para una comisión de primer año de Ingeniería en Sistemas de Información.

Álgebra y Geometría Analítica – 1 03 – ISI	Año 2017 (45 inscriptos)	Año 2018 (55 inscriptos)	Año 2019 (55 inscriptos)
No rindieron ningún parcial	14 (31%)	17 (30%)	10 (18%)
Rindieron sólo un parcial	5 (11%)	8 (15%)	8 (15%)
Rindieron parciales, pero quedaron libres	7 (16%)	10 (18%)	7 (12%)
Obtuvieron la regularidad	11 (24%)	12 (22%)	19 (35%)
Obtuvieron la aprobación directa	8 (18%)	8 (15%)	11 (20%)

En la Tabla 2, puede verse que para la materia Análisis Matemático I sucede algo similar a lo descripto para AyGA. Tomando en cuenta sólo los dos últimos años, el porcentaje de estudiantes que pudieron regularizar la asignatura se duplicó en 2019 con respecto al 2018; y se obtuvieron 6 aprobaciones directas en 2019, en contraposición al año anterior, donde no se logró ninguna. Entre ambos porcentajes, se logró cubrir el 38% de los inscriptos, cuando en los años anteriores no se llegó ni al 20%.

Tabla 2. Comparación de rendimiento académico en Análisis Matemático I en los últimos tres ciclos lectivos, para una comisión de primer año de Ingeniería en Sistemas de Información.

Análisis Matemático I – 1 07 – ISI	Año 2017 (48 inscriptos)	Año 2018 (53 inscriptos)	Año 2019 (50 inscriptos)
No rindieron ningún parcial	16 (33%)	19 (36%)	12 (24%)
Rindieron sólo un parcial	13 (27%)	15 (28%)	9 (18%)
Rindieron parciales, pero quedaron libres	10 (21%)	12 (23%)	10 (20%)
Obtuvieron la regularidad	4 (9%)	7 (13%)	13 (26%)
Obtuvieron la aprobación directa	5 (10%)	0	6 (12%)

8 Conclusiones

De toda la información obtenida a lo largo del desarrollo de esta experiencia, podría inferirse que la incorporación de la herramienta digital de los videos didácticos en los cursos de Matemática de primer año de Ingeniería en Sistemas de Información de la FRRo – UTN, puede considerarse útil para lograr que los estudiantes desarrollen la habilidad del aprendizaje autónomo, tal como lo evidencian los resultados académicos y los de la encuesta efectuada a los propios protagonistas de esta modalidad de trabajo.

Los estudiantes valoran muy positivamente el trabajo hecho con apoyo tecnológico. De hecho, fueron contundentes al afirmar mayoritariamente que la utilización de los videos didácticos como herramienta cognitiva:

- facilita la comprensión de los temas dados.
- permite desarrollar nuevas estrategias de pensamiento y acción para la resolución de problemas.
- posibilita la visualización de propiedades geométricas.
- propicia la exploración autónoma en la profundización de ciertos temas matemáticos.

Los resultados obtenidos en este trabajo serán los impulsores de este grupo de docentes para seguir en este rumbo, buscando diseñar estrategias didácticas que aporten al desarrollo de habilidades de los estudiantes en otros temas de Matemática universitaria y también de Física.

Referencia

1. Maggio, M.: Los portales educativos: entradas y salidas a la educación del futuro. Litwin, E.: *Tecnologías educativas en tiempos de internet*. Amorrortu Editores, pp. 35-69 (2005)

Evaluación e Integración de Contenidos de Asignaturas del Primer Nivel de las Carreras de Ingeniería. El Trabajo de Laboratorio de Análisis Matemático I

Eduardo De Santis, Elvira Rodriguez, Sonia Pastorelli, Eva Casco

Departamento Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaisse 610, Santa Fe, Argentina
{edesantis, mrodriguez, spastorelli, ecasco }@frsf.utn.edu.ar

Resumen. Los procesos de cambio de oferta académica requieren de la interacción de los actores involucrados en aras de obtener propuestas que aborden integralmente los aspectos a mejorar. A partir de los problemas detectados en el último proceso de reformulación iniciado en **Universidad Tecnológica Nacional** hace cuatro años se seleccionó para tratar, la falta de vinculación entre conocimientos básicos y complementarios y su relación con la formación de competencias del futuro ingeniero. Este trabajo resume la experiencia realizada y su evaluación, durante el 2019 en la cátedra Análisis Matemático I. En dicha experiencia, a través del trabajo de laboratorio, se integran contenidos de Física y de Geometría Analítica.

Palabras Clave: Integración, Competencias, Sistemas algebraicos de cómputos, Trabajo de laboratorio.

1 Introducción

El análisis y la reformulación de los diseños curriculares de carreras de ingeniería es un tema siempre abierto. Los avances tecnológicos necesitan de reformular contenidos, pero también de las capacidades, destrezas, aptitudes que el estudiante debe desarrollar en su formación para luego alcanzar los objetivos que la sociedad necesita de su producto profesional. Así, la formación por competencias es un tema puesto en la agenda de la formación del ingeniero argentino ya en el siglo XX. En 1987 se organizaron en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata jornadas dedicadas al análisis de planes de estudio. Fue en dichas jornadas donde prorrumpe la idea de un consejo, de alcance federal, formado por decanos de facultades que dictaran carreras de ingeniería. Nace el Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería (CONFEDI).

1.1 Un poco de historia en el cambio de paradigma en la formación de ingenieros en Argentina.

A inicio de los 90 la comisión de Enseñanza del CONFEDI releva las distintas propuestas curriculares de ingeniería en Argentina. Concluye que es excesiva e innecesaria la cantidad de titulaciones de ingeniería, muy dispares en la formación, tanto en contenidos como en carga horaria. Con la colaboración del Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI) se realizaron dos talleres sobre Modernización de la Enseñanza de la Ingeniería en la República Argentina y en 1993 se resolvió llevar adelante un proyecto de unificación curricular de las terminales de ingeniería. El resultado de este proyecto se plasmó en el “Libro Azul del CONFEDI” [1]. En éste se establece la unificación curricular de las carreras de ingeniería, para 21 terminales, cuyos conceptos fundantes siguen hoy vigentes tanto para esas carreras, como para las recientemente creadas. Por ejemplo, la duración de 5 años para las carreras de ingeniería, la unificación curricular del 55% y las grandes áreas de Ciencias Básicas, Tecnologías

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Básicas, Tecnologías Aplicadas y Complementarias, los contenidos curriculares mínimos y los criterios de intensidad de la formación práctica de cada una de las terminales (Libro Rojo CONFEDI) [2].

La aprobación de la Ley de Educación Superior (ley N° 24.521 [3]) introdujo la creación de la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) y la obligatoriedad de acreditar aquellos títulos que fueran declarados de interés público. El CONFEDI concluye que la obligatoria acreditación es un instrumento (y no un fin en sí mismo) para asegurar la calidad en el marco de un sistema de mejora continua.

CONFEDI asumió, entonces, el proceso de acreditación como una oportunidad política y estratégica para la mejora de la formación. En esta línea se desarrolla una propuesta de “estándares de acreditación”. Es así que en 1998 se realiza el “Taller sobre acreditación de carreras de grado en el área de Ingeniería” en el que participaron no sólo decanos, sino docentes de todo el país.

En 1999 se forma un Comité de Acreditación para que, con base en los estándares definidos, propusiera los indicadores y el manual de acreditación, los que se formalizan en el 2000. Estos estándares de acreditación definen dimensiones e indicadores, tomando como actividades reservadas de cada terminal, las incumbencias que en ese momento estaban vigentes para cada título de ingeniería y que regulaban el ejercicio profesional. Esta propuesta de estándares y guía de implementación es la conocida como “Libro Verde” [4], y la misma fue presentada al Ministerio de Educación. En 2001 fue aprobada por el Consejo de Universidades. Comenzó, entonces, un proceso histórico en la educación en ingeniería en Argentina (y podríamos decir en la educación argentina en general), con la formalización de los estándares de inicialmente 13 títulos, con los años se agregarían los 8 restantes hasta cumplimentar las 21 terminales mencionadas en el Libro Azul.

En 2002 la CONEAU convoca a acreditación a las carreras de los 13 títulos iniciales. Tres de las carreras de ingeniería (Civil, Eléctrica y Mecánica) que se dictan en la Facultad Regional Santa Fe (FRSF) participaron en ese proceso. Fue una tarea compleja, pero de gran aprendizaje para todos los actores de la Facultad. Derivó en la necesidad de un plan de mejoras, y éste en una plataforma para el crecimiento institucional. Se sucedieron luego las acreditaciones de las otras dos carreras (Industrial y Sistemas de Información). La FRSF tuvo el privilegio de ser la primera Facultad de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) que acreditara una carrera por el máximo de 6 años.

Los procesos de acreditación de carreras mencionados significaron un cambio en la dinámica interna en la institución, logrando instalar la necesidad de la dinámica y cambiante “mejora continua”.

Es así que el Departamento de Materias Básicas cobra un papel preponderante dentro de la institución, ya que no sólo impacta en la acreditación de las cinco carreras sino porque es el que debe velar por el equilibrio en la selección de contenidos y competencias para atender tanto a la especificidad de cada especialidad, como a la generalidad que la Universidad Tecnológica Nacional otorga a las asignaturas del departamento, para asegurar un posible cambio de especialidad por parte del estudiante.

1.2 El actual diseño curricular de la UTN y los cambios que se avecinan.

La Resolución N° 68/1994 [5] del Consejo Superior de la UTN, denominada *Parte Homogénea del Diseño Curricular de Carreras de Grado en la Universidad Tecnológica Nacional*, fija los lineamientos para el diseño curricular de carreras de grado que se dicten en esta institución. La página 3 de dicha normativa dice: “El presupuesto filosófico y organizador de los nuevos diseños curriculares es el concepto de integración de todos los niveles y áreas posibles. Se desprende de este principio el tema de homogeneización como propuesta de articulación a nivel universidad, permitiendo un nivel común que define los perfiles de formación básica”. “Con este encuadre la homogeneización se presenta a través de un conjunto de contenidos mínimos indispensables para la formación básica del futuro profesional”.

En la página 6 de la misma resolución se establece como metodología para la enseñanza de la matemática que la misma será “motivada y no axiomática” y que “los trabajos prácticos de todas las asignaturas del área matemática serán realizados en computadoras, utilizando softwares especializados que permitan el manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulación”.

En cada adecuación de los Diseños Curriculares (Ing. Civil: Ord. 1030/04; Ing. Eléctrica: Ord.1026/04; Ing. Industrial: Ord.1114/06; Ing. Mecánica: Ord. 1027/04; Ing. en Sistemas de Información: Ord. 1150/07) se reafirma la incorporación del uso de sentencias de programación, para Análisis Matemático I (AM I), que “Los trabajos prácticos incluirán la resolución de problemas en computadora, con software provisto especialmente, del cual el alumno será usuario. Esto incluirá paquetes computacionales de manejo simbólico".

También introduce para cada nivel de la carrera la "materia integradora" a la que, como su nombre indica, se le da la misión de reunir los contenidos de las demás asignaturas del nivel atendiendo al perfil específico de cada especialidad. Más allá que en ellas están tácitos diferentes objetivos para cada especialidad, uno común es promover el hábito de la correcta presentación de informes y desarrollar la habilidad para el manejo bibliográfico y la obtención de datos de problemas.

Sin dudas el DC del siglo pasado y las adecuaciones venideras han sido diseños "de punta". En ellos; algunas veces implícitas, otras explícitas; las competencias genéricas que propone luego el CONFEDI y la Declaración de Valparaíso [6] están ya presentes. Que el graduado *sepa hacer* y *sepa ser* con competencias tecnológicas, políticas, sociales y actitudinales tienen ya cabida en el actual DC.

1.3 Competencias y uso de softwares en asignaturas de Materias Básicas en la FRSF-UTN

Para Perrenoud [7] competencia es "un saber hacer fundado sobre la movilización y utilización eficaz de un conjunto de recursos". Nuestro equipo de tarea hace años que, trabajando bajo el marco conceptual Enseñanza para la Comprensión (EpC) [8] [9], incorporó el desarrollo de proyectos grupales. Blythe [8] opina que, en esas actividades, los alumnos reconfiguran, expanden y aplican lo que saben y, además, extrapolan y construyen a partir de sus conocimientos previos, luego permiten refinar los desempeños de comprensión.

Por otra parte, Liguori [10] afirma que el uso de medios tecnológicos, incluidas las computadoras, no garantiza "per se" que los alumnos desarrollen estrategias para aprender, ni fomentan el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior. La calidad educativa de estos medios de enseñanzas depende, más que de sus características técnicas, del uso o explotación didáctica que realice el docente y del contexto en el que se desarrolle.

Luego, el objetivo no es introducir *novedosos cambios* basados en las hoy populares competencias, para que *nada cambie*, ni tampoco hablar sobre lo discursivo del "*saber hacer"* lo que ya se sabe hacer.

En la cátedra AM I de la FRSF, el uso activo de los Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC) y la resolución de un trabajo de laboratorio (TL) utilizando uno de ellos, más que una exigencia curricular, se constituye en un pilar para alcanzar los objetivos comunes en todas las asignaturas del área Matemática. Se destacan:

- *Usar tecnologías* afines a las nuevas generaciones que colaboran en la adquisición de destrezas.
- *Posibilitar la integración horizontal*, otorgando una mirada integradora de los contenidos del mismo nivel.
- *Mejorar los desempeños de comprensión* al trabajar sobre conceptos en donde los estudiantes mostraron bajo nivel de comprensión, dando la oportunidad de mejorarlos.
- *Facilitar la integración vertical*, atendiendo necesidades conceptuales y procedimentales de asignaturas del nivel superior.
- *Favorecer la adquisición de competencias genéricas* que se exige al futuro profesional tales como identificar, formular y resolver problemas, desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo, comunicarse con efectividad, poseer un pensamiento crítico, actuar con ética, responsabilidad; aprender en forma continua y autónoma.

Stone Wiske [11] afirma que las tecnologías pueden perfeccionar y enriquecer los desempeños de comprensión de diversas maneras, entre las que se incluyen:

- Muchos softwares pueden hacer visibles conceptos abstractos y permiten que los estudiantes comprendan ideas complicadas experimentando activamente con ellas, manipulando variables y observando la interacción dinámica de los elementos de un sistema
- Las tecnologías digitales y las herramientas informáticas permiten que los alumnos expresen su comprensión en una rica variedad de formas.
- Estas tecnologías también permiten registrar el trabajo de los alumnos en formatos que pueden corregirse, combinarse y distribuirse más fácilmente.

1.4 El trabajo de laboratorio de Análisis Matemático I

Como ya se mencionó, el NDC exige usar softwares en todas las asignaturas del área matemática, pero deja a la materia integradora la obligación de integrar los contenidos, promover el hábito de la correcta presentación de informes y desarrollar la habilidad para el manejo bibliográfico y la obtención de datos de problemas. Por supuesto que todo esto son prácticas que también pueden ponerse en juego dentro de todas las asignaturas, tal como el enfoque por competencias propone.

Basándonos en dichos lineamientos durante las últimas décadas se impuso como condición para la obtención de la aprobación de la cursada (regularidad) de la asignatura AM I la realización, defensa y aprobación de un Trabajo de Laboratorio (TL).

Cada año el TL tiene una propuesta distinta. Algunas veces el SAC a utilizar fue prescripto (Mathematica, Maxima, Derive, Geogebra, etc.). Otras fueron a elección del estudiante, con la condición de ser software libre. A veces el TL fue un trabajo grupal de libre agrupamiento, otras sin posibilidad de elegir a sus compañeros y los hubo de desarrollo individual. La defensa del TL también sabe tener distintas aristas: pública o no, individual o grupal; exigiendo un archivo de diapositivas o sólo el trabajo desarrollado con el SAC. Sus consignas abarcan un abanico que va desde resolver ejercicios típicos de la asignatura, otros de aplicación de contenidos (optimización, por ejemplo), consignas con un perfil creativo (reproducir un dibujo usando el concepto transformación de funciones), etc.

2 La experiencia

En este apartado se resume tanto el planteo como el desarrollo del TL 2019 de AM I, trabajo necesario para alcanzar la regularidad (y por lo tanto promoción) de la asignatura. Se hace hincapié que éste retoma y profundiza contenidos de Física I (en los que los estudiantes demostraron desempeños de comprensión ingenua) y de Geometría Analítica (que, por un presupuesto horario insuficiente, el tratado no tiene la calidad deseada para abordar los contenidos de Análisis Matemático II).

2.1 Definición: consignas

El diseño, si bien estuvo a cargo de la Directora y del Jefe de Laboratorio de la cátedra AM I, fue interdisciplinario junto a investigadores del proyecto de investigación “Evaluación y Rendimiento Académico durante la formación del ingeniero en la UTN FRSF”. Tuvo como eje la integración horizontal y vertical con Física I, Algebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático II.

En reuniones de articulación con responsables de Física I se mencionó que en uno de los ejercicios del primer parcial, el 80% de los estudiantes que lo realizaron incurrieron en un error conceptual (y dentro de este porcentaje se incluye a los alumnos que han aprobado el parcial). Cuando los alumnos aprenden con vista a comprender, necesitan criterios, realimentación y oportunidades para reflexionar a lo largo de la secuencia total de enseñanza.

1. Desde una plataforma horizontal que asciende con una rapidez constante de 4 m/s, se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con rapidez inicial respecto de la plataforma de 20 m/s. Calcule:
   a. La posición de la plataforma cuando el objeto cae nuevamente sobre ella, y cuánto tarda en el proceso.
   b. La velocidad de la plataforma y del objeto en ese instante.
   c. La altura máxima a la que se eleva el objeto respecto del punto de partida.
   d. La máxima separación entre la plataforma y el objeto y en que instante se dio respecto del tiempo de salida.
   e. Graficar la posición, velocidad y aceleración de la plataforma y el objeto en función del tiempo(obtenga para caso al menos cinco valores para graficar)

Fig. 1. Consigna del primer parcial de 1a asignatura Física I cuyo concepto central se focaliza en velocidad relativa

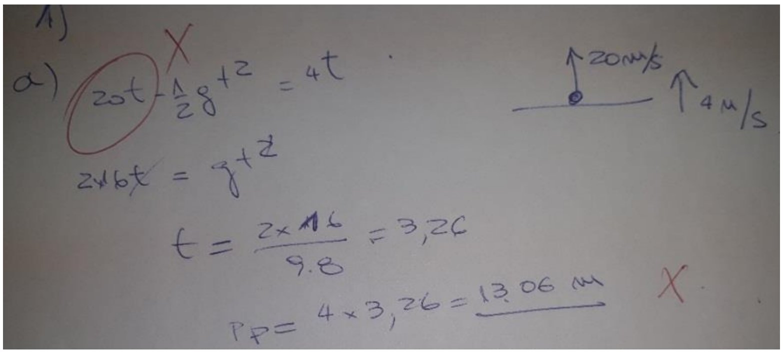


Fig. 2. Resolución de la consigna anterior por parte de un alumno. En la imagen se muestra el error reiterado en el ejercicio del examen anterior al no considerar el concepto de “velocidad relativa”.

Además, en la reunión de articulación vertical con docentes de Análisis Matemático II, estos manifiestan su preocupación por el manejo ritual e ingenuo del contenido “curvas paramétricas”, el que luego dificulta el tratamiento y uso de funciones vectoriales. Además, también se acordó que el TL es la oportunidad para usar animaciones junto a formas paramétricas de curvas (recurso vinculado a los estudiantes de hoy) pero que además iluminan la relación entre curvas paramétricas y funciones vectoriales.

Por otro lado, para favorecer la adquisición de las competencias genéricas mencionadas se fijaron consignas concretas. El TL se definió en grupos de 4 alumnos, elegidos por el docente (orden alfabético) intentando promover la adquisición de la competencia de desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo. Si bien las consignas son comunes para los grupos, los datos difieren entre ellos para evitar la “duplicación” de los informes (ver figura 3). Al respecto puede mencionarse que durante el desarrollo del TL los tutores recordaron el valor de “actuar con ética”. Dentro de las pautas, un párrafo advertía el valor de poseer un pensamiento crítico: “Este es un trabajo de laboratorio integrador, planificado por docentes de Análisis Matemático I y Física I. Si bien muchas de las consignan no necesitan ni del uso de software, ni de herramientas del cálculo diferencial, al hacer usos de éstos se agiliza la obtención de los resultados y la apropiación de los conceptos. De allí el interés de este trabajo. Como futuros ingenieros, es bueno que consideren utilizar la herramienta más eficiente en cada ítem”.

Trabajo de Laboratorio 2019.

$n_i = \text{última cifra del documento del alumno } i$

Ejercicio N° 1: Para los datos usar: $n = \text{mayor } n_i$ $\quad k = \text{menor } n_i$

Desde una plataforma horizontal que asciende a una rapidez constante $(n+1)\ \frac{m}{s}$ se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con rapidez inicial respecto de la plataforma de $3\,n - k\frac{m}{s}$

Se pide:

a) Calcular la posición de la plataforma cuando el objeto cae nuevamente sobre ella, y el tiempo que tarda en hacerlo. La velocidad de la plataforma y del objeto en ese instante.
b) La altura máxima a la que se eleva el objeto respecto del punto de partida.
c) Determinar la máxima separación entre la plataforma y el objeto; y en qué instante se dio (respecto del tiempo de salidas).
d) Crear un deslizador que represente el tiempo, y grafique en el plano la posición del objeto y de la plataforma. Puede esquematizar a ambos como un punto, pero diferenciando el color. Además, agregue un cuadro en la pantalla gráfica, donde se visualice el valor de la distancia entre objeto y plataforma para instante t.

Ejercicio N° 2: Para los datos usar:

$x_1 = 2 * \text{mínimo } n_i$	$x_2 = \frac{\text{máximo } n_i}{2}$	$vo_1 = 15 - 0{,}5\,(\text{mínimo } n_i)$
$y_1 = 2 * \text{promedio de } n_i$	$y_2 = \frac{\text{máximo } n_i}{2}$	$vo_2 = 25 - 0{,}5\,(\text{mínimo } n_i)$

En un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitacional uniforme $(g = 9.8\frac{m}{s^2})$, dos proyectiles (al que identificaremos como "rojo" y "azul") se lanza en el tiempo $t = 0$.

Las trayectorias de ambos estarán en el plano xy. El origen de coordenadas está ubicado en un mojón sobre línea de tierra (plana). Las longitudes (coordenadas) están expresadas en m.

Al rojo se lo lanza desde el punto $P_1 = (x_1; y_1)$ por un cañón que dispara con una rapidez inicial $vo_1\frac{m}{s}$, con un ángulo de inclinación de 45° respecto de la horizontal.

Al azul desde el punto $P_2 = (-x_2; y_2)$ con una con una rapidez inicial $vo_2\frac{m}{s}$, con un ángulo de inclinación de 30° respecto de la horizontal.

a. Encontrar las dos trayectorias de los proyectiles para un mismo sistema de referencias.
b. Suponiendo que la superficie del terreno es plana y está en el plano $y = 0$, determinar el punto en el que impactan cada uno en el terreno y los tiempos para los que se producen cada uno de los impactos. Pueden dar resultados aproximados.
c. Graficar las dos trayectorias de los proyectiles en un mismo sistema de referencias.
d. Encontrar la función que representa la distancia entre los dos proyectiles para cada tiempo t, mientras ambos están en el aire. No olvidar precisar el dominio.
e. Crear un deslizador que represente el tiempo y permita graficar en el plano la posición de cada proyectil.
f. Determinar la distancia máxima y la mínima en la que se encuentran los proyectiles, mientras ambos están en movimiento. ¿se chocarán? En una gráfica mostrar la ubicación de ambos proyectiles cuando la distancia entre ellos es mínima.
g. ¿Hay algún punto del plano xy por el que ambos proyectiles pasen? Si lo hay, determinarlo. ¿Cuál proyectil pasa primero por dicho punto?

Fig. 3. Consignas del Trabajo de Laboratorio. El ejercicio N°1 fue acordado con la cátedra Física I (notar similitud del problema con el presente parcial de la figura 1. Ambos ejercicios fueron diseñados con docentes de Análisis Matemático II para que por un lado se usen las formas paramétricas de curvas (trayectorias y sus gráficas), pero al pedir animaciones se comienza a vislumbrar la relación entre curvas y funciones vectoriales.

2.2 Consignas y la mirada desde los objetivos de la cátedra

El equipo de tarea considera que las actividades propuestas por el TL permiten alcanzar los cinco propósitos mencionados en el apartado 1.3 ya que fueron diseñadas para tal fin. Los problemas son el resultado de la integración vertical y horizontal. Usar SAC, y en particular generar animaciones, son acervos afines a los jóvenes del siglo XXI, que necesitan usar conceptos matemáticos de una manera no tradicional. El análisis de los resultados permitirá averiguar si la realización del TP, finalmente logró refinar desempeños de comprensión y la mejora de competencias genéricas que se exige al futuro profesional (identificar, formular y resolver problemas, desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo, comunicarse con efectividad, poseer un pensamiento crítico, actuar con ética, aprender en forma continua y autónoma).

2.3 Desarrollo del trabajo de laboratorio.

Si bien son muchos los estudiantes que usan habitualmente algún SAC, la realidad es que la mayoría no apela a sus potencias simbólicas y pocas veces explotan las capacidades gráficas y numéricas. Para que esas herramientas dinámicas sean accesibles al estudiante se comparte en el campus de la asignatura un "Tutorial" para el trabajo independiente. En ambos casos se trabaja con Geogebra, debido a que es libre y se usa tanto en el curso introductorio y en AGA, pero cada grupo puede utilizar otro (libre) para desarrollar el TL.

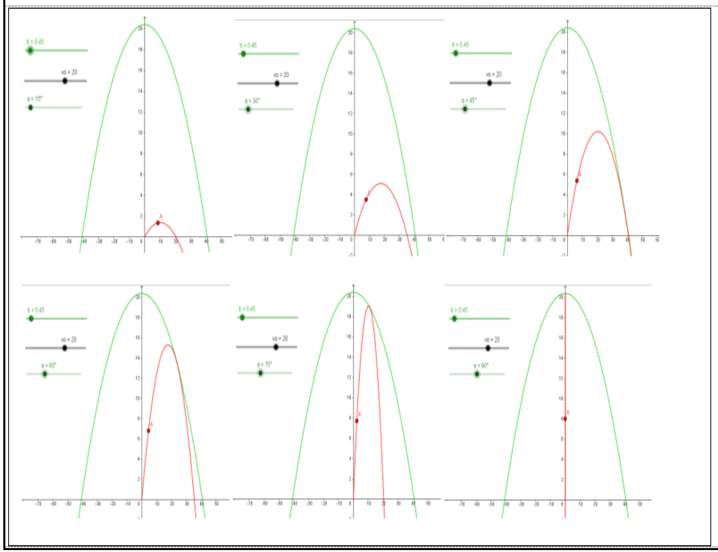
El tutorial 2019 está formado por un conjunto de archivos: dos en formato de texto y siete problemas de movimientos rectilíneos y tiros parabólicos realizados con GeoGebra donde animaciones permiten construir conceptos (minimizar la distancia entre móviles, por ejemplo). Los archivos de textos tienen la misión de resumir comandos utilizados uno; presentar las consignas de los problemas desarrollados y el paso a paso en la resolución, el otro. En las figuras 4 (tutorial formato Word) y 5 (tutorial formato Geogebra) se ejemplifica una de las situaciones reales presentes: el problema 7. En éste las animaciones permiten visualizar las trayectorias de proyectiles disparados a una determinada rapidez inicial, variando el ángulo de disparo. El ejercicio permite descubrir la noción de parábola de seguridad (o parábola envolvente).

<u>**Ejemplo N° 7**</u>: "Una parábola envolvente".

A partir del archivo del ejemplo anterior, se incorpora la función: $yps(x) = \frac{vo^2}{2g} - \frac{g}{2\,vo^2}\,x^2$ (se graficó en color verde).

Tanto la gráfica, como la ecuación, muestran que se trata de una parábola simétrica respecto del eje y, que "abre" hacia abajo (tiene la forma $y = -ax^2 + c$). Nota que en la función interviene vo, pero no α.

Intenta dar una interpretación a esta parábola en el contexto del problema. Para ello, una vez fijado el valor de la rapidez, genera trayectorias de proyectiles con distintos ángulos de disparo. En el siguiente gráfico se representan para α = {15°; 30°; 45°; 60°; 75°; 90°}. Genera más trayectorias con el deslizador de α y obtiene conclusiones.



¿Sabes cómo se llama la parábola verde?

*En geometría, se la denomina **parábola envolvente**. En el contexto de movimientos parabólicos, "**parábola de seguridad**". Justifica el porqué.*

Ahora mueve el deslizador de vo y nota el efecto en la parábola envolvente (una vez prefijado la rapidez inicial, queda fija la parábola). Piensa ahora qué datos permiten determinar la ecuación.

Fig. 4. Una de las páginas del Tutorial (formato Word) para Trabajo de Laboratorio2019 de AM I de FRSF-UTN.

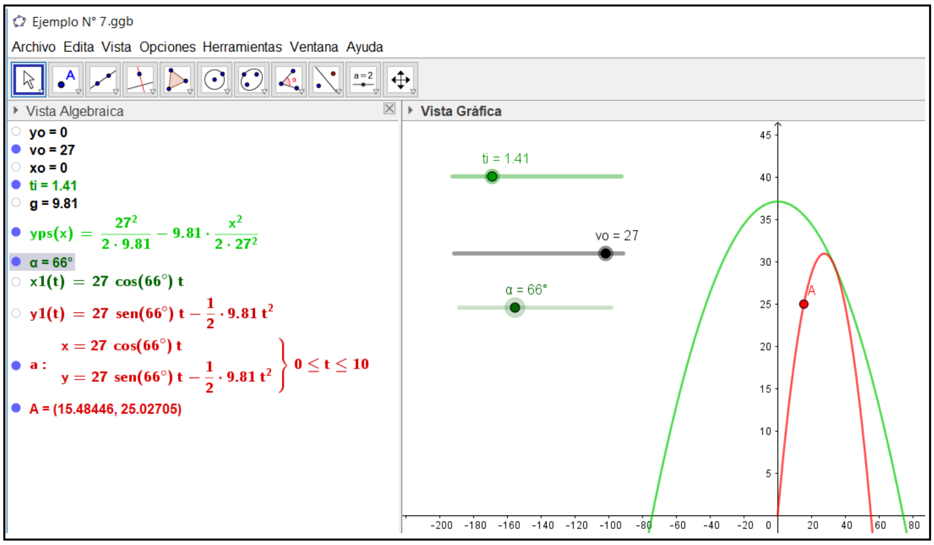


Fig. 5. Uno de los archivos realizados con GeoGebra del Tutorial para Trabajo de Laboratorio.

Para los estudiantes que este material les resultara insuficiente, se les ofrece clases optativas en el Laboratorio Informático de Materias Básicas de 90 minutos de duración. Son dirigidas por auxiliares y becarios de la cátedra.

También cada curso tuvo asignado un tutor que publica un encuentro semanal para atender consultas presenciales referidas al desarrollo del TL.

Desde que se publicó hasta la fecha de presentación los estudiantes dispusieron de 30 días para la realización. La entrega del trabajo tuvo dos modalidades: una digital (a través del campus) y otra impresa, las que debieron coincidir. Se aprobó con una calificación mínima de 70%. Una vez que se realizaran las entregas, se corregían las impresas, y se recurrió a la digital en el caso de dudas o incoherencias en el informe. Una vez corregido, en el caso de no alcanzar el porcentaje de aprobación, se devolvía el TL, indicando los errores. El mismo debía ser corregido y el grupo debía realizar una nueva entrega. El docente tutor (y corrector) del trabajo podía solicitar su defensa por parte de uno o más integrantes del grupo, generalmente ante la duda que la autoría fuera grupal o si continuaba siendo inconsistente.

3 Los resultados

3.1 Evaluación sumatoria.

En la Tabla 1 se resumen los resultados obtenidos desde el punto de vista de la evaluación sumatoria. Una lectura rápida permite observar que 110 de los 111 grupos iniciales aprobaron el TL. Sin embargo, es pertinente aclarar que en 32 grupos uno o más de sus integrantes desertaron en el trabajo. De los 425 estudiantes iniciales, aprobaron el TL 385 (90,6%).

Tabla 1. Cantidad de trabajos de laboratorio presentados y no aprobados.

Comisión	Grupos cantidad	Trabajos no aprobados
Civil A	13	0
Civil B	9	0
Eléctrica	9	0
Industrial A	13	0
Industrial B	12	0
Mecánica A	12	0
Mecánica B	11	0
Sistemas A	14	0
Sistemas B	9	0
Sistemas C	9	1
Total	**111**	1

3.2 Evaluación cualitativa.

La tabla 1 puede parecer que para la mayoría de los jóvenes el TL no presentó una complicación o un desafío a sus capacidades. Nada más alejado de la realidad. Realizaremos una apreciación de la puesta en común del equipo de docentes, becarios y tutores que participaron en el desarrollo del TL:

- *Cumplimiento con fecha de entrega*: La mayoría de los grupos (99) cumplen, pero muy pocos asumieron el trabajo con responsabilidad. El común de los jóvenes no asistió a las clases optativas en el Laboratorio. Tampoco hubo demasiadas consultas las primeras dos semanas de las cuatro con que contaban para realizarlo. En los últimos 10 días las consultas estaban colmadas de jóvenes más preocupados en que se postergue la entrega o que el tutor o algún compañero le resuelva "su problema" que en obtener ayudas que faciliten cumplir con la tarea.
- *Cumplimiento con ambas entregas*: 86 grupos cumplieron con la entrega en tiempo y forma. Algunos realizaron a tiempo sólo la versión impresa y otros sólo la digital, mientras que 12 grupos no realizaron entrega a la fecha prevista (las razones fueron variadas, se les permitió la entrega fuera de término)
- *Cumplimiento con las pautas*: varias entregas no tenían el formato indicado (carátula, nombre del archivo, etc.).

Llamativo es que muchas de las entregas impresas (más del 30%) resultaron dificultosas para corregir, por la falta de organización (no se colocaban ítems y/o títulos), falta de una conclusión o respuesta a la consigna (sólo cálculos), presencia de fórmulas sin reemplazo o declaración de datos; asignación del mismo dato con distintos nombres; presencia de gráficos que no corresponden al ítem o hasta en algunos casos, ni siquiera a sus datos. Algunos resultados debían ser buscados por el que corregía entre una maraña de datos o símbolos. Mención aparte los errores ortográficos.

También fue significativo que en consultas los estudiantes se *quejaran* sobre la falta de participación de alguno de sus compañeros. En algunos casos la consulta se dirigía a qué datos usar, en vista que algún integrante no participaba en el desarrollo del grupo por desinterés.

3.3 Evaluación conceptual.

Para analizar el tratamiento conceptual de los contenidos involucrados se analizará una muestra de éstos, los 9 trabajos del curso de Ingeniería Eléctrica.

- Ejercicio 1: En 5 de los 9 trabajos estuvo presente el mismo error conceptual de no sumar a la velocidad del proyectil el de la plataforma. En este caso se los citó, se les marcó el error y en una nueva entrega debieron salvarlo.
- Ejercicio 2: Tres de los trabajos presentaron mucha dificultad en la interpretación de las soluciones de ecuaciones dadas por el software (¡cada proyectil impactó dos veces!). En cuanto al ítem de optimización, en 5 grupos precisan la distancia mínima pero no la máxima. En tres

de éstos aclaran que no la hay, dejando en evidencia que confunden el concepto de extremo absoluto con el relativo.

4 Conclusiones y trabajos futuros

La evaluación cualitativa muestra que la adquisición de competencias genéricas tales como de actuar con ética y responsabilidad, desempeñarse de manera segura en equipos de trabajo, comunicarse efectivamente, aprender en forma continua y autónoma, no fue lograda con la mayoría de los jóvenes. Obviamente quedan cuatro años más para alcanzar este objetivo.

Sin embargo, muchos fueron los jóvenes que (en consultas, defensas o citas para marcarle errores que por su trascendencia debían corregir) han manifestado que han valorizado la experiencia expresando que apoyan la formación de vínculos, el aprendizaje entre pares, el ensayo de distintos caminos para la resolución de problemas, el uso de distintos registros para el abordaje de los temas.

El planteo de un trabajo integrador permitió no sólo abordar temas donde los contenidos de distintas cátedras se complementan sino poner en juego en el equipo docente competencias que éstos le solicitan a sus estudiantes y que no siempre practican (como disposición a trabajar en equipo, capacidad de escucha, de comunicación efectiva, etc.)

También fue enriquecedor para tutores y becarios del departamento (alumnos al fin), ya sea por la formación previa que debieron realizar para participar en la experiencia, como por su papel de guía en apoyo brindado a los grupos (pares menos avanzados en la carrera). Esta es una contribución de la cátedra AMI en la formación de competencias de liderazgo, de comunicación asertiva de estos jóvenes próximos a graduarse.

Otro aspecto positivo es que errores conceptuales no se soslayan o filtran en esta experiencia, aun alcanzando el porcentaje de aprobación, cada grupo recibió una devolución indicando los errores y aciertos cometidos. En el caso de ser importante (como por ejemplo el de no sumar a la velocidad del proyectil el de la plataforma) la devolución fue presencial a modo de coloquio.

Porque evaluamos la experiencia positiva y enriquecedora -aunque vale aclarar que también extenuante- es que continuaremos con la línea de TL grupales, integrándolo con asignaturas del nivel.

Agradecimientos. Agradecemos a los Profesores Titulares de las cátedras Física I y II: Carlos Suarez y Susana Roldán y a los Ayudantes de Trabajos Prácticos: Ing. Santiago Cabrera e Ing. Alejandro Martínez.

Referencias

1. Libro Azul CONFEDI
2. Libro Rojo CONFEDI https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf
3. Ley de Educación Superior N° 24.521 http://servicios.infoleg.gob.ar/infolegInternet/anexos/25000-29999/25394/texact.htm
4. Libro Verde CONFEDI
5. La Resolución N° 68/1994 del Consejo Superior de la UTN, denominada *Parte Homogénea del Diseño Curricular de Carreras de Grado en la Universidad Tecnológica Nacional*
6. Declaración de Valparaíso 2013 "Declaración de Valparaíso" Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Iberoamericano. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Declaracion-de-Valparaiso-Nov2013VF.pdf
7. Perrenoud. Diez nuevas competencias para enseñar. Barcelona: Graó. 2004, pp. 11.
8. Blythe, T y colaboradores. et al (1999). La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente. Buenos Aires. Editorial Paidós.
9. Stone Wiske, M. (comp.). (1999). La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires. Paidós.
10. Liguori en Litwin, E. comp. (1995). Tecnología Educativa. Política, historias y propuestas. Buenos Aires. Editorial Paidós.

11. Stone Wiske, M. (2006) Ensenar Para La Comprension Con Nuevas Tecnologias (Spanish Edition) (Español) Pasta blanda – marzo.

Aplicación de la Metodología *Scrum* a un Problema de Joseph Liouville

Emilio Aguirre-Rebora[1], Eloy Manuel Aguirre[2]

[1] Núcleo de Inteligencia Comportamental Empresarial, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Paraje Arroyo Seco, B7001BBO Tandil, Argentina,
emilioaguirrerebora@gmail.com

[2] Instituto de Investigaciones en Ciencias Económicas y Empresariales, ICEE, Universidad del Salvador,Viamonte 1816, C1056ABB Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.
eloy.aguirre@usal.edu.ar

Resumen: En este trabajo presentamos una experiencia de la implementación de la metodología *Scrum* en la resolución de un problema de Liouville para la asignatura Matemática Discreta de primer año de la carrera de Ingeniería de Sistemas, con el propósito de estimular a los estudiantes en la construcción de sus propios saberes desde diferentes roles. La aplicación de los avances de las Ciencias de la Educación en los procesos de enseñanza-aprendizaje de matemática, han inspirado esta experiencia con resultados estimulantes por lo menos desde nuestra práctica docente.

Palabras Clave: *Scrum*, Sumas notables, Funciones multiplicativas

1 Introducción

La resolución de trabajos prácticos de las asignaturas de los primeros años de las carreras que involucran cursos de matemática esenciales, nos permitió registrar una demanda notable de los alumnos que reclaman mayor ayuda inicial, más acompañamiento y abundantes ejemplos numéricos. De tales reclamos, resultó la instauración de clases teórico–prácticas obligatorias que sustituyeron la estructura anterior que tradicionalmente instaba a aplicar conocimientos teóricos, recibidos en una clase magistral, a la resolución de trabajos prácticos. Desde nuestro punto de vista estos cambios que, como fase aislada, no han producido mejoras significativas en los resultados de los procesos de enseñanza-aprendizaje sumados a las demandas de los alumnos, nos guiaron a adicionar otros cambios orientados a un entorno para el aprendizaje crítico natural [1], que nos inspiró a dar un paso más hacia la mirada global del juego completo [2]. En efecto, para mejorar el desempeño de los estudiantes dentro del marco de la enseñanza orientada a la acción [3], hemos considerado un conjunto de estrategias didácticas, tal vez ambiciosas, que resultan de un análisis de rasgos epistemológicos sobre una revisión profunda de la misión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, desde una óptica constructivista, y consecuentemente con un cambio de la visión que asocie contenidos programáticos a la metacognición en forma sostenida. Así pues, la experiencia presente se refiere a la aplicación de una de esas estrategias: la metodología *Scrum* [4], [5], que en principio es un medio facilitador para entrelazar las competencias profesionales del sistema productivo con la formación integral que requiere el sistema educativo e induce a los alumnos a sentirse al mando de su propio aprendizaje. Asimismo, sus fundamentos interpretan, en una apretada síntesis, los siete principios para transformar la educación de David Perkins que en este caso son: transparencia, supervisión y retroalimentación, con características que lo complementan como el trabajo en equipo autorganizado y autodirigido, crítico, adaptativo, iterativo, rápido, flexible a los cambios y eficaz, [6]. Más aún, esta metodología trasciende la receta mágica y lo memorístico, y al impulsar a la acción, abre una gran posibilidad a que el interés por lo aprendido no

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

solo afecte los saberes previos, sino que pueda transformar la manera de entender la naturaleza de tal saber [1]. Por otra parte, la novedad fue que la aplicación del *Scrum* no se realizó en una unidad de la asignatura en particular sino en un problema concreto: el problema o teorema de Liouville. El matemático francés Joseph Liouville (1809-1882) descubrió un procedimiento para encontrar a partir de un entero positivo n las listas de enteros positivos que cumplen con la propiedad que *la suma de sus cubos es igual a su suma al cuadrado*, a continuación se da un ejemplo del procedimiento de modo introductorio de la misma forma que se hizo en la experiencia: se comienza eligiendo un entero positivo, en este caso, el 10, posteriormente se listan sus divisores positivos 1, 2, 5, 10, luego, se escribe la cantidad de divisores positivos de cada divisor 1, 2, 2, 4 y por último, se verifica la igualdad siguiente

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = 81 = (1 + 2 + 2 + 4)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

La elección del problema propuesto, no es casual, requiere una verdadera tarea de ingeniería o de actitud ante la resolución de problemas, superadora de la secuencia entre teoría y práctica, y trasciende en general a la interacción circunscripta a la dinámica áulica [7]. Tiene un tamaño adecuado para resolverse en aproximadamente dos semanas, requiere conceptos de la asignatura Matemática Discreta presente como números enteros y primos, Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA), máximo común divisor, funciones multiplicativas de la teoría de números y conceptos básicos vistos en Álgebra I como Principio de Inducción Completa (PIC), estructura de anillo y dominio de integridad, además la probabilidad de frustración es prácticamente nula, permite desarrollar con naturalidad la organización del estudio, ayuda a clarificar conceptos complejos como es el caso del TFA y contribuye a llevar al plano concreto su forma de razonar la materia [1]. De esta forma, se propone a los alumnos de la asignatura Matemática Discreta de primer año, organizados por grupos, probar la veracidad del problema de Liouville para cualquier entero positivo n.

2 Desarrollo de la experiencia

Esta sección consta de dos subsecciones. En la primera, se presenta el problema de Liouville en su versión amigable con el objetivo de fomentar la participación, se describen los conceptos matemáticos previos, y se finaliza con el enunciado formal del problema. En la segunda sección, se realiza una descripción exhaustiva de la implementación de *Scrum*.

2.1 Un problema de Liouville

Como se mencionó con anterioridad, la presentación del problema o teorema de Liouville se hizo mediante el ejemplo (1). Posteriormente, se realizaron otros ejemplos numéricos propuestos por los alumnos n = 6, 25 y 30.

Así, creamos la oportunidad de presentar el problema en forma amigable: *¿Qué listas de enteros positivos cumplen con la propiedad que la suma de sus cubos es igual a su suma al cuadrado?* A partir del enunciado propuesto surgió de forma espontánea por parte de los alumnos el concepto de sumas notables visto en la unidad de números naturales e inducción de la materia correlativa Álgebra I:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Si bien es cierto que el problema se puede resolver utilizando el principio de inducción [8], la idea fue seguir indagando para poder utilizar herramientas dadas en la asignatura. Por tanto, el método descubierto por Liouville para encontrar estas listas propone que dado un entero positivo n, encontrar sus divisores y para cada divisor calcular la cantidad de divisores que tiene, entonces comenzamos a dar a los alumnos una pista de los conceptos que necesitan y una noción más clara para poder plantear el problema de forma general, es decir, *dado un entero positivo n, ¿el algoritmo descripto por Liouville* *siempre es válido?* Una vez que hemos llegado a este punto, comenzamos a revisar los conceptos de la unidad de números enteros ya vistos, sobre todo aquellos referidos a divisibilidad [9].

Definición 1. Dado un número entero positivo n. Se definen *D(n)* y como el conjunto de divisores positivos de n y el número de divisores positivos de n, respectivamente

$$D(n) = \{d \in Z^+ : d / n\} \quad \textbf{(3)}$$

$$\tau(n) = m; \text{ con } m \text{ el número de elementos de } D(n) \quad \textbf{(4)}$$

A partir de la revisión de estos conceptos regresamos a visualizar los pasos del método. Para los alumnos es claro que en una primera instancia se debe calcular $D(n)$ y que el algoritmo planteado por Liouville insta a calcular la cantidad de divisores positivos de cada elemento de $D(n)$. Además, analizamos el hecho que el conjunto de índices que recorre la suma identifica los divisores de n. Luego, concretamos la versión formal del problema con el teorema siguiente,

Teorema 1. Sean n un entero positivo, el conjunto de divisores positivos de n y la función de la definición 1. Entonces,

$$\sum_{d/n} [\tau(d)]^3 = \left[\sum_{d/n} \tau(d)\right]^2 \quad \textbf{(5)}$$

Una vez descripto el problema en su versión formal los estudiantes ya conocen que la tarea a realizar es probar la veracidad del teorema 1.

2.2 Metodología *Scrum*

Los alumnos se organizan por grupos compuestos por 6 a 9 integrantes, cada grupo es supervisado por un responsable/auxiliar de cátedra (docente guía) que acompaña el trabajo en la interacción elegida (grupos de W*hatsApp*, reuniones presenciales, plataforma Moodle, etc.). A continuación, se describe el seguimiento de un grupo testigo de 6 integrantes, digamos A, B, C, D, E, F. En cada grupo se explica que se van a repartir roles siguientes por elección interna:

- Líder: establece las prioridades, organiza la tarea colectiva, se asegura que todos comprendan el requerimiento e interactúa con el docente guía que cumple la función de cliente.
- Expositor: es el integrante del grupo designado para exponer los resultados, para vender el producto final que definitivamente representa al grupo.
- Desarrolladores: búsqueda de antecedentes de aplicación al problema, confección del historial de reuniones y avances (*Sprint)*, plantear dificultades, consultas a otros grupos y elección de la modalidad de exposición.

El docente guía llega a conocer el contexto sociocultural de los alumnos de su grupo a cargo, identifica sus nombres y debate con ellos pautas de desarrollo del aprendizaje asociadas a la calificación tales como participación, rigurosidad en los casos que amerite, creatividad, interacciones entre los integrantes mediante un grupo de *WhatsApp*, comprensión del aprendizaje, el producto final, la exposición del mismo, se aclara que la calificación es individual y no es una nota única por grupo. Además, hace hincapié sobre su rol como *cliente*. En esta instancia, comenzamos a introducir los conceptos de *requerimientos del cliente*, *producto*, *vender*. Se acuerda con el cliente un plazo de entrega y las reuniones que se van a realizar para ver el avance del producto, en este caso, estos parámetros tienen cierto peso al actuar en espejo con las competencias profesionales que se pretenden introducir. Se confecciona un calendario de actividades con las fechas acordadas, donde el cliente va marcando sus exigencias, que comprenden: primera reunión, a la semana una segunda reunión con entrega de *sprint*, a la siguiente semana entrega del producto y por último se realiza la exposición. En la primera reunión con el grupo testigo verificamos la comprensión del problema, del producto que se debe construir, de la metodología, los plazos, las actividades y disipamos todas las dudas posibles. Esta reunión fue importante para la organización de este grupo en particular, creamos un espacio de reflexión y surgen principalmente las inquietudes:

- ¿Puede ser que todos expongamos una parte? El *vendedor* de una empresa en general es uno solo. El tamaño del producto ¿tiene mérito suficiente para requerir más de un expositor?
- ¿Se puede extender el tiempo? Es aconsejable hacerlo en 2 semanas, recuerden que pueden consultar sus dudas al docente guía y que tanto la dinámica de estudio como la laboral se ajustan a líneas de tiempo bastante rígidas. Se les sugiere usar *Kanban* como alternativa. En este caso particular los plazos no afectan la calidad del trabajo y la responsabilidad del plazo es compartida con los docentes.
- ¿Qué pasa si algún integrante abandona el grupo? Hacemos un seguimiento del grupo, ayudaremos a redistribuir los roles y contactos con otros grupos
- ¿Qué materiales consultamos? Recomendamos los apuntes y bibliografía de las asignaturas Álgebra I y Matemática Discreta.

Recordamos que este trabajo no es una carrera de obstáculos sino que tratamos pensar en cómo resolver problemas, planificar sobre el calendario, trabajar en grupo, distinguir qué sabíamos, qué aprendimos y sobre todo cómo pusimos en valor lo realizado. Luego de la reunión, monitoreamos las interacciones en el grupo de *WhatsApp* donde surgen ideas inmediatas como por ejemplo descomponer el número en producto de factores primos. Aparece la dificultad de no poder concluir en forma directa a partir de cualquier entero positivo n y así, se llega a la idea de comenzar por un número entero positivo que sea igual a un número primo o a potencias de un número primo. El docente a cargo valora el aprendizaje que significan estos pasos y alienta a vencer la tendencia de escribir ejemplos numéricos y la resistencia de pasar formalmente a variables ($n = p$ ó $n = p^t$) para poder generalizar la prueba de la propiedad. El docente guía completa tablas de desempeño que son compartidas con los alumnos en todas las instancias, como la que se muestra en la tabla 1, que es una síntesis de las observaciones que se extraen del conocimiento del grupo y de la dinámica de las reuniones virtuales que el mismo grupo propuso. En principio, todos los alumnos del grupo tienen los conocimientos previos (sumas notables, principio de inducción, combinatoria, números enteros, divisibilidad, funciones multiplicativas), y participan activamente (salvo en el caso de B que tiene escasa presencia), los debates se centraron en cuestiones concretas como la decisión de no incluir ejemplos en el primer *sprint* o la elección de notación, evidenciando confianza en sus avances y manejo del pensamiento abstracto. En el caso de B y C al principio se mostraron reticentes a la metodología y hacían comparaciones de la evaluación continua con la evaluación puntual de un examen con planteos del tipo: si fuera un examen ya tendríamos un aprobado o ¿este avance merece una buena nota? En cuanto a los roles A y F (excelente) hacen aportes a la planificación, e introducen ideas que estimulan al grupo a visualizar la comprensión del tema, como es la iniciativa de comenzar analizando los números primos; los desarrolladores C, D, E (muy bueno) aportan conceptos vistos en la asignatura Álgebra I como sumas notables (PIC), anillo y dominio de integridad y verifican múltiples ejemplos numéricos. En el caso de B asigna al grupo y al docente guía un papel de control demandando aprobación permanente.

Tabla 1. Seguimiento del grupo testigo antes de la segunda reunión.

Alumno\Estándar	Conocimientos previos	Participación	Actitud	Desempeño de roles
A	Si	Si	interés en aprender	excelente
B	Si	No	interés en la nota	bueno
C	Si	Si	interés en la nota	muy bueno
D	Si	Si	interés en aprender	muy bueno
E	Si	Si	interés en aprender	muy bueno
F	Si	Si	interés en aprender	excelente

En la segunda reunión, se tiene el resultado del primer *sprint y* el problema es resuelto en forma parcial para n igual a un número primo o potencias de un número primo, se aplica correctamente el concepto de sumas notables y se requieren indicaciones para las herramientas de exposición. La presentación comienza con el caso $n = p$, se explica la facilidad de poder generalizarlo dado que tiene dos divisores, es decir, $D(n) = \{1,p\}$, $\tau(1) = 1$ y $\tau(p) = 2$. Entonces,

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2 \qquad \textbf{(6)}$$

y la propiedad se cumple para n = p. Luego, para el caso n = pt con $t \geq 1$, se tienen t+1 divisores positivos, D(n)= {1,p, p2, ..., pt}. Posteriormente, se aplica la fórmula dada en (2) y se concluye que la propiedad se cumple para n = pt con $t \geq 1$.

Tabla 2. Cálculos sobre las cantidades de los divisores de los divisores positivos de p^t.

d_i	$D(d_i)$	$\tau(d_i)$	$[\tau(d_i)]^3$
1	{1}	1	1
p	$\{1,p\}$	2	8
p^2	$\{1,p, p^2\}$	3	27
...	...	...	...
p^t	$\{1,p, p^2,..., p^t\}$	t+1	$(t+1)^3$

La presentación confirma que las expectativas, aunque elevadas, fueron cumplidas por el grupo. Valoraron la producción, fueron rigurosos en la notación y seguros en sus afirmaciones. Todo el grupo siente como propio el *sprint* y se muestran motivados y creativos. El primer *sprint* es un producto en sí mismo a pesar de estar acotado por las condiciones de los valores del número entero n que se analiza. Esta simplificación del problema oculta que las cantidades de divisores no necesariamente siguen una secuencia tan evidente de 1,2,3,..., t+1; cuestión que impulso a los estudiantes a generar una hipótesis errónea que fácilmente fue descartada por el equipo de desarrolladores al comenzar a hacer ejemplos numéricos que involucraban números compuestos por primos distintos dentro del *sprint* 2.

A continuación, comenzamos a ajustar detalles de la presentación donde seleccionamos un sistema de diapositivas para la exposición junto con los encargados de supervisar la realización de las mismas, donde se incluirá el *sprint* 1. Una vez finalizada la reunión, el docente guía realiza una evaluación que se plasma en la tabla 3 donde se agrega el ítem rigurosidad en la notación en ese espacio se califica como forma natural a la internalización de la formalidad simbólica para comunicar sin esfuerzo ideas o resultados y alguna resistencia si no logra el alumno realizar esa comunicación con naturalidad.

Tabla 3. Seguimiento del grupo testigo posterior a la segunda reunión.

Alumno\Estándar	Participación	Valoración de avance	Actitud	Rigurosidad en notación
A	Si	Si	motivado y colaborativo	forma natural
B	Si	Si	motivado	alguna resistencia
C	Si	Si	motivado y constructivo	alguna resistencia
D	Si	Si	motivado y constructivo	forma natural
E	Si	Si	motivado y colaborativo	forma natural
F	Si	Si	motivado	forma natural

En la instancia de la segunda consulta, el grupo discute el tratamiento de números enteros que son producto de dos primos distintos elevados a potencias diferentes. Comienzan el análisis estudiando $n = pq$ con p y q primos distintos, por sugerencia de un integrante recurren a la estructura de árbol para comprender el total de combinaciones y no perder divisores. Así, dan un paso más tomando a n como el producto de tres primos distintos y llamativamente, si bien inician con ejemplos numéricos rápidamente derivan en expresiones con variables, luego van agregando complejidad al planteo colocando diferentes potencias, o mayor cantidad de números primos diferentes hasta llegar a la expresión más general del Teorema Fundamental de la Aritmética que versa: Todo número natural $n>1$ puede expresarse de forma única como producto de números primos

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_r^{t_r} \qquad \textbf{(7)}$$

donde $p_1, p_2,\dots,p_r$ son números primos distintos elevados a potencias $t_1, t_2,\dots,t_r$ de números naturales.

Es muy interesante la dinámica interna del grupo para arribar al fin del proyecto, cada uno desde la individualidad aporta su contribución a la calidad del producto, en general se replantearon el objetivo de obtener una buena nota adicionándole el logro de haber razonado en forma crítica, relacionando ideas, experimentando la importancia de trabajar en grupo y extrayendo conclusiones con significado conducentes a producir un producto propio. Luego de varias interacciones, los alumnos se percatan de que cada factor de la descomposición general de un número $n > 1$ en producto de sus factores primos es un tema resuelto en el primer *sprint*. Esto genera el producto de sumatorias que se igualan factor a factor por las sumas notables. Aparece la dificultad de resumir en una sola suma tales productos, para resolver esta dificultad se recuerda en concepto de función multiplicativa de la teoría de números [9].

Definición 2. sean f una función, $f: Z \to Z$, a y b dos números enteros coprimos entre sí, f se denomina multiplicativa si verifica que

$$f(ab) = f(a)f(b) \qquad \textbf{(8)}$$

A partir de este concepto los alumnos rápidamente hacen un repaso de las funciones multiplicativas en donde encuentran que la función τ cumple con la condición (8). Además, descubren que el reconocimiento de la veracidad del teorema requiere que $\sum_{d/n}[\tau(d)]^3$ y $\left[\sum_{d/n}\tau(d)\right]^2$ sean funciones multiplicativas. Posteriormente, el docente guía a los estudiantes en la búsqueda de teoremas dados por la cátedra en donde los estudiantes rescatan el teorema siguiente,

Teorema 2. sea la función $f: Z \to Z$, definida por $f(n) = \sum_{d/n} g(d)$ con g una función multiplicativa de la definición 2. Entonces, f es una función multiplicativa.

Del teorema 2, los estudiantes concluyen que $f(n) = \sum_{d/n}[\tau(d)]^3$ y $g(n) = \left[\sum_{d/n}\tau(d)\right]^2$ son funciones multiplicativas y el grupo comienza a ver que están muy cerca de llegar al resultado deseado y llegan con mucho optimismo a la tercera reunión. En esta reunión se presenta el trabajo terminado como resultado del segundo *sprint* que completa el problema con la resolución para n que ahora es el producto de potencias de primos distintos, elevados a potencias naturales diferentes. Se debate la importancia esencial del hecho de que se trate de funciones multiplicativas. De esta forma, se logra llegar a la explicación siguiente del problema: dado un entero positivo n mayor que 1 como en (7), $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_r^{t_r}$ de donde se observa que cada factor es una potencia de primos distintos, por lo que la suma de cantidad de divisores de cada factor fue resuelto en el *sprint* 1. Se comienza por el lado derecho de (5). Entonces,

$$\sum_{d/n} [\tau(d)]^3 = \sum_{d/p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}} [\tau(d)]^3 \qquad \textbf{(9)}$$

Luego, por el teorema 2 y de los resultados del *sprint* 1, se tiene

$$\sum_{d/n} [\tau(d)]^3 = \sum_{d/p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}} [\tau(d)]^3 = \sum_{d/p_1^{t_1}} [\tau(d)]^3 \cdots \sum_{d/p_r^{t_r}} [\tau(d)]^3 = \left(\sum_{k=1}^{t_1+1} k^3\right) \cdots \left(\sum_{k=1}^{t_r+1} k^3\right) \qquad \textbf{(10)}$$

Por otro lado, reemplazando (2) en (10) y por el *sprint* 1 se obtiene

$$\sum_{d/n} [\tau(d)]^3 = \left(\sum_{k=1}^{t_1+1} k^3\right) \cdots \left(\sum_{k=1}^{t_r+1} k^3\right) = \left(\sum_{k=1}^{t_1+1} k\right)^2 \cdots \left(\sum_{k=1}^{t_r+1} k\right)^2 = \left(\sum_{d/p_1^{t_1}} \tau(d)\right)^2 \cdots \left(\sum_{d/p_r^{t_r}} \tau(d)\right)^2 \qquad \textbf{(11)}$$

y nuevamente por el teorema 2, hemos llegado al resultado deseado

$$\sum_{d/n} [\tau(d)]^3 = \left[\sum_{d/p_1^{t_1}} \tau(d)\right]^2 \cdots \left[\sum_{d/p_r^{t_r}} \tau(d)\right]^2 = \left[\sum_{d/n} \tau(d)\right]^2 \qquad \textbf{(12)}$$

Tabla 4. Seguimiento del grupo testigo previa y posterior a la tercera reunión.

Alumno\ Estándar	Participación	Aplicación de información	Notación	Interacción	Calificación interna
A	Si	reflexiva	uso natural	motivadora	adecuada
B	Si	esforzada	leves dificultades	muy fluida	realista
C	Si	marcada iniciativa	uso con soltura	colaborativa	buenos criterios
D	Si	marcada iniciativa	uso natural	colaborativa	muy bien
E	Si	reflexiva	uso natural	colaborativa	muy bien
F	Si	creativa	uso natural	excelente	adecuada

Los alumnos destacan la importancia de la observación ya que gracias a ella se dieron cuenta de la aplicación directa del *sprint* 1 en esta segunda etapa, también señalan sus aciertos en la forma de plantear la solución y admiten lo significativo de una notación correcta, aunque siguen apareciendo algunas dudas leves. En ninguna de las reuniones se registraron burlas o actitudes discriminatorias que caracteriza el segmento etario de pertenencia de este grupo por lo que la interacción se produjo sin problemas, hubo puestas en común en las comunicaciones y las reflexiones se centraron en apuntar a los conocimientos esenciales. Solicitamos a los alumnos que evalúen el desempeño de los integrantes del grupo y el docente guía califica los criterios y argumentos fundantes. Al final de la reunión se pacta la fecha de la exposición. En el momento de la exposición, el estudiante designado por el grupo utilizando las herramientas comunicacionales que le proporcionan los desarrolladores vende el producto a alumnos y docentes de la cátedra quienes evaluarán el desempeño previo de cada alumno en su rol y la calidad del producto final. La presentación se realizó con diapositivas y en la misma se distinguieron cada uno de los *sprint's*. Posteriormente, realizamos un debate en el aula donde se compilan comentarios sobre las decisiones que tomó el grupo, la dinámica de la experiencia y se obtienen las conclusiones siguientes: les resultó muy satisfactorio la construcción de un producto y piensan que les va a ser útil para asignaturas futuras y el mundo laboral, tomaron consciencia, aunque no lo verbalizaron taxativamente, de que se sintieron seguros de argumentar y comentar sobre el mismo, tanto sobre los conceptos como de la forma en que aprendieron el tema; en definitiva percibimos que para el grupo fue agradable y estimulante trabajar de esa forma. La riqueza de esta evaluación del proyecto por parte del grupo de alumnos nos enseña que dar independencia a los estudiantes en la acción, sin juzgar ni controlar, permite que desarrollen sus propios esquemas mentales sin someterlos a nuestros propios esquemas ni a los prejuicios de lo que debieron hacer, o lo que debieron preguntar.

3 Conclusiones y trabajos futuros

La propuesta obtuvo un grado de satisfacción significativo tanto para los estudiantes como para el cuerpo docente, creemos que se debe a que la actividad tiene su base en el acuerdo con los alumnos y en la comprensión acabada de la metodología *Scrum*, el problema de Liouville, los parámetros de evaluación continua, enseñanza orientado a la acción, el producto que se va a construir, los recursos disponibles, la unidad curricular que comprende y en definitiva se debe a la información sobre el juego completo [2]. Aunque, algunos integrantes del grupo de estudio se mostraron reticentes al principio, por la flexibilidad de la metodología con respecto a la evaluación puntual de un examen acotado y por que se visualizaban muy expuestos en la evaluación continua, a medida que se fue desarrollando la experiencia por la relación con el docente guía, los debates en grupo y las reuniones realizadas, fueron comprendiendo y se adaptaron de forma natural a la tarea. Finalmente, en cuanto al desempeño de los estudiantes se nota una mejoría tanto en la comprensión de los conceptos como en sus calificaciones en comparación con el dictado de clases magistrales, es decir, cumple con la hipótesis planteada en [3]. Por otro lado, con referencia a trabajos futuros la idea sería implementar más problemas similares al de Liouville y recopilar más datos estadísticos sobre el grado de satisfacción, impactos en el desempeño posterior de los alumnos, valoración del autoaprendizaje, que nos permitiría ir mejorando la forma de implementar la metodología de *Scrum*.

Referencias

1. Bain, K.: Lo que Hacen los Mejores Profesores de Universidad. Universitat de València (2007)
2. Perkins, David: El Aprendizaje Pleno Principios de la Enseñanza para Transformar la Educación. Paidos (2009)
3. Freeman, S.; Eddy;S. L.; McDonough M.; Smith, M. K.; Okoroafor, N.; Jordt, H.; Wenderoth, M. P.: Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, Nro 111, pp. 8410-8415 (2015)
4. Sutherland, J.; Sutherland, J.J: Scrum: The art of doing twice as much in half the time. NY: Crown Business, Penguin Random House Company (2014)
5. Amandi, A.; Campo, M.: "Milleannizando el CMMI: el "mito" de los estilos de aprendizaje hecho realidad". XXIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, pp. 1193-1202, 2017.
6. Perkins, D.: *Educar para un Mundo Cambiante*. Jossey-Bass, (2015)
7. Camillioni, A.; Davini, M. C.; Edelstein, G.; Litwin, E.; Souto, M.; Barco, S.: Corrientes Didácticas Contemporáneas. Paidos (1997)
8. Neres, F.: Uma curiosa propriedade com inteiros positivos. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Vol. 4, pp. 10-15 (2015)
9. Apostol, Tom: *Introducción a la Teoría Analítica de Números*, Reverté, (2019)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Una Modalidad de Aula Invertida: Percepciones de los Estudiantes y Propuesta Didáctica

Mónica B. Dádamo, Ángel E. Riva

Departamento de Materias Básicas.
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario (UTN-FRRo).
Zeballos 1341 (2000) Rosario, Argentina
mbdadamo@gmail.com / aeriva@hotmail.com

Resumen. Se indagan los efectos de la aplicación de modalidad de aula invertida en las representaciones de los estudiantes**.** En sintonía con los fundamentos del CONFEDI, la experiencia del aula invertida llevó a la propuesta de un taller con docentes de la asignatura Análisis Matemático I, para generar entornos interaccionales de aprendizaje adaptables a las necesidades de los estudiantes de ingeniería. Se construye un marco teórico referencial que pone en evidencias los indicadores y las variables que sustentan las diferentes formas de la evaluación en matemática y el reconocimiento de las características propias del saber y de la actividad matemática, en el contexto de los cambios tecnológicos. Dado que la evaluación pone de manifiesto el modelo docente y su concepción, en este trabajo se detalla procedimientos y técnicas, y se proponen los instrumentos de evaluación para una reflexión colectiva, que ayude a pensar desde qué lógica miramos el cambio.

Palabras Clave: Aula invertida, Educación matemática competencial, Evaluación.

1 Introducción

El impacto de la aceleración del cambio tecno-científico y social genera numerosos vectores de transformación en el ámbito educativo ingenieril, donde lo interaccional/multimedial nos reta a reconfigurar ciertas conceptualizaciones ligadas a una tradición instruccional/textual -currículum por objetivos, centrado en el profesor-.

El aula invertida *(en inglés: flipped classroom)* es un enfoque de aprendizaje mixto en el que los estudiantes reciben lecturas (digitales) como tarea, mientras que las actividades de aprendizaje activo se utilizan en el aula. El fundamento de esta metodología es que la preparación de los estudiantes antes de la clase, mejora la eficacia de las actividades de aprendizaje [1], [2], [3].

Los resultados de una revisión sistemática sobre el uso del aula invertida en la educación superior indican una mayor satisfacción de los estudiantes y un mayor rendimiento académico, medido por mejores resultados de evaluaciones, exámenes, calificaciones previas a las pruebas y calificaciones del alumnado en general, en comparación con la enseñanza convencional; también hay evidencia que esta metodología de enseñanza incrementa la atención en clase por parte de los alumnos [4].

Tradicionalmente se asume que la evaluación tiene una función reguladora de los aprendizajes, condicionando los modos en que los estudiantes toman decisiones para gestionar los conocimientos relacionados con las demandas del modelo evaluativo al que tienen que responder: Una suerte de diligencia de formato, de actividad técnica, formal, que en los modelos instruccionales 'constituye' un elemento clave en la calidad de los aprendizajes [5]. Esta perspectiva está siendo profundamente cuestionada.

Para organismos como UNESCO y CEPAL el acto de evaluar no se centra en hacer explícito cuánto recuerda el alumno sobre determinado tema, sino en hacer visible su capacidad para apropiarse críticamente de los lenguajes especializados y hacer relaciones y preguntas que lo conduzcan por los caminos de la interconectividad, de lo complejo [6].

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

En el ámbito de la provincia de Santa Fe (Argentina), en el diseño curricular de la escuela secundaria orientada se refiere que evaluar implica recoger información, analizarla y valorarla, para luego tomar decisiones que impactan directamente en la vida de múltiples otros. La evaluación debería entenderse como una práctica que compromete una dimensión social, y no como un mecanismo o instrumento que fomente exclusión. Dentro de esta perspectiva y de manera general, la evaluación en los distintos espacios curriculares debe reflejar los caminos del aprendizaje, tanto de los estudiantes como de sus docentes. Uno de sus propósitos será ayudar a los docentes a entender mejor qué y cómo aprenden sus estudiantes, para tomar decisiones significativas a partir de dicho conocimiento. El otro será posibilitar a quienes enseñan, la revisión permanente de sus propuestas de manera reflexiva, responsable y crítica. Así se podrán diseñar experiencias que promuevan aprendizajes valiosos para la constitución subjetiva de un joven que se forma para vivir en sociedad [7].

En una experiencia previa con alumnos de primer año de Ingeniería (UTN-FRRo), incorporamos la evaluación de aprendizaje invertido en el recuperatorio del primer parcial de la asignatura Análisis I de la carrera de Ingeniería en Sistemas Informáticos (AMI-ISI): Los alumnos que no aprobaron el primer parcial (evaluado con la metodología tradicional del desarrollo de una serie de ejercicios escritos) tenían la posibilidad de rendir un examen recuperatorio eligiendo la metodología para hacerlo (tradicional o aula invertida). Al final del mismo, se encuestó a alumnos para que expresen sus representaciones sobre la metodología aplicada.

¿Qué percibieron los estudiantes de la metodología aula invertida? Con esta metodología, ¿creen que optimizaron el aprendizaje?, ¿cómo podría mejorarse la implementación de esta modalidad evaluativa? La primera pregunta evalúa lo que los estudiantes piensan acerca de su experiencia en aula invertida y si debería aplicarse como método de enseñanza. La segunda pregunta investiga cómo los estudiantes perciben que el aula invertida mejora su aprendizaje. La tercera pregunta se plantea para apoyar a aquellos docentes que están considerando aplicar la metodología de aprendizaje invertido en sus propias aulas.

El objetivo de este estudio fue indagar sobre los efectos de la aplicación de modalidad evaluativa de aula invertida, en las representaciones de los estudiantes y en la propuesta de nueva fase didáctica.

2 Fundamentación

La preocupación generalizada que manifiestan los docentes de las asignaturas del ciclo inicial universitario a causa de las bajas calificaciones que obtienen sus alumnos no se debe únicamente a los bajos porcentajes de aprobación que se registran en la mayoría de los casos. Históricamente, el primer nivel de carrera universitaria provoca en los alumnos un gran desconcierto por el salto cuali-cuantitativo que representa el cambio de nivel educativo, sumado a la deficitaria formación conceptual de la historia escolar, la baja compenetración que alcanzan en el desarrollo de las clases, la autogestión de las dinámicas de estudio y de asistencia a clases, el trato con profesores, todos ellos hacen que se requiera de una gran adaptación a nuevos modos de gestión del conocimiento. Tan radicales son los cambios respecto del nivel secundario, que en muchas ocasiones esos mismos cambios son la causa del fracaso en los primeros exámenes [8].

En nuestro caso, después de los resultados del primer parcial de AMI-ISI en 2019 -que dejó casi 75% de alumnos reprobados-, se buscó una alternativa para el examen recuperatorio, permitiendo que el alumno eligiese entre dos métodos de evaluación. Esta metodología, como bien lo expresan Espinoza y Torelli (2017), pretende otorgarle valor a la evaluación como una herramienta interpretativa del proceso de aprendizaje y no como una demostración taxativa de los saberes adquiridos. La construcción de indicadores a partir de la información que aporta la evaluación permite establecer relaciones entre distintos aspectos, condiciones o fenómenos no siempre explícitos o evidentes, y a su vez, implica la construcción de categorías interpretativas [9].

Como refieren Bertoni, Poggi y Teobaldo (1996), *"evaluar el funcionamiento de una clase implica construir -en el proceso mismo de investigación- el referente apropiado; es decir, aquél que permita aprehender la singularidad del aula que se evalúa. Se apunta a comprender el objeto, no a juzgarlo"* [10].

3 Marco Teórico

3.1. Aprendizajes desde la complejidad de la gestión del conocimiento

El enfoque "de la complejidad" propone la superación del ideal clásico de racionalidad, centrado en el primado de la razón, la objetividad del saber, el método y la noción del conocimiento puesto al servicio del hombre para el bien. En el transcurso de los últimos tres siglos, la consolidación de la ciencia como saber independiente hizo posible que el ideal clásico de racionalidad traspasase las fronteras de la cognición científica disciplinaria y se proyectase ideológicamente en el hombre común y su vida cotidiana (Tabla 1) [11]. El abordaje de la gestión del conocimiento a partir del pensamiento complejo se fundamenta en la concepción de que la realidad es múltiple, ilimitada, compleja e incierta. Esta concepción de incertidumbre hacia la realidad y hacia el conocimiento está muy ligada con la acción, que implica la necesidad de riesgo pero también de precaución, la interrelación entre medios y fines, y la interacción con el contexto [12].

Tabla 1. Fundamentos del paradigma tradicional y de la complejidad

Paradigma tradicional	Paradigma de la complejidad
Su objetivo es desarrollar teoría	Su objetivo es resolver problemas (usando teoría)
El nuevo conocimiento se revierte en la comunidad científica	El nuevo conocimiento se revierte en la sociedad
Enfoca los problemas de la realidad segmentándolos	Enfoca los problemas desde la necesidad de su resolución, mezclando disciplinas
No se compromete con la acción	Se compromete con la acción
El criterio de verificación es la lógica de la experimentación (¿explica el problema?)	El criterio de verificación es la lógica de la efectividad (¿resuelve el problema?)

Fuente: Aguerrondo, I. Conocimiento complejo y competencias educativas. *IIPE/UNESCO Working Papers on Curriculum* Issue #8 (2009).

Como refiere Maldonado (2003): *"Las ciencias de la complejidad instauran efectivamente una nueva forma de racionalidad, distinta a las conocidas en la historia de occidente, y en la que no caben ya oposiciones entre los planos teórico y práctico, o filosófico y científico, o teórico y social, antagonismos que marcaron al grueso de la historia de la ciencia, de la historia y la filosofía"* [13].

Esta redefinición del modelo de conocimiento es la base para comprender los nuevos discursos de la educación, centrados no ya sólo en la necesidad de formación del pensamiento sino en un compromiso por la formación de competencias en el alumno. Las competencias suponen precisamente un saber de otra índole, más allá del saber tradicional de la modernidad, un saber que integra el saber con el hacer.

Esta idea implica que el estudiante no puede saber de antemano a qué problemas se va a enfrentar en sus desempeños profesionales o ciudadanos futuros, pero debe tener la capacidad de resolver de manera creativa un amplio rango de ellos. Para esto, es necesario que desarrolle la comprensión profunda de la realidad, el pensamiento crítico y la integración de conocimientos, de reflexión y acción [14].

3.2. Aprendizajes desde las Competencias Educativas

La introducción del enfoque de competencias profesionales en el ámbito educativo responde a una creciente demanda de la sociedad de conocer las capacidades que se desarrollan a través de los diferentes procesos de formación, y por el interés de mejorar la preparación para lograr una mayor pertinencia para incorporarse al ambiente laboral. Esta demanda se basa en los diferentes estudios e investigaciones que se han realizado, tanto en el ámbito académico como en el laboral, sobre las competencias que necesitan los egresados de las universidades para incorporarse al trabajo. En el concepto de competencia se entrelaza e integra lo afectivo, lo psicomotor y lo cognitivo en una nueva síntesis en el momento de llevar a cabo la acción, la evaluación y la reflexión sobre la acción. El enfoque de competencias se entiende como un conjunto articulado de competencias profesionales que se supone permitirán un desempeño exitoso (pertinente, eficaz y eficiente) en la atención y resolución de los problemas más comunes durante la formación del estudiante. Desde esta perspectiva, la competencia se demuestra en la acción o ejecución. Para poder evaluar el grado de dominio de la competencia es necesario contar con variables observables y criterios de valoración [15].

Para Perrenoud, en el enfoque competencial, los conocimientos no son los más importantes sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional [16]. Es decir que las competencias requieren de una base sólida de conocimientos y teorías, pero las habilidades junto con las actitudes y valores serán quienes darán movilidad o vida a las mismas.

Antonio Martínez Sánchez (2013) cita a Cabero (2015) cuando refiere que las competencias determinan capacidades a adquirir en tres ámbitos: conocimiento (dominar y diferenciar conceptos, teorías, modelos y métodos), ejecución (saber ejecutar en la práctica un tratamiento, saber desarrollar un plan, saber presentar un informe) y actitud (tener una actitud ética, dominar habilidades sociales, etc.). Es decir, ser competente requiere, por una parte, un cierto conocimiento conceptual (teorías, modelos, constructos, etc.), requiere también saber hacer o aplicar ciertos instrumentos o procedimientos, y requiere, por último, adoptar un estilo concreto de actuación, compromisos personales con ciertos valores y actitudes hacia el trabajo [17], [18].

Que el estudiante genere prácticas orientadas al desarrollo y evaluación de competencias, es una necesidad que impacta en el perfeccionamiento del perfil del egresado, mejorando sus posibilidades de inserción laboral, y al mismo tiempo muestra a una Universidad capaz de responder a los cambios y exigencias del mercado.

El Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI) (2014) definió competencia como *"la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales"*. La competencia es un saber hacer complejo, resultado de la movilización, integración y adecuación de conocimientos, habilidades y actitudes, utilizados eficazmente en diferentes situaciones. El CONFEDI propone competencias de acceso y egreso a la Universidad. Las competencias de acceso se clasifican:

- Competencias básicas: Se refiere a los conocimientos, procedimientos, destrezas y actitudes fundamentales en el ingreso a la universidad para el desarrollo de otros aprendizajes (competencia lectora, producción de textos, interpretación y resolución de problemas).
- Competencias transversales: Aluden a las capacidades para regular su propio aprendizaje, individual o en grupo y destrezas cognitivas generales.
- Competencias específicas: Remiten a un conjunto de capacidades relacionadas entre sí, que permiten desempeños satisfactorios en el estudio de las carreras de ingeniería [19].

Desde nuestra labor docente, además de impartir conocimientos, pretendemos una formación integral del alumno que incluya el desarrollo y evaluación de diferentes tipos de competencias que, sin lugar a dudas, pueden ser entrenadas durante los procesos de formación universitaria. Durante el primer año del estudiante universitario, el objetivo general de formación es desarrollar y consolidar las competencias de ingreso, y esto involucra un proceso no sólo derivado de políticas institucionales, nacionales o internacionales, sino en parte como una propuesta que coincide con las competencias. Supone la adquisición de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la capacidad de aplicar estos recursos a cada una de las situaciones que se presenten. El desarrollo de competencias implica la participación del estudiante aplicando y transfiriendo conocimientos.

3.3. Evaluación de aprendizajes competenciales

La evaluación es un término que en ambientes académicos suele utilizarse como sinónimo de comprobación de aprendizajes por parte de los alumnos, que tiene como finalidad la calificación y como resultado la acreditación.

La evaluación por competencias no es un proceso de determinar si alguien aprueba o no el curso, es más que pasar un examen. Durante el dictado de clases el estudiante puede ser requerido de tomar una serie de tareas tales como proyectos, evaluaciones escritas, laboratorios o investigaciones y la suma de todos estos elementos determinan si el estudiante es competente o no. Es decir que la evaluación pone de manifiesto el modelo docente y su concepción. En este sentido, los instrumentos de evaluación deben ser coherentes con las prácticas docentes y con la posición sobre la enseñanza de la matemática [20].

El proceso de evaluación entonces debe ser considerado como parte del proceso de aprendizaje, de manera que se puedan identificar los vacíos que hay entre lo que el estudiante actualmente sabe y lo que debería hacer. Estos vacíos se convierten entonces en oportunidades de aprendizaje para desarrollar esas habilidades y no son vistas como fallos del estudiante. La evaluación por competencias es un proceso colaborativo, negociado entre el profesor y el estudiante y no es un evento impuesto por el docente.

En la evaluación por competencias a los estudiantes se les debe dar todas las oportunidades necesarias para demostrar la habilidad y conocimiento en la competencia que se está evaluando. En este caso la palabra evaluar en español no siempre permite determinar claramente la naturaleza de este ejercicio en un modelo curricular por competencias. Quizá un término más apropiado podría ser el de "ajustar" las condiciones, el método de enseñanza e incluso la manera en que el estudiante ejecuta las acciones para obtener un entrenamiento de manera que se pueda llegar a la profesionalización de la competencia.

Extractado de John Biggs (1996) [21], los principios de la evaluación por competencias son: Inmediatez,

Validez, Confiabilidad, Flexibilidad, Justicia, Seguridad.

En un modelo curricular o de capacitación por competencias los indicadores de logro o estándares son las medidas contra las que se evalúa el trabajo del participante. Los indicadores de logro estándares usualmente están redactados de una manera amplia como procesos; estos mismos procesos luego deben ser desmenuzados en procedimientos y a su vez cada procedimiento evaluado a la luz de si el estudiante es o no es competente en ese particular aspecto. Para ello los expertos consideran útil el uso de listas de cotejo o rúbricas que certifiquen las capacidades en diferentes áreas de la tarea.

En la evaluación por competencias en Matemáticas, donde el resultado obligadamente es que el estudiante es o no es competente, aún hay espacio para alguna variedad; un cierto porcentaje hacia arriba o hacia abajo puede todavía considerarse como una respuesta aceptable o no aceptable en la mayoría de los casos; esto tomando en cuenta que en el mundo verdadero muy pocas cosas ocurren naturalmente al 100% de precisión.

Algo muy importante de tener en cuenta es que competente no significa experto. Competente significa que el candidato ha alcanzado suficiente habilidad y conocimiento para ejecutar la actividad hasta cierto grado de calidad que es aceptable para el estándar o indicador de logro contra el cual se está midiendo. Competencia significa alcanzar de la suficiente habilidad y conocimiento para desarrollar la actividad o servicio hasta el grado que es aceptable para la industria o el cliente.

3.4. Modelo de Aula Invertida

El término aula invertida fue originalmente acuñado en el año 2000 por Lage, Platt y Treglia como *inverted classroom*. En 2012, Bergmann y Sams (2014) lo popularizaron, denominándolo modelo invertido de aprendizaje *(flipped classroom model)* [22].

La metodología de aula invertida está destinada a crear, aplicar y potenciar conocimientos que empoderen a los estudiantes en sus recorridos, como punto de partida hacia una educación customizada -del inglés: *to customize*-, y que cuente con la necesaria flexibilidad de adaptarse a las distintas rutas de aprendizaje de los alumnos en entornos de un aprendizaje colaborativo.

El aprendizaje invertido puede ser entendido como procesos dinámicos interaccionales –no exclusivamente instruccionales- inclusivos, que buscan efectividad en los procesos de enseñanza aprendizaje, en los que interjuegan competencias de alumnos y docentes, motorizados por las tecnologías disponibles, que ayudan a aprender y donde los tiempos se adaptan, de modo de superar la estructura temporal del aula tradicional.

El uso de instrumentos multimedia permite al estudiante elegir el mejor método y espacio para adquirir el conocimiento declarativo a su propio ritmo, especialmente si el material se encuentra en la Web o es de fácil acceso, transfiriendo así al estudiante la responsabilidad de la aprehensión de contenidos, y al docente la organización de su práctica, a fin de guiar a ambos en las actividades hacia la meta trazada [23].

4 Estrategias

4.1. Metodología de experiencia previa

La primera evaluación parcial en la asignatura Análisis Matemático I de la carrera de Ingeniería en Sistemas Informáticos (AMI-ISI) incluyó los contenidos de la Unidad I: Funciones Reales de una Variable Real y de la Unidad II: Límite y Continuidad de Funciones Reales. Los alumnos de trece (13) comisiones recibieron clases teórico-prácticas y la realización del primer trabajo práctico con software Mathematica□. El trabajo práctico debió estar aprobado, como una instancia más de evaluación de la asignatura.

El bajo nivel de aprobación que arrojaron los datos del parcial nos llevó a plantearnos una reformulación de esta instancia evaluativa. En el contexto de una experiencia piloto, se propuso entonces a los estudiantes de tres de las trece comisiones (3/13) poder rendir el recuperatorio de dicho parcial en forma tradicional (por escrito), o bien desde la perspectiva del aula invertida. De este modo, estuvieron en condiciones de elegir exponer un tema, sabiendo de antemano que no los eximía de volver a estudiar los restantes temas incluidos en el parcial.

Cada uno de los alumnos que eligió la segunda opción elaboró una presentación audiovisual. Para ello, en las clases de consultas se los orientó sobre la exposición y se les informó sobre los aspectos a evaluar y el desarrollo de habilidades que se considerarían (controlar, identificar y comparar), poniendo énfasis en un diseño que favorezca el desarrollo de habilidades matemáticas; se indicó también que se valoraría el uso de recursos tecnológicos que faciliten los aprendizajes.

Considerando el aprendizaje competencial y el abordaje desde la complejidad, incluimos las tres competencias de acceso propuestas por el CONFEDI y medibles a través de las respectivas dimensiones e indicadores. Se admite que los indicadores elegidos fueron y son, en todas las construcciones, opinables y plausibles de cuantificar; en esta experiencia consideramos evaluar cada indicador como insatisfactorio, poco satisfactorio, satisfactorio y muy satisfactorio (Fig. 1).

La comparación de los resultados con las dos modalidades se presenta la Tabla 2. El primer parcial solamente lo aprobó 28/109 (25.7%) que se presentaron al examen. A la instancia recuperatoria se presentaron 66/81 (81.5%) alumnos habilitados para hacerlo, quienes eligieron la modalidad tradicional (n=32) o expositiva (n=34), respectivamente.

<table>
<tr><td>VARIABLES ➡</td><td colspan="8">Competencias Básicas</td><td colspan="2">Competencias Transversales</td><td colspan="7">Competencias Específicas</td></tr>
<tr><td>DIMENSIONES ➡</td><td colspan="5">Representación conceptual</td><td colspan="3">Desarrollo procedimental</td><td colspan="2">Aproximaciones multidisciplinares del tema</td><td colspan="7">Pensamiento matemático avanzado</td></tr>
<tr><td>INDICADORES ➡</td><td>Utilizar el registro gráfico</td><td>Utilizar el registro simbólico formal</td><td>Utilizar el registro lingüístico natural</td><td>Articular entre los distintos registros de representación</td><td>Aplicar técnicas en el uso de expresiones algebraicas</td><td>Explicar de la situación problemática planteada</td><td>Traducir la situación problemática al lenguaje algebraico</td><td>Comunicar los resultados con lenguaje claro</td><td>Relacionar nuevas situaciones de aprendizaje con experiencias anteriores y saberes previos</td><td>Demostrar capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos (abstracción lógica deductiva)</td><td>Usar adecuadamente el tiempo asignado</td><td>Presentar y discutir en forma oral</td><td>Empatizar con el alumnado</td><td>Utilizar software de aplicación en ingeniería</td><td>Incluir instrumentos didácticos (P.Point. Prezi)</td><td>Incluir diferentes fuentes de información (libros, google, youtube, etc) (investigativa)</td><td>Expresar de manera coherente semántica, sintaxis y ortografía</td></tr>
</table>

Fig. 1. Criterios de evaluación basado en competencias, aplicado en el primer parcial de AMI-ISI

Con la modalidad clásica, la mitad de los alumnos que eligieron el examen escrito convencional aprobó el recuperatorio, y con la modalidad de clase invertida el nivel de aprobación fue el 85.3%; estas diferencias fueron estadísticamente significativas (P=0.005 de la prueba chi-cuadrado con corrección de Yates). De esta forma, casi el 70% de los alumnos aprobó el primer parcial (28/109+45/66= 68.2%).

Tabla 2. Resumen de resultados cuantitativos correspondientes a la implementación de la estrategia

Número Inicial de Alumnos: **158**			
Primer parcial. Evaluación clásica (examen escrito)	No se presentaron a rendir: **49**	Se presentaron a rendir: **109**	
		Aprobaron	No aprobaron
		28 (25,7%)	**81 (74,3%)**
Examen recuperatorio	No se presentaron a rendir: **15**	Se presentaron a rendir: **66**	
		Examen Tradicional (escrito): **32**	Modelo invertido de aprendizaje: **34**
		Aprobaron	Aprobaron
		16 (50%)	**29 (85,3%)**

Considerando los criterios de evaluación basados en aprendizaje de competencias básicas, al evaluar en los estudiantes la representación conceptual con la modalidad de aprendizaje invertido se observó una marcada superioridad en el manejo del registro gráfico, en contraposición con las habilidades de manipulación simbólico-formal. Por su parte, el desarrollo procedimental, en general, fue satisfactorio.

En las competencias transversales, se detectaron elementos de innovación y reflexión al vincular nuevas situaciones de aprendizaje con experiencias anteriores y saberes previos como en la abstracción lógica-deductiva, en los estudiantes de la modalidad de aprendizaje invertido; fueron interesantes las soluciones alternativas presentadas por ellos. Sin embargo, se advirtió la necesidad de una aproximación multidisciplinar, un juego de disciplinas distintas. Las falencias de los alumnos deberían ser pensadas como faltas del docente. Y los docentes debemos considerar estos resultados como una advertencia: Debemos avanzar en ese sentido, profundizando en el alumno la relación entre el aprendizaje formal de los temas con saberes previos y las experiencias anteriores, sin perder la capacidad de abstracción.

En las competencias específicas (pensamiento matemático avanzado), un grupo de estudiantes menor al 20% (17%) mostró dificultades para expresarse semánticamente, en sintaxis y en ortografía de forma coherente. Corresponde decir que a los estudiantes les son exigidas competencias pero, ¿hubo entrenamiento para tales competencias?, ¿hay correspondencia entre el entrenamiento y la exigencia?, ¿les damos oportunidades de expresar (oralmente y por escrito) sus propios pensamientos e ideas?, ¿les enseñamos a elaborar un documento escrito?

Con esta modalidad evaluativa, fue interesante advertir que, a medida que se realizaban las respectivas exposiciones, los estudiantes del auditorio participaban oralmente, coevaluando y haciendo sus aportes personales. El *feedback* propio de estos procesos, la posibilidad de mejora, la autoevaluación y la coevaluación con los compañeros y docentes, así como la reflexión, son elementos que promueven en el alumno el desarrollo de competencias.

Los alumnos incrementaron significativamente la concurrencia a las horas de consulta. Se hizo una breve sesión explicativa sobre como buscar e identificar fuentes bibliográficas válidas para construir su trabajo en base a ellas. Dado que se trató de la primera experiencia, se percibió en ellos ciertas dificultades para la auto-organización (la mayoría de consultas se acumularon en los días previos al día de su exposición). Se advirtió además que los alumnos que concurrieron a las clases de consulta mostraron durante su exposición mayor dominio, confianza y autonomía que aquéllos que no consultaron.

En los docentes de la cátedra se percibió una notoria mejora en el rol de gestor del conocimiento matemático, evidenciado en la supervisión de la resolución de las actividades de los alumnos.

Deserción: Antes de rendir el primer parcial desertaron el 49 alumnos (31%) de los inscriptos al inicio del cursado, y antes de rendir el recuperatorio desertaron otros 15 (9.5%); es decir que antes de comenzar el segundo período del cursado la deserción trepó al 40%.

Al finalizar el examen recuperatorio con las dos modalidades, los alumnos completaron una encuesta donde expresaron sus representaciones sobre la modalidad elegida de recuperatorio.

5 Resultados

5.1. Resultados subjetivos

Por resultados subjetivos se entienden las diferentes representaciones/percepciones de los estudiantes. En todo caso, se habla de percepciones que, aunque no tengan una base numérica ni hayan sido obtenidas con un procedimiento sistemático y una metodología formal, están basados en evidencias sustentables en la mayoría de los casos [12]. Ante la consulta sobre los pros y contras de rendir el examen recuperatorio con la modalidad de aprendizaje invertido, se exponen las ventajas y desventajas (Tabla 3) expresadas por los estudiantes.

Tabla 3. Ventajas y desventajas del método de aprendizaje invertido señalado por los alumnos

Ventajas
Mayor entendimiento del tema. Aprobar fácil.
El método estuvo bien. (Permite) consultar distintas fuentes de información y poder expresarse mediante los demás.
Personalmente me gusta el método, ya que mediante exposiciones me defiendo mejor.
Ayuda a progresar si no se entiende. Difícil quedarse atrás ya que todo abarca todo.
Pienso que fue bueno para poder entender mejor aquellos conceptos estudiados de forma mecánica, ya sea por el estudio del tema elegido o por la explicación / exposición hecha por los demás. Tener otra oportunidad, comprender para poder explicar, bueno para las personas extrovertidas.
Es un buen método para poner a prueba al alumno, pero por problemas personales Yo suelo estar en pánico cuando tengo que exponer. Una chance más para recuperar nota.
El método me parece genial, se puede tener algún error por estar nervioso en el parcial y este método garantiza que si estuviste estudiando para el parcial lo demuestras en una exposición sin tanta presión y sin tanto margen de error.
Trabajo en equipo y escuchar a nuestros compañeros. Me parece un muy buen método, que además de ayudarnos a entender sobre el tema, nos ayuda en la oratoria.
Es un método que me favoreció el aprendizaje de los temas. Una desventaja sería el nerviosismo que genera dar la clase
Me parece buen un buen método el aula invertida, y me pareció una gran ventaja hablar delante de varios compañeros y de mi profesora ya que es muy importante poder hablar y ser explícito en público.
El método me parece muy bueno , ya que a un alumno hay que evaluarlo en como se desempeña tanto en parciales, como en orales, ya que a mucha gente le resulta mejor este método (oral) y también el día de mañana vamos a tener que exponer la tesis y dar charlas, etc. Por eso esta bueno que empiecen desde antes a mejorar la habilidad de los orales. Desventaja: al ser muchos alumnos se torna muy agotador para la profesora y demanda mucho tiempo.
Es un excelente método, ya que da la ventaja de recuperar. Además me permite tener un conocimiento global sobre lo que hablo y saber sobre que me va a ayudar más adelante dicho tema
Al tener que investigar sobre el tema para poder explicarlo, me quedó más. Además lo escuché a mis compañeros
Ese método me concedió mucha mas libertad para desenvolverme de manera que quise con determinado tema
Es un buen método no solo porque aprendemos más en profundidad los temas, sino porque te prepara para la hora de realizar la defensa de algún trabajo en el futuro
Está bueno, considero que ayuda al alumno a entender sin tener la presión de un recuperatorio escrito.
Es un método bastante intuitivo, me ayuda a expresarme un poco mejora la hora de hablar ante otras personas.
Me parece un buen método porque sirve para dárselos a alumnos a los cuales les falta nota para regularizar o promover.
Es bastante didáctico, ya que permite armar la exposición como lo desee y de esta manera permite expresar su creatividad.
Pienso que es una buena alternativa para alumnos que tienen los conocimientos pero el método de evaluación escrita nos afecta negativamente (estrés, ansiedad, etc.)
El método de clase invertida me parece una buena opción para aquellos alumnos que no les presenta mucha dificultad dar una clase en frente de otros estudiantes y profesores y se sientan mas cómodos que rendir examen escrito
Me parece que el método esta bueno, ya que no solo te hace reforzar los temas dados en clase, sino que también ayuda a formar carácter por el hecho de exponer frente a los compañeros de uno. La única desventaja que le

veo es el tiempo que se tarda los días que se expone, pero esto es relativo a la cantidad de estudiantes que exponen.

El método esta muy bueno, fue que pude expresarme ante docentes y alumnos, y además profundice sobre el tema.

Perfecto para el primer parcial. Tener la posibilidad de elegir entre Exposición y tradicional.

Desventajas
En chicos introvertidos y/o con pánico, juega en contra.
Conozco chicos que hicieron el método y hoy día no recuerdan nada del tema, no me parece eficaz.
No encontré.-
Se necesita mucho mas tiempo que la preparación para examen tradicional.
Si no se entiende un tema, es difícil seguir avanzando.
Si la persona es introvertida es posible que no realice correctamente la explicación, es posible que el alumno vuelva a estudiar de memoria sin entender los conceptos.
Alumnos muy nerviosos pueden llegar a tener problemas pero por un problema mínimo.
El método de corrección me parece que necesita ajustarse y ser mas critica.
No estás del todo seguro de que lo que se investiga es correcto.

5.2. Propuesta docente

Enfrentarnos a esta modalidad de aprendizaje nos ha llevado a los docentes a reflexionar sobre las interrelaciones epistémicas que tenemos con los estudiantes, lo que revela la urgencia de prepararnos como estamento docente frente a estos cambios paradigmáticos.

Competencias Básicas					Competencias Transversales								
Comprensión lectora			Producción de textos		Autonomía		Destrezas cognitivas				Relaciones interpersonales		
Lectura exploratoria	Lectura analítica	Lectura analítica critica	Planificación de texto a producir	Escritura de texto	Implementación de estrategias de aprendizaje	Evaluación de las estrategias de aprendizaje	Capacidad para comprender y efectuar relaciones lógicas entre conceptos	Capacidad para pensar de manera hipotético deductiva	Capacidad para realizar comparaciones y analogías	Capacidad para percibir las relaciones entre las tecnologías y los recursos existentes	Identificar metas individuales y colectivas	Asumir diversos roles dentro del equipo de trabajo	Trabajar para el logro de acuerdos
Identificar correctamente las fuentes de consulta Relacionar nuevas situaciones con experiencias anteriores y saberes previos	Distinguir hechos de opiniones Reconocer argumentaciones y falacias	Analizar y extraer conclusiones considerando el contexto	Trazar un plan de escritura	Expresar de manera correcta, semántica, sintáctica y ortográfica, los temas a comunicar Preparar material de apoyo para su presentación oral	Cumplir las formalidades (horarios y asistencia) Apropiar significativa de conocimientos nuevos	Reconocer cómo aprendió lo aprendido	Demostrar las interacciones interdisciplinares del tema	Elaborar conclusiones a partir de las premisas Elabora argumentaciones que permiten sostener las hipótesis	Corroborar la situación matemática buscando analogías o extrapolaciones a otros problemas	Identificar tecnologías, componentes y recursos para la solución planteada	Respetar, escuchar, argumentar y aceptar las decisiones colectivas	Asumir el rol asignado	Consensuar y empatizar con los compañeros

Fig. 2a. Propuesta de criterios de evaluación en competencias básicas y transversales a aplicar en el segundo parcial.

Desde finales del año lectivo 2019, en horario extraclases, los autores de este trabajo estamos llevando a cabo un Taller para los docentes de todas las cátedras de AMI de todas las ingenierías que se dictan en la UTN-FRRo, para replantear las actividades a desarrollar a futuro, desde una perspectiva interaccional, ligada al enfoque por competencias y superadora del actual modelo instruccional.

Nuestro desafío como docentes es: ¿desde qué lógica mirar el cambio? Desde la lógica del modelo curricular, en el ciclo superior de la carrera considerar Ingeniería como Ciencia Aplicada. Por lo tanto, debemos considerar que el alumno debe saber matemáticas para hacer ingeniería y no hacer ingeniería para saber matemáticas.

Desde la lógica de los docentes, que instruye brindando contenidos a ser aplicados, la ceguera interdisciplinaria más la del propio campo disciplinario se convierten en cegueras transdisciplinarias (lógica del confort). Por lo tanto, ¿sabemos los docentes de qué modos son 'aplicados' los conocimientos?

Desde la lógica del contexto, las problemáticas socioambientales complejas reclaman nuevas competencias profesionales para el ingeniero. Por lo tanto, debemos pensar en nuevos modelos educativos para las disciplinas ingenieriles, nuevos roles para los actores institucionales vinculados a los procesos del enseñar aprender.

Competencias Específicas													
Pensamiento matemático básico							Pensamiento matemático avanzado						
Analizar una función o un fenómeno físico y/o químico sencillo a partir de su representación gráfica y/o a partir de sus ecuaciones matemáticas		Resolver problemas sencillos en Matemática, Física o Química aplicando modelos matemáticos			Utilizar la computadora, aplicando lógica procedimental en la utilización de Sistema Operativo y diversas aplicaciones como: Procesador de textos, Internet y Correo Electrónico		Reconocer y analizar propiedades físicas y/o químicas de la materia en ejemplos cotidianos		Transferir el conocimiento científico de física, química y matemática a situaciones problemáticas variadas			Capacidad de reconocer la importancia de un comportamiento ético social	Asumir una visión conservacionista de los recursos naturales y del medioambiente
Reconocer distintos tipos de funciones	Interpretar y usar registro gráfico	Utilizar escalas adecuadas con sus magnitudes y unidades correspondientes	Consolidar y validar las relaciones de variables	Explicar la situación problemática planteada y traducirla a lenguaje algebraico	Incluir fuentes de información variadas y ponderadas	Presentar la información digital organizada	Usa registro simbólico formal	Aplicar las técnicas en el uso de instrucciones algebraicas	Vincular la modelización con el uso de representaciones en el concepto	Manipular el rango y límite de los conceptos matemáticos	Variar los parámetros como actividad experimental	Valorar éticamente las decisiones	Contextualizar socioculturalmente

Fig. 2b. Propuesta de criterios de evaluación basados en competencias específicas a aplicar en el segundo parcial

Desde la lógica de las tendencias, como los escenarios de convergencia tecnológica Nano/Bio/Info/Cognitivas (NBIC) en EEUU, o el de Convergence of Technology Science and Society (CONTECS) en Europa. Por lo tanto, como docentes debemos conferir nuevos sentidos al rol de la ingeniería, desde una perspectiva del interjuego glocal (tanto global como local) en escenarios de convergencia tecnológica.

¿Cómo enfrentamos nuestros desafíos como docente frente a los cambios por venir? Debemos cuestionarnos ¿qué puede ocurrir?, ¿qué puedo/podemos hacer?, ¿cómo lo voy/vamos a hacer?, ¿Seremos pasivos, reactivos, preactivos o proactivos? Debemos adaptarnos para actuar de inmediato. Debemos prepararnos para actuar y provocar los cambios deseados.

Frente a los cambios por venir, es apropiado pensar en una trilogía retroalimentada por la anticipación (reflexión prospectiva), la apropiación (motivación y movilización) y la acción (voluntad estratégica). ¿Contamos con recursos políticos educacionales (tendencias), institucionales (contexto), humanos (expertos/docentes) y de infraestructura? (¿modelo de aula clásica o nuevos entornos interaccionales?).

Al final de la primera parte del Taller, los docentes acordamos buscar otras metodologías de aprendizaje; también los invitamos a aplicar el modelo de aula invertida en sus respectivas cátedras. Asumimos que debemos dar las clases para que los alumnos se formen en competencias; pero para ello, previamente los docentes debemos formarnos para ser buenos entrenadores de competencias y finalmente evaluar en competencia.

Siguiendo con la modalidad de aprendizaje invertido de la experiencia piloto antes descripta, replicaremos la forma de evaluar en el recuperatorio del segundo parcial -que incluye los temas de Cálculo diferencial-. La Fig. 2 a y b, expone los indicadores a considerar en esta instancia; los criterios de evaluación serán similares a los aplicados en el recuperatorio del primer parcial.

6 Conclusiones y trabajos futuros

Con la metodología de Aula Invertida los estudiantes construyeron conocimientos integrados y lograron generar habilidades para su autonomía al hacerse responsables de su aprendizaje. Aprendieron a trabajar colaborativamente en equipos, confiriendo sentido a los conocimientos co-construidos y los comunicaron.

Esta experiencia llevó a cabo la propuesta de un Taller al interior de la cátedra AMI para discutir en profundidad y poner en acción estrategias para generar entornos interaccionales de aprendizaje adaptables a las necesidades de los estudiantes de ingeniería. El objetivo de la actividad fue tomar conciencia de que urge indagar en nuevas políticas de innovación educativa que contemplen nuevos enfoques para "conferir sentido al mundo de la ingeniería", metáfora que alude a explorar, resolver, integrar, representar e interpretar -entre muchas otras cosas- los contenidos del análisis matemático, más que explicar la ingeniería a través del análisis; es decir, un aprendizaje significativo que tenga, por un lado, a los estudiantes que sean consumidores/productores de conocimientos, y por otro, a los docentes tradicionales como gestores de estos procesos.

La modalidad aula invertida, como experiencia, muestra la posibilidad de la coexistencia de órdenes relacionales diferentes al interior de la estructura rígida de la cátedra, que se autoconforman a través de flujos de actividades y participación.

Los aprendizajes deben salir de las lógicas de cómo enseña el que enseña y de cómo aprende el que aprende, para preguntarnos cómo aprende el que enseña y cómo enseña el que aprende.

Referencias

1. Abeysekera L, Dawson P. Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rationale and a call for research. *Higher Educ Res Dev*. 2014;Vol. 34, No.1, pp.1–14 (2014).
2. Bergmann, J.; Sams, A.: *Flip your classroom: reach every student in every class every day*. Eugene (Oregon): ISTE; Alexandria (Virginia):ASCD (2012).
3. Bishop, J.L.: *A Controlled Study of the Flipped Classroom With Numerical Methods for Engineers*. (2013).
4. O'Flaherty J, Phillips C. The use of flipped classrooms in higher education: a scoping review. *Internet High Educ*. Vol. 25, pp. 85–95 (2015).
5. Villardón Gallego, L. Evaluación del aprendizaje para promover el desarrollo de competencias. *Educatio siglo XXI,* Vol. 24, pp. 57-76 (2006).
6. UNESCO. *Education and skills for inclusive and sustainable development beyond 2015. Thematic think piece. UN System Task on the post-2015 UN Development Agenda*. París: UNESCO (2012).
7. Provincia de Santa Fe. Ministerio de Educación. Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada (2014).
8. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Tucumán. *Intro. a la vida universitaria* (2018).
9. Espinoza, A.M., Torelli, A.C., Pagano, R., Muzzanti, S. Repensar la evaluación, transformar la enseñanza: diálogos posibles. *Libro de Actas EMCI* p.216 (2017).
10. Bertoni, A; Poggi, M; Teobaldo, M. *Los significados de la evaluación educativa: alternativas teóricas. Evaluación: Nuevos significados para una práctica compleja*. Buenos Aires: Kapelusz p.6 (1996).
11. Aguerrondo, I. Conocimiento complejo y competencias educativas. *IIPE/UNESCO Working Papers on Curriculum* Issue #8 (2009).
12. Morin, E. *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. París: ONU (1999).
13. Maldonado, C.E.. Marco teórico del trabajo en ciencias de la complejidad y siete tesis sobre la complejidad. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia Universidad del Bosque, Bogotá (Colombia)* Vol. 4, No.8-9 (2003).
14. Verdejo, P., Freixas, R. Educación para el pensamiento complejo y competencias: Diseño de tareas y experiencias de aprendizaje. En: *Estrategias para el desarrollo del pensamiento complejo y competencias en el aula*. Mendoza (Argentina): Primera reunión de INNOVA-CESAL (2009).
15. Verdejo, P. Modelo para la Educación y Evaluación por Competencias (MECO). En: *Propuestas y acciones universitarias para la transformación de la educación superior en América Latina. Informe final del proyecto 6x4 UEALC.* Bogotá (Colombia): Asociación Colombiana de Universidades (2008).
16. Perrenoud, P. *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona (España): Biblioteca del aula. p.82 (2004).
17. Martínez Sánchez, A. Análisis de las competencias en las prácticas escolares de Grado. *Inclusive Education Journal* Vol. 6, No. 2, pp. 21-39 (2013).

18. Cabero, J. Formación del profesorado universitario en estrategias metodológicas pra la incorporación del aprendizaje en red en el espacio de educación superior (EEES). *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación,* No. 27, pp. 11-29 (2006).
19. CONFEDI. *Competencias en Ingeniería.* (2014). Disponible en: https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf (Consultado el 02/10/2019).
20. Santos Guerra, M.A. Veinte paradojas de la evaluación del alumnado en la Universidad Española. *Revista electrónica Interuniversitaria de Formación del profesorado* Vol. 2, No. 1 (1999).
21. Instituto Superior de Educación Abierta. Blog del diseño de la instrucción. *La evaluación por competencias* (2014). Disponible en: https://2-learn.net/director/la-evaluacion-por-competencias/ (Consultado el 04/02/2020).
22. Bergmann, J., Sams, A. Flipped learning: Maximizing face time. *Train Dev (T+ D)* Vol. 68, No. 2, pp. 28-31. (2014).
23. Bristol, T. Flipping the Classroom. *Teaching and Learning in Nursing* Vol. 9, No. 1, pp. 43-46 (2014).

Materiales Didácticos con Soporte Virtual. Hacia la Virtualización de Contenidos

Patricia Có[1], Mónica del Sastre, Viviana D'Agostini, Florencia Rodil

Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Santa Fe, Argentina
co@fceia.unr.edu.ar, delsas@fceia.unr.edu.ar, dago@fceia.unr.edu.ar, florencia.rodil@gmail.com

Resumen. Un grupo de docentes de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, de la Universidad Nacional de Rosario hemos coincidido en la idea de conformar un proyecto de investigación adoptando el modelo teórico Technological Pedagogical Content Knowledge**.** El objetivo principal de este proyecto es elaborar, implementar, evaluar y ajustar actividades y experiencias de aprendizaje con soporte virtual. Pretendemos que la puesta en práctica de nuevos materiales didácticos sirva como una estrategia para generar los procesos necesarios que posibiliten renovar los métodos de enseñanza y aprendizaje tradicionales, y a su vez crear espacios de análisis y reflexión acerca de posibles innovaciones curriculares, a partir de los resultados obtenidos. En este trabajo presentamos un material didáctico con soporte virtual referido al tema "Secciones Cónicas".

Palabras Clave: Educación Matemática. Materiales didácticos. TIC.

1 Introducción

Un grupo de docentes de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA), de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) hemos coincidido en la idea de conformar un proyecto de investigación denominado: Integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en las asignaturas del Área Matemática del Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería. Hacia la virtualización de materiales didácticos.

El objetivo principal de este proyecto es elaborar, implementar, evaluar y ajustar actividades y experiencias de aprendizaje con soporte virtual. Pretendemos que la puesta en práctica de nuevos materiales didácticos sirva como una estrategia para generar los procesos necesarios que posibiliten renovar los métodos de enseñanza y aprendizaje tradicionales, y a su vez crear espacios de análisis y reflexión acerca de posibles innovaciones curriculares, a partir de los resultados obtenidos.

Nuestra actividad se desarrolla mayoritariamente en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica (AyG). Esta Cátedra depende del Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica de la FCEIA, se cursa en el primer cuatrimestre del primer año del Ciclo Básico y posibilita un recursado en el segundo. En el cursado hay 12 comisiones con tres docentes en cada una de ellas y en el recursado se ofrecen 6 comisiones con igual número de docentes. En cada comisión se inscriben aproximadamente 100 alumnos. El programa de la asignatura está constituido por las siguientes unidades: Geometría Lineal del plano y del espacio, Secciones Cónicas y Ecuación General de segundo grado, Números Complejos y Polinomios.

En AyG se utilizan apuntes elaborados por sus propios docentes para casi todos los temas a desarrollar, excepto los correspondientes a la unidad Secciones Cónicas y Ecuación General de segundo grado, para los que se dispone de un libro de texto. Después de mucho tiempo de uso, se impone la

necesidad de reemplazar tales apuntes por otros que, sin perder exactitud en su contenido, resulten más atractivos al estudiante, incluyan propuestas dinámicas y permitan llevar la tecnología al aula.
Conforme con esto decidimos comenzar con el diseño de nuevos materiales didácticos más ajustados a nuestro contexto actual.

2 Marco Referencial

El presente trabajo sigue los lineamientos teóricos planteados en el proyecto de investigación anteriormente mencionado, siendo el TPACK el marco teórico que lo sustenta.
Entre los años 2006 a 2008, Mishra y Koehler [1] plantean la necesidad de desarrollar un corpus de conocimientos que constituya una extensión del PCK (*Pedagogical Content Knowledge*) de Shulman [2] dentro del dominio de la enseñanza con tecnología. Surge así el modelo TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*). Para este modelo, una efectiva integración de la tecnología presupone una conceptualización que debe ser necesariamente formulada a través de la interacción entre el Conocimiento de la Tecnología (*TK: Tecnological Knowledge*), Conocimiento de Contenido Curricular (*CK: Content Knowledge*) y Conocimiento de la Pedagogía (*PK: Pedagogical Content Knowledge*).
El conocimiento del contenido curricular (*CK*) es el conocimiento sobre la disciplina que se enseña y aprende, el conocimiento de la pedagogía (*PK*) es el conocimiento de los procesos y métodos de enseñanza y aprendizaje, y el conocimiento de la tecnología (*KT*) es un tipo de conocimiento que está en un estado de cambio permanente y trasciende de la tradicional noción de alfabetización informática, porque requiere que las personas comprendan cómo y para qué utiliza la tecnología [3].
De la integración de todos los conocimientos surge el TPACK, que Koehler y Mishra consideran como una forma emergente del conocimiento que va más allá de los tres conocimientos básicos. El modelo exige una compresión de la representación de conceptos cuando usamos determinadas tecnologías, de las técnicas pedagógicas puestas en juego a la hora de enseñar un contenido curricular, de las teorías epistemológicas subyacentes y del manejo y administración de los recursos tecnológicos a utilizar.
Los autores del TPACK pretenden que este marco teórico conceptual contribuya no sólo a unificar las propuestas de integración de tecnologías en la educación, sino también a transformar la formación docente y su práctica profesional. Por ello, la capacitación permanente de los docentes en el uso educativo de la tecnología es un componente clave para lograr una resignificación exitosa de propuestas tradicionales, pensando en la creación de materiales que puedan ser actualizados continuamente, ya que como dicen Berrocoso, J., Garrido, M [3], en contraste con las tecnologías tradicionales, las tecnologías digitales son *versátiles* (utilizables en diferentes formas) *inestables* (cambian rápidamente) y opacas (su funcionamiento interno está oculto al usuario).
La enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería, con alumnos que necesitan ser formados en ella para hacer uso de la misma como instrumento de modelización, es uno de los desafíos más importantes que debemos encarar los docentes de esa disciplina. Es nuestra tarea atender al desarrollo de la creatividad, la destreza para proponer y resolver problemas y la capacidad para trabajar en equipo, tal como se explicita en los planes de estudios vigentes.

Por otro lado, en diversos estudios realizados, en el contexto de la educación mexicana e iberoamericana [4], los investigadores concluyen que los usos más frecuentes de las TIC en las aulas, tanto por profesores como por alumnos, tienen que ver más con la búsqueda y procesamiento de la información que con la construcción del conocimiento o la colaboración. En particular, en la FCEIA, resultados de experiencias propias a través de varios años de investigación sobre temas relacionados con las TIC y con el uso de software matemáticos, corroboran que el docente utiliza estos recursos en su trabajo personal, menos frecuentemente en el apoyo a la labor docente en el aula, y rara vez en la comunicación y el trabajo colaborativo entre los alumnos [5], [6], [7], [8], [9].

Cabe destacar, que desde el año 2019 la Facultad utiliza la plataforma educativa Moodle como soporte de su campus virtual, brindando a los docentes y alumnos una vía de comunicación que permite extender el espacio de aprendizaje a través del entorno virtual. En particular, AyG ha promovido el uso de la plataforma educativa creando un espacio exclusivo donde se publican noticias generales de la asignatura, material de estudio correspondiente a cada unidad, videos, guías de estudio, etc. A su vez, cada una de las comisiones cuenta con un espacio propio donde los tres docentes pueden interactuar con los estudiantes.

Es de nuestro interés aprovechar la potencialidad de los recursos que ofrece la plataforma en la implementación de secuencias didácticas que renueven los procesos de enseñanza y aprendizaje tradicionales, evitando que el campus sea sólo un repositorio virtual.

En este sentido, planteamos nuestra tarea en dos etapas. La primera comprende el diseño y la puesta en práctica del material didáctico que presentamos aquí. La segunda etapa implica la elaboración e implementación de instrumentos pertinentes para la evaluación de los materiales didácticos confeccionados.

Así, en una primera instancia, se ha diseñado el material sobre Secciones Cónicas que se describe a continuación.

3 La elaboración del material

La revisión, el análisis y la selección de distintos materiales bibliográficos a la luz de los objetivos propios de las carreras de Ingeniería fueron el punto de partida para la confección del material que comenzó con la redacción de las definiciones, propiedades y restantes enunciados que dan forma al contenido.

El apunte así obtenido se fue complementando con gran variedad de ejemplos, ejercicios y problemas resueltos, como también el planteo al lector de distintas actividades a realizarse con el uso de TIC, como las que se muestran a continuación:

- Reproducción en clase del video https://www.youtube.com/watch?v=d0ZCyOFW3YE, que es una realización visual publicada por el Dpto. de Matemática Educativa del CINVESTAV [10], México. El mismo permite complementar la visualización de las diferentes secciones cónicas que previamente fueron presentadas con el siguiente gráfico:

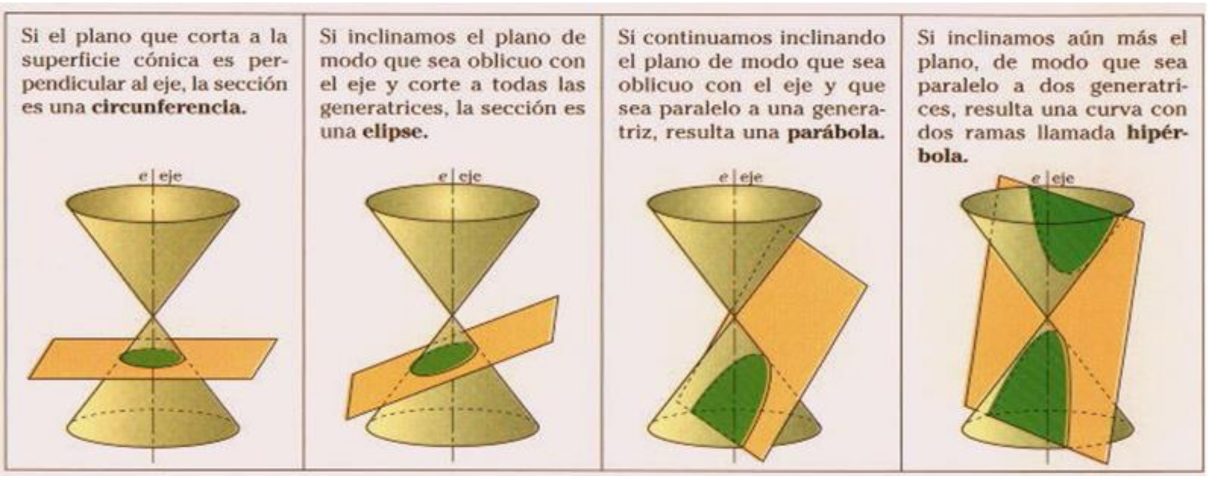


Fig. 1. Distintas secciones cónicas.

- Tarea adicional que propicia el encuadre epistemológico del tema a través de búsqueda bibliográfica y visualización de una película.

Actividad 1

1. Investiga cuál es la posición relativa del plano respecto del cono para obtener un punto, una recta o dos rectas. Realiza una gráfica de cada situación.
2. Indaga brevemente la bibliografía de Menecmo, Apolonio de Persa y Kepler utilizando los hipervínculos señalados en cada caso.
3. El siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=XVl_9pbXkBs es una parte de la película Agora que refiere históricamente al contenido tratado.

Fig. 2. Actividad que propone un acercamiento histórico a las secciones cónicas.

- Actividad que busca establecer la conexión entre dos representaciones del mismo objeto matemático (la algebraica y la gráfica) apuntando al esbozo de una primera clasificación de los distintos lugares geométricos para su posterior estudio. Cabe aclarar que si bien se puede utilizar cualquier graficador, en particular la Cátedra incentiva el uso de GeoGebra con la intención explícita que el estudiante lo utilice como una herramienta de trabajo en sí misma que exceda al trabajo propio de la asignatura.

Actividad Opcional: **Explorando formas con software**

a) Utiliza alguno de los recursos antes mencionados para realizar las gráficas de las siguientes ecuaciones

$1)\, x^2+4y^2+4xy+12=0$	$2)\, 16y^2-9x^2+36x-180=0$
$3)\, 9x^2+16y^2+24xy+80x-60y=0$	$4)\, x^2+4x+4y^2+32y+67=0$
$5)\, xy+x-2y=-3$	$6)\, -2x^2+2y^2+3xy-x-3y+1=0$
$7)\, x^2+6x+2y+5=0$	$8)\, 9x^2+4y^2-36x+8y+31=0$
$9)\, 2x^2+2y^2+4xy-8x-8y+8=0$	$10)\, x^2-9y^2+2x-2y-35=0$
$11)\, x^2+y^2-2x+6y+10=0$	$12)\, 4x^2-16x-y^2+16=0$
$13)\, 2x^2-2xy+18y^2+x-3y-6=0$	$14)\, xy=1$

b) Agrupa las ecuaciones que tienen "formas parecidas".

c) Investiga si es posible establecer una relación entre las gráficas pertenecientes a un mismo grupo con los coeficientes de sus respectivas ecuaciones. Explica brevemente el criterio utilizado.

Fig. 3. Actividad de exploración.

- Ejemplos que describen las instrucciones necesarias de GeoGebra para resolver ejercicios tradicionales apuntando a propiciar en el estudiante el uso autónomo de la herramienta.

Ejemplo 4:

Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia con centro en el punto C (-1,-2) y de radio 5, en el punto Q (2,2). Obtiene la representación gráfica de la circunferencia y la recta en un mismo sistema de referencia cartesiano ortogonal, utilizando primero lápiz y papel y luego un software matemático.

Veamos cómo resolver el ejemplo anterior con el software ***GeoGebra*** siguiendo las siguientes instrucciones:

* escribe en el campo de entradas las coordenadas del centro (-1,-2) y luego pulsa *Enter*. Repite ingresando las coordenadas del punto de tangencia (2,2).

* obtiene la grafica la circunferencia que pasa por estos dos puntos. Para ello utiliza el botón de la barra de comandos y elige la opción **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos** Centro y un Punto de la Circunferencia, cliquea con el mouse sobre los dos puntos recién ingresados y aparecerá en la pantalla la circunferencia buscada.

* ingresa el vector (3,4) determinado por los dos puntos y luego mantén accionado el botón desplazándolo de manera que su origen coincida con el centro de la circunferencia.

* por último grafica la recta tangente por el punto (2,2) utilizando la opción recta perpendicular, que se encuentra disponible cuando despliegas el cuarto botón de la barra de comandos. Una vez accionado este botón selecciona con el mouse el vector y el punto de tangencia, y en la pantalla visualizarás la recta tangente buscada.

Observa que en la ventana algebraica, ubicada a la izquierda de la pantalla, aparece la ecuación de la recta, tal como se ve en la siguiente figura.

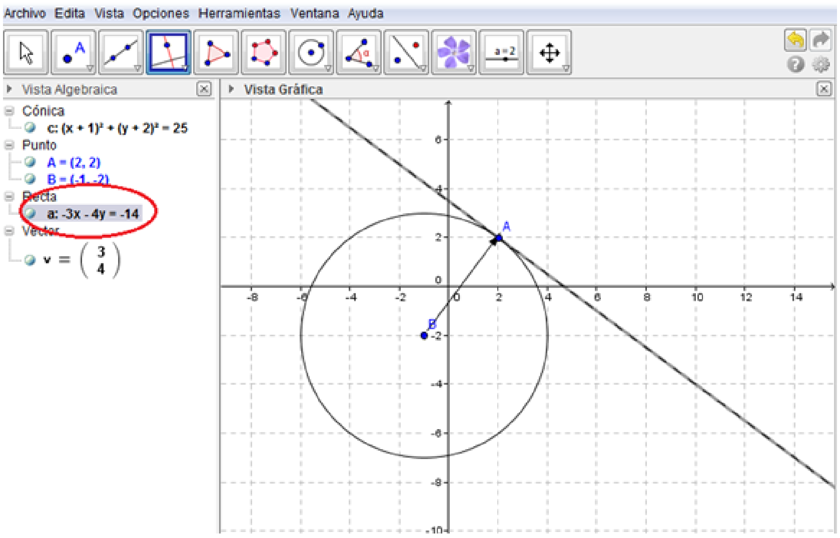


Fig. 4. Uso de GeoGebra en la resolución de un ejercicio.

- Actividad que promueve la vinculación entre las representaciones algebraica y gráfica de objetos matemáticos.

***Actividad 5*: Resuelve con lápiz y papel y luego verifica el resultado utilizando un software matemático.**

1) La ecuación de una circunferencia es $x^2+y^2+4x-8y=5$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en (1, 0)?

2) Si la recta $y=x$ es tangente a una circunferencia en (3,3) y la recta $y=2x$ pasa por el centro de misma; ¿cuál es la ecuación de dicha circunferencia?

3) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas (-1,-4) y es tangente a la recta $-2x+3y-10=0$.

Fig. 5. Actividad con distintas representaciones.

- Problemas de aplicación [11]

5) Para un objeto en órbita elíptica en torno a la Luna, los puntos de la órbita que están más cerca y más lejos del centro de la Luna se llaman **perilunio** y **apolunio**, respectivamente. Son los vértices de la órbita. El centro de la Luna está en uno de los focos de la órbita. La nave espacial *Apollo II* se puso en órbita lunar cuyo perilunio estaba a 109.44 km (68 millas) y el apolunio a 313.82 km (195 millas) de la superficie del satélite. Suponiendo que la Luna es una esfera de 1730 km de radio, deduce una ecuación de la órbita de la *Apollo II*. (Coloca los ejes de coordenadas de tal modo que el origen quede en el centro de la órbita, y los focos estén en el eje x).

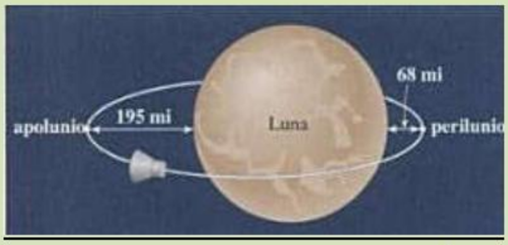


Fig. 6. Órbita lunar.

También, con la intención de ayudar al estudiante en la organización de sus actividades, se estableció un código de colores, a saber:

- El color naranja remarca definiciones, teoremas y demostraciones, articulando una especie de resumen de los contenidos teóricos fundamentales.
- El color verde indica la ejercitación correspondiente a cada tema, a ser resuelta en el ámbito de la clase o bien como tarea para el hogar.
- El color celeste señala actividades para realizar con software. En las mismas se propone buscar información en libros o Internet, resolver ejercicios, visualizar videos o películas, accionar una aplicación, etc.

4 Algunos resultados y reflexiones

El material diseñado fue implementado en un curso, a modo de prueba piloto. Allí se pudo observar mayor interés, motivación y participación en clase por parte de los estudiantes. También pudo comprobarse como la organización del apunte propició que cada uno pudiera abordarlo sin problemas según su propio ritmo, favoreciendo la autogestión de los aprendizajes pretendida para un estudiante universitario.

Nuestra experiencia fomentó el aprendizaje colaborativo, promoviendo el desarrollo de la habilidad de búsqueda y selección de la información, la autoevaluación y una mayor autonomía.

El material descripto fue diseñado atendiendo a la necesidad del estudiante de adquirir progresivamente mayores niveles de abstracción, indispensables para la apropiación de los contenidos específicos de Secciones Cónicas. Efectivamente, las actividades elaboradas que vinculan, por ejemplo, representaciones gráficas y algebraicas de distintos objetos matemáticos, fueron colaborativas en este sentido.

Existe consenso en que el uso de TIC promueve la interacción con la tecnología, suministra el acceso a diversos tipos de información, facilita la comunicación, desarrolla la creatividad, entre otros. En particular, la utilización de GeoGebra, recurso que combina dinámicamente geometría, álgebra, cálculo y gráficos, fue fomentada desde diferentes perspectivas, alentando a los estudiantes a realizar acciones matemáticas (demostraciones, supuestos, análisis, experimentaciones, deducciones) dentro del aula y fuera de ella.

Según la valoración realizada por los participantes de esta experiencia podemos afirmar que la implementación de la propuesta ha sido positiva, hecho que nos alienta a seguir en esta línea, realizando las mejoras que fueron sugeridas, avanzado en la elaboración de otros materiales educativos con soporte virtual y, tal como se adelantó, construyendo los instrumentos de evaluación adecuados.

Consideramos que nuestro trabajo podría incentivar a otros docentes a producir propuestas educativas de este tipo, ya que si bien existe material didáctico en Internet, en su mayoría no está adecuado al contexto ni a los objetivos propuestos.

Referencias

1. Koehler, M. J.; Mishra, P.: Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, Vol. 108, No. 6, pp. 1017-1054 (2006).
2. Shulman, L. S.: Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Vol. 15, No. 2, pp. 4-14 (1986).
3. Berrocoso, J. V.; Garrido Arroyo, M.; Fernández Sánchez, R.: Enseñar y aprender con tecnologías: un modelo teórico para las buenas prácticas con TIC. *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, Vol. 11, No. 1, pp. 203-229 (2010).
4. Barriga, F. D.; Morales Ramírez, L.: Aprendizaje colaborativo en entornos virtuales: un modelo de diseño instruccional para la formación profesional continua. *Tecnología y Comunicación Educativas*, Vol. 47-48. No. 22-23, pp. 4-25 (2008-2009).
5. Có, P.; Del Sastre, M.; Panella, E.: Visualización y TIC en la enseñanza universitaria de la Geometría Analítica. *En XV Encuentro Nacional y VII Internacional de Educación Matemática en carreras de Ingeniería*. Vol. 19 (2009).
6. Có, P.; Del Sastre, M. B.; Panella, E.: Representaciones con CAS. Un puente hacia la aprehensión conceptual. *International Program Committee of XIII Inter American Conference on Mathematics*. Recife. Brasil. (2011a).
7. Có, P., Del Sastre, M. B.; Panella, E.; Sadagorsky, A.: Valoración del impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática básica en carreras de Ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 24, pp. 1134-1141 (2011b).
8. Có, P.; Del Sastre, M. B.; Panella, E.: Una propuesta de trabajo colaborativa con libre elección de TIC en el aula de matemática. *Vigésimo séptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Buenos Aires. Argentina (2012).
9. Có, P.; Braccialarghe, D.; Matassa, A.; Piraino, M.: Relevamiento de recursos para el diseño de actividades con TIC en carreras de ingeniería. *XI Congreso Argentino de Educación Matemática. Sociedad Argentina de Educación Matemática* (2014).
10. Dpto. de Matemática Educativa. Cinvestav. México. https://www.youtube.com/watch?v=d0ZCyOFW3YE. Accedido el 9 de Marzo de 2018.
11. Stewart, J.;Redlin, L.; Watson S.: Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. CENGAGE Learning, pp. 740 (2012).

Señales y música, una relación inseparable. Una aplicación de la serie de Fourier con Matlab.

Carlos A. Chiuro, Gloria L. Frontini, Fernando A. Otero

Matemática Aplicada a la Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Dirección postal
cchiuro@fi.mdp.edu.ar

Resumen. Este trabajo se enmarca en el dictado de la materia Matemática Avanzada correspondiente al segundo año de las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. Se presenta una implementación de un piano virtual en Matlab que permite observar la relación existente entre el contenido armónico de una señal y la identificación de la misma con un determinado instrumento musical. El objetivo de esta implementación es familiarizar al estudiante con el gráfico del espectro discreto de frecuencias que se obtiene por medio de la serie de Fourier en una aplicación que le pueda resultar atractiva.

Palabras Clave: Matemática Aplicada, Serie de Fourier, Música, Contenido Armónico.

1 Introducción

1.1 Señales periódicas en música.

Las notas musicales pueden considerarse señales periódicas, excepto por algunas características como el ataque y la modulación.

Una función periódica es aquella que para algún T Є $\mathbb{C}$ llamado período verifica

$$x(t) = x(t + \mathrm{T}) \ \ \forall\, t \in \mathbb{C} \qquad \textbf{(1)}$$

En particular nos interesan aquellas señales reales donde t representa el tiempo medido en segundos. En estas, el período T también es una cantidad real y se define la frecuencia f como T^{-1} y se mide en Hertz (Hz).

Es bastante conocido que la nota que más se utiliza para afinar es el LA 440. Esto significa que una señal periódica cuya frecuencia es de 440Hz corresponde a una nota LA que se utiliza como patrón de afinación.

Hay siete notas que componen una escala mayor y en la octava comienza la escala nuevamente. Por ejemplo la escala de do mayor es DO RE MI FA SOL LA SI y la octava nota vuelve a ser DO. Desde el punto de vista físico una octava es exactamente el doble de frecuencia, es decir, que si un LA440 tiene una frecuencia de 440Hz, el LA de la octava anterior tiene una frecuencia de 220 Hz y el LA de la siguiente octava tiene una frecuencia de 880 Hz. Como en una octava hay 12 notas y sus frecuencias siguen una progresión geométrica [1], para obtener la frecuencia de la nota siguiente a una determinada solo hay que multiplicar su frecuencia por $\sqrt[12]{2}$.

Si bien dos instrumentos pueden tocar la misma nota, los sonidos de ambos se distinguen entre sí por ciertas características que hacen único el sonido de cada uno. Las características principales de un sonido son: altura, timbre, duración e intensidad. El timbre es el que le da el sonido propio a cada instrumento. Cada nota está formada por una suma de funciones sinusoidales una de las cuales tiene como frecuencia la correspondiente a la nota que se toca (llamada frecuencia fundamental) y las demás

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

tiene frecuencias que son múltiplos de la fundamental (llamadas armónicos). Decimos, por lo tanto, que el contenido armónico de un sonido es el que permite al oído distinguir entre un instrumento y otro.

1.2 Serie de Fourier de señales periódicas.

La serie de Fourier, y en particular la serie trigonométrica de Fourier, permite expresar a una señal periódica como una suma de funciones seno y coseno cuyas frecuencias son múltiplos de una fundamental.

La expresión matemática de la serie trigonométrica de Fourier para una señal $x(t)$ es:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t) \qquad \textbf{(2)}$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental, $\frac{a_0}{2}$ es el valor medio de la señal periódica y se calcula:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt \qquad \textbf{(3)}$$

y a_n y b_n son los coeficientes de la serie y están dados por:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\,, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(4)}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt\,, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(5)}$$

Se llama espectro discreto de amplitud de x(t) a:

$$|X(n\omega_0)| = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \qquad \textbf{(6)}$$

En el presente trabajo se consideran en particular las señales senoidal pura, cuadrada con valor medio nulo y las provenientes de una nota tocada en un piano y en una guitarra clásica.

Una señal senoidal pura de la forma:

$$s(t) = Asen(2\pi.440.t) \qquad \textbf{(7)}$$

que corresponde a un LA 440 tiene:

$$\omega_0 = 2\pi.440,\ a_0 = a_n = 0\ \forall n, b_1 = A, b_n = 0 \ \text{para}\ n \neq 1.$$

En la fig. 1 podemos ver esta señal en función del tiempo y su espectro de amplitud generado con Matlab**[2]**.

Una señal cuadrada correspondiente a la misma nota es de la forma:

$$q(t) = \begin{cases} A\ \ si\ \ 0 \leq t \leq T/2 \\ -A\ \ si\ \ T/2 \leq t \leq T \\ q(t+T) = q(t)\ \ \forall t \end{cases} \qquad \textbf{(8)}$$

Donde T = 1/440 y su serie de Fourier es:

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi}(1-(-1)^n)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t) \qquad \textbf{(9)}$$

Su gráfico temporal y su espectro de frecuencia discreta generado por Matlab se pueden ver en la fig.2.

La señal proveniente de un instrumento real no tiene una expresión analítica, sino que se puede grabar por medio de un micrófono en un archivo de audio para luego obtener su espectro de frecuencia en forma numérica mediante Matlab. Se muestran dos señales reales en la fig.3 y en la fig.4.

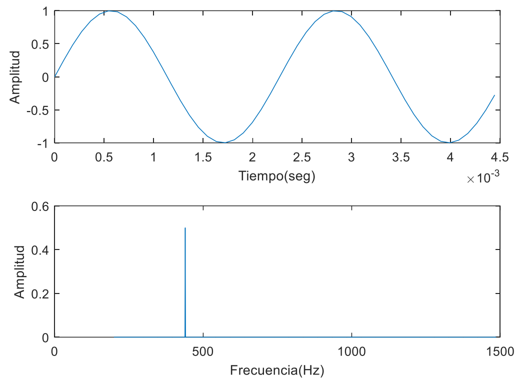


Fig. 1. Señal senoidal de 440 Hz y su correspondiente espectro discreto de Fourier.

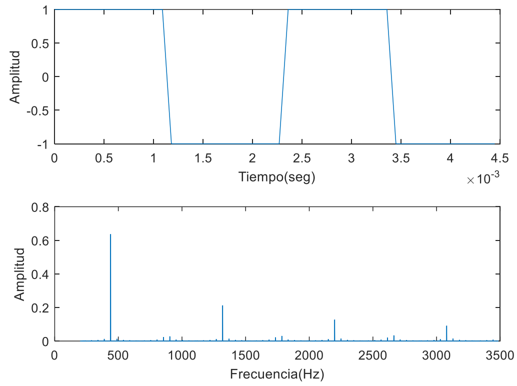


Fig. 2. Señal cuadrada de 440 Hz y su correspondiente espectro discreto de Fourier.

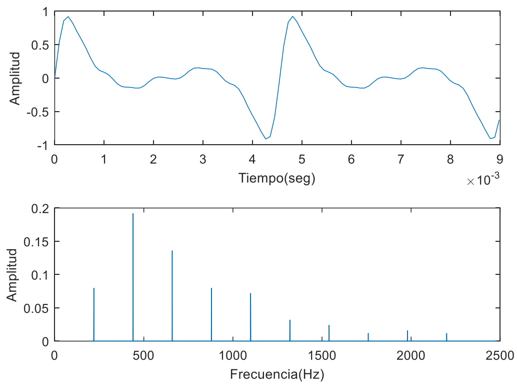


Fig. 3. Nota LA proveniente de una cuerda de guitarra y su correspondiente espectro discreto de Fourier.

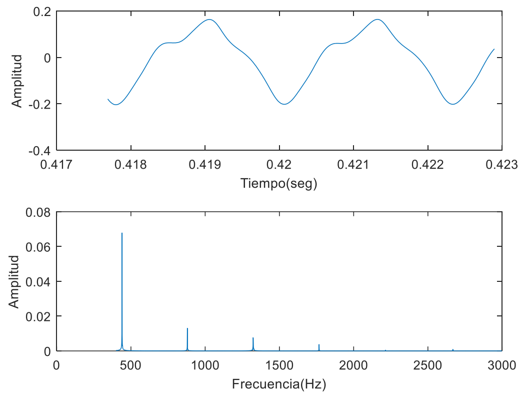


Fig. 4. Nota LA proveniente de un piano y su correspondiente espectro discreto de Fourier.

2 Propuesta de Aplicación.

2.1 Encuadre

Los contenidos anteriormente enunciados forman parte de la materia Matemática Avanzada perteneciente al área Matemática Aplicada del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. Está ubicada en el segundo año del plan de estudios de las carreras de Ingeniería Industrial, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electromecánica e Ingeniería Mecánica. En esta materia, luego de una unidad que provee conceptos de variable compleja, se introduce el análisis de señales y sistemas en el dominio del tiempo y a continuación se analizan estos sistemas en el dominio de la frecuencia. En este contexto se introduce la serie de Fourier y sus aplicaciones. Se realizan varios seminarios [3] con Matlab de asistencia obligatoria donde los alumnos utilizan esta herramienta en la sala de informática.

La presente propuesta sería implementada como parte de uno de estos seminarios.

2.2 El programa

El programa Piano.m es una aplicación que simula un teclado con 4 opciones de instrumentos virtuales: senoidal, cuadrada, piano y guitarra. En la fig. 5 se puede ver una captura de pantalla de la interfaz gráfica de dicha aplicación. Esta aplicación está realizada utilizando el entorno de desarrollo de interfaz gráfica del usuario (GUIDE) de Matlab.

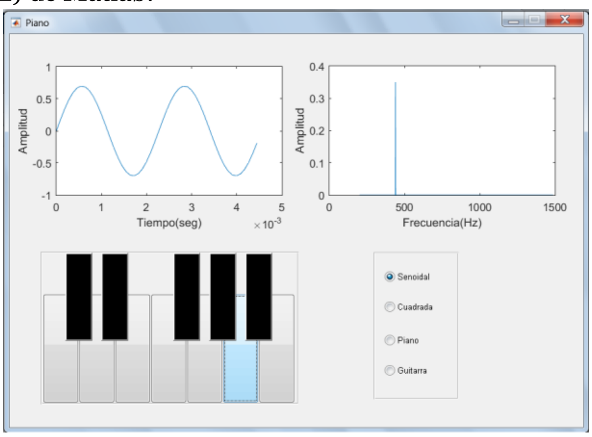


Fig. 5. Interfaz gráfica de la Aplicación del teclado de música virtual.

Como puede verse en la fig.5 el programa consta de un teclado musical con 12 notas que corresponden a una octava. En la parte superior hay dos sistemas de ejes en los cuales se observa la señal correspondiente a la nota que se toca en función del tiempo (dominio temporal) y su correspondiente espectro discreto de amplitud (dominio frecuencial). En la parte inferior derecha hay un grupo de botones que permite seleccionar el instrumento.

Debajo se transcribe el Algoritmo 1, desarrollado en Matlab. Dicho algoritmo corresponde a la función NOTAS, la cual recibe como argumento el número de nota (n) contada desde el LA440, el tipo de instrumento (1: senoidal; 2: cuadrada; 3: piano: 4: guitarra) y los objetos de los ejes donde debe realizar los gráficos en la interfaz de usuario. A partir de esto datos genera las señales, calcula sus respectivas series de Fourier y realiza los gráficos correspondientes. Para el cálculo de las componentes de la serie de Fourier se utiliza un algoritmo llamado transformada rápida de Fourier (FFT)[4], que obtiene de una manera eficaz la transformada discreta de Fourier (DFT). Este algoritmo forma parte del paquete de Matlab.

Algoritmo 1. NOTAS.m. Función principal del programa.

```
function W0=NOTAS(n,tipo,figura1, figura2)
mps=11025;  %muestras por segundo
t = 0:1/mps:1-1/mps;   %intervalo de tiempo
W0=2*pi*220*2^(n/12);  %frecuencia de la nota

switch tipo
  case 1
    s=0.7*sin(W0*t);  %señal senoidal
    sound(s,mps);     %hace sonar la señal
    y=fft(s)./length(s);  %fft de la señal
    y=fftshift(y);
    f=-mps/2:mps/length(y):mps/2-mps/length(y);
    plot(figura1,t(1:50),s(1:50));
    plot(figura2,f(5713:7000),abs(y(5713:7000)));

  case 2
    q=0.5*square(W0*t);   %señal cuadrada
    sound(q,mps);
    y=fft(q)./length(q);
    y=fftshift(y);
    f=-mps/2:mps/length(y):mps/2-mps/length(y);
    plot(figura1,t(1:50),q(1:50));title('Cuadrada');
    plot(figura2,f(5713:7000),abs(y(5713:7000)));

  case 3
   mps=24000*2^(n/12);
   t = 0:1/mps:1-1/mps;
   cuerda1=audioread('lapiano.wav',[12000 59999]); %carga parte de un archivo
   %de audio que contiene una nota LA proveniente de un piano
   sound(cuerda1,mps);
   y2=fft(cuerda1)./length(cuerda1);
   y2=fftshift(y2);
   f=-mps/2:mps/length(y2):mps/2-mps/length(y2);
   plot(figura1,t(1:250),cuerda1(1:250));
   plot(figura2,f(24400:27000),abs(y2(24400:27000)));

  case 4
   mps=44100*2^(n/12);
   t = 0:1/mps:1-1/mps;
   cuerdag=2*audioread('guitarra.mp3',[12000 59999]); %carga parte de un
   %archivo de audio que contiene una nota LA proveniente de una guitarra
   sound(cuerdag,mps);
   y2=fft(cuerdag)./length(cuerdag);
   y2=fftshift(y2);
   f=-mps/2:mps/length(y2):mps/2-mps/length(y2);
   plot(figura1,t(22000:22500),cuerdag(22000:22500));
```

```
    plot(figura2,f(24400:27000),abs(y2(24400:27000)));
end
```

2.3 Desarrollo del seminario

Durante el seminario se indicará a los estudiantes que carguen y ejecuten el programa Piano.m y toquen las notas cambiando los instrumentos, escuchando los sonidos y observando en los ejes cómo varía la frecuencia fundamental y el contenido armónico de cada señal. El docente guiará a los estudiantes para que puedan notar que la separación entre las armónicas de cada señal coincide con la frecuencia fundamental de la misma y además para que observen la cantidad de armónicos no nulos en cada caso. Luego se les pedirá que abran en el editor la función NOTAS.m que contiene el Algoritmo 1 y se les explicará el uso de las funciones audioread, sound, y fft.

A continuación se les pedirá que identifiquen las amplitudes de los armónicos en los ejes para los instrumentos piano y guitarra y se les mostrará cómo pueden sintetizarse dichos instrumentos a partir de su serie de Fourier. A modo de ejemplo, en la fig.6 se muestra una captura de pantalla del programa en el que se ha tocado un LA con el instrumento piano. Puede observarse que dicha señal está formada por 4 componentes principales cuyas amplitudes son aproximadamente 0.08, 0.018, 0.01 y 0.005 para las frecuencias de 440Hz y sus primeros 3 múltiplos.

En base a esta observación el alumno podrá construir y escuchar un sonido sintetizado como se muestra en el Algoritmo 2. En este caso se trabaja en la ventana de comandos de Matlab en vez de utilizar el editor como en el caso anterior.

Algoritmo 2. Síntesis de un LA440 tocado en un piano.

```
>> mps=11025;
>> t = 0:1/mps:1-1/mps;
>> W0=2*pi*440;
>> s=0.08*sin(W0*t)+0.018*sin(2*W0*t)+0.01*sin(3*W0*t)+0.005*sin(4*W0*t);
>> sound(2*s,mps)
```

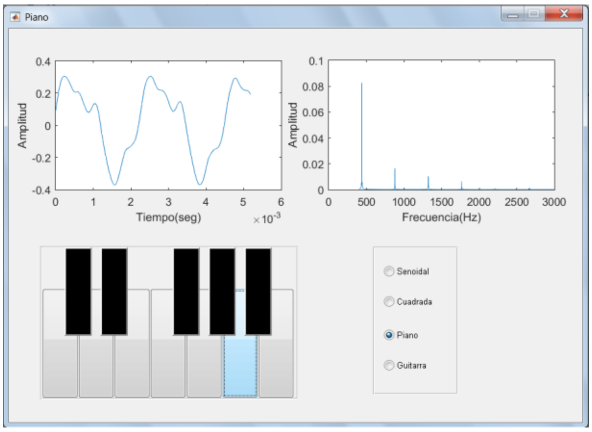


Fig. 6. Captura de pantalla de la interfaz gráfica donde se ha tocado un LA440 en piano.

Finalmente los alumnos podrán repetir esto con diferentes notas e instrumentos.

Otra posible actividad a implementar consiste en que los estudiantes construyan el sonido término a término como se muestra en el algoritmo 3. Hacerlo de esta manera hace más notable el cambio del timbre del sonido a medida que se agregan armónicas. Esto permitirá al estudiante identificar el efecto de las armónicas sobre el sonido generado.

Algoritmo 3. Construcción de un sonido término a término.

```
>> s1=0.08*sin(W0*t);
>> s2=0.08*sin(W0*t)+0.018*sin(2*W0*t);
>> s3=0.08*sin(W0*t)+0.018*sin(2*W0*t)+0.01*sin(3*W0*t);
>> sound(2*s1,mps)
>> sound(2*s2,mps)
>> sound(2*s3,mps)
```

3 Conclusiones y trabajos futuros

Parte de este seminario ha sido aplicado como práctica demostrativa durante las clases de la materia Matemática Avanzada con buena recepción por parte de los alumnos, aunque no estaba desarrollada todavía la aplicación. Se espera implementar el seminario completo en el transcurso del primer cuatrimestre de 2020.

El uso de las distintas representaciones: analítica, gráfica y sonora hace más fácil recordar y visualizar los conceptos de señales en tiempo y frecuencia. La mayoría de los estudiantes ha tenido contacto previo con la música por lo que podría resultarles más familiar relacionar las señales con la vida diaria y por lo tanto aumentar el interés en el tema. Pero también muchos han visto en algún programa de computadora o algún equipo de audio un ecualizador con sus bandas de frecuencia para mejorar el sonido a gusto del que escucha y podrían relacionar el espectro de frecuencia discreta con las bandas del ecualizador. Se espera que la implementación de este seminario permita al estudiante un mejor manejo de los dominios temporal y frecuencial.

Referencias

1. N. Carey y D. Clampitt, Aspects of Well-formed scales, Music Theory Spectrum 11 (1989), no. 2, 187–206.
2. MATLAB 8.5.0.197613 (R2015a) and GUI Layout Toolbox, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States
3. Codagnone, T., Otero, F. Messineo, G. - SEMINARIOS EN MATEMÁTICA AVANZADA. XVII EMCI Nacional y IX Internacional. Ciudad Autónoma de Buenos Aires|
4. Cooley, J. W. and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series," Mathematics of Computation, Vol. 19, April 1965, pp. 297-301.

Estudio e Intervención sobre los Errores de Aprendizaje en Análisis Matemático I en estudiantes de Ingeniería

Patricia Nora Folino, Stella Maris Boutet, Nadia Vanina Beherens

Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050 – Villa Domínico – (1874) Provincia de Buenos Aires
patriciafolino@yahoo.com.ar, stellaboutet@gmail.com, nadiabeherens@hotmail.com

Resumen. Nuestro trabajo se ubica en los cursos de primer año de Ingeniería, en la materia Análisis Matemático I, que es común a todas las especialidades, siendo los cursos homogéneos. Los errores cometidos por los estudiantes en los parciales son objeto de nuestra atención. En este marco convenimos que no todos los errores son de la misma índole, muchos provienen de la mecanización de la operatoria, otros de concepciones teóricas equivocadas o errores en la lógica deductiva. Si bien ya estábamos desarrollando actividades que mejoraran los aprendizajes, en esta ocasión buscamos caracterizar esos errores para poder desarrollar actividades específicas para solucionarlos.

Palabras Clave: Errores de aprendizaje, Aprender del error, Tarea específica

1 Introducción

Todos estamos de acuerdo que del error se aprende y que siempre se cometen errores. Por otro lado, también es cierto que el error se penaliza, cuando tomamos un parcial, la nota está en función de la cantidad de errores cometidos o no. Por ello, decidimos trabajar con los alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Avellaneda, puntualmente en algunos cursos de la cátedra de Análisis Matemático I. Fundamentalmente, el objetivo de esta investigación es buscar los errores que los alumnos cometen en los exámenes parciales e incluso finales, para su posterior categorización de modo que nos permita diseñar actividades específicas para su abordaje durante el período de aprendizaje. Cabe destacar que la propuesta apunta a cursos numerosos, ya que contamos con cerca de 60 alumnos en cada uno.

1.1 Marco teórico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico
En principio ubicamos nuestro trabajo en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). De acuerdo con Fonseca, Bosch, y Gascón [1], dicha teoría propone un modelo epistemológico general de la Matemática que permite describir el saber matemático en términos de lo que Chevallard [2] define como organizaciones matemáticas. Las mismas surgen en respuesta a determinadas cuestiones y se la presenta estructurada en cuatro componentes centrales: las tareas (tipos de tareas), las técnicas, las tecnologías y las teorías. En la dinámica que se establece entre estos componentes aparecen, por un lado, la práctica matemática, formada por las tareas y las técnicas matemáticas, que expresan lo que es el saber hacer. Mientras que, por otro lado, se encuentra el saber propiamente dicho, que se manifiesta a partir de la validación, justificación e interpretación de dicha práctica. De acuerdo con la estructura que propone Chevallard [2] este saber se sostiene en los otros dos componentes de la organización matemática: la tecnología y la teoría. La tecnología se refiere directamente a la práctica y aparece como el discurso que justifica racionalmente la técnica, es decir, asegura porqué es posible aplicar una técnica a un tipo de tarea. El último de los componentes, la teoría, puede entenderse como el más alto nivel de justificación

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

de la práctica, y constituye el conjunto de saberes y conocimientos en el que se sostienen y validan todos los discursos empleados por la tecnología. Chevallard presenta la noción de tarea como un hacer y, desde este punto de vista, se entiende que este concepto posee o se asocia a un objeto preciso: la puesta en práctica. Describe a las tareas como entidades reconocidas a partir de un verbo como puede ser, en el ámbito matemático, calcular, demostrar, construir, etc. Cada tarea, a su vez, tiene asociado un tipo de tareas que adquiere mayor especificidad según el contexto en el que se la considere. El mismo autor, expresa que la técnica supone una determinada manera de realizar una tarea. En el marco de la TAD, cuando la técnica es relativa a un cierto tipo de tareas, se dice que forman un bloque práctico-técnico que se identifica directamente con el saber hacer.

Si la técnica fracasa se dice, en general, que no se sabe realizar el tipo de tarea asociada a ella. La realización de una determinada tarea está estrechamente ligada a una o varias técnicas de resolución, abordaje, interpretación, que deberían poderse poner en juego eficientemente para que la actividad pueda ser resuelta. De este modo, no disponer de dicha técnica o ponerla en juego de manera deficiente, destaca una imposibilidad para realizar la tarea, que es lo que, justamente, define que no se sepa realizarla. La técnica no supone siempre un procedimiento algorítmico. Efectivamente, el uso de una técnica o de un conjunto de ellas, no siempre se realiza en un mismo orden ni de la misma manera frente a una misma tarea, dado que el modo de resolverla depende de las particularidades que esta tenga.

El error en la enseñanza-aprendizaje de Matemática

Numerosas investigaciones han identificado los mismos errores y dificultades en estudiantes de cursos de Cálculo. En particular, se destaca la presencia de procedimientos que operan en un nivel puramente algorítmico. Esto es producto de una enseñanza del Cálculo esencialmente algebraica, al tratar el límite como un proceso algebraico finito [3]. Se propone a los estudiantes utilizar de forma naturalizada, técnicas, sin haberse cuestionado su pertinencia, ni las razones de ser. Brousseau, Davis y Werner [4] expresan: “los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera”. Rico refiere a la noción de organizadores para articular el diseño, desarrollo y evaluación de cada unidad didáctica, considerando organizadores del currículo a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de las mismas [5]. El mismo Rico considera como organizadores, entre otros, errores y dificultades en el aprendizaje.

Dentro de las características de los errores, decidimos destacar las propuestas por Mulhern [6] y replicada en gran cantidad de publicaciones:

- Surgen, por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor.
- Son persistentes y difíciles de superar, ya que requieren una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Pueden ser sistemáticos o por azar: los sistemáticos son más frecuentes y revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada, y los cometidos por azar son ocasionales.
- Muchas veces los alumnos no toman conciencia del error ya que no comprenden acabadamente el significado de los símbolos y conceptos con que trabajan.

Rico [7] propone cuatro líneas de investigación en torno a los errores:

- Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores.
- Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores.
- Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.
- Trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas estadísticas, como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

Clasificaciones de los errores

Como se ha dicho en la introducción, este trabajo tiene dentro de sus objetivos la detección y clasificación de los errores que cometen los alumnos, para luego crear estrategias que reviertan la situación. Por ello, consideramos oportuno, nombrar algunas de las clasificaciones más comunes en el tema.

El trabajo de Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar [5], en la que hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos, los clasifican en:

- Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Puede ser porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.
- Interpretación incorrecta del lenguaje. Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
- Inferencias no válidas lógicamente. Son los errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
- Teoremas o definiciones deformados. Errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.
- Falta de verificación en la solución. Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
- Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Rico [7] destaca que Radatz ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis:

- Errores debido a dificultades de lenguaje. El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.
- Errores debido a dificultades para obtener información espacial. Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas. Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.
- Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Interesan cinco subtipos: Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema. Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares. Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros. Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción. Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes. El razonamiento por analogía sabemos que no siempre funciona en Matemática.

2 Desarrollo de la propuesta

Como hemos dicho, hace tiempo que estamos analizando nuestra forma de enseñar y los aprendizajes de nuestros estudiantes. La pretensión es siempre la misma, que los estudiantes tengan conocimientos que perduren y con esto nos referimos no solo a conceptos sino también a actitudes y procedimientos. Para esto desarrollamos una actividad que consta en solicitar tareas clase a clase, en grupos, consiguiendo una mejora en varios aspectos [8].

Nos concentramos ahora en aquellos en los cuales estas actividades no parecen haber dado buenos resultados. Por eso analizamos los errores cometidos especialmente en los parciales e incluso en los finales. Encontramos ciertos patrones, ciertos errores que se repiten en estudiantes de distintos cursos y de distintos años.

No pretendemos hacer una teoría de errores de aprendizaje, lo que buscamos es analizar los errores que encontramos en las producciones de nuestros estudiantes para tratar de remediarlos, teniendo en cuenta los errores que hemos detectado y a la luz de la teoría sobre este tema tratamos de reunir los tipos de errores en dos grandes grupos como para poder analizarlos y, buscar y diseñar actividades.

Un grupo se corresponde con errores que tienen que ver con mal manejo de las operaciones, conceptos que fueron tratados en un nivel anterior, que podríamos encuadrar en saberes previos (resolver ecuaciones, factorizar, propiedades de la potenciación). El otro grupo se corresponde con errores que provienen de un manejo equivocado o parcializado de la teoría y con el desconocimiento de la estructura matemática.

Ponemos aquí una serie de ejemplos, obtenidos de los exámenes de los estudiantes que muestran nuestras afirmaciones y cómo los hemos agrupado.

Ejemplos del primer grupo:

- En una derivada, que luego debían igualar a cero para obtener sus raíces, simplifican numerador con denominador habiendo una suma o simplifican factores sin tener en cuenta para que valores se anulan.

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x+1} \tag{1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} \tag{2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x)2(x+1)}{((x+1)^2)^2} \Rightarrow \tag{3}$$

$$\frac{(2x+2)\cancel{(x+1)^2}-(x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^{4^2}} = 0 \tag{4}$$

Luego sigue operando correctamente. Cuando se le consulta por qué simplificó así, responde *'porque se simplifica uno de arriba con uno de abajo'*

- Si la derivada, que deben igualar a cero tiene varios factores, distribuyen todo, no se dan cuenta de sacar factor común, pues alguna vez aprendieron que si en los factores había sumas había que distribuir.

$$(2x+2)(x+3)x - 4x(x+1)(x+3)(x-2) = 0 \tag{5}$$

$$30x + 28x^2 - 6x^3 - 4x^4 = 0 \tag{6}$$

El no darse cuenta cómo operar en forma más sencilla, los lleva a un polinomio de grado alto, que algunos a partir de acá sabrán factorizar, pero otros no, además del error, en algunos casos, en las distribuciones que hacen que obtengan polinomios sin raíces racionales como para que resulte efectivo el teorema de Gauss.

- Distribuir potencias con sumas. Si bien este es un error que podríamos llamar clásico, encontramos que si preguntamos si esto se puede hacer nos dicen que no, pero al encontrar $(x-2)^2$ ponen x^2-4 , o, x^2+4 , es más, en el caso de la segunda respuesta preguntan por qué está mal si al elevar al cuadrado da positivo.

En estos casos muchas veces les mostramos que si reemplazamos por números no da igual

$$(2-3)^2 \neq 2^2+3^2 \neq 2^2-3^2 \tag{7}$$

sin embargo, a veces, falla el reconocer que las letras representan a cualquier número real y por lo tanto hay que hacer un trabajo un tanto más profundo.

- En las series de potencias, cuando deben reemplazar por un extremo, no saben operar con las potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(x-2)^n}{3^n n^2} \tag{8}$$

halla correctamente $I_c = (-1,5)$

Pero comete un error al operar luego de sustituir x por -1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(-1-2)^n}{3^n n^2} = \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(-3)^n}{3^n n^2} = \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(-1)\,3^n}{3^n n^2} = \tag{11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(-1)}{n^2} \tag{12}$$

Ejemplos del segundo grupo:

- Un ejercicio simple de optimización como hallar el rectángulo de área máxima si el perímetro es 100, cuando lo resuelven y escriben la respuesta llegan a que los lados deben ser de longitud 25, dicen que no puede ser porque así es un cuadrado. Aquí están usando mal la teoría, no recuerdan la definición de estos objetos, y/o lo que implican
- En otros ejercicios de optimización no buscan el dominio, se conforman con buscar dónde se anula la derivada, toman un valor a cada lado de ese número y si dan con signo distinto dicen que es máximo o mínimo, sin fijarse que para hacer esto deben asegurar la continuidad y además que debe ser el máximo absoluto. Por ejemplo, en un problema en que se pide hallar dos números, tales que, su suma sea 12, y, el producto del cuadrado de uno de ellos por el otro, sea máximo, el valor que obtienen es un máximo relativo.
- En un ejercicio de límite en el cual analiza bien la indeterminación y decide correctamente la estrategia para salvarla, pierde la estructura de la escritura matemática, no pone paréntesis y eso lo lleva al error, haciendo conclusiones derivadas de ese error, que son correctas.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} = \tag{13}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}} = \tag{14}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3\sqrt{x^2-9}}{x^2-9} = \infty \tag{15}$$

- Al buscar los extremos de una función y realizar una simplificación pierde el contexto donde está trabajando, es decir, el dominio de la función

$$f(x) = 2\sqrt{9x^2 + 84} - \frac{9}{10}x^2 \qquad \textbf{(16)}$$

$$f\,'(x) = \frac{18x}{\sqrt{9x^2+84}} - \frac{18}{10}x \qquad \textbf{(17)}$$

$$\frac{18x}{\sqrt{9x^2+84}} - \frac{18}{10}x = 0 \qquad \textbf{(18)}$$

$$\frac{\cancel{18x}}{\sqrt{9x^2+84}} = \frac{\cancel{18x}}{10} \qquad \textbf{(19)}$$

Al simplificar la *x*, no aparece *f(0)* como mínimo de la función.

En general, a los estudiantes frente a los errores se les suele decir que tienen que practicar más o que no han hecho lo suficiente, pero ¿sabemos si saben estudiar? Cuando les preguntamos a los estudiantes cómo o qué han hecho para estudiar ellos mismos dicen que hicieron muchos ejercicios, de lo cual se desprenden por lo menos dos cuestiones: se basaron en ejercicios tipo, es decir aprendieron un mecanismo y cómo saben si lo que hicieron está bien. La respuesta a la segunda pregunta es que el ejercicio le dio, o sea, que si les da lo que decía la respuesta de la guía, entonces está bien, con lo cual esto lleva a otra conclusión, de parte de los estudiantes que es que el procedimiento no cuenta y que la validación la da el resultado.

Este es otro problema, cómo se validan las afirmaciones en matemática, aquí podemos decir que el error es desconocer las reglas de la matemática en cuanto a las deducciones y su estructura formal. Al preguntarles a los estudiantes cómo sabemos si algo es verdadero o falso, o, cómo sabemos si algo está bien o mal, nos contestan que no saben si está bien o mal, que el profesor dice si está bien o mal o nos manifiestan que no saben cómo hacer para darse cuenta si está bien o mal.

Este es otro aprendizaje que queremos obtener en nuestros estudiantes, cómo validar las ideas matemáticas. En muchos casos sostienen "porque es así", en otros porque algún profesor lo dijo (autoridad). Nosotros pretendemos que ellos aprendan a validar, en parte el aprendizaje autónomo lleva a que cada uno pueda saber si está bien o no.

Al reconocer estos errores, diseñamos para cada caso distintos tipos de actividades orientadas a solucionarlos. Esas actividades no eran volver a hacer esos mismos ejercicios sino actividades que para el primer grupo clarificaran cómo realizar esas operaciones y en el segundo caso que tuvieran que ver con manejar la teoría y la lógica. Las actividades del grupo 1 son del tipo algorítmicas, ejercicios en los que tengan que factorizar, por ejemplo,

$$(x-2)(x-3)(x+1) + (x-2)3x = 0 \qquad \textbf{(20)}$$

en la cual vean la ventaja de sacar factor común. En las del grupo 2, por ejemplo, se proponen datos, sabiendo que

$$f\,'(3) = 0 \qquad \textbf{(21)}$$

y que

$$f\,'(4) = 5\, f\,'(2) = -1 \qquad \textbf{(22)}$$

y afirmamos que en

$$x = 3 \qquad \textbf{(23)}$$

hay un mínimo, si esto es correcto o no, también otras funciones como

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \qquad \textbf{(24)}$$

que si no se fijan en el dominio se llega claramente a un error.
En la mayoría de estos casos obtuvimos buenos resultados en los recuperatorios y los estudiantes se manifestaron positivamente con este tipo de tareas.
Pretendemos seguir profundizando estas herramientas las cuales están siendo analizadas y recreadas o mejoradas para próximos ciclos, y tratar de medir de forma más precisa logros y fracasos de este método.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Siempre se comenten errores, los mismos sirven para aprender, son una oportunidad, los propios y los ajenos. Con las tareas específicas la mayoría de los estudiantes comienza a reconocerlos y en consecuencia a corregirlos, por ello deben ser orientadas e intencionadas para ese fin. Esto nos lleva también a tener que diferenciar los tipos de errores que cometen.

Es cierto que los errores se deben a múltiples factores y que algunas causas son más evidentes o tienen más peso que otras. Sin embargo, con nuestro trabajo hemos podido clasificarlos en dos grupos, para así planificar actividades que los enfrenten. Estamos convencidas que los alumnos deben ser partícipes activos en el proceso de superación de estos errores, y que el trabajo del docente va más allá de indicarlos en las correcciones. Pochulu[9] indica que debe ser el alumno el que reconozca que su saber es insuficiente o inadaptado, pues de lo contrario continuará recurriendo a él. Si el error es descubierto como consecuencia de una interacción o debate entre profesor y alumno, promoverá la superación, puesto que los estudiantes pueden modificar sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra que es mejor. Es más, el autor asegura que, si estamos interesados en el proceso de aprendizaje de la Matemática, el error puede ser visto como instrumento de identificación de los problemas del currículo o de la metodología de enseñanza, y al analizarlos, podrán ser eliminados y superados. Si, por otro lado, queremos explorar el error, éste puede constituirse en un instrumento sumamente interesante para la comprensión de los procesos cognitivos de los alumnos. Este tipo de trabajo contribuye, además, a que aprendan a validar sus afirmaciones, a desarrollar en ellos mecanismos que les permitan saber si lo que hacen está bien o no.

En particular una la principal dificultad que se presenta es que no ven porque no saben que están cometiendo errores, por eso es bueno que los reconozcan, y el trabajo colaborativo también ayuda para solucionar esos errores. Rico [7] argumenta que los alumnos no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan. Gómez[10] explica que esta actitud del estudiante tiene una causa natural, puesto que el profesor resuelve un ejercicio y la solución se presenta “en limpio”, sin que haya la menor indicación del proceso “de borrador” por medio del cual se llegó a la misma. En consecuencia, el estudiante piensa que él también debe encontrar la solución “en limpio” y no es consciente de que, para solucionar un ejercicio, debe tener un método o estrategia adecuada, por lo que busca atajos. Estos atajos lo desvían del camino apropiado y lo inducen a cometer errores.

Referencias

1. Fonseca, C.; Bosch, M.; Gascón, J.: El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación matemática*. Vol. 22, No. 2.(2010).
2. Chevallard, Y.: El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathéematicques*. Vol. 19, No. 2, pp. 221–266, (1999).
3. Artigue, M.; Douady, R.; Moreno,L.; Gómez, P.: *“Inegeniería didáctica en educación matemática”*. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. (1995).
4. Brousseau, G.; Davis, R.;Werner, T.: Observing students at work. Christiansen, B.; Howson, A.; Otte, M. (Eds) *Perspectives on Mathematics Education*. Mathematics Education Library. (1986).
5. Engler, A.; Gregorini, M.I.; Müller, D.;Vrancken, S.; Hecklein, M.: Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisas*. Vol. 23, pp. 23–29, (2004).
6. Lim, K.S.: An error analysis of form 2 (grade 7) students in simplifying algebraic expressions: a descriptive study. *Electronic Journal of Reserach in Educational Psychology*. Vol. 8, No. 1, pp. 139–162, (2010).

7. Rico, L.: Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Kilpatrick, J.; Rico, L., ;Gómez, P. (Eds.) *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Una empresa docente, pp. 69–108. (1995).
8. Beherens, N.; Folino, P.;Boutet,S.: La tarea como una herramienta para ganar confianza a fin de potenciar aprendizaje de calidad. *XXI Encuentro nacional y XIII Internacional de educación matemática en carreras de ingeniería.* (2018).
9. Pochulu, M.: Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Rev. Iberoam. Educ.* Vol.1,No.1,pp. 1–15, (2009).
10. Gomez, P.: *"Profesor: no entiendo. Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas"*. Una empresa docente. (1998).

Enseñanza en el contexto de la Pandemia: ¿Una oportunidad para el cambio?: Análisis de la valoración de los alumnos acerca de una propuesta de enseñanza virtual para la clase de Matemática en primer año de la Universidad

María Julia Bolivar, Flavia Valeria Alvarez

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Agrarias, Universidad Católica Argentina
Alicia Moreau de Justo 1500, Ciudad de Buenos Aires, Argentina
mariabolivar@uca.edu.ar, flaviaalvarez@uca.edu.ar

Resumen. El presente trabajo analiza la propuesta virtual generada para la materia Cálculo Elemental, en el contexto de aislamiento social preventivo y obligatorio debido a la pandemia de Covid-19, en el primer semestre del año 2020. Esta situación obligó a generar rápidamente una propuesta totalmente virtual de la materia que consistió en la utilización de un aula virtual y encuentros sincrónicos semanales con los alumnos. Para realizar el análisis se indagó la valoración de los estudiantes respecto de la incorporación de los recursos utilizados mediante un cuestionario, observaciones de clase y los datos recogidos del registro del aula virtual. Este análisis nos muestra que, en general, los alumnos valoraron positivamente la propuesta, especialmente el material propuesto en los videos y los encuentros sincrónicos. Sin embargo, la mayor parte de los estudiantes preferiría cursar la materia de forma presencial. Se detectó una limitación en cuanto al uso de los foros.

Palabras Clave: Enseñanza virtual, Matemática, Ingeniería, Universidad

1 Introducción

Actualmente en las clases de matemática de primer año de la Universidad encontramos alumnos con muchas dificultades para lograr los aprendizajes deseados.

Por otro lado, la irrupción masiva de las tecnologías ha cambiado el sentido y las formas de enseñanza y del aprendizaje. En la actualidad las tecnologías influyen notablemente en la relación de todos los ciudadanos con el conocimiento, ya no es necesario contar con un docente que transmita, basta con entrar en internet y buscar la información deseada.

En este sentido, Gorospe, J. M. C., Olaskoaga, L. F., Barragán, A. G. C., Iglesias, D. L., & Aguirre, B. O. A. [1] mencionan: “Hemos pasado de pensar en el conocimiento como algo objetivo, estable, producido por expertos y que se puede transmitir, a algo subjetivo, dinámico y producido de forma colaborativa. El conocimiento no es una verdad objetiva sino variable y verificable” (2015, p.49).

Por todo esto cobra una gran relevancia que los alumnos puedan desarrollar aptitudes de aprendizaje autónomo y adquirir competencias como buscar información relevante, analizarla y criticarla. Se debe apuntar a que los estudiantes puedan aprender en forma colaborativa con sus compañeros y con la ayuda del docente, que más que un transmisor de información pasa a ser un guía que acompaña y ayuda en el proceso. Sin embargo, en las clases de matemática, los modos tradicionales de enseñanza siguen imponiéndose.

La materia Cálculo Elemental, la cual es cursada por los alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agrarias de la Universidad Católica Argentina (UCA), divide sus horas en teoría y práctica. En su formato habitual, en las horas de la teórica las interacciones están mayoritariamente centradas en el docente que es quien brinda las explicaciones a los alumnos, quienes, en su mayoría, las reciben de forma pasiva. En las horas de la práctica el objetivo es que los alumnos se involucren en la resolución de los problemas propuestos con la ayuda del docente. Se intenta de este modo que el alumno tome un mayor protagonismo en su proceso de aprendizaje. En cuanto al aula virtual su uso hasta el momento anterior a esta experiencia, ha sido principalmente el de repositorio de las guías de ejercitación y modelos de exámenes. En cuanto a los instrumentos utilizados habitualmente, podemos mencionar el pizarrón, la calculadora, el geogebra, el discurso docente, y una guía de ejercitación.

En este sentido, consideramos el contexto generado por la pandemia como una oportunidad para generar una propuesta didáctica mayoritariamente centrada en el alumno. Pasando a ser el rol del docente, el de un guía que facilita el aprendizaje, brindando material de estudio, proponiendo actividades, otorgando las ayudas necesarias y el feedback. También es el encargado de establecer las normas y los criterios de evaluación.

Sin embargo, sabemos que estos cambios que se plantearon de imprevisto no son para nada sencillos. En experiencias anteriores, hemos encontrado cierta resistencia de los alumnos a trabajar de distintos modos a los tradicionales. A muchos alumnos les cuesta salir de la actitud pasiva y desean que todo les sea "dado" por el docente.

En este sentido, Buxarrais y Ovide [2] (2011) afirman que la reacción de los estudiantes cuyos profesores optan por estas metodologías no tradicionales no siempre es positiva, enfatizan que: "El estudiante, en especial cuando está a un cierto nivel académico y lleva un número considerable de años en instituciones educativas, ha entrado a formar parte de ese sistema y ha aceptado el papel asignado" (p.8).

Por ello nos interesa analizar la experiencia desde la perspectiva de los alumnos para poder evaluar fortalezas y debilidades, y así poder proponer mejoras a futuro, ya sea en una propuesta totalmente virtual o en una del tipo blended learning (combinación del aprendizaje virtual con el presencial).

Desde la psicología social, Calvet, Ponzoni y Rodriguez (2015, citado en Bolívar [3], 2017) afirman que, las actitudes consisten en la valoración positiva o negativa, de grado variable entre estos dos extremos, de los sujetos hacia un objeto social concreto o abstracto determinado. Estas valoraciones orientan las conductas de las personas por ello la importancia de analizarlas.

2 Marco Teórico

Este trabajo se encuadra en el marco de la teoría socio-histórica, la cual presenta sus orígenes en los trabajos de Vigotsky (1896-1934) que luego fueron continuados por Leontiev (1903 -1979) y Luria (1902 – 1977). Desde esta visión lo que el alumno aprenda estará influido por la cultura en la cual se encuentra inmerso, el contexto en el que lo aprenda y sus experiencias particulares.

Se considera que el significado y las identidades son construidos en las interacciones, mientras que la construcción de estos significados e identidades es influenciada por el contexto en el que se inscriben (Gros Salvat, 2004).

Una situación educativa, para efectos de su análisis e intervención, requiere concebirse como un sistema de actividad cuyos componentes incluyen (Engeström 1987, citado en Gros Salvat [4], 2004):

- El sujeto que aprende.
- Los instrumentos utilizados en la actividad.
- El objeto a apropiarse u objetivo que regula la actividad (saberes y contenidos).
- Una comunidad de referencia en que la actividad y el sujeto se insertan.
- Normas o reglas de comportamiento que regulan las relaciones sociales de esa comunidad.
- Reglas que establecen la división de tareas en la misma actividad.

3 Metodología

En el caso de esta experiencia, la propuesta didáctica generada durante el primer semestre del año 2020 para la materia Cálculo Elemental, consistió en la utilización de un aula virtual, localizada en una plataforma de Moodle y en encuentros sincrónicos semanales con los alumnos a través de Zoom.

En el aula virtual se incluyó material de estudio como: apuntes teóricos, guías de ejercitación y videos con explicaciones.

Se propuso la realización de cuestionarios a modo de autoevaluación, y entregas a desarrollar que fueron corregidas por los docentes. Se habilitaron foros de consultas para todas las Unidades del programa.

Para cada Unidad se estableció un cronograma semanal, como observamos en la Figura 1, indicando el material que debían consultar y las actividades a realizar. Para cada tema, se indicó qué cuestiones deberían estar presentes en un resumen del tema a estudiar y se sugirió a los alumnos que lo vayan construyendo a partir del material brindado.

Cronograma de actividades:		
Fecha	Actividad	Fecha límite de entrega
UNIDAD 1		
6/4/2020	Comienzo de clases	
Clase 1		
6 o 7 /4/20	**Inecuaciones:** Ver los 4 videos. Escribir resumen teórico 1. **Funciones:** Ver videos de 1. Introducción. 2. Funciones básicas. Escribir resumen teórico 2 y 3. *Resolver los ejercicios 1 al 13.*	
Clase 2		
13 o 14/4/20	Ver los videos de **Composición de funciones**. Escribir resumen teórico 4. *Resolver los ejercicios 14 al 19.*	
Clase 3		
16 o 17/4/20	Ver los videos de **Inversa**. Escribir resumen teórico 5. *Resolver los ejercicios 20 al 36.*	
20/4/20	Resolver el cuestionario final de la Unidad 1	26/4/20

Fig. 1. Cronograma para la Unidad 1 de Cálculo Elemental. Primer Semestre 2020.

Los encuentros a través de Zoom se dividieron, respetando los horarios de las clases presenciales, en dos tipos, teóricos y prácticos. En los encuentros teóricos la propuesta fue que los alumnos asistan al encuentro habiendo visto y construido el resumen del material propuesto para así realizar el docente un repaso de los temas abordados, recorriendo las cuestiones más significativas, enfocando en ejemplos principales y explicando las cuestiones que no hubieran quedado claras.

En los encuentros sincrónicos de tipo práctico, se enfocó principalmente en trabajar con las dudas de los alumnos sobre las guías de ejercitación propuestas, y en desarrollar entre todos ejemplos o ejercicios de la guía.

El presente análisis toma como punto de partida el trabajo de Tesis: TIC en la enseñanza de las matemáticas en primer año de la Universidad (Bolívar [5], 2016), en el cual se analizó la valoración de los alumnos sobre una experiencia del tipo blended learning, es decir se utilizó un aula como complemento a la clase de matemática.

Para indagar la valoración de los alumnos se trabajó con el cuestionario generado para dicha investigación, el cual fue levemente modificado para adaptarlo a la situación actual, y los datos recogidos en el aula virtual.

El cuestionario incluyó, además de ciertos datos y dos preguntas semiestructuradas, una escala, esto es, una serie de ítems o afirmaciones con el fin de indagar sobre la actitud de los alumnos acerca del uso del aula virtual.

Las preguntas que se incluyeron en esta oportunidad fueron:

- ¿Las cuestiones planteadas en el aula virtual facilitaron tu estudio? ¿Cuáles y de qué manera?
- ¿Utilizaste los foros de consulta? Si los usaste, ¿te resultaron útiles para evacuar tus dudas? Si no los usaste, ¿por qué?

La primera pregunta ya formaba parte del cuestionario en la investigación anterior, la segunda fue agregada para indagar acerca del uso de los foros ya que en el trabajo anterior se detectó una resistencia por parte de los alumnos a usar esta herramienta que consideramos de gran potencial y utilidad.

Para facilitar el análisis de las respuestas volcadas en la escala, se distinguieron tres dimensiones, que se describen a continuación, y se generaron una serie de afirmaciones que intentan capturar la información requerida, registrándose la frecuencia (muy de acuerdo, de acuerdo, ni acuerdo ni desacuerdo, en desacuerdo, muy en desacuerdo) en las respuestas de cada ítem.

3.1 Dimensión 1. Accesibilidad

Dentro de esta dimensión se incluyeron los ítems que hacen referencia a cuestiones técnicas de la experiencia del alumno con el aula virtual, por ejemplo, si tuvo o no dificultades ya sea para acceder como también para ver el material allí presentado. El objetivo fue indagar la experiencia con el aula en cuanto a lo técnico y también analizar si fue valorado el hecho de poder acceder sin limitaciones de tiempo.

Los ítems de la escala incluidos en esta dimensión fueron:

- Siempre pude acceder al aula virtual
- Pude descargar sin inconvenientes los materiales del aula virtual.
- Accedí al aula virtual en los horarios más convenientes para mí

3.2 Dimensión 2. Experiencia Afectiva

En esta dimensión se incluyeron los ítems referidos a la experiencia afectiva del alumno en relación al aula virtual. Se propuso indagar su actitud acerca de la propuesta en el aula, que material resultó de su preferencia a partir de su estilo de aprendizaje, cómo prefirió comunicarse con el docente y sus compañeros, si se sintió cómodo ante la utilización de un foro, y si la propuesta le pareció interesante.

Los ítems referidos a la experiencia afectiva del alumno fueron:

- Prefiero ver un video que leer apuntes de Matemática
- Prefiero comunicarme con los docentes vía mail antes que a través de un foro
- Es importante utilizar los foros para mejorar la comunicación con el docente y mis compañeros
- Prefiero cursar una materia de matemática bajo la modalidad presencial
- Prefiero sacarme las dudas en la clase vía zoom que en un foro

3.3 Dimensión 3. Cognitiva

Dentro de esta dimensión se incluyeron los ítems referidos específicamente al material de estudio presentado en el aula, se quiso analizar la valoración de los alumnos acerca de los ejercicios planteados, de los foros, de los videos y de los apuntes.

Los ítems referidos a este aspecto fueron:

Las devoluciones de las tareas me resultaron claras
Las devoluciones de las tareas me permitieron descubrir mis errores
Los foros me resultaron útiles para poder despejar mis dudas
Las tareas propuestas me permitieron afianzar mis conocimientos
Los videos, en general, me ayudaron a comprender los contenidos de la materia
Los apuntes teóricos, en general, me ayudaron a comprender los contenidos de la materia
El material presentado en el aula virtual me resultó útil para el estudio
Los encuentros por Zoom me ayudaron a comprender los contenidos de la materia
El material brindado en el aula virtual resultó insuficiente

4 Resultados obtenidos

Se matricularon en el aula virtual un total de 220 alumnos provenientes de 6 comisiones diferentes (B, C, D, E, F, J). Las cinco primeras estaban formadas por alumnos ingresantes mientras que la comisión J estaba integrada por alumnos recusantes.

En cuanto a las actividades propuestas distinguimos entre las tareas de entrega a desarrollar (Tareas 1, 2, 3 y 4) y los ejercicios de autocorrección inmediata (Cuestionarios 1, 2 y Lección). Las actividades consideradas obligatorias fueron las tareas a desarrollar y formaban parte de la calificación final de la cursada, las otras eran optativas.

Los ejercicios de autocorrección fueron habilitados para todas las comisiones, en cuanto a las tareas de entrega los docentes de cada comisión decidieron de manera autónoma si proponerlas o no a sus alumnos. En este sentido la comisión F no envió la tarea 3, y la J no envió la tarea 4, cuestión que puede observarse en la Figura 2.

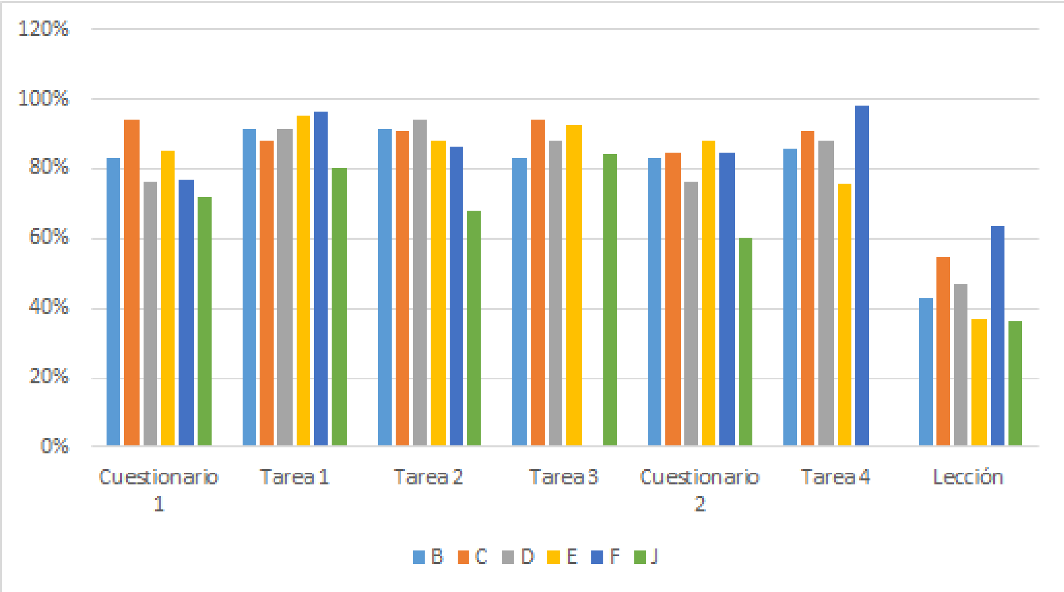


Fig. 2. Porcentaje de alumnos que realizó cada tarea del aula virtual discriminado por comisión (fuente: elaboración propia).

Si bien hay algunas diferencias, podemos observar que, en general, el porcentaje de alumnos que realizó las actividades propuestas fue bastante alto y se mantuvo a lo largo de la cursada, exceptuando la última Lección que fue realizada por menos alumnos, lo cual puede deberse a que el tema de esta actividad entraba solamente al final, por lo que consideramos que la realizaron aquellos alumnos que aprobaron la cursada y a que además era optativa.

En cuanto a las participaciones en los foros de consulta, sólo un 28 % del alumnado los utilizó para comunicarse. Al discriminar por comisiones podemos observar en la Figura 3 que en algunas hubo una mayor utilización de la herramienta, sin embargo, en otras comisiones su uso fue realmente escaso. Por ejemplo, en la comisión B, el 43 % de los alumnos se comunicó a través de algún foro. Por otro lado, si miramos la comisión J, sólo el 8 % de sus alumnos utilizó la herramienta. En el resto de las comisiones las participaciones estuvieron entre estos dos extremos.

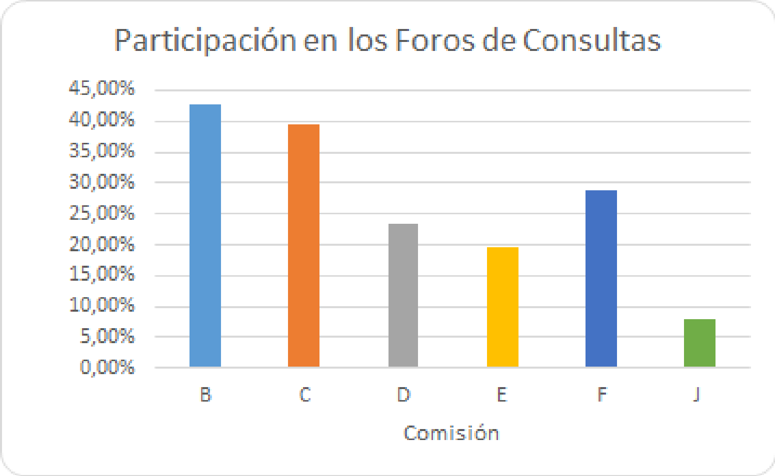


Fig. 3. Porcentaje de alumnos que utilizó los foros de comunicación discriminando por comisión (fuente: elaboración propia).

4.1 Análisis de la valoración de los alumnos a partir de los resultados de las encuestas y observaciones de clase

Se encuestó a un total de 149 alumnos al finalizar la cursada. De los alumnos encuestados 17 eran recursantes y el resto cursó la materia por primera vez.

4.1.1 Posibilidades de Acceso

El 90% de los alumnos manifestó que siempre pudo entrar al aula virtual y el 97% pudo descargar sin inconvenientes el material del aula virtual.

En sus comentarios algunos alumnos destacan la posibilidad de poder ver los videos cuantas veces uno quiera en caso de ser necesario:

"El uso de videos me permite volver sobre los temas que no me quedaron claros la cantidad de veces que considere necesaria y pudiendo acceder a los mismos cada vez que quiera".

Respecto al acceso en horarios convenientes para el alumno el 50% estuvo de acuerdo, mientras que un 33% no mostró ni conformidad ni disconformidad. La mayor parte de los alumnos afirma haber utilizado pc o notebook para acceder al aula. Por comentarios informales de los alumnos, sabemos que algunos debían compartir el dispositivo con el que se conectaban con otros integrantes de la familia, quizás se deba a este motivo las limitaciones de acceso en sus horarios de preferencia.

4.1.2 Experiencia Afectiva

Si bien muchos alumnos se muestran conformes con la cursada en general, el 82% de ellos afirmó que prefiere cursar una materia de matemática bajo la modalidad presencial.

Esto lo vemos reflejado en sus comentarios:

"Estudiar virtualmente se me complica muchísimo en todas las materias, porque suelo desconcentrarme no importa que pase. Ya sea vía presencial, cada 30 min tengo que desconcentrarse un poco, porque sino no presto atención en el resto de la clase. Estar en mi casa fue muy perjudicial para mí, ya que no se sentía en ámbito universitario, sino que sentía que estaba en casa. El material fue bien dado".

"Creo que en general, la mezcla entre clases teóricas y prácticas facilitaron mi estudio, aun así, considero que sería mejor cursar la materia de forma presencial".

Respecto a los foros un 64% prefiere comunicarse con los docentes vía mail antes que a través de un foro. Un 42% coincide en que es importante utilizar los foros para mejorar la comunicación con los docentes y los compañeros, sin embargo, un 43% no está de acuerdo ni en desacuerdo, y para un 16% no es importante.

Además, el 86% de los estudiantes prefiere sacarse las dudas en las clases vía zoom que en los foros.

Observamos que muchos alumnos no parecen sentirse cómodos con el uso de los foros para consultar dudas, al igual que en la experiencia anterior se observa una cierta resistencia de los mismos para utilizar este medio para comunicar sus dudas. Hemos observado que muchos preferían aguardar al encuentro sincrónico por zoom para realizar sus consultas.

Recorremos algunas de las respuestas de los alumnos refiriéndose a este aspecto:

"El hecho de poder comunicar e interactuar con un docente que responda las dudas que uno tiene en el momento, se vuelve más conveniente. Es más fácil poder explicar dudas en una conversación dinámica, y un sistema como el foro que consiste en mensajería esencialmente, no resulta conveniente".

"Usé muy poco los foros de consultas ya que tardó mucho en tratar de explicar mi problema en cierto ejercicio. Las veces que lo usé fue para comprobar si la forma en que resolvía un ejercicio era la correcta, en esos casos me resultó útil".

"No los usé, la verdad que prefería esperar a la próxima clase de práctica y preguntarle directamente a la profesora".

"Pocas veces he usado el foro, siempre fueron dudas de tipo organización. No lo he utilizado para despejar dudas ya que me cuesta mucho expresarme a través de la computadora. Por eso opté por evacuar las dudas directamente en la clase".

Respecto a los materiales de estudio, el 79% de los estudiantes prefiere ver un video que leer un apunte de matemática.

Vemos a continuación algunos comentarios al respecto:

"Me gustaron los videos porque me ayudaron a comprender mejor los contenidos y podía verlos varias veces para entender".

"Los videos facilitaron el estudio, aunque me hubiese gustado también contar con más material en formato pdf. No es siempre cómodo estudiar de un video".

4.1.3 Contenido

En líneas generales los alumnos valoraron positivamente el contenido incluido en el aula, ya sea el material para abordar los temas como las actividades propuestas. También hubo una gran valoración de los encuentros sincrónicos.

El 70% de los alumnos estuvo de acuerdo en que los videos les ayudaron a comprender los contenidos de la materia. Y un 89% consideró que todo el material presentado en el aula virtual le resultó útil para el estudio.

Veamos algunos comentarios:

"Yo creo que facilitó mi estudio el hecho de tener el EVA (Entornos Virtuales de Aprendizaje, es el nombre que se le da en UCA a la plataforma Moodle de aulas virtuales) *ordenado por unidades y con mayor claridad. A su vez, los videos ayudaban por si quedaba alguna duda de la clase teórica".*

"Los videos no me resultaron claros, porque las explicaciones variaban entre los mismos".

El 74,5% considera que los apuntes teóricos le ayudaron a comprender los contenidos de la materia. Y el 65% que el material brindado en el aula virtual fue suficiente.

El 86% de los estudiantes respondió que los encuentros por Zoom le ayudaron a comprender los contenidos de la materia.

Muchos alumnos destacan que los videos fueron de gran utilidad para comprender los temas vistos y les cuesta más seguir una clase de manera sincrónica a través de zoom, sin embargo, hay otros que resaltan estos encuentros como clarificadores e incluso los prefieren al video.

Recorremos algunos comentarios:

"La mayor parte de lo que aprendí y entendí fue por los videos subidos y las respuestas dadas. Me cuesta mucho poder seguir y entender las clases vía zoom, en especial las de teoría".

"Me pareció muy útil y eficiente la modalidad de este cuatrimestre con respecto a la materia. El Eva estuvo siempre bien organizado y con suficiente material, y las clases por zoom fueron muy buenas".

"Sin embargo, encontré algunos videos un poco densos o confusos. Muchas veces al ver los videos me mezclaba, pero luego al tener clases zoom entendía mejor".

"Me facilitó mucho el estudio, los videos, ya que luego de mirarlos con las explicaciones dadas en las clases vía zoom, pude tener un gran entendimiento de los temas".

El 80% de los alumnos respondió que las tareas les permitieron afianzar sus conocimientos. Para un 70% de los estudiantes las devoluciones de las tareas les permitieron descubrir los errores y considera que éstas fueron claras.

Observemos los siguientes comentarios:

"Fue muy útil el resolver ejercicios por medios virtuales y que luego las profesoras pudieran enviarlos por mail para su posterior análisis".

"…las tareas al corregirlas no entendía porque estaban bien o porque estaban mal. Falta más aclaración de parte de los docentes respecto a las tareas. Especificar él porque está bien (con sus argumentos matemáticos o porque estaban mal)".

Respecto a la pregunta de si los foros les resultaron útiles para despejar las dudas las respuestas fueron variadas, un 26% estuvo de acuerdo, un 25% no, y el 49 % restante ni de acuerdo ni en desacuerdo. Nuevamente observamos una escasa valoración de la herramienta del foro.

Recorremos algunos comentarios de los estudiantes:

"Si, use los foros, pero no con mucha frecuencia porque hay veces que las explicaciones cuando se encuentran escritas son más confusas o difíciles de entender, en cambio en las clases zoom, al haber interacción es más fácil terminar de entender las cosas".

"No los utilicé porque prefería despejar las dudas en clases de consulta para entender el procedimiento. Hubo muchas veces que tuve dudas y entre al foro y ya las habían contestado, eso también me sirvió".

"Sí, los utilicé; resultaron ser un medio eficiente para consultar dudas tanto teóricas como de los ejercicios y para comunicar a alumnos y profesores fuera del horario de clase".

"No, no los utilice ya que si tenía dudas las preguntaba en clase. Me parece más cómodo y entiendo mejor de esa forma".

5 Conclusiones y Trabajos futuros

- En general la modalidad propuesta para la materia fue valorada de manera positiva por los estudiantes, sin embargo, la mayor parte de ellos prefiere cursar esta materia en la modalidad presencial.
- En cuanto al material propuesto, en general, los estudiantes afirman que los videos fueron de gran ayuda para comprender.
- Observamos que los alumnos tienen preferencias variadas en cuanto a los videos o las clases teóricas sincrónicas, en este sentido la propuesta de la materia respondió a ambos estilos. Además, para muchos estudiantes el complemento de ambos fue adecuado.

- La mayoría de los alumnos no ha utilizado activamente los foros y no ha valorado su uso para despejar dudas. Los alumnos encuentran dificultades a la hora de expresar por escrito sus dudas y prefieren aguardar al encuentro sincrónico para preguntar.
- Las tareas propuestas fueron valoradas por los alumnos ya que les permitieron afianzar sus conocimientos y gracias a las devoluciones comprender sus errores.

Creemos que el contexto generado por la pandemia nos brindó una oportunidad para replantear los modos tradicionales de la clase de matemática aprovechando las tecnologías de un modo más profundo y desplazando al docente del centro del proceso de enseñanza y aprendizaje, que de otra manera hubiesen tardado años en probarse. En general, los estudiantes debieron tener un papel más autónomo y activo, además cobraron mayor relevancia los instrumentos mediadores (ya sea el material propuesto para acercarse al contenido como también las actividades de aprendizaje).

Consideramos necesario seguir trabajando, por un lado, ampliando y mejorando el material disponible, profundizando en la variedad de recursos. Por otro lado, en cuanto a la propuesta de actividades, se podría proponer alguna actividad en la que los alumnos tengan que utilizar los foros, para incentivar el uso de la herramienta, colaborar a que desarrollen competencias para comunicarse a través de este medio y superen las dificultades detectadas. Pensamos que sería favorable proponer también alguna actividad colaborativa para que los estudiantes puedan intercambiar con sus compañeros. En este sentido, nos gustaría indagar también acerca de la valoración sobre las distintas actividades propuestas ya que, en general, no hemos observado muchos comentarios al respecto.

Referencias

1. Gorospe, J. M. C., Olaskoaga, L. F., Barragán, A. G. C., Iglesias, D. L., & Aguirre, B. O. A. Formación del Profesorado, Tecnología Educativa e Identidad Docente Digital. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa-RELATEC,* Vol. 14, No.1, pp. 45-56. (2015)
2. Buxarrais Estrada, M. R., & Ovide, E. El impacto de las nuevas tecnologías en la educación en valores del siglo XXI. *Sinéctica,* No.37, pp. 1-14. (2011)
3. Bolívar, M. J. Análisis de la valoración de los alumnos acerca del uso de un aula virtual como complemento a la clase presencial de Matemática. *CIECIBA 2017, II Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias Básicas*, Vol.1, No.1, pp. 286- *295* (2017)
4. Gros Salvat, B. La construcción del conocimiento en la red: límites y posibilidades. *Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la sociedad de la información.* http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_05/n5_art_gros.htm (2004). Accedido el 1 de mayo de 2021
5. Bolívar, M. J. TIC en la enseñanza de las matemáticas en primer año de la Universidad. Tesis de maestría. Neuquén. Universidad Nacional del Comahue. (2016)

Probabilidad y Estadística 1: Implementación de autodiagnóstico en las clases prácticas

Alfredo Roberto Pauluk, Julio Cesar Bresciani, Silvana Sofía Nelli, Mario José Mantulak

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325, Oberá, Misiones, Argentina
robertopauluk@hotmail.com, bresciani@fio.unam.edu.ar, nelli_sofia@yahoo.com.ar, mantulak@fio.unam.edu.ar

Resumen. Probabilidad y Estadística 1 es una asignatura cuatrimestral común a las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería correspondiente a la Universidad Nacional de Misiones. En el presente trabajo se expone una experiencia de cátedra afín a un autodiagnóstico, realizada en las clases prácticas en el ámbito de la cátedra. El objetivo del trabajo se centró en el análisis de las diversas acciones llevadas a cabo para la implementación del autodiagnóstico en las clases de práctica de la asignatura. El trabajo presenta los resultados de manera cualitativa, de una encuesta realizada a los alumnos al finalizar el cursado. Entre los principales resultados de la encuesta se observa que la mayoría de las respuestas coinciden en que el tipo de ejercicio propuesto por la cátedra es acorde con el tema dictado, teniendo presente que se está trabajando con un grupo de estudiantes en un contexto determinado.

Palabras clave: Autodiagnóstico, Experiencia de cátedra, Evaluación de los procesos enseñanza y aprendizaje.

1 Introducción

Probabilidad y Estadística 1 es una asignatura cuatrimestral común a las carreras de Ingeniería Electromecánica, Electrónica e Industrial en segundo año y perteneciente a Ingeniería Civil en tercer año de acuerdo al plan de carreras vigentes en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones. Como equipo de cátedra y en base a experiencias previas en el dictado de la asignatura, hemos observado que los estudiantes llegaban a los parciales con muchas y diversas dificultades en la resolución de problemas, cuando se aplicaban los contenidos en el marco de un problema real propio de su disciplina. Según Behar Gutiérrez (2001), el plantear problemas relacionados con su profesión, que pueden ser resueltos mediante el uso de la estadística, les sirve de motivación para el estudio de la asignatura [1].

El dictado de la materia se desarrolla a través de dos tipos de actividades, una de corte netamente teórico, y otra referida a la resolución de problemas planteados estructuralmente a través de los denominados trabajos prácticos. Dentro del dictado de la materia se realiza además un laboratorio donde los alumnos aplican en forma práctica y real los conocimientos adquiridos, valiéndose de una herramienta como el software estadístico. Esta actividad posibilita a los alumnos experimentar con datos reales, y mediante la utilización del software, mejorar la comprensión de los conceptos aprendidos [2].

En virtud del marco mencionado, el objetivo primordial de la implementación de un autodiagnóstico en cada clase práctica, que trata la resolución de un problema del tema dictado, en este sentido el estudiante puede ir realizando una mirada crítica a sí mismo, si es que en el/los problema/s presentado/s como autodiagnóstico puede: comprender el enunciado, plantear la resolución e interpretar el resultado. Este autodiagnóstico es elaborado por la cátedra con antelación y es resuelto por parte del alumno en forma individual valiéndose de libros, apuntes de cátedra o tomados en clase teórica, durante los últimos 20 minutos antes de finalizar cada clase.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

El objetivo del trabajo se centró en observar como las acciones llevadas a cabo modifican el desarrollo del dictado de la asignatura y analizar que se tuvieron por parte de los/as alumnos/as. Para ello el trabajo presenta la encuesta hecha a los alumnos, con diversas preguntas donde se realiza una apreciación cualitativa sobre su opinión de la forma de dictado de la asignatura, haciendo hincapié en la autoevaluación.

2 Metodología

2.1 Contenidos a utilizar en la experiencia

Para el desarrollo del autodiagnóstico el estudiante resuelve uno o dos problemas del tema abordado al final de la clase práctica posterior a la clase teórica donde se desarrollan los contenidos teóricos correspondientes.

2.2 ` Consignas para el desarrollo del autodiagnóstico

Las consignas dadas en el autodiagnóstico, son de carácter similar a los ejercicios propuestos en el trabajo práctico, esto es utilizado para identificar si el estudiante asimiló los conceptos principales del tema abordado en la clase práctica.

2.3 Realización y aprobación del autodiagnóstico

Los autodiagnósticos se realizan 20 minutos antes de finalizar el dictado de cada clase práctica que poseen una duración de 3 (tres) horas reloj, el profesor encargado de la clase escribe el problema en el pizarrón y a partir de esto el estudiante evacua sus dudas sobre los enunciados de los ejercicios propuestos, de ese momento en adelante trabaja en forma individual con el apoyo de los materiales disponibles tales como libros, apuntes de cátedra, entre otros.

Para la aprobación del autodiagnóstico, el estudiante debe demostrar el manejo básico de los conceptos brindados mediante la resolución del ejercicio. La evaluación es de carácter cualitativo.

2.4 Autoevaluación

Los objetivos de la Autoevaluación de Probabilidad y Estadística 1 son los siguientes:

a) Motivar a los estudiantes a interiorizarse en los contenidos.
b) Favorecer en los estudiantes el desarrollo del pensamiento estadístico.
c) Integrar el autodiagnóstico como un proceso de enseñanza y aprendizaje, tendiente a favorecer la comprensión.
d) Identificar problemas en el autodiagnóstico.
e) Implementar medidas por parte de la cátedra.

2.5 Encuesta realizada a los estudiantes

Para analizar el impacto del autodiagnóstico se realizó una encuesta entre los alumnos que rindieron el segundo y último examen parcial de la asignatura durante el ciclo lectivo 2018, sumando un total de ***126*** alumnos.

A continuación, se presenta la encuesta realizada a los estudiantes, y es sobre la cual queremos trabajar mostrando las respuestas obtenidas por ellos.

ENCUESTAS SOBRE AUTODIAGNÓSTICO

Exprese su opinión sobre la implementación de autodiagnóstico, con el propósito de que puedan ser útiles como herramienta de autodiagnóstico:

1. ¿Resultó positivo como autodiagnóstico sobre el tema trabajado?

1-2 Poco	3-4 Regular	5-6 Bueno	7-8 Muy Bueno	9-10 Excelente

2. ¿El tiempo destinado a la resolución del ejercicio fue adecuado?

1-2 Poco	3-4 Regular	5-6 Bueno	7-8 Muy Bueno	9-10 Excelente

3. ¿El ejercicio a resolver estuvo acorde al trabajo práctico?

1-2 Poco	3-4 Regular	5-6 Bueno	7-8 Muy Bueno	9-10 Excelente

4. Exprese a su criterio como mejoraría esta instancia de autodiagnóstico.

....
....

3 Resultados obtenidos a partir de una encuesta sobre la experiencia de la autoevaluación

En la Facultad de Ingeniería de Oberá, perteneciente a la Universidad Nacional de Misiones se dictan cuatro carreras de ingeniería: Civil, Electromecánica, Electrónica e Industrial. La asignatura Probabilidad y Estadística 1 es común a todas estas carreras, y se dicta durante el primer cuatrimestre del segundo año del plan de estudios y tercer año para ingeniería Civil.

La encuesta consistió en tres preguntas de opción múltiple, más una pregunta abierta para conocer cuál es su postura sobre el tema, si tiene alguna propuesta al respecto o incluso, dar detalles sobre alguna experiencia que haya vivido vinculada al tema que se está abordando.

En las siguientes figuras podemos apreciar los resultados obtenidos de las encuestas (en porcentajes), de las tres primeras preguntas, referidas en la implementación del autodiagnóstico.

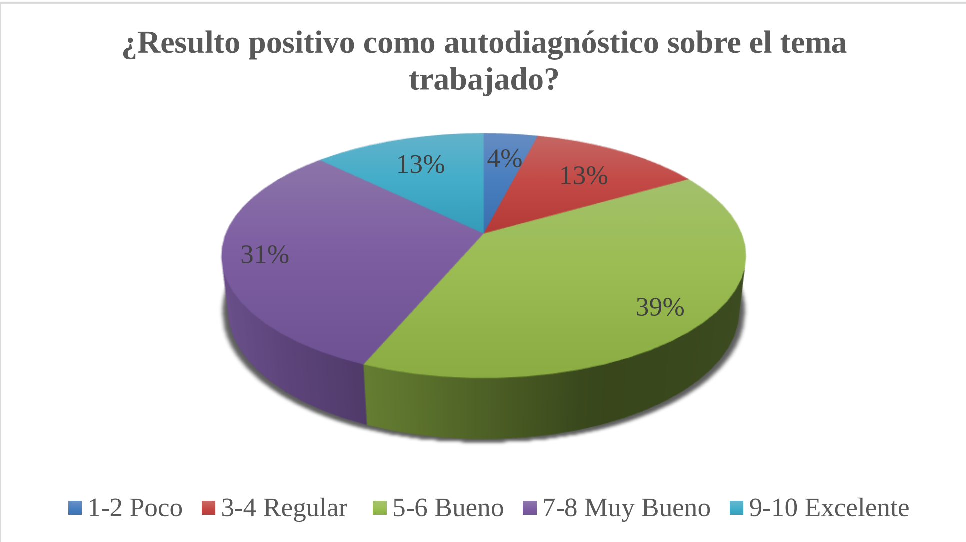


Fig. 2. Gráfico que representa en porcentuales la opinión de los alumnos si resultó positivo el autodiagnóstico.

Opinión en general los que contestaron con opción "bueno" palabras textuales

a) No deberían mejorar en nada, porque así como están trabajando están muy bien.
b) A mi criterio está bien implementado.
c) La verdad estoy conforme el autodiagnóstico ya que nos obliga a estar atentos y presentes en la clase y de esta forma hacer valer la asistencia.

Opinión en general los que contestaron con opción "poco"

d) Creo que ayudaría más afianzar conocimientos y aprenderlos, que el profesor explicara en el pizarrón ejercicios tipo similares al practico en cuestión para tener como guía.
e) Mejoraría si se puede cambiar los horarios porque es difícil asimilar en un mismo día la teoría y la práctica, con un autodiagnóstico al final de clase.
f) Ejercicios más sencillos.

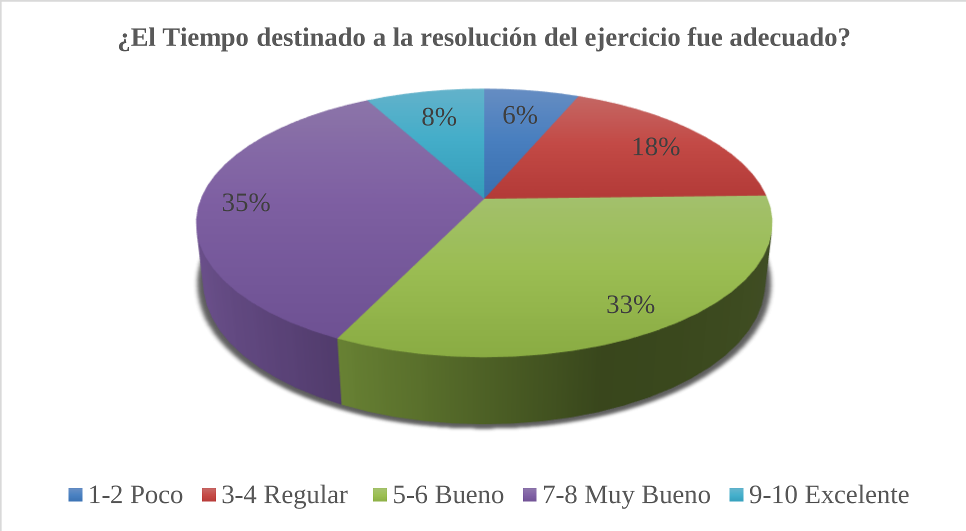


Fig. 2. Gráfico que representa en porcentuales la opinión de los alumnos con respecto al tiempo asignado a la resolución del autodiagnóstico.

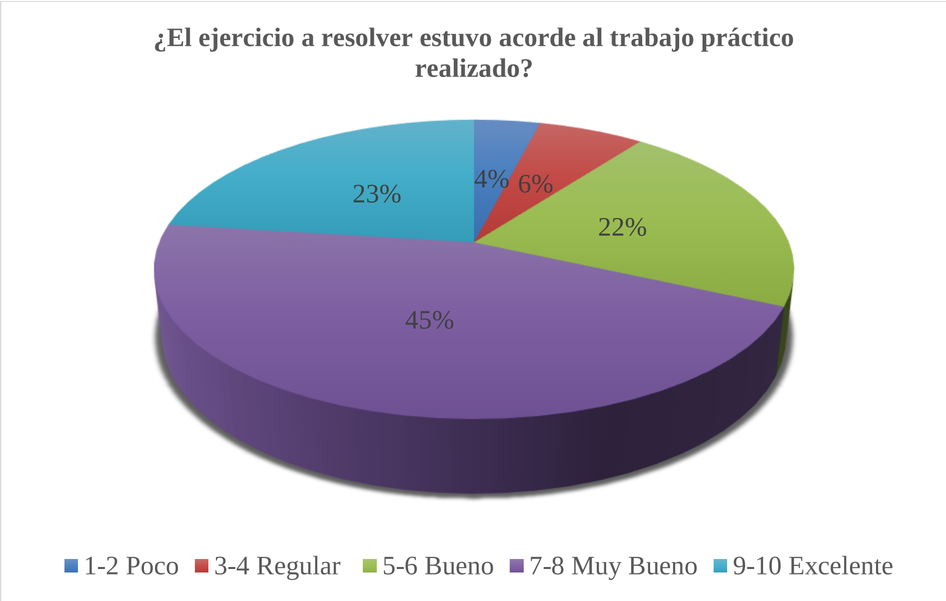


Fig. 3. Gráfico que representa en porcentuales la opinión de los alumnos con respecto al tipo de ejercicio seleccionado para su resolución.

Respecto a la pregunta abierta **¿Cómo mejoraría a su criterio esta instancia de autodiagnóstico?**

Los alumnos expresaron una serie de propuestas a implementar como así también su punto de vista sobre la forma de dictado de las clases.

Las respuestas más frecuentes por parte de los alumnos en las encuestas fueron:

a) Implementar en la clase siguiente a la evaluada una devolución formal por parte del docente, de una explicación en el pizarrón de la forma de plantear y resolver.

b) Y la otra respuesta que más se repitió es que se publiquen los resultados obtenidos de la corrección.

Algunos párrafos textuales del autodiagnóstico

a) "Es de mucha ayuda ya que refresca lo aprendido en las horas de cátedra y lleva a debates de lo aprendido".

b) "Hacer más ejercicios y que los mismos sean más parecidos a los de los parciales".

c) Encuesta vía Moodle para adicionar cuestiones algo teóricas. Más que penar el error se debería fomentar ciertos cuestionamientos claves sobre el tema por medio de múltiple Choice.

Algunas respuestas que llamaron la atención

a) "No tengo quejas al respecto".

b) "No deberían mejorar en nada porque así como están trabajando está muy bien".

Estas respuestas resultan interesantes ya que se sabe que siempre hay cosas que se deben mejorarse, además dan a entender que estos alumnos en particular interpretan a esta consigna como si tuvieran que quejarse de la cátedra, en lugar de tomarlo como un momento de realizar un aporte o quizás contar su experiencia personal aprovechando que es una encuesta anónima.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Cabe aclarar que las conclusiones que se presentan a continuación se extraen de una encuesta que arroja respuestas de carácter cualitativos, extraídos de una muestra de alumnos en particular, ya que son propias del grupo seleccionado en ese contexto y en ese tiempo, así que las declaraciones escritas a continuación, no se afirma que se repetirán en otra instancia, ya sea para el mismo grupo y/o para otro grupo de estudiantes en el mismas condiciones, y las medidas que podrían proponerse son válidas solamente en este contexto para este grupo. Pero si nos parece interesante recopilar este tipo de información de los estudiantes, y poder comparar diferentes grupos de estudiantes.

De las preguntas de múltiples opciones podemos apreciar los siguientes resultados

- Con el desarrollo del autodiagnóstico ha quedado plasmado el interés y la motivación de los alumnos por este tipo de experiencias.
- Respecto al tiempo destinado a la resolución de los ejercicios propuestos, los alumnos coinciden en su mayoría que fue el adecuado.
- Según podemos apreciar en la Fig. 3 los ejercicios propuestos estuvieron en concordancia a los planteados en los trabajos prácticos.

En relación a la pregunta abierta llevada a cabo ha permitido a la cátedra relevar de los alumnos, algunos aportes que se consideran interesantes para incorporar como son:

- A futuro es necesario realizar antes del inicio de cada clase práctica, una devolución por parte del docente del resultado y la resolución del autodiagnóstico de la clase anterior.
- Consideran que los ejercicios de autodiagnóstico se deben asemejar más a los problemas de parcial.
- Otra alternativa propuesta por varios alumnos es de realizar los autodiagnósticos en forma grupal con la finalidad de debatir y expresar distintos puntos de vista. Opción no considerada por tratarse de un autodiagnóstico.

Con relación a la experiencia de cátedra

- La experiencia radicó en trabajar sobre autodiagnósticos para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las clases de práctica de la asignatura Probabilidad y Estadística 1, basado en cuestionarios de autoevaluación con el propósito de mejorar la calidad educativa en los procesos de formación estadística del Ingeniero, y utilizar como estrategia de contención para que los alumnos trabajen durante la clase en la resolución de los ejercicios propuestos en los trabajos prácticos.
- A través de la implementación de los diversos recursos y elementos presentados se ha consolidado una estrategia de enseñanza que le otorga al estudiante un rol activo y favorece los procesos de autoaprendizaje.
- En líneas futuras de trabajo, se propone enfocar en el estudio de las rúbricas de evaluación orientadas al trabajo de formación por competencias.

Referencias

1. Behar Gutiérrez, R. Mil y una dimensiones del aprendizaje de la estadística. Estadística española, Vol. 43, No 148, 2001, pp 189–207 (2001).
2. Batanero, C. Didáctica de la Estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada. Granada, España. http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/matematica/material/referencias/didacticaestadistica.pdf. (2001). Accedido el 15 de noviembre de 2016.
3. Departamento de Matemática. Plan departamental 2016-2019. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Vectores en la Calesita: Articulación Matemática-Física para el Aprendizaje de Trayectorias Parametrizadas

Alberto Miyara[1,2], Pablo Niklison[1], Luciana Talarn[1], Rosana Cassan[1]

[1] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina
ajmiyara@fceia.unr.edu.ar, niklison@fceia.unr.edu.ar, luci_talarn@hotmail.com, cassan@fceia.unr.edu.ar

[2] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta provincial 11, km. 10, 3100 Oro Verde (ER), Argentina
ajmiyara@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Presentamos una experiencia de cátedra desarrollada durante el dictado del tema de trayectorias parametrizadas en un curso de cálculo. Se propuso a los alumnos que investigaran el fenómeno (ilustrado en video y luego reproducido por ellos de forma presencial) que se produce cuando una persona intenta arrojarle una pelota a otra estando ambas sentadas en asientos opuestos de una calesita (tiovivo). Frente al resultado contraintuitivo observado (es imposible hacer llegar la pelota a la persona de enfrente; en el camino se desvía) se les pidió que justificaran matemáticamente las trayectorias observadas. El resultado fue una rica experiencia de aprendizaje significativo en que se produjo una articulación vertical (con temas anteriores de Cálculo y Álgebra y Geometría) y horizontal (con los temas de cinemática, dinámica y mecánica relativa en Física).

Palabras Clave: Articulación matemática-física, Cálculo vectorial, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

En este trabajo se presenta una experiencia integradora de las áreas de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (FCEIA-UNR) llevada a cabo durante el segundo semestre de 2019. Anteriormente, en diversas actividades de evaluación formativa —llevadas a cabo en el marco de un proyecto descrito en [1]—, habíamos detectado entre los alumnos una desconexión entre el concepto de vector analizado desde la perspectiva de la matemática y desde la de la física. Según nuestras observaciones, al estudiar matemática los alumnos visualizan los vectores como pares o ternas de números, esto es como objetos formales que disfrutan de ciertas propiedades y están sujetos a una determinada operatoria. Al estudiar física, en cambio, asocian al vector una representación gráfica (una flecha con una dada orientación), perdiendo en buena medida consciencia de que los vectores tienen componentes y, sobre todo, de que estas pueden cambiar; esto es, que son funciones del tiempo. De esa manera, el estudiante de un curso de mecánica normalmente no asocia la trayectoria de una partícula a una expresión paramétrica.

Cantoral [2] observa que las costumbres y cultura de una comunidad educativa determinan y norman sus acciones y la forma de construir conocimiento. Tradicionalmente, el comienzo del dictado de los cursos de mecánica se ha situado en el primer semestre de las carreras de ingeniería, antes de que los alumnos dispongan de conocimientos adecuados de cálculo diferencial e integral. Por ello, los textos correspondientes no son particularmente intensivos en lo que a rigor matemático se refiere, eludiendo en particular el uso del cálculo vectorial. En la FCEIA-UNR, esto ha continuado siendo así aun cuando se decidió impartir el curso de Física I en el segundo semestre, con el requisito de haber aprobado Cálculo I y en paralelo con Cálculo II, asignatura en la cual se introduce el análisis de funciones vectoriales.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Los textos de cálculo, por su parte, no suelen aprovechar el potencial motivador que puede tener el análisis de movimientos bajo la óptica del cálculo vectorial. En el caso de las trayectorias parametrizadas, algunos libros prefieren introducir su estudio a través de geometrías como la hélice de una molécula de ADN [3], mientras que otros analizan curvas como la cicloide, que si bien se corresponden con un movimiento no constituyen un fenómeno fácilmente observable[4].

Esta falta de armonización entre las asignaturas de matemática y física ha sido objeto de distintas investigaciones. Algunos autores ponen de relieve la necesidad de conectar ambas disciplinas a través del estudio de modelos, tanto en la educación media [5] como en la superior [6]. Otros estudios, como [7] u [8], recomiendan la realización de experimentos en el aula con dispositivos mecánicos y electromecánicos y el auxilio de TICs. En nuestro caso, decidimos apelar a una combinación de ambos enfoques, requiriendo a los estudiantes el desarrollo de un modelo matemático y su puesta a prueba a través de un experimento en condiciones reales.

1.1 Contexto de la experiencia

El trabajo se desarrolló con una comisión nocturna de 24 alumnos de Cálculo II, divididos en ocho grupos de tres. La materia se dicta en el segundo semestre del primer año de las carreras de ingeniería en la FCEIA-UNR. La siguiente tabla muestra los contenidos de las asignaturas de matemática y física que se pusieron en juego en la experiencia.

Tabla 1. Asignaturas de los dos primeros semestres en las áreas de Matemática y Física de las carreras de Ingeniería en la FCEIA-UNR. Se indican los contenidos de las mismas que son relevantes para un abordaje interdisciplinario del concepto de vector.

SEM.	ÁREA MATEMÁTICA		ÁREA FÍSICA	
	ASIGNATURA	CONTENIDOS RELEVANTES	ASIGNATURA	CONTENIDOS RELEVANTES
1	Álgebra y Geometría	Operaciones con vectores, sistemas de coordenadas	Introducción a la Física	Definición de movimiento y cinemática elemental
	Cálculo I	Funciones, cálculo diferencial		
2	Álgebra Lineal	Espacios vectoriales, cambio de base	Física I	Movimiento en una, dos y tres dimensiones; mecánica relativa
	Cálculo II	Funciones vectoriales, trayectorias parametrizadas		

1.2 Marco teórico

El trabajo desarrollado se sustenta en los principios de la cognición matemática fundamentada y corporalizada (GEMC, *Grounded and Embodied Mathematical Cognition*), que establecen una relación entre la activación del sistema motor, el procesamiento espacio-temporal, la representación gestual (y su acompañamiento mediante el lenguaje) y la representación formal escrita, acciones que, según concluyen diversos investigadores sobre el tema, influyen favorablemente en la cognición matemática [9].

La actividad propuesta, con su faz experimental desarrollada en condiciones reales, permitió a los alumnos "vivir" el concepto de sistema de referencia móvil, proporcionando una motivación poderosa para comprender la importancia de su descripción a través de un modelo.

1.3 Contenidos involucrados

La experiencia se propuso vincular el tema de sistemas de referencia móviles y fuerzas ficticias (o inerciales), perteneciente al capítulo de mecánica relativa en Física I, con el de trayectorias parametrizadas, perteneciente al capítulo de cálculo de funciones vectoriales en Cálculo II. Concretamente se investigó el llamado efecto Coriolis, una fuerza ficticia categorizada como "desviadora" que aparece cuando un cuerpo está en movimiento con respecto a un sistema de referencia que gira.

Las llamadas fuerzas ficticias son, en realidad, construcciones matemáticas que explican las diferencias entre los movimientos observados desde sistemas fijos y acelerados. En los abordajes tradicionales de este tema (ver, por ejemplo, [10]), se deduce la expresión vectorial de estas fuerzas y se plantea una ecuación formalmente análoga a la segunda ley de Newton para obtener la aceleración respecto al sistema móvil, lo cual permite deducir las características instantáneas del movimiento (por ejemplo, hacia dónde se desvía). Sin embargo, este análisis no permite, en general, determinar la trayectoria observada desde el sistema móvil por consideraciones dinámicas, dado que si bien es posible, con los datos adecuados, hallar la aceleración en un instante determinado, no se conoce la evolución de dicha acleración en el tiempo, y no es posible integrarla para obtener la expresión de la posición en función del tiempo necesaria para hallar la trayectoria.

La actividad planteada en este trabajo permite al alumno comprender que esa trayectoria puede hallarse por consideraciones puramente cinemáticas, dibujando los vectores relevantes en gráficos adecuados y razonando geométricamente. Este enfoque matemático del problema habitualmente es desestimado en los textos de física.

2 Desarrollo de la experiencia

Se intentó que el trabajo propuesto a los alumnos tuviera una estructura parecida a la de los distintos proyectos que se les requerirá completar en el ciclo profesional de la carrera. Así, se lo dividió en las siguientes etapas:

2.1 Motivación y planteo de la consigna

Se visionó con los alumnos un video educativo elaborado por el Massachussetts Institute of Technology [11]. En el mismo se puede observar a dos docentes que giran en sentido antihorario en una calesita. Este dispositivo, también llamado tiovivo en castellano general, consta de dos asientos unidos a través de una barra a un eje alrededor del cual pueden rotar. Uno de los docentes, que al inicio de la experiencia sostiene una pelota en las manos, intenta arrojársela al profesor ubicado en el asiento opuesto. En el instante del video en que estaba por producirse el lanzamiento, se pausó la reproducción y se pidió a los estudiantes que presentaran su hipótesis intuitiva sobre lo que ocurriría. Con esto se pretendió —y logró— crear un conflicto, ya que al reanudarse el video se comprobó que el movimiento de la pelota no se condecía con ninguna de las teorías formuladas por los alumnos. Lo que se observa es que la pelota se desvía hacia la derecha del lanzador, un resultado altamente contraintuitivo, ya que al no estar el balón vinculado a ninguna fuerza externa no se espera que su trayectoria se pueda torcer.

Luego de la exposición inicial del fenómeno, el video analiza en cámara lenta la trayectoria de la pelota filmada perpendicularmente al plano de giro desde dos puntos de observación: uno externo, fijo al suelo, y otro montado sobre la calesita y solidario al movimiento de esta (Fig. 1). El observador fijo detecta una trayectoria que, en sus componenetes horizontales, es rectilínea, como cabe esperar de acuerdo con la primera ley de Newton; mientras que el observador móvil reporta una trayectoria curva. Esta última es la que observa el espectador del video, ya que sus ojos acompañan a las personas, puesto que está esperando que el objeto que arrojó una le llegue a la otra, y por lo tanto adopta el punto de vista del observador móvil.

(a) (b)

Fig. 1. Trayectoria de una pelota arrojada por un profesor situado en un asiento de una calesita hacia otro profesor ubicado en el asiento opuesto, observada (a) por una cámara externa fija y (b) por una cámara solidaria a la calesita que acompaña el movimiento de los docentes. La calesita gira en sentido antihorario.

Así motivado el tema, se indicó a los estudiantes que su tarea consistiría en determinar ecuaciones paramétricas que describieran la trayectoria detectada por el observador móvil, y en realizar una experiencia práctica para tratar de poner a prueba las expresiones obtenidas.

2.2 Discusión teórica

Al plantearse un desafío de la índole del presentado en el punto 2.1, se debe cuidar que el mismo sea asequible para los estudiantes. Distintos investigadores (véase, por ejemplo, [12]) han aplicado a la educación matemática en ingeniería el concepto de zona de desarrollo próximo de Vigotsky, el cual describe aquella zona del aprendizaje en que el estudiante puede evolucionar hacia una etapa superior de conocimiento a partir de sus saberes previos y de la adecuada orientación de un experto. En nuestro caso, se juzgó apropiado debatir con los alumnos qué elementos de su formación previa intervendrían en la resolución, y cómo se los podía poner en juego para efectivamente describir la situación problemática abordada.

Para ello se planteó el uso de dos figuras auxiliares para describir el movimiento de la pelota arrojada. En la primera de ellas (Fig. 2) se muestra parte de la trayectoria de la calesita observada desde arriba junto con un sistema de coordenadas fijo cuyo origen está situado en el punto en que se lanza el balón. Se preguntó a los alumnos si el lanzador tenía una velocidad respecto a ese sistema fijo. Apoyándose en sus conocimientos físicos previos pudieron responder que tenía la velocidad tangencial de un movimiento circular, a la cual se acordó en llamar $\vec{v}_a$ (velocidad del asiento). También recordaron que si la velocidad angular es ω y el radio de giro es R, entonces el módulo de la velocidad del asiento será $v_a = \omega R$.

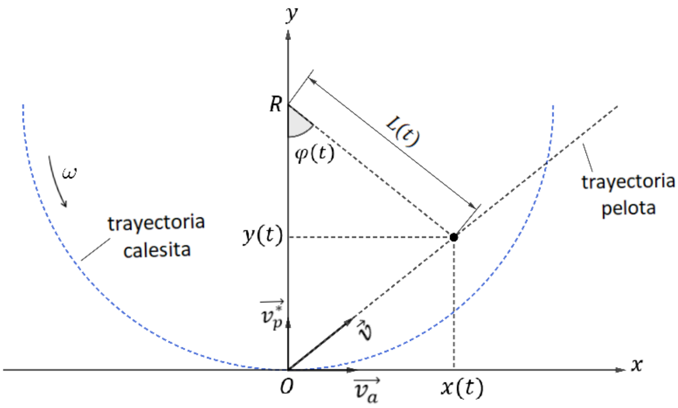


Fig. 2. Primera figura auxiliar utilizada para describir el movimiento de una pelota arrojada desde el asiento de una calesita en movimiento.

A continuación se les planteó que el lanzador arroja la pelota con una velocidad $\vec{v}_p^*$ respecto a sí mismo, y se les preguntó cuál sería entonces la velocidad de la pelota respecto a un sistema fijo. De sus estudios de mecánica relativa pudieron fácilmente deducir que dicha velocidad es

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_p^* \qquad \textbf{(1)}$$

Puesto que en las direcciones x y y no operan fuerzas externas (sí en la dirección z: el peso; pero esa dirección no es relevante en este análisis), pudieron concluir que las componentes de la posición de la pelota observada desde ese sistema fijo al cabo de un tiempo t venían dadas por:

$$x(t) = v_a t \quad ; \quad y(t) = v_p^* t \qquad \textbf{(2)}$$

Se les hizo observar que, conociendo datos adecuados (v_a, v_p^*, R), es posible determinar la distancia de la pelota al centro de la circunferencia $L(t)$, así como su posición angular respecto a la posición inicial, $\varphi(t)$.

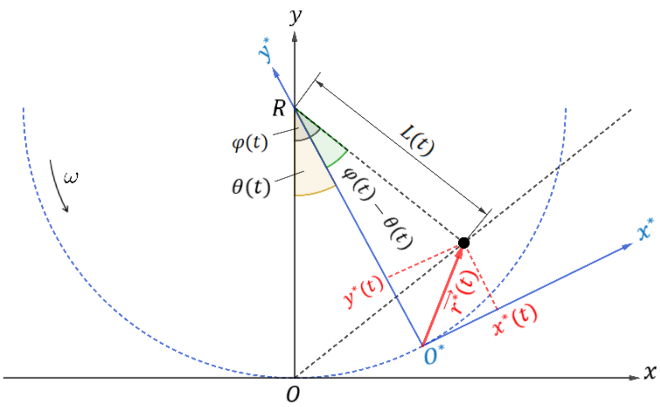


Fig. 3. Segunda figura auxiliar utilizada para describir el movimiento de una pelota arrojada desde el asiento de una calesita en movimiento.

A renglón seguido se les planteó que en el tiempo que le lleva a la pelota llegar al punto $\langle x(t); y(t)\rangle$ el asiento gira un ángulo $\theta(t) = \omega t$. Para obtener la posición de la pelota *observada desde el asiento*, es necesario asociar a este último un sistema de coordenadas. En el análisis apareció como lógico que uno de los ejes fuera coincidente con la barra de la calesita (esto es, que girara con ella), y que el otro fuera perpendicular al primero. Se animó a los estudiantes a trazar una figura en que se mostrara la pelota dentro de su trayectoria al cabo de un tiempo t, el sistema de ejes coordenados $O^*x^*y^*$ asociado al asiento y el vector posición $\vec{r}^*(t) = \langle x^*(t); y^*(t)\rangle$, donde el asterisco (*) indica que la magnitud está ahora observada desde un sistema móvil. Al poner en común sus resultados se obtuvo una segunda gráfica auxiliar (Fig. 3), en donde se advierte ahora que la posición de la pelota, observada desde el sistema móvil, tendrá componentes diferentes de las obtenidas desde el sistema fijo en la Fig. 2.

2.3 Desarrollos matemáticos de los alumnos

Una vez armados con las gráficas auxiliares, se pidió a los alumnos que obtuvieran por sus propios medios ecuaciones paramétricas que describieran adecuadamente el comportamiento de las componentes $x^*(t)$ y $y^*(t)$ de la trayectoria observada desde el sistema de referencia solidario al asiento. También se les pidió que con ayuda de un software obtuvieran las derivadas primera y segunda de estas expresiones, que les permitirían luego determinar los vectores velocidad y aceleración ($\vec{v}^*(t)$ y $\vec{a}^*(t)$ respectivamente).

El resultado esperado en esta etapa era que en primer lugar pudieran obtener $L(t)$ y $\varphi(t)$ apelando a trigonometría simple como:

$$L(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [R - y(t)]^2} = \sqrt{(v_a t)^2 + \left(R - v_p^* t\right)^2} \tag{4}$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{x(t)}{R - y(t)} = \tan^{-1}\frac{v_a t}{R - v_p^* t} \tag{5}$$

Y que pudieran entonces hallar las componentes $x^*(t)$ y $y^*(t)$, también recurriendo a consideraciones trigonométricas elementales, obteniendo las siguientes funciones:

$$x^*(t) = L(t)\,\mathrm{sen}\big(\varphi(t) - \theta(t)\big) = \sqrt{(v_a t)^2 + \left(R - v_p^* t\right)^2}\,\mathrm{sen}\left(\tan^{-1}\frac{v_a t}{R - v_p^* t} - \omega t\right) \tag{6}$$

$$y^*(t) = R - L(t)\cos\big(\varphi(t) - \theta(t)\big) = R - \sqrt{(v_a t)^2 + \left(R - v_p^* t\right)^2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{v_a t}{R - v_p^* t} - \omega t\right) \tag{7}$$

2.4 Representación gráfica

En la consigna de la actividad se requirió que los alumnos graficaran una simulación de la trayectoria de la pelota vista por el observador móvil situado sobre el asiento de la calesita.

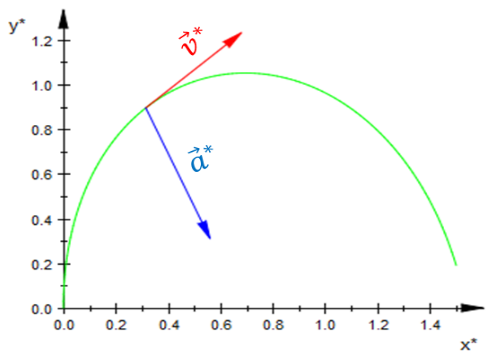


Fig. 4. Representación de la trayectoria de una pelota arrojada desde el asiento de una calesita, observada por el propio lanzador, y de los vectores velocidad y aceleración en un punto del recorrido.

Para ello debieron proponer valores de R, de v_a (o, alternativamente, de ω, y calcular v_a como ωR) y de v_p^*. Debieron, asimismo, proponer un intervalo de valores del tiempo adecuado, en el cual quedara de manifiesto el movimiento observado por la persona que arroja la pelota (una trayectoria en comba hacia la derecha). Como se verá más adelante, esto dio lugar a un interesante debate durante la presentación de los informes.

También se pidió que para un valor determinado del tiempo trazaran sobre el gráfico el vector velocidad $\vec{v}^*$ y el vector aceleración $\vec{a}^*$. El resultado esperado de esta actividad era un diagrama como el de la Fig. 4.

2.5 Desarrollos experimentales de los alumnos

En la consigna se indicó a los alumnos que debían realizar una experiencia en una calesita real, filmando diversas secuencias de lanzamientos de pelotas, con la calesita girando en sentido antihorario y horario, e intentando obtener de los videos datos que les permitieran poner a prueba las ecuaciones paramétricas deducidas. Las instrucciones fueron:

- Localizar, en algún parque o plaza, una calesita donde se pudiera realizar el experimento. Medir el radio desde un asiento al centro.
- Practicar los movimientos necesarios (impulsar la calesita y arrojar la pelota) hasta obtener condiciones estables y reproducibles.
- Ubicar un punto adecuado desde donde filmar el experimento.
- Grabar varios videos de lanzamientos con la calesita girando.
- En alguna de las filmaciones, medir la velocidad de la pelota, la velocidad angular de la calesita y la posición del balón con respecto al lanzador para un cierto tiempo después de arrojado, a los fines del análisis indicado en la subsección siguiente.

Este desarrollo experimental fue llevado a cabo en condiciones no ideales, ya que no se disponía de una calesita con baja fricción como la observable en el video de motivación, y tampoco se disponía de puntos de vista cómodos para efectuar las filmaciones.

2.6 Análisis de resultados

Se pidió a los estudiantes que respondieran qué significa matemáticamente, teniendo en cuenta las distintas funciones que aparecieron durante el trabajo algebraico, el hecho de que la pelota se mueva hacia la derecha del observador (la desviación observada), y si las expresiones obtenidas permitían efectivamente prever ese movimiento antes de graficar la trayectoria.

También se les pidió que contrastaran la posición de la pelota medida en la implementación práctica del lanzamiento con la que predicen las ecuaciones paramétricas obtenidas teóricamente cuando se sustituyen en ellas el radio, la velocidad de la pelota, la velocidad angular y el tiempo determinados en la experiencia, y en caso de no concordar ambos valores se les requirió que reflexionaran sobre los motivos de esa discrepancia.

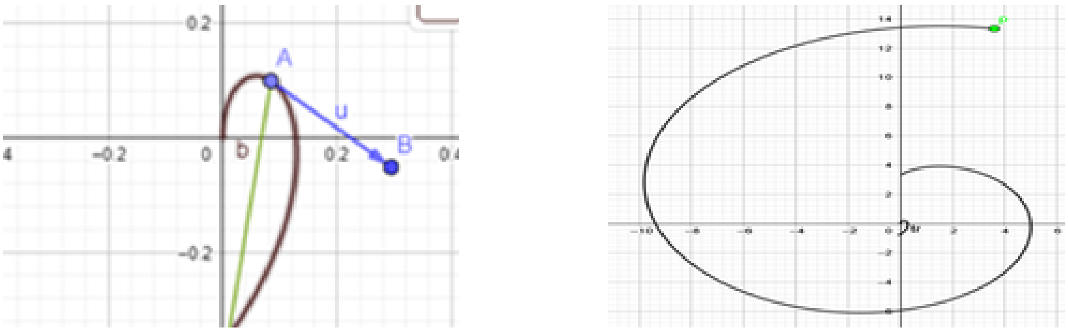
2.7 Presentación grupal

Se requirió que los alumnos entregaran informes escritos y que hicieran una presentación digital en el aula. Se estableció una dinámica en que cada integrante del grupo debía hacerse cargo de una parte de la exposición. Se animó a cada grupo a hacer observaciones, objeciones y correcciones al trabajo de sus compañeros en un clima de respeto y honestidad académica.

3 Resultados

En las presentaciones, se comprobó que los 8 grupos intervinientes pudieron obtener ecuaciones paramétricas correctas para describir el movimiento de la pelota observado desde el sistema de referencia móvil solidario a la calesita. Un debate interesante se produjo a la hora de responder a una de las cuestiones planteadas en la consigna: ¿qué significa, matemáticamente, que el lanzador observe que la pelota se desvía hacia la derecha? La respuesta más general fue que $x^*(t)$ debe crecer, con lo cual debe ser $x^{*\prime}(t) > 0$. La expresión de esta última derivada es muy compleja, por lo cual al alumnado le resultó imposible demostrar analíticamente que era siempre positiva, aunque sí pudieron mostrarlo gráficamente representándola con un software. Un grupo, sin embargo, adujo que el concepto de "derecha", en un movimiento circular, tiene que ver más con ángulos que con posiciones, y que el lanzador verá que la pelota se mueve hacia la derecha cuando la diferencia entre su posición angular y la del balón se incrementa, o sea cuando $\big(\varphi(t) - \theta(t)\big)' > 0$. La expresión matemática de esta derivada sí resultó relativamente sencilla y pudieron, con algún ingenio, demostrar que efectivamente era positiva.

Otra discusión enriquecedora se produjo cuando los distintos grupos presentaron sus gráficas. Algunos alumnos generaron una representación correcta de la trayectoria de la pelota (Fig. 5(a)), mientras que otros obtuvieron una gráfica errónea (Fig. 5(b)).



(a) (b)

Fig. 5. Gráfica de la trayectoria de la pelota con un dominio de valores del parámetro (a) adecuado y (b) inadecuado.

Esto se debió a los intervalos de valores del tiempo utilizados, ya que las ecuaciones (6) y (7) sólo son válidas mientras $v_p^* t < R$; o, equivalentemente, mientras $\varphi(t) < \frac{\pi}{2}$. Si $\varphi(t) > \frac{\pi}{2}$, hay que corregir las expresiones debido a que la función arco tangente no arroja ángulos obtusos, lo que implica expresar $x^*(t)$ y $y^*(t)$ como funciones seccionalmente definidas. Si no se hace esta corrección, se obtiene una gráfica discontinua como en la Fig. 5(b), en donde se aprecia en tamaño diminuto, cerca del origen, una trayectoria como la de la Fig. 5(a), y a continuación un salto (para el valor de t en que $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$) y una trayectoria en espiral que ya no describe el movimiento de la pelota, porque no incorpora la corrección mencionada más arriba. En la puesta en común se debatió qué intervalos de tiempo tenían sentido para la experiencia real llevada a cabo. Los estudiantes propusieron varios criterios, tales como: la pelota debe estar dentro de la trayectoria del asiento de la calesita; la pelota debe estar adelante del observador (esto es, debe ser $y^*(t) > 0$); el tiempo debe ser menor al de caída libre de un objeto desde la altura en que es lanzado. Se discutió la mayor o menor relevancia de cada uno de estos criterios.

Otro punto interesante del análisis de las gráficas lo constituyó el trazado de los vectores velocidad y aceleración. Además de reforzarse la necesidad de aplicar el criterio convencional para la graficación de estos vectores (se los debe dibujar sobre la posición de la partícula, no sobre el origen), la consigna permitió a los estudiantes verificar los resultados teóricos: la velocidad es tangente a la trayectoria, y la aceleración apunta hacia la parte convexa de la curva. Esto fue resaltado por los estudiantes en sus comentarios (ver más abajo).

A continuación se debatieron los resultados experimentales. De los 8 grupos, 3 pudieron validar completamente sus resultados en la etapa experimental, 4 los pudieron validar sólo parcialmente, y sólo un grupo no pudo establecer una validación de la expresión paramétrica de la trayectoria obtenida.

(a) (b)

Fig. 6. Fotogramas de la filmación del lanzamiento de una pelota en una calesita por parte de estudiantes tomados (a) con cámara fija y (b) con cámara móvil solidaria al movimiento circular.

Al consultárselos respecto a las discrepancias entre la teoría y la práctica, varios estudiantes aludieron a la dificultad de efectuar mediciones fiables en las relativamente precarias condiciones en que trabajaron, siendo uno de los principales problemas el de posicionar correctamente las cámaras. Como se observa en la Fig. 6, la cámara fija no se pudo ubicar perpendicularmente a la plataforma giratoria, mientras que la cámara móvil (en la práctica, un teléfono celular sostenido por el alumno sentado en el asiento opuesto al lanzador) tuvo que registrar la trayectoria horizontalmente, perdiéndose la información de una de las componentes del movimiento.

Los grupos que mejores resultados obtuvieron paliaron la dificultad de filmar óptimamente el fenómeno a través del uso de aplicaciones de tracking que siguen el movimiento de objetos y arrojan distancias y ángulos girados sin necesidad de ulteriores cálculos, como se ilustra en la Fig. 7. Si bien este procedimiento aleja al alumno del proceso de medición, los docentes valoraron que los estudiantes investigaran y utilizaran recursos tecnológicos para obtener los datos necesarios a partir de sus filmaciones.

Fig. 7. Ejemplo de uso de un software de tracking (rastreo) para determinar el ángulo girado por el asiento de una calesita entre dos instantes que se especifican.

Otra de las dificultades que mencionaron los alumnos fue la de mantener una velocidad angular constante de la calesita, ya que esta era pesada y presentaba alto rozamiento en el eje, en contraposición al modelo ligero y de baja fricción utilizado en el video de motivación.

Finalmente, se realizó una encuesta entre los participantes en la experiencia, que se complementó con entrevistas presenciales a la hora de rendir la materia. Se les inquirió, en particular, sobre la articulación vertical (con temas anteriores del área matemática) y horizontal (con temas dictados simultáneamente en el área física). Los estudiantes vertieron, entre otras, las siguientes opiniones, que hemos editado apenas mínimamente:

- *“Luego de realizar el experimento pude comprender ciertos desarrollos teóricos realizados previamente en otras asignaturas.”*
- *“Se notó una buena combinación de las materias física y cálculo. Mejorando el entendimiento mediante el análisis matemático (gráficas y ecuaciones de movimiento) de fenómenos físicos.”*
- *“Me enseñó articulaciones verticales, porque pude ver gráficamente la representación de funciones trigonométricas, algo que vi en Cálculo 1. Y articulaciones horizontales, al aplicar cinemática para resolver problemas presentes en las ecuaciones que describían la trayectoria de la pelota; eso era algo que estaba viendo en Física 1.”*
- *“Pude encontrarle sentido al tema de proyecciones sobre ejes oblicuos, que había visto anteriormente pero sin comprender su utilidad”.*
- *“Me parece muy acertado el planteo de dicha actividad ya que me permitió afirmar la presencia de la física y la matemática en fenómenos de la vida real. Me resulta apasionante que, con los contenidos adecuados, cualquier persona pueda explicar estos fenómenos”.*
- *“Cuando vi que la trayectoria que graficamos se desviaba hacia la derecha, y que los vectores velocidad y aceleración apuntaban hacia donde la teoría decía que debían apuntar, fue como que todo encajaba”.*
- *“Me parece que vuelve todo el estudio más realista. Como una auténtica experiencia de estudio de un fenómeno real, partiendo desde la recopilación de la información a través de medios propios (incluyendo el uso físico del cuerpo) hasta llegar a los resultados.”*

4 Conclusiones y futuros trabajos

La experiencia descrita en el presente trabajo demuestra que es posible articular los contenidos de los ejes físico y matemático del ciclo básico en las carreras de ingeniería a partir de actividades en que los aprendizajes de ambas disciplinas se imbrican y potencian mutuamente. Dos temas que habitualmente resultan de asimilación dificultosa, y en donde se hace uso intensivo del lenguaje vectorial —mecánica relativa en Física y trayectorias parametrizadas en Cálculo— fueron reunidos en un mismo trabajo práctico diseñado de tal manera que la asistencia brindada a los alumnos fue la mínima necesaria para que pudieran continuar autónomamente con el resto de la actividad.

Los estudiantes valoraron particularmente tres aspectos de la experiencia: en primer lugar, el hecho de que el trabajo planteara un diálogo entre las áreas de matemática y física; en segundo lugar, que se pusieran en juego saberes de su formación matemática previa, que se revestían ahora de significación; y por último, que se planteara una situación que realmente los impulsaba a buscar una explicación rigurosa de un fenómeno real.

Ciertamente, hay que reconocer que el movimiento estudiado en esta actividad tiene la virtud de permitir un abordaje matemático asequible a los alumnos, situándose así dentro de su zona de desarrollo próximo. No todas las situaciones interesantes desde un punto de vista mecánico admitirán una modelización similarmente sencilla. Sin embargo, no es difícil imaginar variantes de esta actividad. Por ejemplo, se puede construir un dispositivo consistente en un disco de plástico blanco que puede girar alrededor de un eje, y pedir a los estudiantes que lo hagan rotar mientras apoyan un marcador de fibra en el centro y lo mueven hacia la periferia del disco. La línea que quedará marcada en el disco es una espiral, y la tarea de los alumnos será encontrar su ecuación.

Entendemos que este tipo de experiencias afianzan en el estudiante su confianza en la matemática como herramienta que permite modelizar la realidad física, y en la coherencia del edificio teórico-conceptual que se construye alrededor de estas dos disciplinas.

Referencias

1. Miyara, A.; Pita, G.; Añino, M.M.; Carrere, C.; Escher, L.; Ravera, E.: La experiencia de adaptar un sistema de evaluación formativa entre realidades académicas distintas. *Publicación de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura: 95º Aniversario*, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, pp. 81-88 (2016)
2. Cantoral, R.: La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática (Blumenau, Brazil),* CD-ROM pp. 1-15 (2003)
3. Rogawski, J.: Calculus, 2nd Edition. W. H. Freeman and Company, p. 729.
4. Stewart, J.: Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 7ª edición. Cengage Learning, p. 650. (2012)
5. Michelsen, C.: Mathematical modeling is also physics—interdisciplinary teaching between mathematics and physics in Danish upper secondary education. *Physical Education*, 50(4), pp. 489-494 (2015)
6. Trigueros Gaisman, M. Integración de la física y la matemática mediante problemas de modelación. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, 81, pp. 8-14. (2018)
7. González-Calderón, W.; Beleño-Montagut, L.: Propuesta de articulación de la enseñanza de la física y las matemáticas en torno al tema movimiento oscilatorio de ingenierías a partir del desarrollo de proyectos integradores en el aula. *III Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación*, pp.135-140. http://funes.uniandes.edu.co/10538/1/Gonzalez2015Propuesta.pdf. Accedido el 13 de febrero de 2020. (2015)
8. Torroba, P.; Trípoli, M.; Devece, E.; Aquilano, L.: Magnitudes vectoriales: una propuesta didáctica para articular matemática y física. *Revista de Enseñanza de la Física*, Vol. 29, No. Extra, 305–313. (2017)
9. Nathan, M.J.; Walkington, C. : Grounded and embodied mathematical cognition: Promoting mathematical insight and proof using action and language. Cognitive Research, 2:9. https://doi.org/10.1186/s41235-016-0040-5. Accedido el 9 de Julio de 2018. (2017)
10. Creus, E.; Massa, M.; Cortés, A.: Mecánica. UNR Editora. (1998)
11. MIT Department of Physics: The Coriolis effect. https://www.youtube.com/watch?v=dt_XJp77-mk. Accedido el 13 de Febrero de 2020. (2012)
12. Aguilar, A.; Ramos, R.: La zona de desarrollo próximo en el aprendizaje del método de descomposición LU, como actividad en el aula de clases. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 971-978). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (2009)

Aprendiendo de las experiencias de evaluación formativa

María Andrea Aznar, Stella Maris Figueroa, José Campos

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302 , Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina.
maznar@fi.mdp.edu.ar, stellafigueroa@fi.mdp.edu.ar, josecampos10386@gmail.com

Resumen. Este trabajo pretende compartir una experiencia de aprendizaje de los docentes de la asignatura Matemática Discreta, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Dicha experiencia se contextualizó en el proceso de formalización del sistema de evaluación formativa en la materia. A partir de la misma, se busca la capitalización de los aciertos y errores encontrados en la búsqueda de una mayor idoneidad en las propuestas de trayectorias didácticas ofrecidas al estudiante.

Palabras Clave: Evaluaciones formativas, Matemática Discreta, Idoneidad didáctica

1 Introducción

La asignatura Matemática Discreta está situada en el primer cuatrimestre del segundo año del plan de estudios de la carrera de Ingeniería Informática, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, con una carga horaria de 4 horas semanales. Dicha asignatura comenzó a implementarse en el año 2015; al principio, con estudiantes provenientes de otras carreras de ingeniería y, luego, con mayoría de estudiantes ingresados directamente en esa carrera. Los procesos de intervención pedagógica tienen lugar, fundamentalmente, en dos escenarios: la clase predominantemente teórica y la clase práctica, de dos horas semanales cada una. El equipo docente está compuesto por un profesor, un jefe de trabajos prácticos y un auxiliar graduado.

El sistema de evaluación contemplaba fundamentalmente dos objetos: los conocimientos del estudiante y los recursos didácticos empleados. La evaluación de los conocimientos del estudiante se desarrollaban en dos momentos: de manera informal , durante la trayectoria didáctica, clase a clase, con preguntas orales grupales orientadas al diagnóstico de contenidos previos o aquéllos en desarrollo; al final de una trayectoria didáctica, de manera formal, mediante 2 instancias de evaluaciones parciales escritas. Respecto de los materiales empleados, su evaluación se llevaba a cabo mediante el registro de pequeños comentarios de los docentes acerca de los materiales usados en las clases teóricas y/o prácticas, para su mejora en modificaciones posteriores, a partir de observaciones hechas en clases ó de observaciones de errores detectados en las evaluaciones informales o formales.

Los conflictos de significado respecto de algunos objetos matemáticos, detectados azarosamente en algunos estudiantes en evaluaciones informales, y ciertos descensos en el nivel de rendimiento de algunos grupos, nos estimularon a formalizar estas instancias de evaluación, durante la trayectoria didáctica. Así se amplió el sistema de evaluación incorporando instancias de Evaluación Formativa con variedad de modalidades y actores de evaluación. Esta ampliación procuró, por una parte, un acercamiento al planteo de un trayecto formativo que respete lineamientos de un Aprendizaje Centrado en el Estudiante y, por otra parte, acentuar el rol formativo de la evaluación como mecanismo de testeo en procura de la mejora de la idoneidad didáctica de un proceso de construcción de significados.

En este trabajo se presentan algunas descripciones y análisis derivados de la implementación de esta ampliación del sistema que tuvo lugar durante los cuatrimestres del año 2019. El propósito es analizarlo

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

como una experiencia de aprendizaje docente en procura de un proceso de mejora continua de nuestras propuestas didácticas.

A continuación se describen algunas concepciones, en un caso, vinculadas a la formación en ingeniería y, en otro, al marco teórico de didáctica de la Matemática utilizado para analizar esta experiencia.

2 Marco Teórico

2.1 Sobre el Aprendizaje Centrado en el Estudiante de ingeniería y la Evaluación.

El contexto histórico de acuerdos efectuados en el seno de la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI), en trascendentes ejes de trabajo que conforman el Plan Estratégico ASIBEI 2013-2020, y en ese marco, el rol activo del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de Argentina, CONFEDI, son factores propicios que impulsan y contribuyen a los procesos de transformación para la mejora de los aportes de las facultades de ingeniería del país. En el marco de estos acuerdos, una de sus aspiraciones es la de "Consolidar un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante" [1] Para caracterizar este tipo de modelo, Kowalski, Morano, Erck, Enríquez y Cirimelo [2] proponen abordar el Aprendizaje Centrado en el Estudiante (ACE), planteando los siguientes objetivos:

- Implementar Metodologías Activas
- Cambiar del Modelo Centrado en el Profesor a un Modelo Centrado en el Estudiante.
- Conocer a nuestros estudiantes.
- Promover al aprendizaje autorregulado
- Modificar el Sistema de Evaluación

Por supuesto que los objetivos conforman un sistema interrelacionado. Sin embargo en esta presentación focalizaremos la atención en relación a los dos últimos puntos. Básicamente ¿qué es importante al considerar la evaluación en el marco de un modelo de ACE? En Kowalski et al [2] se proponen varios ejes dimensionales para considerar los cambios desde el modelo de enseñanza actual predominante hacia un modelo deseado de ACE. Respecto del eje evaluación señalan algunas características del modelo deseado que comprenden, entre otras, la contemplación del proceso y no sólo de los resultados y la incorporación de varios actores en la evaluación.

2.2 Sobre el Aprendizaje, la Idoneidad Didáctica y la Evaluación

Desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática los elementos teóricos considerados pertenecen al Enfoque Ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Esta propuesta teórico-metodológica, desarrollada por Juan Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font [3] procura articular diversos enfoques de investigación de la Didáctica de la Matemática en un modelo unificado de la cognición y la instrucción que contemple las distintas facetas implicadas en la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. En ese marco el proceso de aprendizaje se define como un acercamiento entre significados personales e institucionales: "El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados". ([3], p.22)

Para el estudio de un proceso de enseñanza aprendizaje, esta teoría pone el énfasis en la detección de conflictos semióticos, planteados como discordancias entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, ya sean personas o instituciones. Según el momento del proceso de instrucción en el que se manifiestan los conflictos semióticos son clasificados como potenciales (a priori del proceso), efectivos (durante el proceso de instrucción) y residuales (a posteriori). ([3])

Para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción Godino, Contreras y Font [4] proponen seis aspectos parciales: idoneidad epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. En esta comunicación se mencionarán en particular dos de los aspectos:

- La *idoneidad interaccional* examina si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- La *idoneidad mediacional* observa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.

Respecto de la idoneidad interaccional el EOS plantea una serie de indicadores [5]. Entre ellos:

- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes buscando que traten de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos
- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
- Se implementan instancias de Evaluación formativa.

Por lo anteriormente descripto, combinando la intención de acercar a un modelo centrado en el estudiante, con el propósito de mejorar la idoneidad interaccional de un proceso de instrucción, se propuso entonces ampliar el sistema de evaluación formalizando las evaluaciones formativas.
Partimos de la idea de a qué tipo de evaluación se la considera formativa: Wiliam, citado por Anijovich [6] señala que una evaluación "…es formativa en la medida en que la evidencia acerca de los logros de los estudiantes es obtenida, interpretada y usada por docentes, aprendices o sus pares para tomar decisiones acerca de sus próximos pasos en la instrucción que tengan probabilidades de ser mejores, o mejor fundadas, que las decisiones que ellos hubieran tomado en la ausencia de la evidencia que fue obtenida"

En la práctica de la evaluación formativa tiene relevancia el feedback formativo que, como expone Anijovich citando a Sadler "debe ayudar a los estudiantes a reconocer la brecha existente entre el nivel en el que se encuentra y el que tiene que alcanzar con respecto a un aprendizaje" ([6], p. 4).

3 Las herramientas de evaluación implementadas

El desarrollo de la asignatura está configurado en dos bloques o trayectorias didácticas que culminan en sendas evaluaciones sumativas escritas individuales: el primer parcial y el segundo parcial.

En los espacios de trabajos prácticos, al concluir un núcleo temático se les propusieron *tareas de autoevaluación formativa* (TAF). Durante estas clases habitualmente se plantean problemas que retoman lo visto en la clase predominantemente teórica con una puesta en común grupal y le sigue un tiempo de consultas respecto a las actividades de la Guía de Trabajos Prácticos. En algunas clases seleccionadas, unos treinta minutos antes de finalizar la clase, aproximadamente, se les habilitaba a los estudiantes, en la plataforma Moodle donde está incorporada la materia, un link para completar un formulario de Google y que debían responder en el momento. Cada alumno, desde su celular accedía a este link y resolvía la Autoevaluación. Estos formularios fueron confeccionados de forma que cada persona que lo completara obtuviera inmediatamente su "calificación", marcando los errores cometidos y las respuestas correctas. En la Fig 1 puede observarse una imagen de uno de dichos formularios:

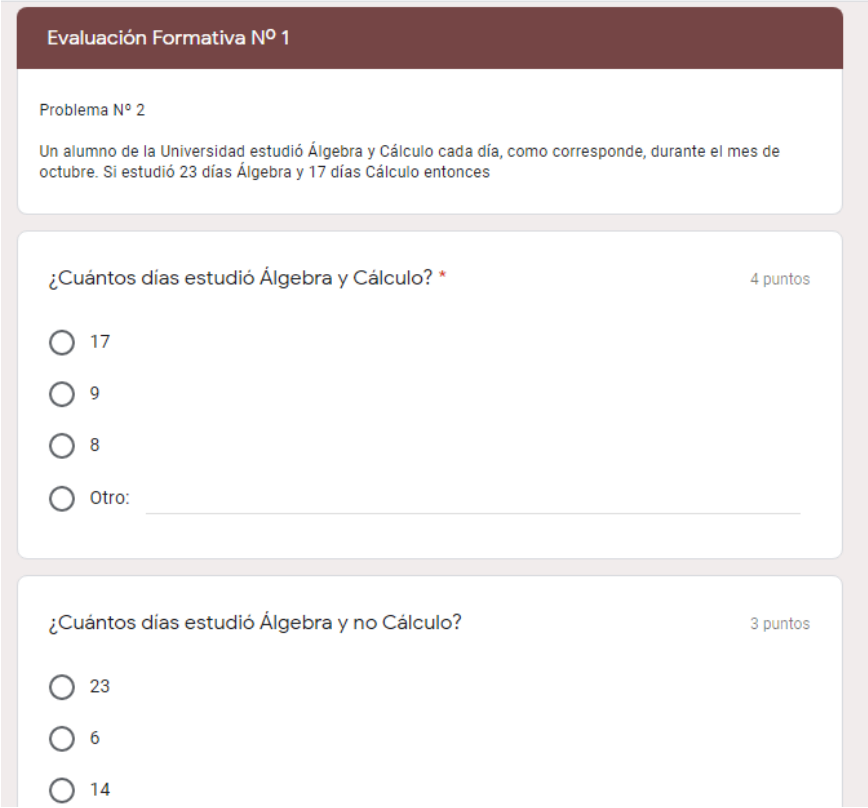


Fig. 1. Imagen de un fragmento de uno de los formularios de Google

En cada sub-trayectoria didáctica se les asignaron a los estudiantes 3 *tareas de hetero-evaluación formativa* (THF). Las mismas fueron propuestas a los estudiantes aclarándoles que tenían, tanto la intención de subsanar a tiempo errores, como la de señalar un ritmo en las actividades de la materia. Para subrayar la importancia de tales evaluaciones se planteó como norma darle una categoría similar a la que, en otras asignaturas, tienen las prácticas de laboratorio: para poder rendir y aprobar cada evaluación sumativa parcial, se exigió, como condición necesaria previa, tener evaluación satisfactoria en 2 de las 3 THF correspondientes.

Las tareas fueron proporcionadas algunas, en espacios presenciales de teoría o de práctica, y otras en el espacio virtual de la plataforma. Algunas tareas fueron propuestas para resolución individual y otras por pares. Las resoluciones de las mencionadas actividades eran entregadas a los docentes de la cátedra quienes realizaban una devolución que, de ser necesario, el alumno o el par de alumnos, debía modificar hasta llegar a una solución satisfactoria. En la Fig 2 puede observarse un fragmento de una de las tareas.

Matemática Discreta. Tarea de Evaluación Formativa Nº1

Resolver en pares y responder respetando el siguiente protocolo:

- Discutir la resolución y entregar una por par de estudiantes, escrita en letra imprenta legible, con lapicera o lápiz de tono oscuro.
- Respetar las convenciones del lenguaje matemático.
- Tiempo de resolución (30 minutos)

Apellido, Nombres: ____

Apellido, Nombres: ____

1) Considerar los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B \subseteq U$ y $H \subseteq U$ con $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. La cadena de bits que define a B es $[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$ y $H = \{4, 6, 8\}$

   a) Responde Verdadero o Falso en cada uno de los siguientes casos. En caso de ser falso, escribe la expresión correcta

      i) Si $T \epsilon\, P(H)$, entonces $T \subseteq H$.

      ii) $\{1, 3, 4\} \subset P(B)$

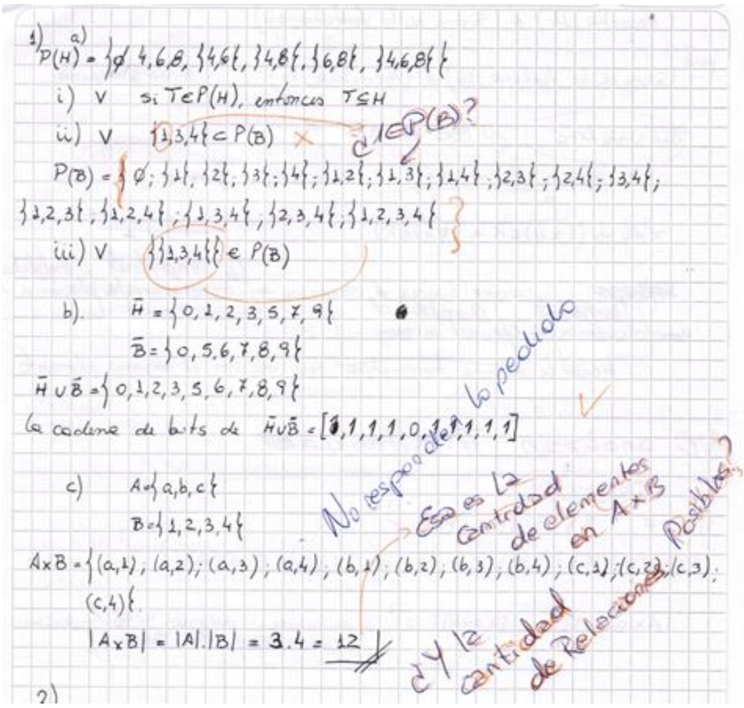
      iii) $\{\{1, 3, 4\}\} \epsilon\, P(B)$

   b) ¿Cuál es la cadena de bits que representa al conjunto $\bar{H} \cup \bar{B}$?

   c) ¿Cuántas relaciones R distintas pueden definirse con $R \subseteq A \times B$?

Fig. 2. Imagen de un fragmento de enunciado de una THF

En la devolución que los docentes realizábamos procurábamos hacer preguntas orientadoras para construir un feed-back formativo que les permitiera saltar la brecha entre lo evidenciado en el producto y el significado institucional que se pretende que el estudiante construya. Se expone un ejemplo en la Fig 3


1) a) $P(H) = \{\emptyset, 4, 6, 8, \{4,6\}, \{4,8\}, \{6,8\}, \{4,6,8\}\}$

i) V si $T \in P(H)$, entonces $T \subseteq H$

ii) V $\{1,3,4\} \subset P(B)$ × ¿$1 \in P(B)$?

$P(B) = \{\emptyset; \{1\}, \{2\}, \{3\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}; \{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{1,3,4\}, \{2,3,4\}; \{1,2,3,4\}\}$

iii) V $\{\{1,3,4\}\} \in P(B)$

b). $\bar{H} = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

$\bar{B} = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\bar{H} \cup \bar{B} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

La cadena de bits de $\bar{H} \cup \bar{B} = [1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$

No responde lo pedido ✓

c) $A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \times B = \{(a,1); (a,2); (a,3); (a,4); (b,1); (b,2); (b,3); (b,4); (c,1); (c,2); (c,3); (c,4)\}$

$|A \times B| = |A| . |B| = 3 . 4 = 12$

Esa es la cantidad de elementos en $A \times B$

¿Y la cantidad de Relaciones Posibles?

2)

Fig. 3. Resolución de una THF con comentarios de feed-back formativo

4 Algunos análisis

La implementación de estas evaluaciones formativas durante las dos cursadas de 2019 fue muy enriquecedora como experiencia de aprendizaje para nuestra labor docente. A continuación compartiremos algunos pareceres sobre la misma surgidos de la reflexión del equipo docente.

4.1 Aspectos positivos

Las Tareas THF presenciales, resueltas en equipos de 2 alumnos, favorecieron la interacción y discusión de problemáticas y razonamientos. Esto permitió observarlo como una mejora en la idoneidad interaccional del proceso de instrucción.

La detección de conflictos semióticos durante el proceso de instrucción colaboró en muchos casos a la solución de los mismos antes de las evaluaciones sumativas. También señaló aspectos a modificar en las prácticas propuestas a los estudiantes en futuras cursadas. Ambos insumos señalados colaboran a la mejora de la idoneidad interaccional y mediacional.

La metodología de las THF presenciales contribuyó a abordar la evaluación de ciertas prácticas que, por la demanda de tiempo, no son aptas de ser evaluadas en un examen parcial. Por ejemplo, en una THF, se planteó como actividad la interpretación de un texto referido al sistema criptográfico de llave pública RSA pero se daban 48 hs para realizar la tarea.

Como puede observarse en el enunciado de una THF presentada en la Figura 2, colateralmente, se abordaron otros saberes que hacen a las competencias del ingeniero en formación, como el respeto por las normas de entrega y convenciones de trabajo.

Respecto de las voces de los estudiantes, en el segundo cuatrimestre se implementó, en la plataforma virtual, una encuesta optativa y anónima, titulada “Encuesta sobre cómo te resultó la asignatura”; en la misma se les preguntaba sobre diferentes aspectos entre los que figuraban las tareas formativas (en realidad las THF) y los formularios de google (TAF). Un fragmento se muestra en la Fig 4.

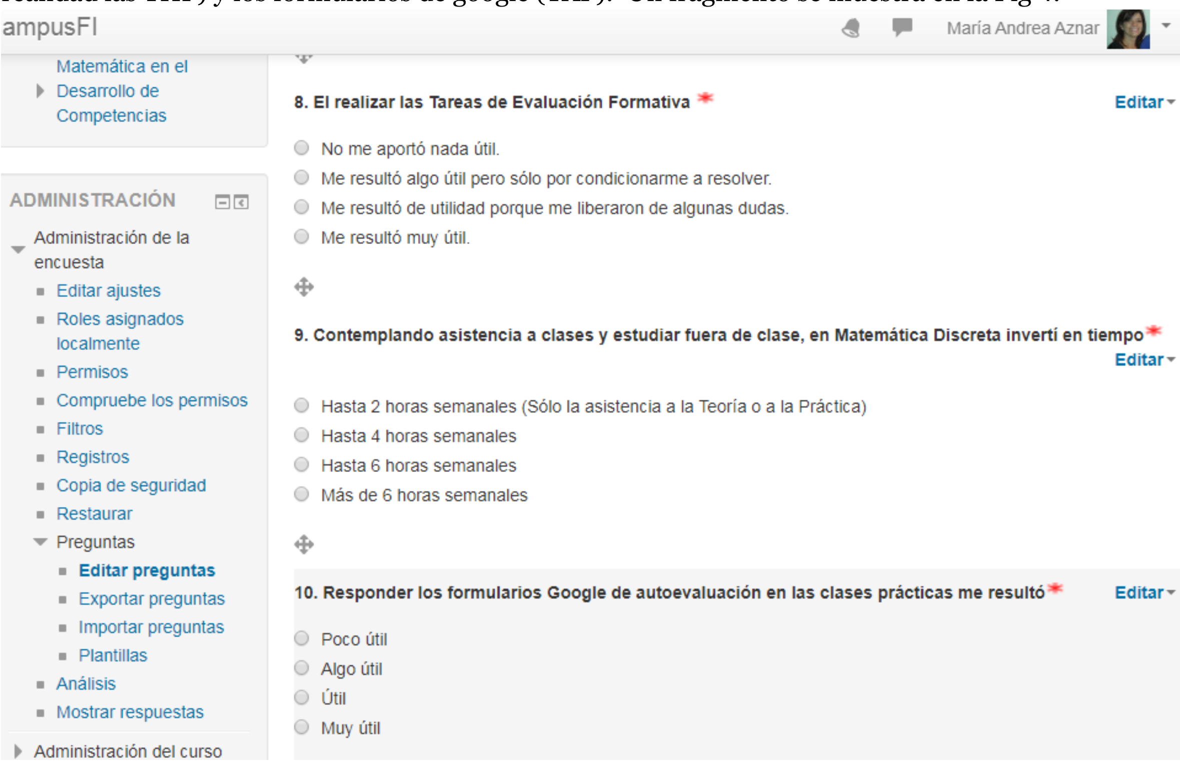


Fig. 4. Encuesta implementada

Sólo un cuarto de los estudiantes la respondieron y sus valoraciones se muestran en la Tabla 1. Aunque se trata de pocos casos se observa que califican en general de utilidad las THF con una tendencia de cierta preferencia por sobre las TAF.

Tabla 1. Frecuencias relativas de respuestas en los ítems vinculados a evaluaciones formativas.

El realizar las tareas de evaluación formativa (THF)		Responder los formularios Google de autoevaluación en las clases prácticas me resultó (TAF)	
No me aportó nada útil	0/11	Poco útil	0/11
Me resultó algo útil pero sólo por condicionarme a resolver	3/11	Algo útil	5/11
Me resultó de utilidad porque me liberaron de algunas dudas	2/11	Útil	4/11
Me resultó muy útil	6/11	Muy útil	2/11

4.2 Aspectos inconvenientes

La implementación de 3 tareas de evaluación formativa pre-parcial con revisión, devolución y post-revisión demandó un notable esfuerzo adicional a los docentes respecto de las tareas habituales, urgidos además por los tiempos para que los feed-back tuvieran sentido y utilidad.
Las THF presenciales demandaron más tiempo del planificado lo cual demandaba ajustes de cronograma.
Se observó un deslizamiento en el uso del recurso tiempo por parte de algunos estudiantes. Como se plantearon condiciones necesarias de aprobación de suficiencia en las THF en muchos casos se observó que ciertos estudiantes dejaban de hacer las actividades de las Guías de Trabajos Prácticos para realizar las THF. Esta fuga del recurso tiempo implicaría una baja de la idoneidad mediacional.
Ambos aspectos negativos nos llevan a replantearnos el sistema de evaluación formativa, bajo una perspectiva más minimalista.

4.3 Aspectos a estudiar

Respecto de las razones de número de aprobados/total de alumnos que realizaron alguna actividad académica, se observó cierta mejora, en relación a cuatrimestres inmediatos anteriores, en los que se había verificado un descenso considerable respecto de los primeros años. En el gráfico de la Figura 5 se exponen las razones mencionadas. Se señala como un aspecto a estudiar porque el rendimiento es un fenómeno multicausal que no puede atribuirse sólo a un factor como el sistema de evaluación.

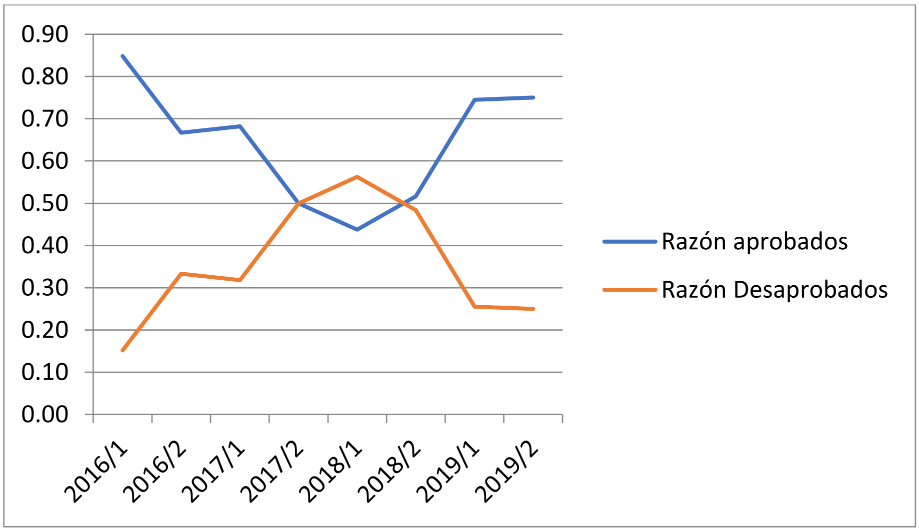


Fig. 5. Razones de aprobados y desaprobados en las sucesivas cursadas.

Otra cuestión a estudiar y mejorar surge respecto de la autonomía del estudiante. Si un aprendizaje centrado en el Estudiante implica un estudiante más activo y propuestas didácticas que lo propicien, una propuesta de evaluación centrada en el estudiante también debe potenciar su rol como sujeto que evalúa: en sus auto-evaluaciones y en co-evaluaciones. Para que pueda ejercer ese rol es necesario que estén muy claramente explicitados los criterios. Al respecto la elaboración de rúbricas se plantea como un camino a seguir.

5 Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se expusieron las instancias de implementación de un sistema de auto-evaluaciones y hetero-evaluaciones formativas en una asignatura de Matemática de segundo año de una carrera de ingeniería. Se expusieron algunas líneas de análisis que nos llevan a reflexionar sobre acciones a seguir para mejorar nuestra propuesta didáctica. Se observaron algunos beneficios que impactaron sobre los estudiantes y son insumos para mejoras didácticas.
Quedó también planteada la necesidad de mejorar la gestión del recurso tiempo, del estudiante y del docente, ligado a la cantidad de instancias de administración, bajo un concepto minimalista en procura de un avance en la idoneidad mediacional.
Por otra parte, en consonancia con un modelo de Aprendizaje Centrado en el Estudiante planteado por CONFEDI, y con el propósito de una mejora en la idoneidad interaccional, se esboza el desafío de incorporar co-evaluaciones guiadas por rúbricas.
Nos reconocemos como aprendices en un proceso de cambio. Como señalan Kowalski, Morano, Erck, Enriquez, Arlettaz y Cirimelo ([7], p.67).
"...No estamos hablando de situaciones amenazantes a enfrentar, pero sí de situaciones de las cuales nos debemos ocupar, y no alcanza con lo que tenemos. Debemos cambiar de roles en un proceso gradual y progresivo. Así como los estudiantes deben construir sus competencias en forma gradual, nosotros como docentes también debemos hacerlo, en forma gradual, constante y con compromiso."

Referencias

1 Consejo Federal de Decanos de Ingeniería – CONFEDI. Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina "Libro Rojo de Confedi". Disponible en https://confedi.org.ar/librorojo/ (2018). Accedido el 13 de Febrero de 2020.
2. Kowalski, V., Morano, D., Erck, I., Enríquez, D. y Cirimelo, S. Programa de Formación Docente para orientar su práctica hacia la Formación por Competencias. Módulo 2: Mediación Pedagógica para la Formación de Competencias. Segundo Documento ¿A Quién Enseño Yo, Entonces? (2019).
3. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V..: Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (2009) Versión ampliada del artículo The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, Vol. 39 (1-2): 127-135 (2007) http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_instruccion_matematica.pdf Accedido el 20 de febrero de 2018.
4. Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. : Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 26 (1): 39-88. (2006). Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid_2004/godino_contreras_font.pdf. Accedido el 20 de febrero de 2018.
5. Godino, J. D.,Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 8. Número 11. pp 111-132. Costa Rica (2013).
6. Anijovich, R La evaluación formativa en la enseñanza superior. Voces de la educación. (2017) 2 (1) pp. 31-38 Disponible en https://www.revista.vocesdelaeducacion.com.mx/index.php/voces/article/view/32. Accedido el 20 de febrero de 2020.
7. Kowalski, V., Morano, D., Erck, I.,Enriquez, D., Arlettaz, M. y Cirimelo, S. Programa de Formación Docente para orientar su práctica hacia la Formación por Competencias Módulo 4: Gestión por Competencias y Diseño de Programas. Primer Documento. Buscando Cartas de Navegación y Capitanes. Octubre de 2019.

Curvas polares y paramétricas, un estudio de las prácticas matemáticas asociadas a sus representaciones

Sandra Baccelli, Eugenio Martínez Canto, María Laura Distéfano

Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302, Mar del Plata, CP7600
sbaccelli@gmail.com, emcanto@fi.mdp.edu.ar, mldistefano@fi.mdp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presenta un avance de una investigación realizada con un grupo de estudiantes de un primer curso de Análisis Matemático, de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata de Argentina. El objetivo de la experiencia es investigar si los estudiantes han construido el significado asociado a curvas paramétricas y polares. El Marco Teórico utilizado es el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática El análisis de los resultados obtenidos, a partir de la administración de un instrumento, permitió detectar falencias en la construcción de significado de dichas curvas. Para superar las dificultades evidenciadas se plantea intervenir en el sistema de prácticas implementadas por la cátedra, proponiendo el desarrollo de videolecciones que formarán parte de un aula virtual. Se muestran los primeros resultados de su implementación y las acciones a futuro.

Palabras Clave: Curvas polares y paramétricas, Prácticas matemáticas, Significado, Videolecciones.

1 Introducción

El presente trabajo se inscribe en el contexto de un Proyecto de Investigación, que se viene desarrollando desde el año 2018 en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, cuyo objetivo general es analizar la adecuación de distintas instancias de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las asignaturas de matemática al perfil del ingeniero. Este proyecto se centra principalmente, en el análisis y la valoración de la adaptación curricular y socio-profesional, como así también de las conexiones intra e interdisciplinares en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Ingeniería.

Paralelamente al desarrollo del Proyecto antes mencionado, la gestión de la Facultad de Ingeniería impulsa el cambio de Plan de Estudios en el contexto de la Propuesta de Estándares de Segunda generación para las carreras de ingeniería de Argentina [1], que fuera aprobada por la Asamblea del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI) en junio de 2018. En la Propuesta realizada se definen diez Competencias Genéricas de Egreso (CGE), a saber:

Competencias tecnológicas

1. Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
2. Concebir, diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería.
3. Gestionar, planificar, ejecutar y controlar proyectos de ingeniería.
4. Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería.
5. Contribuir a la generación de desarrollos tecnológicos y/o innovaciones tecnológicas.

Competencias sociales, políticas y actitudinales

6. Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
7. Comunicarse con efectividad.
8. Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global.
9. Aprender en forma continua y autónoma.

10. Actuar con espíritu emprendedor

También se detallan las competencias específicas de cada terminal, aclarando que:

> El plan de estudios debe garantizar el desarrollo de las competencias específicas para las actividades reservadas definidas en la terminal y verificar el cumplimiento, además, de la formación en el proyecto académico de la carrera, de los alcances de título que defina la institución, con la profundidad y calidad propia de un título de ingeniero [1].

La propuesta impulsada por el CONFEDI representa un cambio de paradigma a la enseñanza tradicional en las carreras de Ingeniería, tanto en aspectos teóricos como metodológicos. Así lo indica el impulso de diferentes talleres y posgrados tendientes a la formación de docentes en el Aprendizaje Centrado en el Estudiante (ACE) [1].

Con este contexto, en el presente trabajo se muestran los avances realizados en un primer curso de Análisis Matemático al indagar si las *prácticas matemáticas* (PM) implementadas aportan a las CGE, investigando en un grupo de estudiantes la construcción del significado de curvas paramétricas y polares. También se muestran los primeros avances en el diseño de videolecciones que forman parte de una secuencia didáctica en un aula virtual del campus de la Facultad de Ingeniería. Se espera que dicha secuencia impulse en los estudiantes la ampliación del significado asociado a las curvas permitiendo así superar las dificultades observadas tanto en la cursada como a posteriori en materias afines. Finalmente se presenta una síntesis de futuras acciones.

2 Marco teórico

Los constructos teóricos y metodológicos que sustentan esta comunicación se basan en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font [2]. Uno de los conceptos centrales para este enfoque es el de *práctica matemática*, considerada como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas [3]. Al sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver situaciones problemáticas se lo denomina *significado* de un objeto matemático [4].

3 Metodología

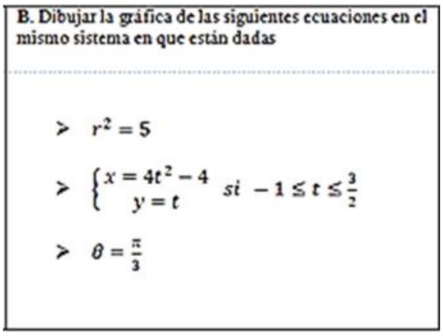
En el desarrollo de la investigación se identificaron 24 prácticas matemáticas (PM) a lo largo del dictado de la asignatura. En este escenario, se realizaron entrevistas con los docentes de las asignaturas a las que aporta este curso de Análisis Matemático, para corroborar si los estudiantes tenían adquiridas las PM y en qué grado, después de haber aprobado la asignatura. Se les proporcionó una tabla en la que cada docente entrevistado indicaría cuales, de las 24 PM, eran requeridas por su asignatura y, de ser así, se les solicitaba que calificaran con *bien, regular* o *mal* el uso de dichas prácticas por parte de los estudiantes. Además, en la tabla en cuestión, se proporcionaba en espacio donde cada docente podía verter observaciones referidas a cada una de las PM, las cuales se vieron enriquecidas por las apreciaciones de los docentes en la entrevista personal.

Entre las PM que los entrevistados indicaron como no establecidas por los estudiantes se encuentran las relacionadas con curvas paramétricas, polares y cartesianas, a saber:

- PM 1. Graficar manualmente y/o por uso de TIC una curva dada en coordenadas paramétricas o polares.
- PM 2. Convertir una ecuación paramétrica/polar/rectangular de una representación a otra.
- PM 3. Identificar una curva dada en coordenadas polares por su nombre, ecuación y/o aspecto gráfico.

Las PM especificadas se corresponden con diferentes maneras de representar un objeto matemático, e implican la apropiada utilización de los registros gráfico, coloquial y simbólico. Estos cambios de registros ocasionan dificultades en el aprendizaje de la matemática, siendo tema de numerosas investigaciones [5], [6].

En el presente trabajo se muestran algunos resultados que fueron recabados en la cohorte 2018, luego de administrar un instrumento para indagar en la construcción de las tres PM enunciadas. En la Fig. 1 se muestra uno de los enunciados de la primera actividad realizada por los estudiantes.


B. Dibujar la gráfica de las siguientes ecuaciones en el mismo sistema en que están dadas

- $r^2 = 5$
- $\begin{cases} x = 4t^2 - 4 \\ y = t \end{cases}$ $si \ -1 \le t \le \frac{3}{2}$
- $\theta = \frac{\pi}{3}$

Fig. 1. Enunciado de la actividad resuelta por los estudiantes.

La actividad a la que se hace referencia fue resuelta por los estudiantes después de que rindieran el primer parcial de la asignatura que evalúa, entre otras, las PM que son objeto de estudio de este trabajo. Posteriormente, durante la devolución realizada, se registraron los comentarios de los estudiantes y se compartieron las resoluciones a las actividades con el soporte gráfico de GeoGebra.

Con el objetivo de superar las dificultades manifestadas por los estudiantes se propuso un cambio de metodología en la enseñanza y aprendizaje de la unidad correspondiente a curvas paramétricas, polares y cartesianas, consistente en un aula virtual con videolecciones y ejercicios interactivos. Hasta ese momento los estudiantes resolvían la guía de ejercicios sin el dictado de clases teóricas, pero con el soporte de un apunte teórico-práctico para las clases prácticas.

4 Resultados

4.1 Referidos a la actividad

Los resultados de las producciones de los estudiantes de la actividad de la Fig. 1 se observan en los porcentajes de resolución de cada inciso en la Fig. 2. Se consideraron tres niveles para categorizar el grado de resolución: Bien resuelto, Parcialmente resuelto, Mal o No resuelto.

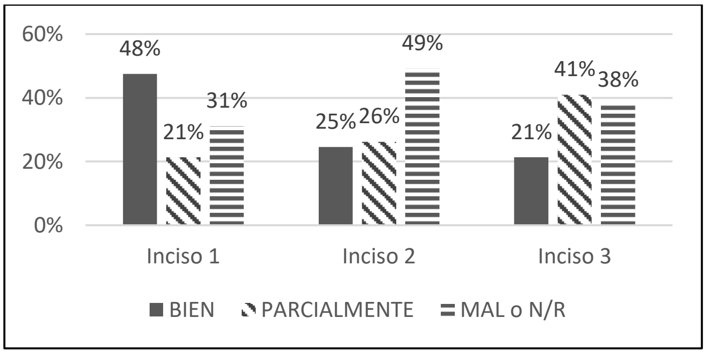


Fig. 2. Porcentajes de desempeño por inciso.

Los porcentajes observados en la Fig. 2 muestran que los estudiantes no tienen buen desempeño al representar curvas en coordenadas no convencionales (paramétricas-polares). En los tres incisos se observa que el porcentaje de resoluciones correctas no alcanza ni a la mitad del alumnado. El hecho que menos de la mitad del alumnado haya resuelto satisfactoriamente los tres incisos permite concluir no han adquirido las habilidades necesarias en relación a la PM1.

La circunferencia a graficar en el primer inciso tuvo el mejor porcentaje de respuesta correcta (48%). En el momento de devolución muchos de los estudiantes manifestaron haber asociado dicha representación con la de un complejo de módulo constante, desarrollada en la asignatura Álgebra, lo que explicaría la diferencia de porcentaje para este inciso.

Sólo el 25% de los estudiantes graficó correctamente la curva paramétrica del inciso 2 y el 21% lo hizo para la representación polar en el siguiente inciso, lo que muestra el bajo porcentaje de estudiantes que lograron adquirir el significado relativo a la PM1. Con respecto a este último inciso no se pudo determinar si lo graficado por los estudiantes fue la curva polar o un ángulo de amplitud θ. Algunos de los estudiantes expresaron haber graficado un ángulo, lo que deja en evidencia que la PM3 no se encuentra establecida por ellos.

Estos resultados muestran que el significado asociado a curvas paramétricas y polares no está construido por la mayoría de estudiantes de la cohorte analizada. Entre los factores que pueden incidir negativamente se encuentra el sistema de prácticas implementadas por la cátedra, es por ello que surgió la necesidad de revisar ese sistema de prácticas con el fin de mejorar las habilidades que se espera sean desarrolladas por los estudiantes. En este sentido se propuso la implementación de videolecciones como parte del aula virtual de la cátedra. Algunos resultados de la mencionada implementación se muestran en el siguiente apartado.

4.2 Referidos a las videolecciones

Como parte del cambio de estrategia de enseñanza para la superación de las dificultades manifestadas por los estudiantes, se elaboraron videolecciones con características específicas que las identifican:

- identidad propia: realizada por los mismos docentes que guían a los estudiantes de manera presencial, enmarcadas en un canal de YouTube de la cátedra, la misma se encuentra disponible en: https://www.youtube.com/channel/UC2_uonLvQpDxWn-hcyXMs7g (Fig. 3).
- intervenciones digitales (post-producidas) que le dan valor agregado permitiendo la vista conjunta de una aplicación de celular que las diferencian de una clase tradicional.
- dinamismo y tiempo adecuados, que evitan el "abandono" del video.
- permiten al estudiante la administración del ritmo de exposición utilizando la pausa o el retroceso de ser necesario.
- subtituladas permitiendo así el acceso a personas con problemas auditivos.

Fig. 3. Imagen que ilustra la videolección de curvas paramétrica.

En los próximos apartados se presentan apreciaciones del video desde dos perspectivas. En primer lugar, se describen las acciones desarrolladas en el video, con un pequeño análisis de la contribución que éste realiza a la construcción de significado. En segundo lugar, se presentan valoraciones realizadas por los estudiantes.

4.2.1. Descripción y aporte del video

El docente protagonista del video comienza puntualizando que la manera de graficar en coordenadas cartesianas no es la única forma de realizar el gráfico funcional. Planteando así, no sólo una motivación inicial para mirar el video, sino también la contribución a la ampliación del significado de función. Utiliza un ejemplo extra matemático de una partícula que se mueve en un plano describiendo una curva, dicho movimiento se visualiza en una ventana que interactúa con el docente. En simultáneo con el movimiento de la partícula se ve un “reloj”, que marca el tiempo transcurrido en segundos. Este objeto visual, acompañado de la explicación del docente, pone en evidencia que el tiempo es un elemento de importancia en este tipo de representación, introduciendo así la noción de lo que luego será el parámetro. El docente resalta el hecho que la curva descrita por la partícula no puede ser representada por una relación funcional $y = f(x)$, por existir valores de x que están relacionados con más de un valor de y. Reafirma que para describir la posición de la partícula a cada tiempo corresponde una posición para “x” y una para “y”, mostrando algunas posiciones de la partícula para determinados tiempos con la utilización de recursos visuales que se refuerzan con recursos auditivos.

Con el uso de la tiza y el pizarrón, el docente institucionaliza los conceptos dando lugar a la noción de curva paramétrica en forma simbólica y plantea un ejemplo para graficar la curva. En el desarrollo del ejercicio se utilizan cuatro registros de representación: el coloquial, el simbólico, el tabular, el gráfico. En estos tres últimos se introducen modificaciones a los conceptos conocidos por los estudiantes lo que contribuye a la ampliación del significado, a saber:

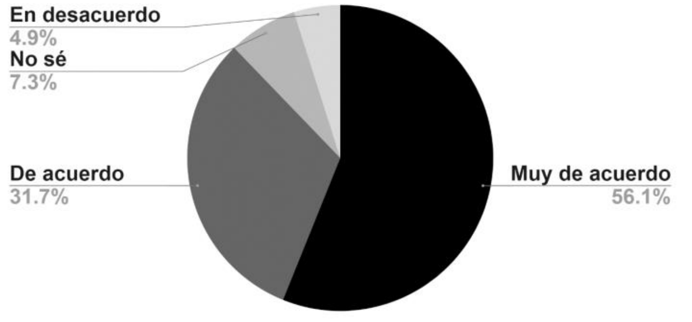
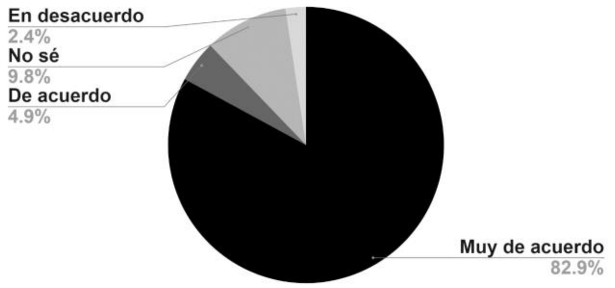
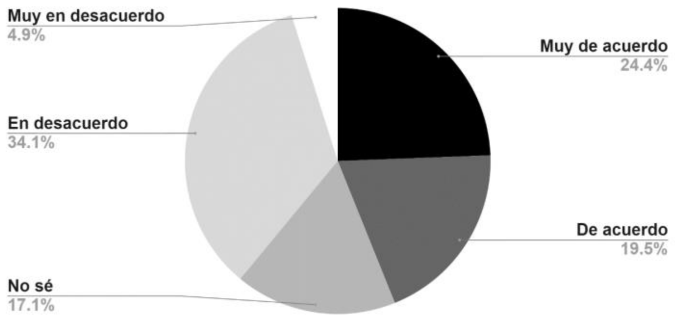
- En el registro simbólico: la representación está dada, por un lado por dos ecuaciones “ligadas” por una llave aportando un significado distinto al utilizado hasta el momento en sistemas de ecuaciones, y por otro, la notación $(x(t);y(t))$ empleada en la aplicación introduce una representación diferente a la utilizada habitualmente, $y = f(x)$.
- En el registro tabular: se agrega una columna para t, que es quien toma los valores independientes mientras que los valores tanto de x como de y son obtenidos a través de la ecuación.
- En el registro gráfico: una vez representados los pares (x, y), la traza que los une no se efectúa de izquierda a derecha sino que el orden lo impone el valor de t que los origina. Además, se incorporan las flechas que precisamente indican el sentido en que el gráfico debe ser leído.

Al terminar el ejemplo resalta que todo el proceso realizado para graficar la curva en coordenadas paramétricas requiere mucho tiempo y propone, para optimizarlo, una herramienta tecnológica para celular llamada DESMOS (Fig. 3), apropiada para representaciones en paramétricas. También afirma que dicha aplicación es descargable para cualquier teléfono móvil permitiendo así el uso en cualquier momento de la clase, sin necesidad de contar con una computadora. En el video aparece, mientras el docente explica lo anterior, una ventana en la que se observa el celular. Las imágenes en dicha ventana acompañan y ejemplifican la explicación del docente a modo de tutorial.

4.2.2. Valoración realizada por los estudiantes

Se presentan a continuación los porcentajes de las respuestas obtenidas del sondeo de opinión realizado a estudiantes de la cohorte 2019 sobre uno de los videos, el referido a curvas paramétricas. Se utilizó como herramienta digital un cuestionario de Google donde cada afirmación tiene las siguientes opciones de respuesta: Muy en desacuerdo, En desacuerdo, No sé, De acuerdo, Muy de acuerdo. En la Tabla 1 se muestran los porcentajes correspondientes a algunas de las cuestiones que plantea el cuestionario mencionado.

Tabla 1. Porcentajes de respuestas de los estudiantes.

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Distribución de los porcentajes de las respuestas</th></tr>
<tr><td>1.Me permite estudiar a mi propio ritmo</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.Es una ventaja pausarlos y/o retroceder</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.Podría reemplazar a una clase teórica presencial</td><td>
</td></tr>
</table>

Los dos primeros gráficos de la Tabla 1 muestran que más del 85 % de los estudiantes resaltan el aporte de los videos para su aprendizaje autónomo, tal como lo refleja el 82.3% que manifestó estar muy de acuerdo en la ventaja de pausar y retroceder las videolecciones, en el segundo de los gráficos. Las respuestas correspondientes a la tercera afirmación muestran que más del 50% del estudiantado no considera que los videos puedan reemplazar una clase presencial o lo desconocen.

Por cuestiones de espacio en el relato de la presente experiencia, no se presentan todos los resultados de la encuesta realizada a los estudiantes, pero se destacan los siguientes porcentajes de respuestas:

- El 95% consideró muy comprensible el lenguaje utilizado
- El 85% calificó adecuado el ritmo de exposición, al igual que la duración de las clases
- Al 95% le hubiese gustado disponer de videos similares sobre otros contenidos

Los porcentajes obtenidos evidencian el alto grado de aceptación de la metodología por parte de los estudiantes, que también se reflejó en los comentarios que dejaron plasmados en el apartado libre de la encuesta. Se transcriben algunos de esos comentarios a modo de ejemplo.

-Considero que contar con los vídeos para resolver los ejercicios relativos al tema son excelente utilidad. Aunque no consideraría que podrían remplazar una clase teórica presencial, sino que serían de muy buena utilidad para complementarla!.

-Disponer de videos hechos por la misma universidad y aún más por los mismos profes, aporta un montón. Nos da mucha confianza a nosotros los estudiantes, ya que el internet esta tan lleno de

información valiosa pero no siempre verdadera. Y como se mencionó en la encuesta, uno puede verlos retroceder y adelantar, estudiar a su ritmo. Y siempre van a estar ahí para verlos de nuevo. -Los tiempos y la manera en que aprendemos varía mucho entre las personas que hoy en día estamos sentadas en una misma clase. En mi caso particular me es muy difícil mantener la concentración durante dos horas seguidas en una clase tradicional. Y comparto la opinión con muchos de mis compañeros de estudio: hay veces en las que ingerir conceptos a nuestro ritmo desde nuestras casas es, realmente, mucho más eficaz y llevadero que la manera tradicional de enseñanza. Sentimos que con las herramientas que tenemos hoy en día, se podría utilizar el tiempo de una manera mucho más eficaz. Obviamente no es fácil cambiar la manera de enseñanza de un día para el otro. Pero creo que debemos hacer caso a la cantidad de estudiantes desmotivados, cansados y frustrados que nos olvidamos que aprender y formarse es algo hermoso.

5 Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, y en concordancia con lo anticipado por docentes de materias que aporta el primer curso de Análisis Matemático, es posible observar que el significado atribuido a curvas polares y cartesianas no había sido construido apropiadamente por la mayoría de los estudiantes. Dicha afirmación se justifica por las dificultades detectadas en la conversión del registro simbólico al gráfico, en el pasaje entre las representaciones polar y paramétrica, y en el manejo en general de las representaciones polares.

El sistema de prácticas que históricamente se implementaba en la cátedra ha incidido negativamente, es por ello que resulta imprescindible no sólo identificar las dificultades de los estudiantes, sino también proponer estrategias que permitan que los estudiantes se apropien del significado relativo a curvas planas en sus distintas representaciones.

Como estrategia de mejora se diseñaron y grabaron videos, que ya fueron sometidos a la valoración de los estudiantes y que, en las próximas cohortes, serán utilizados para implementar videolecciones en un aula virtual.

La presente investigación se está desarrollando en paralelo con las reuniones propuestas para el cambio de Plan de Estudios, hecho que resulta beneficioso en muchos aspectos, principalmente propicia el intercambio entre docentes. Dicho intercambio permitió, dimensionar el alcance de las PM en otras asignaturas, incluso las aplicaciones que se desprenden de ellas y que representan una contribución fundamental para el desarrollo de las CGE, en particular el aporte que un primer curso de Análisis realiza para el desarrollo de la competencia relacionada con identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.

6 Futuras acciones

Relacionada con esta última conclusión, se espera que durante el presente año se intensifique la intervención que se viene realizando con otra de las PM, la referida a *Aproximar una función mediante un polinomio de Taylor de grado n* (PM17). La elección de trabajar especialmente sobre esta PM proviene de las expresiones de los docentes en las entrevistas en las que manifestaron que los estudiantes no tenían construido el significado relativo a ella, específicamente al momento de realizar una aplicación de dicho polinomio de aproximación. Se propone para ello realizar una clase compartida con el Profesor de la asignatura Física 1. En ella se plantea a los estudiantes, con la mediación del docente de la cátedra y del profesor de Física, demostrar que la ecuación relativista de la energía cinética de Einstein se reduce a la ecuación clásica de Newton, cuando la velocidad del cuerpo v es mucho menor que la velocidad de la luz c, mediante la aplicación del polinomio de Taylor. La pregunta disparadora de la actividad, ¿Cuál de las dos ecuaciones es la correcta?, y la contextualización histórica, la referencia a los más de 300 años que se usó la ecuación clásica de Newton, motivan el interés de los estudiantes en el desarrollo de la actividad que les permita concluir que la ecuación clásica es una muy buena aproximación de la ecuación relativista.

Finalmente, durante el corriente año, se podrán relevar datos que permitan evaluar el impacto de la implementación de las videolecciones del aula virtual. Se espera que dicha implementación redunde, no sólo en la ampliación del significado asociado a curvas polares y paramétricas, sino también constituyan un aporte en el desarrollo de una de las CGE: Aprender en forma continua y autónoma.

Referencias

1. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería. *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación en carreras de ingeniería de la República Argentina*, Universidad Fasta ediciones https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf. (2018). Accedido el 1 de marzo de 2020
2. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V. *Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf. (2009). Accedido el 20 de abril de 2018
3. Godino, J. D.; Batanero, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), pp. 325-355. (1994).
4. Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. 2da Ed. Cali, Colombia: Instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle. (2004)
5. Duval, R. Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. 9(1), 143-168. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1984436. (2006). Accedido el 13 de junio de 2019

Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
Universidad Católica del Uruguay

Competencias genéricas: ¿cómo contribuir a su formación cuando enseñamos métodos numéricos?

Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodriguez, Lorena F. Laugero

Grupo Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, Colón332, 2900, San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{mcaligaris, grodriguez, llaugero}@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Las competencias hacen referencia a la capacidad que tiene un estudiante para abordar con cierto éxito situaciones problemáticas en un contexto académico o profesional. En este trabajo se presenta la experiencia de cátedra que se desarrolló al terminar el cursado de la materia Análisis Numérico y Cálculo Avanzado en la especialidad Ingeniería Industrial de la Facultad Regional San Nicolás. Se presenta un análisis de los resultados obtenidos y algunas reflexiones finales. Con la propuesta de trabajo planteada, se intentó contribuir favorablemente al afianzamiento de las competencias comunicativa y a la resolución de problemas. Se observó que, si bien un alto porcentaje de alumnos aprobó el trabajo propuesto, muchos de ellos tienen falencias en cuanto a ciertas competencias que es esperable que puedan mostrar.

Palabras Clave: competencias, formación ingenieril, resolución de problemas, comunicación, Análisis Numérico.

1 Introducción

El Consejo Federal de Decanos de Ingeniería CONFEDI sostiene que el ingeniero actual no sólo debe saber, sino también saber hacer. Para lograr este objetivo, elabora un marco de referencia en cuanto a las competencias que se deberían desarrollar en los graduados de Ingeniería en Argentina, las cuales tendrían que ser consideradas a la hora de elaborar la propuesta pedagógica [1].

En este contexto, los docentes de carreras de Ingeniería se enfrentan ante el reto de plantear estrategias de enseñanza que promuevan en los alumnos el desarrollo de las competencias de egreso establecidas por el CONFEDI. En los cursos de Análisis Numérico de la Facultad Regional San Nicolás, desde hace varios años, se trabaja para fomentar tanto el desarrollo como el afianzamiento de distintas habilidades matemáticas. Durante el ciclo lectivo 2020, se propusieron actividades para reforzar tanto las competencias comunicativas como la de resolución de problemas.

El presente trabajo tiene como finalidad compartir la experiencia de cátedra que se desarrolló al terminar el cursado de la materia Análisis Numérico y Cálculo Avanzado en la especialidad Ingeniería Industrial de la Facultad Regional San Nicolás. Se presenta un análisis de los resultados obtenidos y algunas reflexiones finales. Con la propuesta de trabajo planteada, se intentó contribuir favorablemente al afianzamiento de las competencias comunicativa y a la resolución de problemas.

2 Concepto de competencia

Según el proyecto DeSeCo (Definition and Selection of Competencies), lanzado por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), una competencia es la capacidad para responder a las exigencias individuales o sociales para realizar una tarea o una actividad utilizando una combinación de habilidades prácticas y cognitivas interrelacionadas, conocimientos, valores, actitudes y otros elementos sociales y de comportamiento que pueden ser movilizados conjuntamente para actuar de manera eficiente [2].

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Otro referente en el tema, es el proyecto Tuning donde el concepto de competencia es abordado desde un enfoque integrador. En este proyecto [3],

> ...las competencias se entienden como conocer y comprender (conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender), saber cómo actuar (la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones) y saber cómo ser (los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en el contexto social). Las competencias representan una combinación de atributos (con respecto al conocimiento y sus aplicaciones, aptitudes, destrezas y responsabilidades) que describen el nivel o grado de suficiencia con que una persona es capaz de desempeñarlos. (p. 28)

Cano [4] sostiene que las competencias articulan conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales que toman sentido en la acción. Este autor coincide con De Miguel [5] que sostiene que la competencia es el resultado de la intersección de los componentes: conocimientos, habilidades y destrezas, actitudes y valores.

El CONFEDI [1] establece que una competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales. Esta definición señala que las competencias: aluden a capacidades complejas e integradas, están relacionadas con saberes (teórico, contextual y procedimental), se vinculan con el saber hacer (formalizado, empírico, relacional), están referidas al contexto y desempeño profesional, y permiten incorporar la ética y los valores.

Independientemente de la definición considerada, es posible identificar en cada una de ellas ciertos elementos comunes: conocimientos, procedimientos, actitudes y valores.

2.1 Competencias genéricas de egreso

La sociedad actual requiere de egresados capaces de ejercer su profesión en la realidad que lo rodea. Para poder lograr este objetivo, es necesario incluir en el proceso de aprendizaje tareas que permitan desarrollar o afianzar tales competencias. Así, el CONFEDI destaca la importancia de contar con un marco referencial en cuanto a las competencias que se deberían desarrollar en los graduados de ingeniería en Argentina. En 2006, después de dos años de trabajo por parte de una comisión creada para tal fin, se suscribió por votación unánime del plenario de decanos, el documento que sintetiza las Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Argentino. Este acuerdo orienta a las facultades de ingeniería en la definición de sus procesos de enseñanza y aprendizaje tendientes al desarrollo de competencias en sus alumnos [1].

La clasificación de las competencias genéricas de egreso dada por el CONFEDI es la siguiente:

- **Competencias tecnológicas.**
  - **a)** Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
  - **b)** Concebir, diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería.
  - **c)** Gestionar, planificar, ejecutar y controlar proyectos de ingeniería.
  - **d)** Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería.
  - **e)** Contribuir a la generación de desarrollos tecnológicos y/o innovaciones tecnológicas.
- **Competencias sociales, políticas y actitudinales.**
  - **a)** Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
  - **b)** Comunicarse con efectividad.
  - **c)** Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global.
  - **d)** Aprender en forma continua y autónoma.
  - **e)** Actuar con espíritu emprendedor.

2.2 La competencia comunicativa

Según Labrador y Morote [6], la competencia comunicativa es la capacidad para transmitir conocimientos, expresar ideas y argumentos de manera clara, rigurosa y convincente, tanto en forma oral como escrita, utilizando los recursos y medios adecuados, en función de las características de la situación y de la audiencia.

Estas autoras sostienen también que las diversas situaciones con las cuales se enfrenta el alumno en su vida académica y las que afrontarán en su futuro profesional, lleva a considerar a la competencia comunicativa como una competencia relevante. No obstante, en el proceso de enseñanza de la matemática, esta competencia no siempre es reconocida como algo importante [7].

Silbey sostiene que una de las claves para la profundización de la comprensión matemática se basa en la comunicación [8]. Así, por ejemplo, que los estudiantes hablen de un problema, que escriban los pasos para resolverlo y que escuchen las soluciones de sus compañeros, los ayuda a estructurar y consolidar su pensamiento matemático o adquirir el vocabulario específico de la materia. Pero para que el alumno desarrolle o afiance la competencia comunicativa es necesario exponerlo a prácticas que, para su resolución, exijan el uso de tal competencia.

2.3 La resolución de problemas

La resolución de problemas se ha convertido en una de las competencias de mayor importancia en el aprendizaje de la matemática en cualquier nivel escolar.

Si bien, desde la educación matemática, existen distintas concepciones sobre lo que es un problema, diversos autores sostienen que este término puede ser definido como una situación que requiere una solución que no puede ser obtenida de manera inmediata. Así, Santos Trigos [9] indica que un problema es una tarea en la cual aparecen los siguientes componentes:

- **la existencia de un interés.** Es decir, una persona o un grupo de individuos que quiere o necesita encontrar una solución.
- **la no existencia de una solución inmediata.** Esto significa que la aplicación directa de un algoritmo o conjunto de reglas no son suficientes para determinar la solución.
- **la presencia de diversos caminos o métodos.** Aquí también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.
- **la atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea.** Un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

Por su parte, Niss y Højgaard [10] hacen referencia a que la noción de problema matemático no es absoluta, sino que es relativa a la persona que se enfrenta con el problema, ya que lo que puede ser una tarea rutinaria para una persona puede convertirse en un problema para otra, y viceversa.

Para poder resolver un problema con cierto éxito, se han propuesto distintas fases o etapas. Por ejemplo, Polya [11] establece cuatro pasos para resolver un problema matemático. Ellos son:

- **Comprender el problema:** en esta etapa, el alumno da cuenta de cuál es el problema a enfrentar o resolver. Debe comprender de qué se está hablando, de cuál es el grado de dificultad y qué datos o información le ayudarán a encontrar la solución.
- **Concebir un plan:** comprende la búsqueda de una estrategia que le permita resolver el problema. Para ello, debe relacionar los datos que posee con la información que desea obtener, con la pregunta que se necesita responder. También en este paso, debe seleccionar las herramientas matemáticas que se pueden utilizar.
- **Ejecutar un plan:** consiste en llevar a cabo las operaciones matemáticas con la finalidad de obtener el resultado o respuesta que se busca. En esta etapa, son muy importantes los conocimientos previos, las habilidades y el dominio de las herramientas matemáticas que posea el alumno.
- **Efectuar una visión retrospectiva:** consiste en la revisión analítica de todas las etapas anteriores, verificando si se ha seleccionado el camino correcto. Se analiza si las herramientas se

han aplicado adecuadamente y si los métodos de solución han sido los apropiados. En esta etapa, más que el resultado mismo, lo que importa es el camino que se ha seguido para llegar a él.

Existen otros planteamientos en cuanto a las fases que se distinguen durante el proceso de resolución de un problema. No obstante, todas ellas, se basan en la propuesta realizada por Polya. Cabe aclarar que, la propuesta realizada por Polya no es lineal, sino que trata de brindarle al estudiante la comprensión de todos los procesos cognitivos que ocurren cuando se resuelve un problema.

3 Experiencia de cátedra

Para afianzar tanto la competencia comunicativa como la resolución de problemas en los alumnos que cursaron Análisis Numérico y Cálculo Avanzado en el ciclo 2020, se diseñó un trabajo práctico integrador al finalizar el cursado de la materia. Este trabajo práctico consistió en el planteo de un problema a cada estudiante, para el que debían:

- plantear el modelo matemático que gobierna al problema.
- especificar el tipo de problema matemático para identificar los posibles métodos numéricos que se pueden aplicar.
- seleccionar el método numérico más adecuado teniendo en cuenta las características que presenta el problema.
- obtener una solución válida para el problema utilizando el método elegido.
- escribir un informe detallando el proceso de resolución aplicado.
- realizar un video explicativo, con una duración máxima de diez minutos, de las distintas etapas de la resolución del problema.

En las siguientes subsecciones, se detallan los aspectos más importantes de la experiencia realizada.

3.1 Trabajo práctico propuesto

Para llevar adelante esta experiencia de cátedra, se seleccionó como grupo de estudio a los alumnos de la carrera Ingeniería Industrial que cursaron Análisis Numérico y Cálculo Avanzado durante el ciclo 2020.

Si bien, inicialmente, el grupo estaba conformado por cincuenta y cinco alumnos, quince estudiantes no fueron considerados por no haber cumplimentado con las exigencias que se establecen para alcanzar la condición de "alumno regular". Por lo tanto, sólo cuarenta alumnos participaron de la experiencia.

Como se mencionó anteriormente, a cada estudiante se le planteó una situación problemática diferente con la finalidad de que los mismos no sólo integren los distintos temas que se desarrollaron en la materia sino también contribuyan al afianzamiento de las competencias vinculadas con la resolución de problemas y la comunicación efectiva. A continuación, a modo de ejemplo, se presentan algunos de los problemas propuestos.

Problema 23

La deflexión de una viga de acero rectangular, con carga uniformemente distribuida, sujeta a una fuerza axial, está gobernada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{S}{D}y = -\frac{qL}{2D}x + \frac{q}{2D}x^2$$

donde y = deflexión de la viga a una distancia x, q = intensidad de la carga uniforme, L = longitud de la viga, S = fuerza axial, D = rigidez de la deflexión de la viga.

Determinar la deflexión de la viga cada 10 cm sabiendo que q = 12 kg/cm^2, S = 18 kg/cm, D = 2000 kg/cm, L = 100 cm y que en los extremos el valor de y es cero.

Problema 6

Un tanque contiene 1000 litros de una solución de agua y sal. En el tanque entra agua a razón de 20 litros/min y la mezcla, conservada uniforme por agitación, sale a la misma velocidad. Si inicialmente hay 60 kg de sal en el tanque, ¿cuánta sal queda en el tanque luego de 1 hora? ¿Cuánto tiempo tardará el sistema en quedar con menos de 1 kg de sal? Se sabe que la rapidez de cambio de la cantidad de sal en el líquido es proporcional a la cantidad de sal con una constante de proporcionalidad de -0.02.

Problema 14

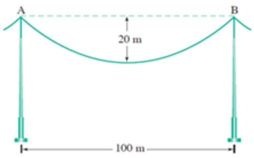
Un cable suspendido entre dos postes A y B, como indica la figura, tiene una carga vertical distribuida con intensidad constante γ_L a lo largo del cable. Un cable de transmisión, que cuelga bajo la acción de su propio peso, soporta una carga de este tipo. La curva que adopta se denomina catenaria, y está dada por la expresión:

$$y = c \cdot \left[\cosh\left(\frac{x}{c}\right) - 1\right]$$

Para determinar el valor de c, se ubica un sistema de ejes en el punto mínimo de la curva con lo cual, en la expresión anterior, los valores de x e y son respectivamente 50 y 20.

La longitud del cable entre los postes A y B está dada por la expresión $s = c \cdot senh\left(\frac{x}{c}\right)$.

Calcule la cantidad de metros de cable necesarios para cubrir un tramo de 1000 metros, si se ubican postes distanciados 100 m entre sí.



Problema 37

Si los diámetros de arandelas se distribuyen normalmente con μ=15.6mm y σ=0.06mm, determinar la probabilidad de encontrar una arandela con un diámetro entre 15.49 y 15.69. Recordar que la campana de Gauss se describe por la ley:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Además, se sabe que la campana de Gauss pasa por los siguientes puntos para este caso particular.

x	P(x)
15.4	0.0257046
15.45	0.292138
15.5	1.65795
15.55	4.69853
15.6	6.64904
15.65	4.69853
15.7	1.65795
15.75	0.292138
15.8	0.0257046

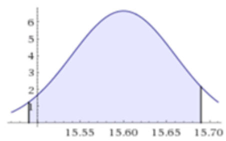


Fig. 1. Problemas propuestos en el trabajo práctico

3.2 Resultados de aprendizaje

Si bien es posible encontrar distintas definiciones del concepto resultado de aprendizaje, todas ellas resultan ser muy similares. Así, Moon [12] considera que un resultado de aprendizaje es una declaración de lo que se espera que el estudiante conozca, comprenda o sea capaz de hacer al finalizar un período de aprendizaje, mientras que Jenkins y Unwin [13] sostienen que son enunciados acerca de lo que un alumno debería ser capaz de hacer como resultado de una actividad de aprendizaje.
Independientemente de la definición que se considere, dos cuestiones son las que hay que resaltar:

- los resultados de aprendizaje ponen en evidencia lo que el estudiante debería aprender.
- los resultados de aprendizaje explicitan lo que el estudiante puede hacer al finalizar una actividad de aprendizaje.

En el trabajo práctico integrador propuesto se plantearon los siguientes resultados de aprendizaje:

- **R1:** aplica los métodos numéricos estudiados para resolver problemas concretos considerando las características de cada uno de ellos.
- **R2:** identifica los resultados relevantes del trabajo realizado para poder comunicarlos en un lenguaje pertinente al contexto de la situación e intención comunicativa.

3.3 Rúbrica elaborada para evaluar el problema propuesto

Las rúbricas, tal como expresan Torres y Perera [14], son herramientas de evaluación que deben entenderse en un contexto diferente al de la evaluación convencional. Por medio de una rúbrica no sólo se evalúan los conocimientos de los alumnos, sino que, además, sirven como herramienta de reflexión para tomar conciencia de lo aprendido.

En la Tabla 1 se muestran los criterios de evaluación considerados para analizar el grado de concreción de cada uno de los resultados de aprendizaje. Teniendo en cuenta estos criterios de evaluación, se utilizó una escala para cuantificar el logro de cada uno de ellos. La Tabla 2 muestra el valor numérico que se le asignó a cada uno de los niveles. La tabla 3 presenta la rúbrica analítica con la que se obtuvo la calificación de los alumnos.

Tabla 1. Criterios de evaluación considerados

		Criterios de evaluación
R1	**CR1.1**	Plantea el modelo matemático que describe al problema considerando las condiciones impuestas.
	CR1.2	Identifica el tipo de problema en función de las condiciones a las cuales está sujeto.
	CR1.3	Calcula una solución aproximada válida utilizando el método numérico seleccionado en función de las particularidades del problema.
	CR1.4	Interpreta la solución numérica obtenida para dar respuesta al problema propuesto.
R2	**CR2.1**	Escribe un informe donde indica de manera clara y ordenada los pasos realizados para resolver el problema propuesto.
	CR2.2	Presenta en el informe la información que se quiere comunicar de manera organizada.
	CR2.3	Realiza una presentación oral no sincrónica para exponer la resolución del problema y su solución.

Tabla 2. Escala numérica asignada a cada uno de los niveles

	Valor numérico
Principiante	1
Básico	2
Competente	3
Avanzado	4

Tabla 3. Rúbrica analítica elaborada

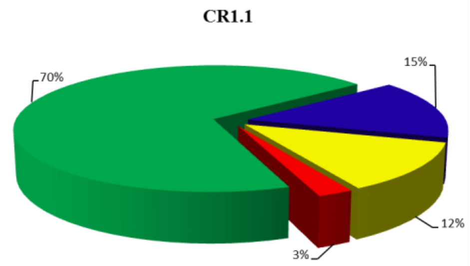
	Principiante (2 puntos)	Básico (6 puntos)	Competente (8 puntos)	Avanzado (10 puntos)
CR1.1 **(15%)**	No escribe el modelo matemático que representa al problema debido a que no interpreta las condiciones a las que está sujeto.	Escribe con muchos errores el modelo matemático que representa al problema debido a que no interpreta adecuadamente las condiciones a las que está sujeto.	Escribe con pocos errores el modelo matemático que representa al problema debido a que no interpreta adecuadamente algunas condiciones a las que está sujeto.	Escribe adecuadamente el modelo matemático que representa al problema debido a que interpreta las condiciones a las que está sujeto.
CR1. 2 **(15%)**	No menciona los métodos que se pueden aplicar por no reconocer el tipo de problema.	Menciona pocos métodos que se pueden aplicar porque no reconoce correctamente el tipo de problema.	Menciona casi todos los métodos que se pueden aplicar porque reconoce el tipo de problema.	Menciona todos los métodos que se pueden aplicar porque reconoce correctamente el tipo de problema.
CR1. 3 **(20%)**	No aplica de manera adecuada el método numérico seleccionado y no obtiene la solución del problema.	Aplica con errores el método numérico seleccionado y no obtiene la solución del problema.	Aplica de manera adecuada el método numérico seleccionado pero la solución del problema presenta errores numéricos.	Aplica de manera adecuada el método numérico seleccionado y obtiene la solución del problema.
CR1. 4 **(10%)**	No escribe la solución del problema teniendo en cuenta las incógnitas que presenta.	Escribe con muchos errores la solución del problema teniendo en cuenta las incógnitas que presenta.	Escribe con algunos errores la solución del problema teniendo en cuenta las incógnitas que presenta.	Escribe sin errores la solución del problema teniendo en cuenta las incógnitas que presenta.
CR2. 1 **(20%)**	No elabora un informe detallado del proceso de resolución del problema.	Elabora un informe donde describe algunos pasos del proceso de resolución del problema.	Elabora un informe donde describe con bastante detalle los pasos del proceso de resolución del problema.	Elabora un informe detallado del proceso de resolución del problema.
CR2. 2 **(10%)**	No escribe un informe claro y bien estructurado.	Escribe un informe poco claro y no bien estructurado.	Escribe un informe poco claro y bien estructurado.	Escribe un informe claro y bien estructurado.
CR2. 3 **(10%)**	No confecciona un video donde se explique claramente el proceso de resolución del problema.	Confecciona un video donde se explica vagamente el proceso de resolución del problema.	Confecciona un video donde se explica con bastante claridad el proceso de resolución del problema.	Confecciona un video donde se explica claramente el proceso de resolución del problema.

4 Resultados y discusión

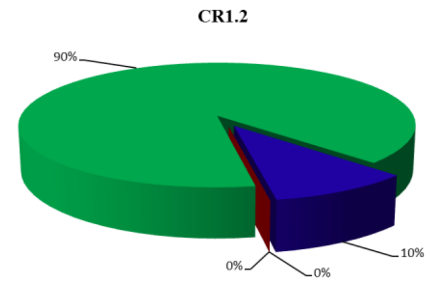
Con el objetivo de realizar una rápida lectura de los resultados obtenidos por los estudiantes, se aplicaron herramientas provenientes de la estadística descriptiva. Utilizando tablas de frecuencia, gráficos porcentuales y cálculo de parámetros de tendencia central, se sintetizó la información relevada. Se presenta a continuación la tabulación efectuada y una breve descripción de los resultados obtenidos.

4.1 Resultados obtenidos al corregir los trabajos prácticos con la rúbrica propuesta.

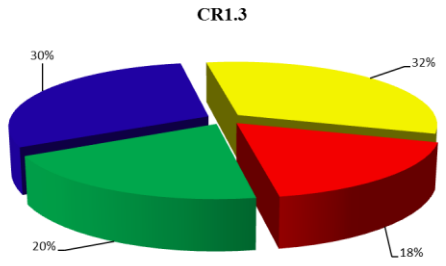
Las Figs 2 y 3 muestran los resultados obtenidos al tabular la información recabada después de corregir cada uno de los trabajos prácticos con la rúbrica descripta en la Sección 3.3. En ellas, el color verde representa que ese criterio de evaluación fue alcanzado por el alumno con un nivel **Avanzado**, el azul, de manera **Competente**, mientras que los colores amarillo y rojo indican que ese criterio fue logrado con un nivel **Básico** y **Principiante**, respectivamente.



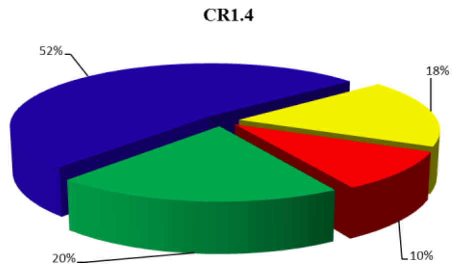
(a) Plantea el modelo matemático



(b) Identifica el tipo de problema

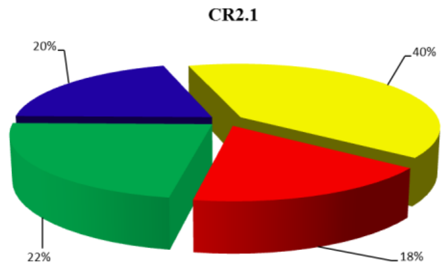


(c) Calcula una solución aproximada válida

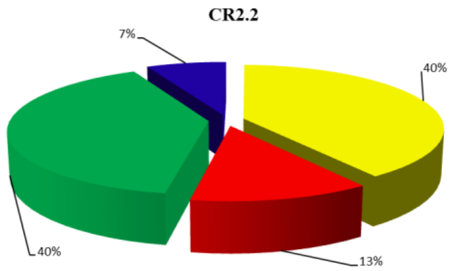


(d) Interpreta la solución numérica obtenida

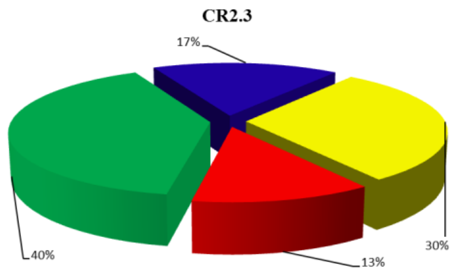
Fig. 2. Gráficos de los criterios de evaluación del primer resultado de aprendizaje



(a) Escribe un informe donde indica de manera clara y ordenada los pasos realizados para resolver el problema



(b) Presenta en el informe la información que se quiere comunicar de manera organizada



(c) Realiza una presentación oral no sincrónica

Fig. 3. Gráficos de los criterios de evaluación del segundo resultado de aprendizaje

Como se puede observar en la Fig. 2.a, el 85% de los alumnos pudo escribir el modelo matemático que representaba al problema propuesto ya sea correctamente o con pequeños errores. Este elevado porcentaje demuestra que los estudiantes tienen desarrollada la habilidad matemática de plantear un problema en función de las condiciones a las que está sujeto.

La Fig. 2.b muestra que la totalidad de los alumnos pudo mencionar los métodos que se pueden aplicar para resolver el problema porque reconocen correctamente las características del mismo. Sin embargo, sólo el 20% de los estudiantes aplicó de manera adecuada el algoritmo del método numérico seleccionado y obtuvo la solución buscada del problema, mientras que el 30% lo hizo con algunos errores numéricos (Fig. 2.c). Estos resultados permiten deducir que la mitad de los estudiantes tuvo dificultades para calcular la solución utilizando un método numérico determinado.

Con respecto a la interpretación de la solución numérica obtenida para dar respuesta al problema propuesto, como se puede ver en la Fig. 2.d, el 72% de los alumnos logró escribir la solución sin errores o con pequeños errores. Este resultado podría estar vinculado con el hecho de que un porcentaje importante de estudiantes logró entender el problema propuesto y pudo escribir el modelo matemático que lo representaba. Es decir, consiguió identificar perfectamente las incógnitas del problema.

La Fig. 3.a permite concluir que el 58% de los alumnos tuvo inconvenientes para elaborar un informe en donde se explique de manera bastante detallada los distintos pasos que llevó a cabo durante el proceso de resolución del problema. Un porcentaje similar, alrededor del 53%, no logró escribir un informe donde la información fuera presentada de manera organizada (Fig. 3.b).

La Fig. 3.c muestra que el 43% de los estudiantes no pudo confeccionar un video explicativo del proceso de resolución del problema donde las ideas estuviesen presentadas de manera clara y ordenada.

Con el objetivo de poder cuantificar el logro de cada uno de los resultados de aprendizaje y de los criterios de evaluación establecidos, se calculó para cada uno de ellos un promedio teniendo en cuenta el valor numérico asignado a cada nivel. La Tabla 4 muestra los promedios obtenidos.

Tabla 4. Promedios obtenidos en los resultados de aprendizaje y en los criterios de evaluación

R1				**R2**		
3,20				2,63		
CR1.1	**CR1.2**	**CR1.3**	**CR1.4**	**CR2.1**	**CR2.2**	**CR2.3**
3,53	3,90	2,53	2,83	2,48	2,75	2,85

A partir de la comparación de los valores calculados, se puede ver que el promedio del primer resultado de aprendizaje es mayor que el del segundo. Los valores indican que, en general, los alumnos tienen desarrollada la competencia vinculada a la resolución de problemas de manera **Competente**, mientras que la competencia asociada a la competencia comunicativa, la presentan de manera **Básica**. La explicación de esta situación podría estar dada por el hecho de que los estudiantes están más acostumbrados a resolver problemas que a realizar actividades donde tengan que poner en juego su competencia comunicativa.

4.2 Tabulación y descripción de las calificaciones obtenidas en el trabajo práctico integrador

La Fig. 4 muestra las calificaciones de los alumnos en el trabajo práctico integrador. A partir de los datos obtenidos, se puede determinar que la calificación promedio es de 7,40 puntos aproximadamente.

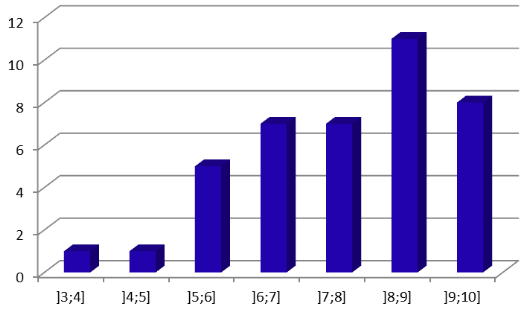


Fig. 4. Calificaciones obtenidas por los alumnos en el trabajo práctico integrador

Sólo 7 alumnos, es decir, el 17,5% de los alumnos no logró alcanzar, en este trabajo práctico integrador, la calificación mínima de 6 puntos que se necesita tener en cada instancia evaluativa para obtener la promoción directa de la materia.

5 Conclusiones

Históricamente, la universidad se ha dedicado a la enseñanza y evaluación de conocimientos. Como ya se ha mencionado en este trabajo, las competencias hacen referencia a la capacidad que tiene un estudiante para abordar con cierto éxito situaciones problemáticas en un contexto académico o profesional dado. Teniendo en cuenta que estas competencias se desarrollan o afianzan por medio de la ejercitación, para contribuir al proceso de formación de las mismas, es necesario que el docente seleccione los contenidos que resulten prioritarios. De esta manera, se podría dar más lugar a la realización de tareas, como la resolución de problemas, estudios de casos, trabajo cooperativo,... tareas que para su ejecución exigen que el alumno ponga en juego distintas competencias.

Por otra parte, experiencias como la presentada muestran que, si bien un alto porcentaje de alumnos obtiene una calificación superior a la mínima establecida por el reglamento de estudios para la aprobación, muchos de ellos presentan importantes falencias en cuanto a ciertas competencias que sería deseable que pudieran desplegar. De ahí la importancia del tipo de tareas que el docente propone a sus alumnos. Dos principios básicos deberían guiar la selección de actividades [15], por un lado debe existir una relación explícita e intencionada entre las tareas propuestas y las competencias a lograr, y por otro, el conjunto de las tareas propuestas deben aportar al desarrollo de las competencias deseadas.

Las docentes a cargo de la cátedra seguirán focalizando su trabajo hacia el logro de las competencias comunicativa y a la resolución de problemas, competencias necesarias para una adecuada inserción de los futuros ingenieros en el mundo laboral.

Referencias

1. Giordano Lerena, R. (Compilador). Competencias y perfil del Ingeniero Iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación. ASIBEI. (2016).
2. Rychen, D. & Salganik, L. Highlights from the OECD Project Definition and Selection Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations (DeSeCo). Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago: U.S. (2003).
3. Proyecto Tuning. Una introducción a Tuning Educational Structures in Europe. La contribuación de las Universidades al proceso de Bolonia. En línea: http://www.deusto-publicaciones.es/deusto/pdfs/tuning/tuning12.pdf. (2006).
4. Cano García, M. La evaluación por competencias en la educación superior. Revista de Currículum y formación del profesorado, *12*(3). (2008). En línea: http://www.ugr.es/local/recfpro/rev123COL1.pdf.
5. De Miguel, M. Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias. Orientaciones para promover el cambio metodológico en el marco del EEES. Oviedo: Universidad de Oviedo.(2006).
6. Labrador, M. & Morote, P. La competencia comunicativa en la Universidad. En Celma Valero, M., Gómez del Castillo, M. y Morán Rodríguez, C. (Eds). *Memoria del L Congreso Internacional de la Asociación Europea de Profesores de Español*, (pp. 360 – 370). Burgos: Universidad Isabel I de Castilla. (2015).
7. Whitin, D. & Whitin, P. Promoting communication in the mathematics classroom. *Teaching Children Mathematics*, *9* (4), 205 – 211. (2002).
8. Silbey, R. Math out loud! *Instructor*, *112* (7), 24 – 26. (2003).
9. Santos Trigo, M. La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos. México: Trillas. (2007).
10. Niss, M. & Højgaard, T. (Eds). Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. En línea: https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf. (2011).
11. Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. (1965).
12. Moon, J. *Linking Levels, Learning Outcomes and Assessment Criteria*. En línea: http://spectare.ucl.slu.se/adm/sus/2008/plagiarism_eng/JennyMoonExercise.pdf. (2004).
13. Jenkins, A. & Unwin, D. *How to write learning outcomes*. En línea: https://www.ubalt.edu/cas/faculty/faculty-matters/How%20to%20write%20student%20learning%20outcomes.pdf. (2001).
14. Torres, J. & Perera, V. La rúbrica como instrumento pedagógico para la tutorización yevaluación de los aprendizajes en el foro online en educación superior. *Revista de Medios y Educación*. 36, pp. 141-149. (2010).
15. Goñi Zabala, J. El espacio europeo de educación superior, un reto para la universidad. Competencias, tareas y evaluación, los ejes del currículum universitario. España: Editorial Octaedro. (2005).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Una valoración de algunos instrumentos de evaluación virtual usados durante la pandemia de Coronavirus

Adriana G. Favieri[1], Marta G. Caligaris[2], Georgina B. Rodriguez[2], Lorena F. Laugero[2]

[1] Departamento de Ingeniería Aeronáutica, Facultad Regional Haedo, Universidad Tecnológica Nacional, París 532, B1706EAH, Haedo, Buenos Aires, Argentina
afavieri@frh.utn.edu.ar

[2] Grupo Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, Colón332, 2900, San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{mcaligaris, grodriguez, llaugero}@frsn.utn.edu.ar

Resumen. El año 2020 fue un año muy particular, en todos los ámbitos, ya que de un día para otro las tareas cotidianas cambiaron drásticamente. La Universidad no fue una excepción. Así, las distintas cátedras de cada una de las 30 Facultades Regionales de la Universidad Tecnológica Nacional armaron y pusieron en práctica estrategias para continuar con el dictado de clases en forma no presencial. En este trabajo se discuten las prácticas de evaluación en los entornos virtuales en dos cátedras: Análisis Numérico de la especialidad Ingeniería Mecánica de la Facultad Regional San Nicolás y Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Facultad Regional Haedo.

Palabras Clave: Entornos virtuales, Evaluación, Instrumentos.

1 Introducción

La pandemia que afectó al mundo en el año 2020 ha modificado dramáticamente la forma de dar clases en la universidad, de interactuar con los alumnos y de evaluar. La Universidad Tecnológica Nacional (UTN) puso en marcha una serie de acciones con el fin de contener a la totalidad de los alumnos evitando pérdidas de períodos académicos y continuar con el dictado de clases [1]. En este contexto, las cátedras de cada una de las 30 Facultades Regionales de la Universidad armaron y pusieron en práctica estrategias para continuar con el dictado de clases en forma no presencial, a través de herramientas como el campus virtual de la Universidad, Zoom y Teams, entre otras. Una vez lograda la estabilidad en el dictado de clases, las Facultades Regionales de la UTN comenzaron a trabajar en las alternativas de evaluación. Desde la secretaria académica del Rectorado de la UTN se refirieron sobre el proceso evaluativo, destacando que varias regionales habían trabajado con diversos instrumentos de evaluación virtual, como ser, trabajos individuales o grupales de resolución de problemas, investigación, análisis de publicaciones científicas, proyectos y estudio de casos [1].

La evaluación es un elemento esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje que brinda información tanto a docentes como alumnos. A los alumnos les permiten advertir aciertos y dificultades en su recorrido de aprendizaje, y actuar en consecuencia. A los docentes, les ayuda a reconocer conceptos, contenidos y/o procedimientos que han provocado obstáculos en su aprendizaje, y rescatar las metodologías que han sido útiles. Evaluar en la virtualidad no es lo mismo que en la instancia presencial, esta acción está condicionada por la tecnología, las herramientas disponibles y por el contenido a evaluar.

Luego de un año de prácticas educativas y de evaluación en la virtualidad, se analizan las prácticas de evaluación en los entornos virtuales en dos cátedras: Análisis Numérico de la especialidad Ingeniería Mecánica de la Facultad Regional San Nicolás y Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Facultad Regional Haedo. Este abordaje en conjunto adquiere relevancia ya que dichas asignaturas tienen temas comunes y sus docentes ya han colaborado en trabajos previos. En esta oportunidad, se intenta rescatar la experiencia de las cátedras mencionadas durante el año 2020 con respecto a las prácticas sobre evaluación en entornos virtuales, describir los instrumentos utilizados distinguiendo fortalezas y debilidades y mostrar algunos de los resultados obtenidos.

2 Evaluación y aula virtual

La interacción dentro de un aula virtual, sea de forma asincrónica o sincrónica, puede analizarse desde una dimensión práctica y otra tutorial y evaluativa. La dimensión práctica es el entorno en el cual el estudiante se enfrenta a situaciones de aprendizaje que implican la activación de distintas habilidades y estrategias tanto cognitivas, actitudinales y sociales. La planificación y selección de actividades deberá tender a favorecer un proceso de aprendizaje constructivo. La dimensión tutorial y evaluativa hace referencia al rol que juega el docente dentro del aula virtual como guía del proceso de aprendizaje del alumno. El docente adquiere un rol de incentivador de actividades de aprendizaje y no tanto de trasmisor de conocimientos [2].

Las evaluaciones educativas en los ambientes de aprendizaje virtuales requieren discernir los propósitos generales que se desean alcanzar para la adquisición de conocimientos, habilidades, capacidades y competencias. Esta no es un proceso aislado que conlleve a otorgar una calificación, ya que se concibe como un proceso que se debe realizar de manera continua y sistemática cuyo objetivo es el aprendizaje del participante [3].

Es recomendable pensar en estrategias de autoevaluación, de coevaluación y/o de prácticos evaluativos similares a las realizadas en instancia presencial y establecer dinámicas de retroalimentación [4].

En la valoración de los conocimientos adquiridos por los alumnos, hay 3 conceptos importantes a considerar: Evaluación, Calificación y Acreditación.

Con la palabra EVALUAR se define un proceso sistemático y riguroso de recolección de información, incorporado al proceso educativo desde su comienzo, que implica un juicio de valor y que se orienta hacia la toma de decisiones para proseguir la actividad educativa, mejorándola progresivamente [5].

Con el vocablo CALIFICAR se hace referencia a una manera sintética de informar resultados de un proceso de evaluación. Es la traducción de los resultados de la evaluación a una escala determinada, por ejemplo, del 1 al 10 o de la letra A a la D [5]. Este proceso implica una medición y se refiere a asignar un valor -una cantidad numérica- al atributo medido, luego de compararlo con un patrón.

Por último, el término ACREDITAR: es un proceso que afirma el cumplimiento de ciertos requisitos para obtener una certificación. Es el reconocimiento de que alguien o algo ha alcanzado las metas establecidas. La acreditación es de carácter académico-administrativo, mientras que la evaluación y la calificación son de carácter estrictamente académico, refieren el tipo y nivel de los aprendizajes logrados [4].

3 Cátedra Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica (Ingeniería Aeronáutica) - FRH

3.1 Contexto

El contexto de trabajo es la cátedra de Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Facultad Regional Haedo (FRH) de la Universidad Tecnológica Nacional. Es una asignatura cuatrimestral con carga horaria de tres horas semanales. El dictado de clases se realizó de manera sincrónica en los horarios habituales de clases, a través de la Plataforma Microsoft Teams (https://teams.microsoft.com/), ofrecida por la FRH. Dado que es una asignatura que ofrece contenido matemático teórico y práctico necesario para el desarrollo de las materias específicas, consideramos necesario ofrecer al alumno la oportunidad de conocer software matemático específico como el Wolfram Cloud (https://www.wolframcloud.com/). El mismo permite el cálculo simbólico y numérico avanzado como así también la posibilidad de realizar gráficos complejos aptos para los contenidos de la asignatura.

3.2 Técnicas de evaluación en el aula virtual

La cátedra considera a la evaluación universitaria a partir de la postura de Salinas Fernández y Cotillas Alandí [6]. Evaluar implica no solo juzgar conocimientos y competencias que "van más allá" que el dominio de hechos, teorías, principios y procedimientos puntuales sino también valorar la habilidad del alumno de conducirse ante la sociedad de la información y su capacidad de organizar su propio aprendizaje de forma independiente. Incluye, además, la valoración de la justificación de los procedimientos realizados, las respuestas y/o conclusiones elaboradas como así también la comunicación en forma clara y concisa respetando el lenguaje matemático.

Durante el desarrollo de las clases virtuales se usaron técnicas de evaluación de interrogatorio y la de solución de problemas. Por medio de las primeras, se solicitó información al alumno, de manera escrita para evaluar básicamente el área cognoscitiva, mientras que la segunda técnica permitió evaluar los conocimientos y habilidades que éste tiene [7].

3.3 Descripción y características de los instrumentos de evaluación utilizados

Los instrumentos utilizados fueron autoevaluaciones, trabajos prácticos con software y parciales sincrónicos. Cada uno de ellos fue calificado numéricamente y convergían en una sola nota, siendo dos en el cuatrimestre. En las Tablas 1 a 3 se detallan el objetivo, las características, la frecuencia con la que se realizaron, las tecnologías usadas para el diseño y publicación, la fecha y forma de entrega y la modalidad de corrección de cada uno de ellos.

Tabla 1. Particularidades de las autoevaluaciones.

Autoevaluaciones	
Objetivo	Que el alumno se autoevalúe sobre los conocimientos desarrollados en cada clase con el fin de conocer el grado de comprensión de ellos
Características	10 ítems que incluían preguntas: • De elección múltiple con una sola opción correcta • De verdadero o falso • En las cuales el alumno debía ingresar alguna ecuación matemática utilizando el editor de ecuaciones habilitado en los formularios
Frecuencia	Uno por clase
Tecnología utilizada para su diseño	Formularios de Microsoft Forms
Tecnología usada para su publicación	Plataforma Microsoft Teams, a través de Tareas
Fecha de publicación	El día de la clase
Fecha de entrega	Hasta el día anterior a la clase siguiente, es decir 6 días corridos
Forma de entrega	En la Plataforma Microsoft Teams, utilizando el formulario publicado
Modalidad de corrección	Automática para las dos primeras opciones, previa programación de los formularios Manual para las preguntas en las que se usaba el editor de ecuaciones

Tabla 2. Particularidades de los trabajos prácticos con software.

Trabajos prácticos con uso de software	
Objetivo	Que el alumno incorpore los conceptos, procedimientos y estrategias de la asignatura a la vez que identifica los comandos del software y resuelve problemas y/o ejercicios
Características	Ejercicios y/o problemas sobre los contenidos de la unidad que el alumno resuelve utilizando el software Mathematica en la plataforma Wolfram Cloud.
Frecuencia	Uno por unidad
Tecnología utilizada para su diseño	Software Wolfram Mathematica
Tecnología usada para su publicación	Plataforma Wolfram Cloud
Fecha de publicación	El día de la clase
Fecha de entrega	Hasta el día anterior a la clase siguiente, es decir 6 días corridos
Forma de entrega	En la Plataforma Microsoft Teams, a través de Tareas, subiendo un archivo PDF de lo resuelto en la plataforma Wolfram
Modalidad de corrección	Manual, sobre el archivo enviado por el alumno

Tabla 3. Particularidades de los parciales sincrónicos.

Parciales sincrónicos	
Objetivo	Conocer el desempeño de los alumnos al resolver ejercicios y/o problemas sobre los temas vistos con el fin de decidir si está en condiciones de acreditar
Características	Ejercicios y/o problemas sobre los contenidos de la unidad que el alumno resuelve en su casa en lápiz y papel Al terminar, los alumnos sacaban fotos de sus resoluciones y arma un documento PDF con su producción Los alumnos trabajaban con la cámara encendida El diseño del parcial estaba pensado de tal manera que a cada alumno le apareciera un enunciado diferente
Frecuencia	Dos en el cuatrimestre
Tecnología utilizada para su diseño	Formularios de Microsoft Forms con la opción de subir un archivo
Tecnología usada para su publicación	Plataforma Microsoft Teams, a través de Tareas
Fecha de publicación	El día de clase destinado al parcial
Fecha de entrega	Mismo día con un límite de tiempo de dos horas y media
Forma de entrega	En la Plataforma Microsoft Teams, a través de Tareas, subiendo un archivo PDF de lo resuelto
Modalidad de corrección	Manual, sobre el archivo enviado por el alumno

4 Cátedra Análisis Numérico (Ingeniería Mecánica) - FRSN

4.1 Contexto

La asignatura Cálculo Avanzado del diseño de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica Nacional comprende dos partes bien diferenciadas en los temas a tratar. Esta diferencia se hace evidente en la FRSN, organizando la asignatura en dos bloques: Análisis Numérico y Matemática Superior. Estos bloques se tratarán internamente como asignaturas independientes.

El bloque Análisis Numérico de la cátedra Cálculo Avanzado de la FRSN es una asignatura anual con carga horaria de tres horas semanales. En el ciclo lectivo 2020, las actividades del curso se concentraron en el aula virtual de Análisis Numérico, en la que el contenido de las distintas unidades estuvo a disposición de los estudiantes. Para cada una, se presentó una serie de lecciones constituidas por videos con explicaciones teóricas y ejemplos resueltos, cartilla de ejercicios y el link al sitio de cada tema, diseñado especialmente para la cátedra.

Algunos de los videos fueron realizados utilizando Doceri (www.doceri.com), un programa que convierte una Tablet en un pizarrón interactivo con sofisticadas herramientas para escribir sobre la pantalla. Este programa permite, además, grabar las explicaciones verbales que se pueden dar mientras se escribe en la Tablet. Otros videos se prepararon con PowerPoint, grabando también las explicaciones verbales.

Para fomentar la participación de los alumnos en la plataforma, se utilizó el foro para discutir ciertos problemas propuestos y se fijaron horarios de encuentro a través de Zoom.

4.2 Técnicas de evaluación en el aula virtual

En el año 2020 la actividad de seguimiento fue distinta a la de años anteriores. Todas las semanas se asignó una tarea en el aula virtual, consistente en la resolución de un problema o ejercicio vinculado a los temas tratados, y se brindó una retroalimentación casi inmediata. Se tuvo en cuenta el desempeño de los alumnos en estas tareas, asignando una nota de concepto al final del curso.

4.3 Descripción y características de los instrumentos de evaluación utilizados

Los instrumentos de evaluación utilizados fueron autoevaluaciones, tareas semanales y parciales sincrónicos.

En las Tablas 4 a 6 se detallan cada uno de ellos puntualizando el objetivo, sus características, la frecuencia con la cual se realizaron, las tecnologías usadas para el diseño y publicación, la fecha y forma de entrega y la modalidad de corrección.

Tabla 4. Particularidades de las autoevaluaciones.

Autoevaluaciones	
Objetivo	Que el alumno se autoevalúe sobre los conocimientos de cada unidad, con el fin de conocer el grado de comprensión de los mismos
Características	Las preguntas de la autoevaluación ofrecen una sugerencia para ser usada antes de contestar Cada vez que se elige una respuesta, se indica en verde si la elección de la misma fue correcta o en rojo, en caso contrario, proporcionando también una breve explicación de la corrección realizada Pueden repetirse hasta que se escriba la respuesta correcta
Frecuencia	Uno por unidad
Tecnología utilizada para su diseño	eXe (exelearning.org).
Tecnología usada para su publicación	Sitios diseñados por la cátedra publicados en al sitio de la FRSN
Fecha de publicación	Permanente
Fecha de entrega	No se exige entrega
Modalidad de corrección	Automática

Tabla 5. Particularidades de las tareas semanales.

Tareas semanales	
Objetivo	Conocer el estado con respecto al proceso de aprendizaje realizado. Detectar errores frecuentes que presentan los alumnos al abordar cada uno de los problemas o ejercicios, para discutirlos en un foro o en una reunión de Zoom
Características	Ejercicios y/o problemas sobre los contenidos del tema presentado en la semana anterior
Frecuencia	Una por semana
Tecnología utilizada para su diseño y publicación	Plataforma Moodle
Fecha de publicación	El lunes de la semana que se presenta el tema
Fecha de entrega	El jueves de la semana siguiente a la presentación del tema
Forma de entrega	En la Plataforma Moodle, a través de Tareas, subiendo fotos o un archivo pdf.
Modalidad de corrección	Manual

Tabla 6. Particularidades de los parciales.

Parciales sincrónicos	
Objetivo	Medir el entendimiento de las cuestiones conceptuales de cada unidad, englobando la teoría y la práctica en consignas que hacen razonar al alumno y analizar el aprendizaje de la mecánica de los métodos
Características	Ejercicios y/o problemas sobre los contenidos de la unidad que el alumno resuelve en su casa en lápiz y papel Al terminar, los alumnos sacaban fotos de sus resoluciones, en los ejercicios en los que se pide expresamente Los alumnos trabajaban con la cámara encendida, desde el tercer parcial. El diseño del parcial estaba pensado de tal manera que a cada alumno le apareciera un enunciado diferente.
Frecuencia	Cinco en el año
Tecnología utilizada para su diseño	Formularios de Microsoft Forms (primer parcial) y luego Cuestionario de Moodle (los siguientes cuatro)
Tecnología usada para su publicación	Plataforma Moodle
Fecha de publicación	El día de clase destinado al parcial
Fecha de entrega	El mismo día, con un límite de tiempo de dos horas
Forma de entrega	En la Plataforma Moodle. En el Cuestionario y en Tareas subiendo las fotos solicitadas
Modalidad de corrección	Manual

5 Fortalezas y debilidades de los instrumentos de evaluación utilizados

A continuación, se detallan las principales fortalezas y debilidades de los distintos instrumentos de evaluación utilizados.

5.1 Autoevaluaciones

Fortalezas:

- Corrección automática de las preguntas de elección múltiple y las de verdadero o falso, lo que agiliza la tarea docente, sobre todo en cursos numerosos.
- Libertad para el alumno ya que puede realizarla en el momento que considere más conveniente, independientemente de los horarios de clase o del docente.

Debilidades:

- Necesidad de tiempo adicional para el armado de los formularios y la programación de la autocorrección. Las autoevaluaciones, como toda evaluación, requieren también un tiempo previo de diseño didáctico enfocado en los objetivos y temas seleccionados.
- Utilización de ecuaciones matemáticas complejas lo que hace necesario que, para armar los enunciados de las preguntas en el formulario, se utilicen imágenes ya que el editor de ecuaciones de la herramienta cubre solamente la simbología básica de matemática. Por lo tanto, es preciso contar con algún software que tenga un editor de ecuaciones completo y otro para capturar regiones de pantalla en formato de imagen. Así en el primero se puede escribir los enunciados con sus ecuaciones y luego, con el segundo, capturar lo hecho de manera tal de obtener una imagen de buena calidad para utilizar en el formulario.

- Limitación en el tipo de preguntas que se les solicita a los alumnos ya que, si necesitan ingresar alguna respuesta con fórmulas matemáticas, las mismas deben ser básicas, lo que no se adapta a los contenidos de la asignatura.

5.2 Trabajos prácticos con uso de software

Fortalezas:

- Uso didáctico del software Mathematica enfocado en los conocimientos troncales de la asignatura.
- Conocimiento sobre la plataforma Wolfram Cloud adecuada para el trabajo matemático de un estudiante de ingeniería.
- Gratuidad de la plataforma Wolfram Cloud lo que permite que el alumno la utilice en cualquier momento y a través de cualquier dispositivo y excede los límites temporales del dictado de clases de la asignatura. Es una herramienta que pueden seguir utilizando en otras asignaturas.
- Posibilidad de evaluar el desarrollo de la resolución de los alumnos utilizando el software como así también las justificaciones y/o conclusiones de lo realizado.

Debilidades:

- La corrección en pantalla es un poco más complicada que en papel. La cantidad de tiempo empleada para completar la tarea causa fatiga ocular, como ser, ojo seco, visión borrosa, dolor de cabeza, entre otros [8].
- La Plataforma Wolfram Cloud no cuenta con plantillas para el ingreso de los comandos lo que puede resultar un poco más lenta esta tarea, aunque debemos destacar que está programada con lenguaje predictivo parar agilizarla.
- Las habilidades de resolución evidenciadas en la producción de los alumnos utilizando el software han tenido poca relación con las habilidades de resolución en entornos de lápiz y papel.

5.3 Tareas semanales

Fortalezas:

- Permiten recabar información sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Debilidades:

- La corrección en pantalla es poco más complicada que en papel, produciendo los mismos efectos nocivos señalados en el instrumento anterior.

5.4 Parciales sincrónicos

Fortalezas:

- Es la forma más similar a un examen tradicional en forma presencial.
- Es posible evaluar el desempeño de los alumnos, analizar sus resoluciones y constatar la adquisición de contenidos conceptuales y procedimentales como así también las justificaciones realizadas, las respuestas y/o conclusiones elaboradas como la forma de presentación.

Debilidades:

- La corrección en pantalla es aquí también un poco más complicada que en papel.
- Las fotos de las resoluciones enviadas por los alumnos no son siempre claras, tienen poca resolución y/o iluminación lo que dificulta el entender lo escrito.
- Las habilidades de resolución son escasas con tendencia a justificaciones con argumentaciones pobres, sin recurrir a la teoría correspondiente.

6 Resultados

En las siguientes secciones, se presentan algunos de los resultados que se obtuvieron tras aplicar los instrumentos de evaluación detallados anteriormente.

6.1 Cátedra Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la FRH

La cátedra consta de dos cursos, uno en el turno tarde con 10 inscriptos y otro en el turno noche con 9 inscriptos a principios del segundo cuatrimestre. Concluyeron exitosamente el curso 6 alumnos del turno tarde y 5 del turno noche, de los cuales sólo uno logró la aprobación directa luego de realizar los recuperatorios en la última mesa de diciembre de 2020. La Fig. 1 muestra las notas de los 11 alumnos en las autoevaluaciones, la Fig. 2, las correspondientes a los trabajos prácticos con software y la Fig. 3, la de los parciales sincrónicos.

Los instrumentos de evaluación virtuales que tuvieron un período de entrega de 6 días tuvieron mejores notas que las evaluaciones sincrónicas, aunque es de destacar que sólo uno alumno no ha podido alcanzar la aprobación directa sin usar las instancias de recuperación.

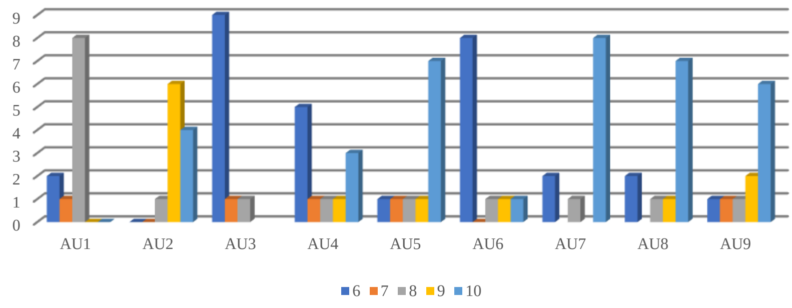


Fig. 1. Notas de las autoevaluaciones

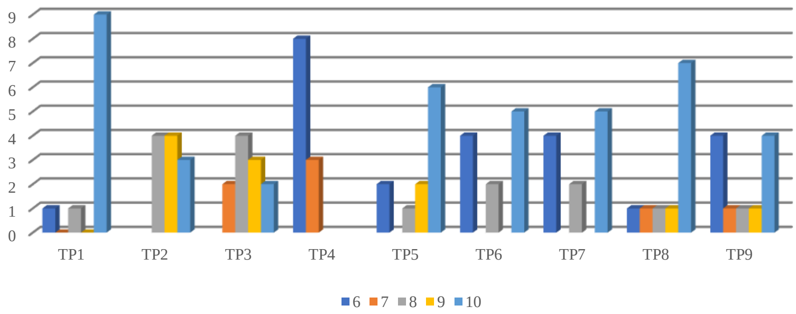


Fig. 2. Notas de los trabajos prácticos con software

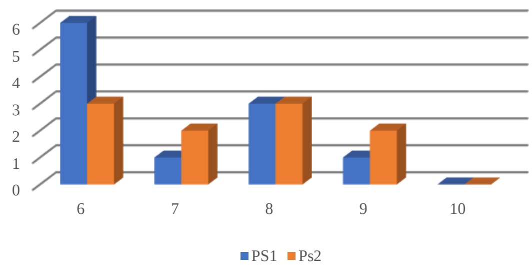


Fig. 3. Notas de los parciales sincrónicos

Al cerrar el cuatrimestre, junto con la entrega de las notas finales se realizó una entrevista personal a cada alumno preguntándoles sobre los instrumentos de evaluación utilizados. En general respondieron que fueron apropiados, siendo los que tenían mayor plazo de entrega los más cómodos para ellos, por la libertad de seleccionar el día para su desarrollo. Sobre los parciales sincrónicos opinaron que fueron acordes a los temas desarrollados y que tenían semejanza a los parciales presenciales a los que estaban habituados.

6.2 Cátedra Análisis Numérico de la FRSN

Si bien, inicialmente, se inscribieron 26 alumnos en la materia, se presentan los resultados de los 18 estudiantes que no quedaron en condición de libre.

Como ya se mencionó en la Sección 4.2, el desempeño de los alumnos en las tareas propuestas fue cuantificado por medio de una nota numérica, la cual fue tenida en cuenta en la instancia de acreditación.

La Fig. 4 muestra las calificaciones de los alumnos, al finalizar el curso, por la realización de las tareas semanales. En la Fig. 5, se pueden observar las notas de los estudiantes en cada uno de los parciales que se tomaron.

A partir de las calificaciones obtenidas por los alumnos y teniendo en cuenta las condiciones que se exigen para la acreditación, 14 estudiantes lograron la promoción directa de la materia. Los otros 4 alumnos regulares, pudieron aprobar Análisis Numérico en la última mesa de diciembre de 2020.

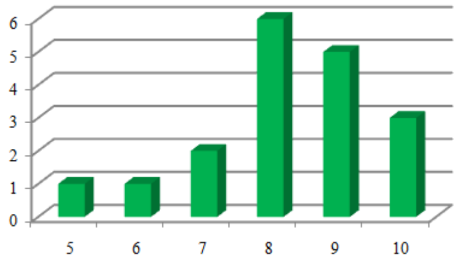


Fig. 4. Calificaciones obtenidas por los alumnos en las tareas semanales

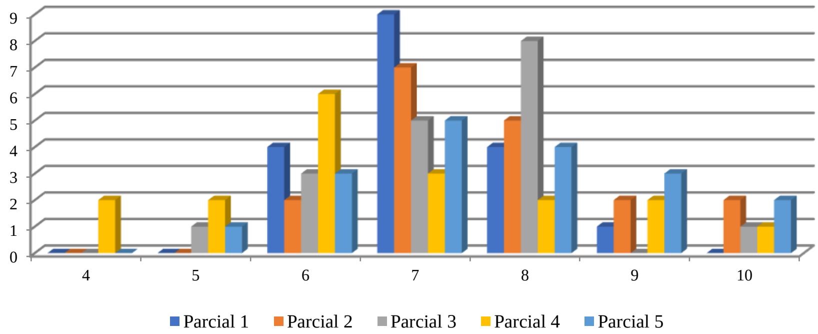


Fig. 5. Calificaciones obtenidas por los alumnos en cada uno de los parciales

Una posible causa del buen rendimiento académico de los estudiantes fue el exhaustivo seguimiento que se realizó de su proceso de aprendizaje ya sea por medio de las tareas, el foro o las clases sincrónicas que se programaron a través de Zoom.

Para recabar la opinión de los alumnos sobre "su aprendizaje en la virtualidad", se realizó una encuesta al finalizar el cursado de la materia. La primera parte de la encuesta estaba conformada por preguntas cerradas, que fueron analizadas con una escala tipo Likert con valores según se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Escala tipo Likert y su valor numérico

Escala	Valor numérico
Totalmente de acuerdo	5
De acuerdo	4
Ni de acuerdo, ni en desacuerdo	3
En desacuerdo	2
Totalmente en desacuerdo	1

En la Tabla 8, se presenta la media de cada uno de los enunciados relacionados con evaluación. En general, se puede ver que los alumnos estuvieron de acuerdo con cada una de las afirmaciones realizadas.

Tabla 8. Medidas de tendencia central de las respuestas a las preguntas cerradas relacionadas con evaluación

Enunciado	Media
Las actividades propuestas contribuyeron al afianzamiento de cada uno de los métodos estudiados.	4,17
La forma en que se llevaron adelante las restantes instancias evaluativas fue adecuada.	4,06
Los contenidos evaluados en cada instancia estuvieron acordes a lo desarrollado en cada unidad.	4,06
Las retroalimentaciones dadas por los docentes en cada tarea o instancia evaluativa fueron adecuadas.	4,06

7 Conclusiones y trabajos futuros

La experiencia durante el año 2020 con respecto a las prácticas sobre evaluación en entornos virtuales ha sido agitada. Dadas las circunstancias, el paso a la virtualidad fue abrupto y no hubo tiempo suficiente para planificar con mayor detalle, investigar sobre formas de evaluación en la virtualidad y sobre los instrumentos y metodologías que mejor se adecuasen a la situación. A pesar de ello, creemos que el balance es positivo ya que se ha podido evaluar a los alumnos que cursaron respetando las reglas de la Universidad.

En este contexto, resultó interesante estudiar los instrumentos utilizados en la evaluación en dos asignaturas con algunos contenidos comunes, en dos facultades de la UTN en las que se tienen antecedentes de trabajos conjuntos. Cada uno de los instrumentos utilizado tiene sus fortalezas y debilidades. Todo requiere planificación previa, tener presente los objetivos, lo que se pretende evaluar. A partir de allí buscar la tecnología adecuada.

Queda como desafío perfeccionar estos métodos para asegurarse, en cierta medida que los alumnos realmente están resolviendo la evaluación, ya que puede haber pasado, que en algunos casos esta situación no se ha podido constatar fehacientemente. Y coincidiendo con la postura de Auvieux y col., “No existe ningún procedimiento de evaluación que pueda ser completamente global, indiscutiblemente exacto o absolutamente revelador de la verdad o la esencia de los logros y el aprendizaje de cada alumno.” (pág. 3) [4].

Referencias

1. Bravo, V.: La UTN virtualiza sus cátedras y exámenes manteniendo el nivel académico en pos de la contención y formación de sus Estudiantes. https://tinyurl.com/yfgwh2zg. Accedido el 5 marzo de 2021.
2. Jutta Hetzer, L.; Ferreira Szpiniak, A; Allende, M. La evaluación de los aprendizajes en la virtualidad. Universidad Nacional de Río Cuarto. Septiembre de 2020. https://www.evelia.unrc.edu.ar/evelia/portal/files/articulosAulasExtendidas/Evaluaci%C3%B3ndelosaprendizajesenlavirtualidad.pdf. Accedido el 25 marzo de 2021.
3. U. T. N. - C. R. UTN: Instrumento de evaluación en un entorno virtual. Material del Curso Introductorio a la Plataforma Moodle (2018)
4. Auvieux, N.; Bossolasco, M.; Enrico, R.; García, F.; Guzmán, M.; Hidalgo, M.; Torres Auad, L.: Recomendaciones para los procesos de evaluación en entornos virtuales. https://tinyurl.com/yzxwtuvw. Accedido el 25 marzo de 2021.
5. Elola, N.; Zanelli, N.; Oliva, A.; Toranzos, L.: La evaluación educativa. Fundamentos teóricos y orientaciones prácticas. Buenos Aires: Aique (2010)
6. Salinas Fernández, B.; Cotillas Alandí, C.: La evaluación de los estudiantes en Educaciòn Superior. Apuntes de buenas pràcticas, Valencia: Servei de Formació Permanent. Universitat de València., 2007.
7. Andrade Escobar, A.; Juárez Romero, M.; García Sedano, F.; Padilla Ramos, L.; Vargas Vázquez L.: Manual Técnicas e instrumentos para facilitar la evaluación de aprendizaje, Centro De Enseñanza Técnica y Superior, https://educrea.cl/wp-content/uploads/ 2018/08/Manual-tecnicas-instrumentos-para-la-evaluacion.pdf. Accedido el 25 marzo de 2021.

8 Monés, J.: ¿Pasar mucho tiempo ante una pantalla daña la vista?, Director del Instituto Mácula - La vanguardia. https://www.lavanguardia.com/ciencia/20180910/451713361739/preguntas-big-vang-pantalla-ordenador-efectos-ojos-vista-miopia.html. Accedido el 25 marzo de 2021.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Impacto de la pandemia en las estrategias de estudio de los estudiantes del ciclo básico de la facultad de ingeniería UNaM

Armando H. Sosa[1], Gladys G. González Carreras[2], Pedro O. Semeniuk[3], María C. Dekun[3]

[1] Coordinación Programa Tutorías, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325 Oberá Misiones CP 3360
ahugososa@gmail.com

[2] Departamento Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325 Oberá Misiones CP 3360
gonzalezc@fio.unam.edu.ar

[3] Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325 Oberá Misiones CP 3360
pedrosiuk@gmail.com, dekun@fio.unam.edu.ar

Resumen. El trabajo fue realizado con estudiantes de primer y segundo año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina. El objetivo fue conocer las estrategias que utilizaron los estudiantes para el cursado de las asignaturas durante el primer cuatrimestre del año 2020 en contexto de pandemia. La metodología fue cuantitativa-cualitativa. El instrumento utilizado fue una encuesta, los datos fueron procesados con técnicas de estadística descriptiva. Se observa que los estudiantes trabajaron preferentemente en forma individual, asistieron a las clases de teoría y práctica online y en menor grado a las clases de consulta. Se evidencia una baja tendencia a la toma de apuntes por sobre utilizar la bibliografía recomendada por la cátedra y preferencia por la utilización de los videos de las clases y de internet. El trabajo evidencia la manera en que estudiaron los alumnos que participaron de la investigación, en el contexto de pandemia.

Palabras Clave: Ciclo básico, Estrategias, Impacto, Ingeniería

1 Introducción

Este trabajo tiene por objetivo conocer el impacto que el COVID-19 ha tenido en las estrategias de estudio de los/as alumnos/as que transitaron primer y segundo año de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina. El mismo se desarrolló en el marco de los Proyectos de Investigación 16/I160-PI "El trayecto académico en la universidad. La permanencia como desafío estructural" y el 16/I161-PI "El rendimiento académico en la Facultad de Ingeniería de la UNaM. Especificidades del segundo año".

El abandono es uno los temas centrales de la agenda pública en el marco de la educación superior [1] [2]. Pero este fenómeno plantea cuestiones nuevas que durante el proceso de investigación se fueron desmenuzando.

El COVID-19 produjo un giro inaudito en el mundo. En el ámbito educativo, América Latina, el dictado de clases de forma virtual encontró algunos inconvenientes. Un poco menos del 50% de los hogares tiene acceso a la red. Según el Banco Interamericano de Desarrollo (BID), las barreras vinculadas a las familias y estudiantes son de conectividad; ambiente adecuado, no solo edilicio sino también de orientación y, con respecto a los estudiantes directamente, el aspecto socioemocional [3].

El 20 de marzo, el gobierno de La República Argentina decreto el Aislamiento Social, Preventivo y Obligatorio (ASPO) para todos los habitantes del país. Todas las actividades denominadas no esenciales

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

fueron suspendidas. La educación, con su modalidad presencial, fue afectada por el ASPO. En el caso de las universidades, inmediatamente pusieron en marcha el dictado de clases en modalidad virtual. En el ámbito de la Universidad Nacional de Misiones entró en vigencia la Resolución Rectoral 143/2020 [4]que suspendió las clases presenciales en todo el ámbito de la universidad.

La intervención del estado a través de las políticas públicas, es fundamental en estas condiciones para garantizar la equidad en el acceso a la oferta educativa, favoreciendo a los jóvenes continuar con su proceso formativo. El gobierno nacional firmó, en este contexto de aislamiento, con las empresas prestadoras de servicio telefónico e internet un acuerdo para que todos los estudiantes puedan tener acceso libre a las plataformas de contenido educativo [5].

En el contexto de pandemia, los docentes tuvieron un rol destacado en el proceso de enseñanza para sostener la trayectoria de los alumnos. De Vicenzi [6] destaca las capacitaciones realizadas a los docentes sobre las distintas funciones de las plataformas que se utilizaron para desarrollar la enseñanza en modalidad virtual. Por su parte, los docentes venían realizando algunas actividades dispersas con formato virtual dentro de la forma expositiva que caracterizaba a las clases. A su vez, el autor destaca el trabajo colaborativo que los docentes realizaron para lograr acuerdos pedagógicos, debates sobre contenidos, entre otros aspectos.

Por su parte, Britez [7] hace un estudio comparativo entre los países que forman parte del punto tripartito: Brasil, Paraguay y Argentina. Resalta el accionar adecuado de los tres países en su compromiso por la educación. Además, indica nuevos horizontes que se abren post pandemia.

En el presente trabajo, se abordan las estrategias que los estudiantes emplearon para la realización de sus actividades académicas durante el cursado en condiciones de ASPO.

La metodología empleada fue cualitativa y cuantitativa. El instrumento utilizado fue un cuestionario diseñado para recolección de datos y de acceso online para los/as estudiantes. El cuestionario se implementó al finalizar el cursado de las asignaturas del primer cuatrimestre del año 2020.

Los datos obtenidos fueron tratados con técnicas de estadística descriptiva.

Los resultados obtenidos permitieron avanzar en el conocimiento de la situación del estudiante universitario y su dinámica de estudio en contexto de pandemia.

Los avances en la investigación aportan al conocimiento de las nuevas configuraciones del aula y realimentar las estrategias de los equipos de cátedra en el nuevo contexto de la vida universitaria.

2 Metodología

Los participantes de este estudio fueron estudiantes que cursaron asignaturas correspondientes a primer año de todas las carreras y al segundo año de carreras de ingeniería durante el primer semestre de 2020, que se dictan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina (FI-UNaM).

2.1 Instrumento

El instrumento para la recolección de datos utilizado fue un cuestionario diseñado por el equipo de investigación para relevar las apreciaciones de los estudiantes sobre sus preferencias y estrategias para el cursado de las asignaturas en contexto de ASPO.

Se trabajó con los siguientes grupos de variables:

- Modalidad de estudio con las alternativas solo o en grupo.
- Asistencia a clases con las alternativas de teoría, práctica y consultas.
- Utilización de material bibliográfico y recursos didácticos: bibliografía recomendada por la cátedra, toma de apuntes y la utilización de apuntes de otros compañeros.
- Utilización de material audiovisual: grabaciones de las clases, videos recomendados por la cátedra, búsqueda de videos en la web.

Las variables de tipo nominal, fueron presentadas para su valoración por parte de los estudiantes en una Escala de Likert de cinco niveles [6].

En la Tabla 1 se presenta una visualización del cuestionario al que accedieron los estudiantes.

Tabla 1. Pregunta del cuestionario sobre estrategias de estudio.

¿Cuáles de las siguientes acciones implementó para estudiar durante el cursado en 2020?

	Nunca	Casi nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Trabajar en clases y estudiar individualmente	☐	☐	☐	☐	☐
Trabajar en clases y estudiar en forma grupal	☐	☐	☐	☐	☐
Asistir a clases on-line teóricas	☐	☐	☐	☐	☐
Asistir a clases on-line prácticas	☐	☐	☐	☐	☐
Asistir a clases on-line de consulta	☐	☐	☐	☐	☐

Los estudiantes accedieron al cuestionario vía aula virtual de las asignaturas que cursaron, mediante las redes sociales y canales alternativos de comunicación.

Un total de 220 estudiantes de primer año y 90 estudiantes que cursaron asignaturas de segundo año respondieron el cuestionario.

2.2 Codificación de los datos

Los datos obtenidos de los cuestionarios fueron codificados en valores numéricos para su posterior análisis, seleccionando el valor 1 para el nivel más bajo de la escala (Nunca) y 5 para el nivel más alto (Siempre).

2.3 Procesamiento de los datos

Para el tratamiento de los datos presentados en este trabajo, se utilizaron técnicas de estadística descriptiva. La síntesis de las opiniones sobre cada variable se realizó a través del cálculo del valor medio de todas las respuestas.

Para conocer la dirección y grado en que cada una de las variables del grupo se aleja de la media, se utilizó la puntuación Z [8].

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \tag{1}$$

$\bar{X}$: media aritmética
$\sum X$: suma de todos los valores observados
N: número de casos

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{s} \tag{2}$$

Z: puntuación Z de la variable
X: puntuación de la variable analizada
$\bar{X}$: media aritmética del grupo de variables

s: desviación estándar de la variable analizada

2.4 Presentación de los resultados

La síntesis de los resultados se presenta en dos tipos de gráficos uno de perfiles absolutos y otro de perfiles relativos.

El gráfico de perfiles absolutos se elaboró a partir del valor medio de las opiniones que obtuvo la variable en cada grupo de estudiantes. El objetivo es mostrar la tendencia en las opiniones de cada grupo.

El gráfico de perfiles relativos fue elaborado a partir de la puntuación Z de cada variable dentro del conjunto en cada grupo de estudiantes. El objetivo fue mostrar la relevancia de la variable en el grupo y la orientación en sentido positivo o negativo de las respuestas de los estudiantes.

3 Resultados y discusión

A continuación, se presentan los resultados del estudio.

En primer lugar, se sintetizan las respuestas de los estudiantes primer año y, luego, las de segundo año.

Tabla 2. Valor medio y puntuación z de las variables relevadas en encuesta a 1° año.

Variable	Valor Medio	Puntuación Z
Estudiar solo	3.5	0.2
Estudiar en grupo	2.4	-0.8
Asistir a teoría	3.2	0.0
Asistir a la práctica	3.1	-0.1
Asistir a consulta	2.8	-0.5
Estudiar con la bibliografía sugerida por la cátedra	3.8	0.5
Tomar apuntes	3.5	0.2
Estudiar con apuntes de otros compañeros	1.9	-1.3
Estudiar con las grabaciones de las clases	3.7	0.4
Estudiar con videos recomendados por la cátedra	3.9	0.6
Buscar videos en la web	3.9	0.6

En la Tabla 2 se presentan los resultados del valor medio de cada variable y la puntuación z de cada una en el grupo de variables seleccionadas para analizar estrategias de estudio en 1° año.

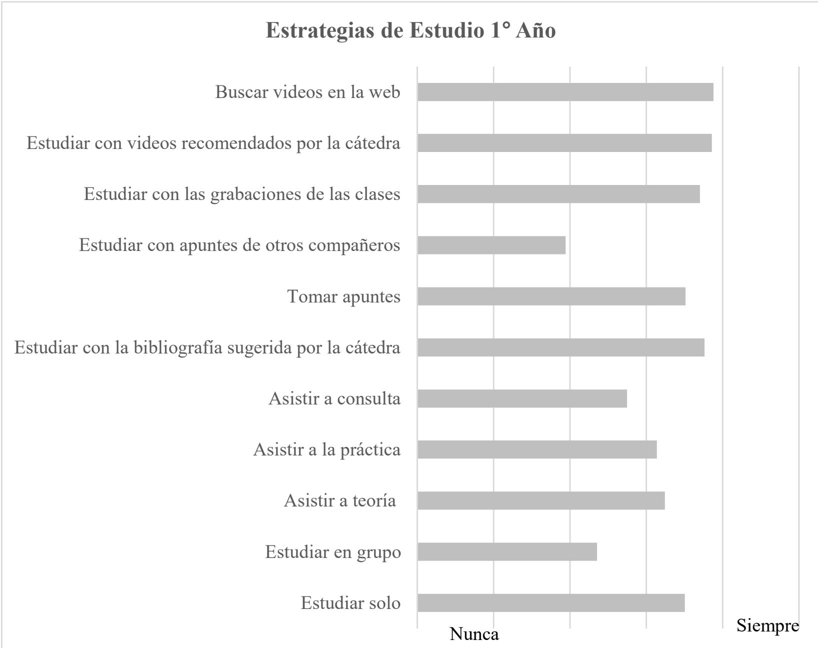


Fig. 1. Perfiles absolutos de estrategias de estudio implementadas por estudiantes de 1° año.

En la Fig. 1 se presentan los perfiles absolutos de las variables analizadas en el grupo de primer año, que corresponden al valor medio de cada variable en el grupo encuestado. Se observa que los estudiantes de 1° año optaron por estudiar solos más que estudiar en grupo. Esta preferencia puede deberse a la situación de ASPO, si bien han tenido actividades de trabajo grupal en el cursillo de ingreso nivelatorio 2020, la tendencia ha sido estudiar solo. Respecto de la asistencia a clases priorizan la asistencia a las clases de teoría y práctica más que las clases de consulta, se observa una conducta de baja asistencia a clases de consulta. Las clases de consulta no son obligatorias y no se computa la asistencia. En referencia al material de soporte estudiar con la bibliografía sugerida por la cátedra y tomar apuntes más que estudiar con apuntes de otros compañeros. Se observa una alta preferencia por las grabaciones de las clases, los videos recomendados por la cátedra y la búsqueda de videos en la web.

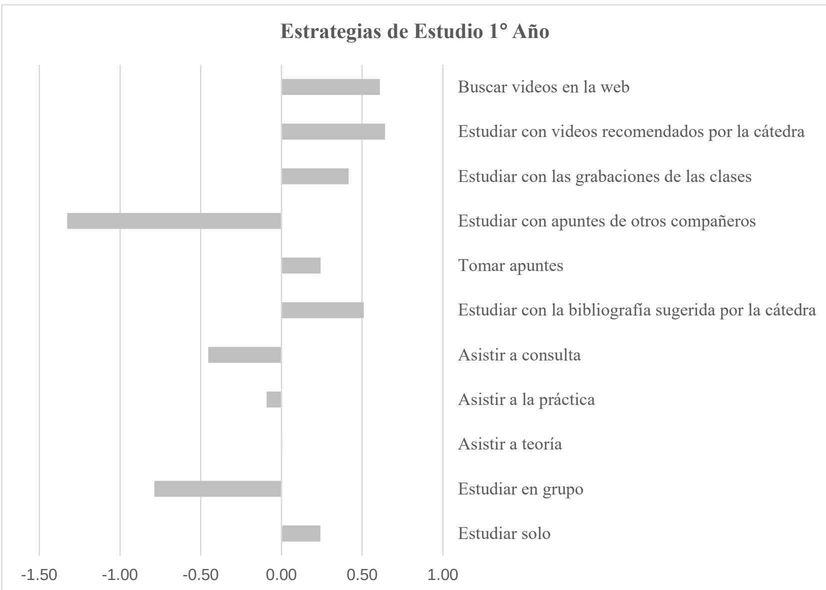


Fig. 2. Perfiles relativos de estrategias de estudio implementadas por estudiantes de 1° año.

En la Fig. 2 se presentan los perfiles relativos de las variables analizadas en el grupo de primer año, que corresponden a la puntuación z de cada variable respecto del conjunto de variables en el grupo encuestado. Se destacan con puntuaciones z en el sentido positivo las variables Buscar videos en la web, estudiar con videos recomendados por la cátedra y Estudiar con la bibliografía sugerida por la cátedra. En el sentido negativo resaltan Estudiar con apuntes de otros compañeros, Estudiar en grupo y Asistir a clases de consulta.

A continuación, se presentan los resultados para los encuestados de 2° año.

Tabla 3. Valor medio y puntuación z de las variables relevadas en encuesta a 2° año.

Variable	Valor Medio	Puntuación Z
Estudiar solo	4.1	0.5
Estudiar en grupo	2.7	-0.7
Asistir a teoría	3.9	0.3
Asistir a la práctica	3.9	0.3
Asistir a consulta	3.0	-0.5
Estudiar con la bibliografía sugerida por la cátedra	4.4	0.9
Tomar apuntes	3.7	0.1
Estudiar con apuntes de otros compañeros	2.1	-1.4
Estudiar con las grabaciones de las clases	4.4	0.7
Estudiar con videos recomendados por la cátedra	3.6	0.0
Buscar videos en la web	3.9	0.3

En la Tabla 3 se presentan los resultados del valor medio de cada variable y la puntuación z de cada una en el grupo de variables seleccionadas para analizar estrategias de estudio en 2° año.

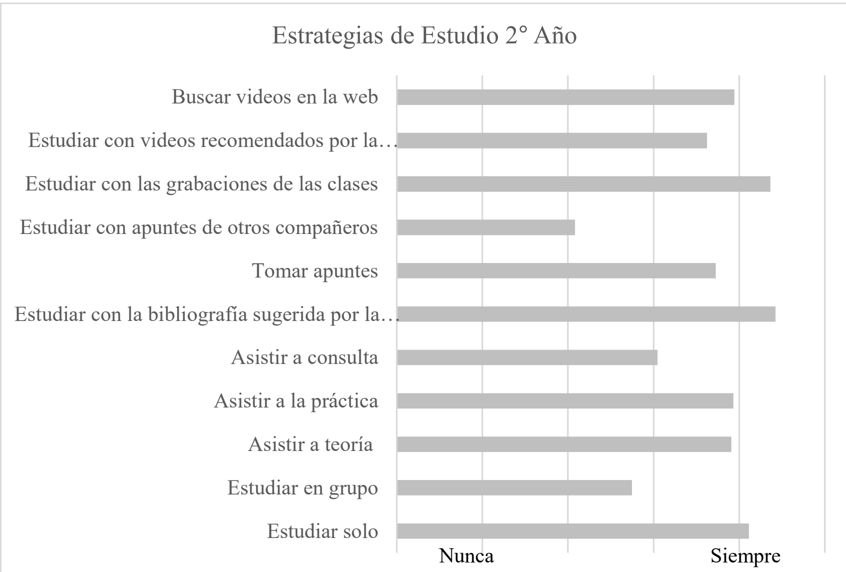


Fig. 3. Perfiles absolutos de estrategias de estudio implementadas por estudiantes de 2° año.

En la Fig. 3 se observa que los estudiantes de 2° año también optaron por estudiar solos más que estudiar en grupo. Respecto de la asistencia a clases priorizan la asistencia a las clases de teoría y práctica más que las clases de consulta. En referencia al material de soporte estudiar con la bibliografía sugerida por la cátedra y tomar apuntes más que estudiar con apuntes de otros compañeros. También, se destaca la preferencia a Estudiar con las grabaciones de las clases seguida por Buscar videos en la web y Estudiar con videos recomendados por la cátedra.

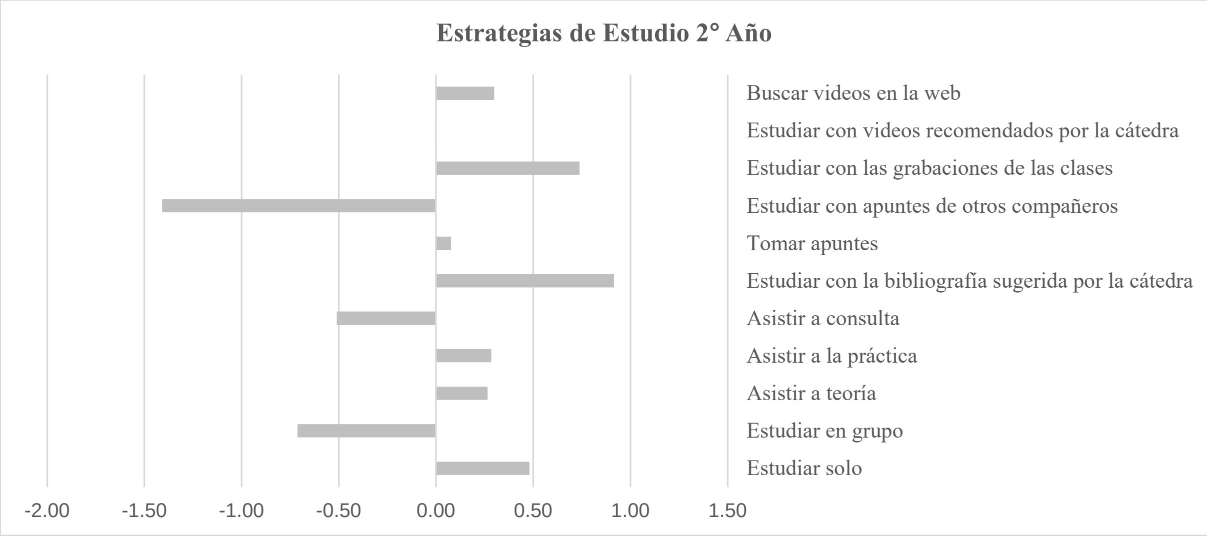


Fig. 4. Perfiles relativos de estrategias de estudio implementadas por estudiantes de 2° año.

En la Fig. 4 se observan los perfiles relativos obtenidos de la puntuación z de las estrategias implementadas por los estudiantes de 2° año. Se destaca en el sentido positivo la elección de estudiar solo, asistir a las clases de teoría y de práctica, estudiar con la bibliografía sugerida por la cátedra y Estudiar con las grabaciones de las clases y Buscar videos en la web. En el sentido negativo, se destaca la puntuación z de las variables Estudiar en grupo, Asistir a las clases de consulta y Estudiar con apuntes de otros compañeros.

4 Conclusiones y trabajos futuros

El cursado de las asignaturas del primer semestre del año 2020 se ha visto fuertemente condicionado por la situación de ASPO por COVID 19.

Comparativamente, se destaca en ambos grupos la preferencia por estudiar con los videos de la web y de las cátedras. Otro aspecto que sobresale es la baja tendencia en la toma de apuntes; como así también la baja valoración a la asistencia a clases de consulta y la preferencia por estudiar solos.

El trabajo de investigación es un aporte a la comprensión del impacto que ha tenido en las estrategias de estudio de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina la situación de cursado en ASPO.

Esta investigación continúa con la expectativa de avanzar en la comprensión del trayecto de los estudiantes en su segundo año de cursado virtual y en la percepción de los docentes sobre las prácticas.

Referencias

1 A. G. DE FANELLI, «Políticas institucionales para mejorar la retención y la graduación en las universidades nacionales argentinas,» Debate Universitario, vol. 4, nº 7, pp. 7-24, 2015.

2 N. GLUZ y I. R. MOYANO, «Jóvenes y universidad. El PROG. R. ES. AR y la democratización del nivel superior,» Revista del IICE, vol. 1, nº 39, pp. 67-82, 2016.

3 A. Cardini, A. Bergamaschi, V. D´Alessandre, E. Torre y A. Ollivier, «Educar en pandemia: entre el aislamiento y la distancia social,» Banco Interamericano de Desarrollo - División de Educación - VII. Serie. IDB-TN-1955, 2020.

4 Universidad Nacional de Misiones, Argentina, «Resolución Rectoral 143,» de www.unam.edu.ar, Posadas, Misiones, Argentina, 2020.

5 Ente Nacional de Comunicaciones ENACOM, «https://www.enacom.gob.ar,» 8 abril 2020. [En línea]. Available: https://www.enacom.gob.ar/institucional/enacom-y-el-ministerio-de-educacion-gestionan-datos-libres-para-las-universidades_n2282. [Último acceso: 10 Mayo 2020].

6 A. DE VINCENZI, « Del aula presencial al aula virtual universitaria en contexto de pandemia de COVID-19. Avances de una experiencia universitaria en carreras presenciales adaptadas a la modalidad virtual,» Debate Universitario, vol. 8, nº 16, pp. 67-71, 2020.

7 M. BRITEZ, «La educación ante el avance del COVID-19 en Paraguay. Comparativo con países de la Triple Frontera,» https://preprints.scielo.org/, Vols. %1 de %2-, nº -, pp. -, 2020.

8 R. Henández Sampieri, L. Fernández Collado y P. Baptista Lucio, Metodologái de la investigación, México: McGraw-Hill, 1998.

9 A. M. FANELLI, M. M. MARQUINA y M. RABOSSI, «Acción y reacción en época de pandemia: La universidad argentina ante la COVID-19,» ESAL , vol. 1, nº 1, pp. 3-8, 2020.

Geometría y TIC en la Formación de Profesores

Marisa Reid y Rosana Botta Gioda

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Avda Uruguay 151,
6300 Santa Rosa, La Pampa, Argentina
[1]{mareid, rosanabotta}@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. Presentamos una propuesta, para “trabajar” con conceptos geométricos utilizando tecnología, en la formación inicial de Profesores de Matemática. La secuencia de actividades tiene como objetivo revisar los conceptos de perímetro y área de polígonos, para luego avanzar en el abordaje del Teorema de Pick, con la idea de que los estudiantes de secundaria puedan inferir la fórmula que, como alternativa, les posibilita hallar el área de polígonos; establezcan sus alcances y limitaciones. Se incorpora como recurso didáctico un geoplano, construido con el programa GeoGebra, que funciona como mediador entre las ideas y las nociones matemáticas. Como formadores de profesores sostenemos que los docentes son el eslabón clave para llevar adelante propuestas de innovación y apropiación significativa de las TIC en las propuestas educativas. Las TIC por sí solas no fortalecen la enseñanza y el aprendizaje, sino que deben ir acompañadas por secuencias e intencionalidades didácticas que acompañen dichos recursos.

Palabras Clave: Formación de Profesores, Geometría, Tecnología, Estrategias de Enseñanza.

1 Introducción

Se propone desde la asignatura Práctica Educativa III: Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam), un objetivo macro que consiste en profundizar en el conocimiento profesional del profesor de Matemática con el objeto de incidir en su formación profesional. Esta actividad curricular constituye un espacio destinado a la comunicación-producción de conocimiento didáctico sobre la enseñanza de la Matemática en sus diferentes dimensiones. Se analizan los aspectos y problemáticas centrales de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina en el nivel secundario.

De todas las ramas de la Matemática, la Geometría es una de las más intuitivas, concretas y ligadas a la realidad que conocemos. La enseñanza de la misma es una tarea compleja debido a las múltiples variables que influyen. Generalmente, se ha desplazado su tratamiento al final del programa y los contenidos enseñados están enfocados a una visión “estática”, relacionada con materiales clásicos como la regla y el compás. Actualmente, existe un acuerdo generalizado, basado en investigaciones de educadores matemáticos, en que la enseñanza de la geometría debe basarse en metodologías que faciliten la actividad de exploración y descubrimiento de parte de los estudiantes.

En este sentido, en el material curricular vigente en la provincia de La Pampa, en el espacio Matemática para el ciclo básico de la educación secundaria uno de los ejes que se definió es GEOMETRÍA Y MEDIDA y se hace referencia a la utilización de la tecnología considerando que los avances tecnológicos afectan a la sociedad y a la educación, siendo necesario incorporar en el currículum de Matemática, el uso de recursos tecnológicos que resulten adecuados para transformar la enseñanza y mejorar el aprendizaje.

Nos enfocaremos en el análisis de una secuencia de geometría con la presencia de recursos tecnológicos, presentando situaciones que les permitan a los estudiantes participar de una actividad matemática significativa dentro de un modelo didáctico amplio, flexible, riguroso y sistemático. El programa GeoGebra se presenta como una de las mejores opciones para visualizar, manipular y explorar los objetos matemáticos.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Se desea mostrar a los futuros profesores una forma alternativa de trabajar la Geometría, para ello se eligió abordar el teorema de Pick que relaciona el cálculo del área de figuras con las tramas cuadradas o geoplano. Si bien no es un contenido que aparezca explícitamente en el diseño curricular de educación secundaria, es un resultado que permite un acercamiento al enunciado del teorema mediante sucesivas aproximaciones en las que los estudiantes pueden hacer conjeturas.

2 Marco teórico

En este trabajo se vinculan referentes teóricos que surgen de la intersección de tres temáticas en estrecha relación: por un lado, la introducción de recursos tecnológicos en la clase; por otro lado, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría; y por último la formación inicial de profesores de Matemática. La Geometría está escasamente desarrollada y muchas veces se olvida cómo tratarla durante la formación de profesores. Por otro lado, la enseñanza tradicional de la geometría se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas [1].

La exclusión total o un estudio superficial de la misma imposibilita a los estudiantes conocer otro modo de pensar, de utilizar propiedades de los objetos geométricos para inferir y producir nuevas propiedades [2]. Una de las principales preocupaciones en la investigación en esta área es mejorar los modelos pedagógicos y estrategias didácticas para su enseñanza en los distintos niveles.

En este sentido, el tipo de experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor es determinante para su desempeño profesional.

Una armonía entre los conocimientos comunes, especializados, sustantivos y sintácticos de la Matemática le permitirán al docente ir más allá de saber el qué, para saber el por qué y el para qué de lo que enseña [3].

Al proponer la utilización de la tecnología informática en la enseñanza de la matemática estamos considerando que dicha integración no es instantánea ni transparente e influye en las prácticas educativas modificando no solo el objeto de enseñanza sino lo que significa enseñar y aprender. En este sentido, estamos de acuerdo con lo planteado por Manuel Castells en relación con el uso de las tecnologías informáticas para generar aprendizajes abiertos en vez de cerrados; autónomos y críticos. De esta manera, aprender a manejar recursos tecnológicos supone aprender a aprender [4].

Como formadores de profesores sostenemos que los docentes son el eslabón clave para llevar adelante propuestas de innovación y apropiación significativa de las TIC en las propuestas educativas. "(...) no es en las TIC ni en sus características propias y específicas, sino en las actividades que llevan a cabo profesores y estudiantes gracias a las posibilidades de comunicación, intercambio, acceso y procesamiento de la información que les ofrecen las TIC, donde hay que buscar las claves para comprender y valorar su impacto sobre la enseñanza y el aprendizaje"[5].

3 La experiencia

Las actividades propuestas, diseñadas en el marco de la actividad curricular Práctica Educativa III: Didáctica de la Matemática para futuros profesores, permiten abordar conceptos matemáticos clásicos utilizando la tecnología. La propuesta pone la mirada sobre los procesos de producción de la clase. Se trata de llevar al futuro profesor a confrontar su rol con la exigencia de interactuar con las ideas de sus estudiantes, teniendo como referencia los saberes que quiere enseñar.

Mediante la utilización de un recurso didáctico como el geoplano construido con GeoGebra, se diseña una secuencia de actividades para, primeramente, consolidar los conceptos de perímetro y área de polígonos, y posteriormente lograr que los estudiantes "obtengan" la fórmula del Teorema de Pick como alternativa de cálculo para hallar el área de polígonos, valoren su simplicidad y potencial, establezcan sus alcances y limitaciones, y realicen actividades de validación.

La incorporación del geoplano exige pensar cuáles son los objetivos que se persiguen y determinar posteriormente de qué manera y en qué condiciones el uso de este recurso contribuye a ellos.

Se pretende que las actividades conduzcan al desarrollo de una comprensión profunda de los conceptos fundamentales a enseñar, mostrar cómo la diversidad de métodos de enseñanza se deriva del conocimiento de los contenidos matemáticos y cómo la apreciación de esta diversidad abre una ventana a la enseñanza de contenidos extendidos.

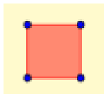
El uso del software GeoGebra funciona como mediador entre las ideas y las nociones matemáticas. Este recurso abre nuevos horizontes y posibilidades a los procesos de enseñanza y aprendizaje y cuando se emplea adecuadamente es apropiado para generar dinámicas de innovación, que de otro modo sería muy difícil de conseguir.

Los estudiantes distribuidos en grupos explorarán una secuencia con algunas actividades iniciales que tienen por objetivo la familiarización con el Geoplano y luego el abordaje de los saberes que se propone “enseñar”.

Se presenta a los estudiantes, futuros docentes de matemática, la propuesta de trabajo que consiste en analizar una secuencia didáctica y explicitar: contenido a trabajar, objetivos, año en que se podría presentar según los Materiales Curriculares de nuestra provincia, posibles estrategias de resolución y preguntas de los alumnos e intervenciones docente, posibles cambios en las consignas y/o en la secuencia, un breve análisis en relación a lo leído en el libro “Iniciación al estudio didáctico de la Geometría” de Horacio Itzcovich [2].

A continuación, se muestra sucintamente la primera parte de la secuencia planificada (véase Fig.1) y algunos extractos de los análisis a-priori que produjo uno de los grupos. En este recorrido por la experiencia planificada se trata de articular los conocimientos nuevos con los viejos y el rol docente es fundamental para que el estudiante pueda avanzar en el aprendizaje.

Para esta actividad utilizaremos el archivo de GeoGebra llamado Geoplano. La unidad de área en el Geoplano será la del cuadrado más pequeño que pueda obtenerse al unir cuatro puntos. A esta unidad la llamaremos unidad cuadrada. Asimismo, la unidad de longitud será la distancia vertical u horizontal entre dos puntos consecutivos. Observar la Figura.



Comenzaremos la secuencia con algunas actividades con el objetivo de familiarizarnos con el Geoplano y luego ya abordaremos otras para trabajar con los saberes que nos proponemos “enseñar”.

1. Determinar el área y perímetro de los polígonos construidos en una trama que se muestra en la siguiente Figura:

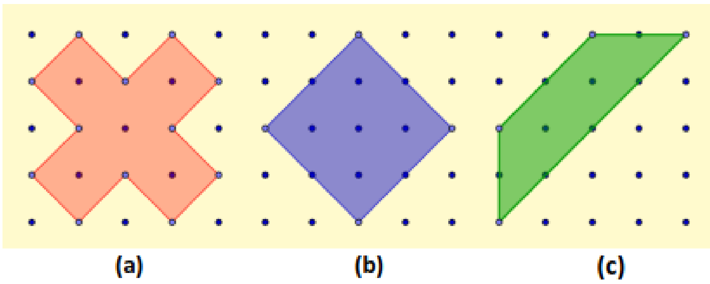


Fig. 1. Actividad 1 de la secuencia planificada

Uno de los grupos expone lo siguiente:

*Para el cálculo del **área** **“Encerrar**” a cada figura en un cuadrado de 4x4, con área igual a 16 unidades cuadradas* (Fig.2).

Luego calcular el área de los triángulos que se encuentran por fuera de la figura dada pero dentro del cuadrado de 4x4. (Es decir, los triángulos “pintados” de las siguientes imágenes)

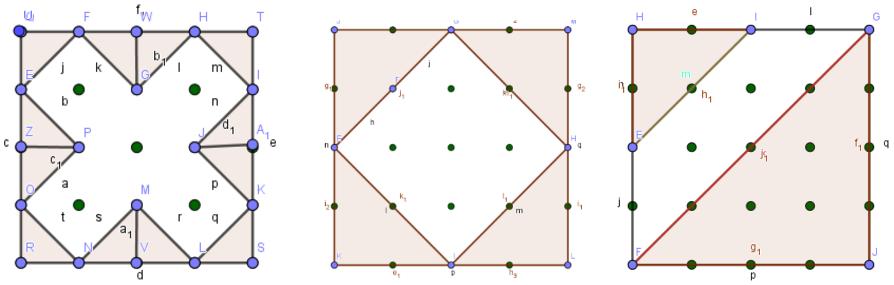


Fig. 2. Imagen presentada por uno de los grupos para el cálculo de áreas

Por ejemplo, para el caso de la figura a) hay 12 triángulos de 0.5 unidades cuadradas. Multiplicando la cantidad de triángulos por la cantidad de unidades cuadradas obtenemos: $12x0.5uc = 6uc$. *Por último, se resta este resultado al área total del cuadrado de 4x4. Entonces el área de la figura buscada es* $16uc - 6uc = 10uc$.

Para el área de las dos figuras restantes se sigue el mismo procedimiento. Calcular el área de los triángulos que se encuentran por "fuera" de la figura dada, pero "dentro" del cuadrado de 4x4. Luego se restan estas áreas al área del cuadrado de 4x4.

En cuanto al ***perímetro*** *se sabe que la unidad de longitud será la distancia vertical u horizontal entre dos puntos consecutivos.*

Pero las tres figuras a las que se les debe calcular el perímetro no tienen líneas horizontales o verticales que unen dos puntos, sino que dos puntos están unidos por un segmento diagonal. Este segmento representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Por ejemplo, en la figura b) se forma un cuadrado de 2x2 (color verde) (Fig.3). *Luego al dividir por la mitad a dicho cuadrado se obtienen dos triángulos rectángulos. Y con el teorema de Pitágoras se puede calcular su hipotenusa.*

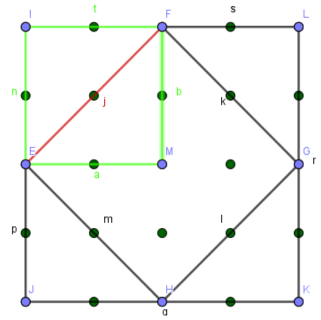


Fig. 3. Imagen presentada por el grupo para hallar el perímetro

Así tenemos que $h^2 = 2^2 + 2^2$, $h^2 = 8$, $h = 2\sqrt{2}$. *Por lo tanto, la hipotenusa es de* $2\sqrt{2}$.

Restaría multiplicar la longitud de la hipotenusa por la cantidad de lados que tiene la figura. Esto es: $2\sqrt{2}\ x\ 4 = 8\sqrt{2}$ *unidades de longitud.*

Por lo tanto, la figura b) tiene un perímetro de $8\sqrt{2}$ *ul.*

Para hallar el perímetro de las dos figuras restantes se debe calcular la longitud de los segmentos que representan la hipotenusa de un triángulo rectángulo y multiplicarlos por la cantidad de lados de igual longitud.

Otra forma para calcular el área que presenta el mismo grupo es la siguiente:

En este caso se grafican cuadrados de una unidad cuadrada sobre cada una de las figuras. Se comienza contando todos los cuadrados "completos" (una unidad cuadrada) que están sobre la figura. Y luego a la cantidad de los cuadrados "incompletos" se los multiplica por 0.5 uc. (Fig.4)

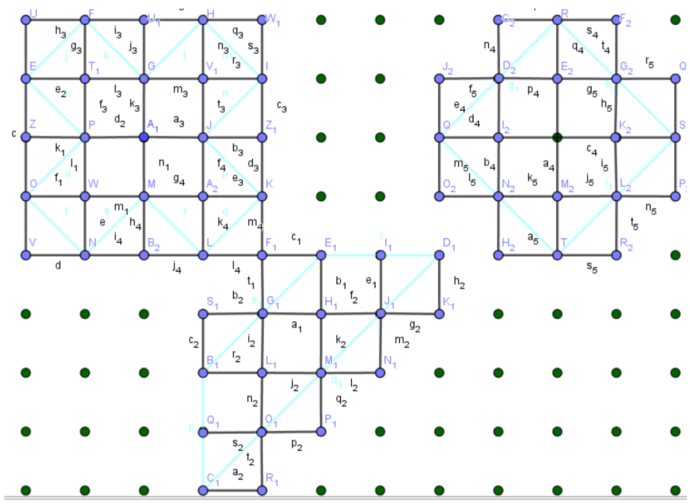


Fig. 4. Imagen proporcionada por el grupo en donde se muestra otra forma de calcular el área

A partir de este procedimiento las áreas encontradas serán:

Figura a) $4uc + 12x0.5uc = 10uc$

Figura b) $4uc + 8x0.5 = 8uc$

Figura c) $3uc + 6x0.5uc = 6uc$

Para calcular el perímetro el grupo identifica algunos errores posibles:
*Un **cálculo erróneo** del perímetro: se cuenta de punto a punto como una unidad de longitud, sin tener en cuenta que la unidad de longitud es la distancia vertical u horizontal entre dos puntos consecutivos (*Fig.5).

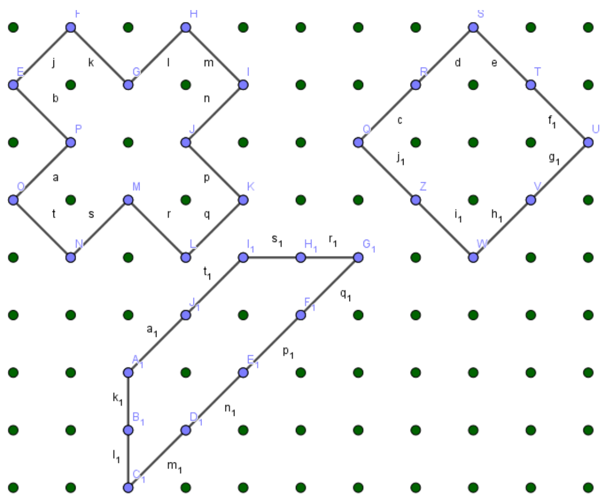


Fig. 5. Imagen dada por el grupo con el objetivo de visualizar un posible error

Por ejemplo, para el perímetro de la figura a) se suman los segmentos que unen cada punto, lo cual daría un perímetro de 12 unidades de longitud.

Para la figura b) tendríamos un perímetro de 8 unidades de longitud y para la última figura tendríamos un perímetro de 10 unidades de longitud.

Este procedimiento de calcular el perímetro no es el correcto, ya que en algunos casos los segmentos no unen dos puntos consecutivos de forma horizontal o vertical.

Al reflexionar acerca de lo que puede ocurrir en el aula al utilizar la secuencia, se generan distintas estrategias, distintos resultados y, distintos errores de acuerdo con el grupo de estudiantes que la enfrentan, por lo que estas instancias de reflexión permiten tomar decisiones respecto de la propuesta de enseñanza (por ejemplo, analizar si es necesario volver sobre determinadas situaciones, agregar otras, etcétera).

Posteriormente se propone calcular el área de diferentes figuras y elaborar conjeturas para encontrar una expresión general a modo de fórmula para el cálculo de área de esas figuras (Fig.6).
Se inicia la secuencia didáctica proponiendo figuras con uno, dos, tres... puntos interiores, indicando a los y las estudiantes que calculen su área, por alguno de los procedimientos anteriores, y recojan los resultados en una tabla para poder analizarlos e intentar establecer alguna relación entre ellos.

La utilización del geoplano lleva a los estudiantes a experimentar por ellos mismos profundizando su comprensión, explicando, conjeturando, verificando la validez de sus conjeturas.

3. Calcular el área de los polígonos que se muestran en las Figuras, que tienen un único punto en su interior. Luego completar la tabla. (En este caso les damos algunas figuras, pero ustedes deben realizar las construcciones en el Geoplano en GeoGebra para ir familiarizándose) ***Es importante que registren, para la puesta en común, de que forma/s calcularon las áreas de las figuras.***

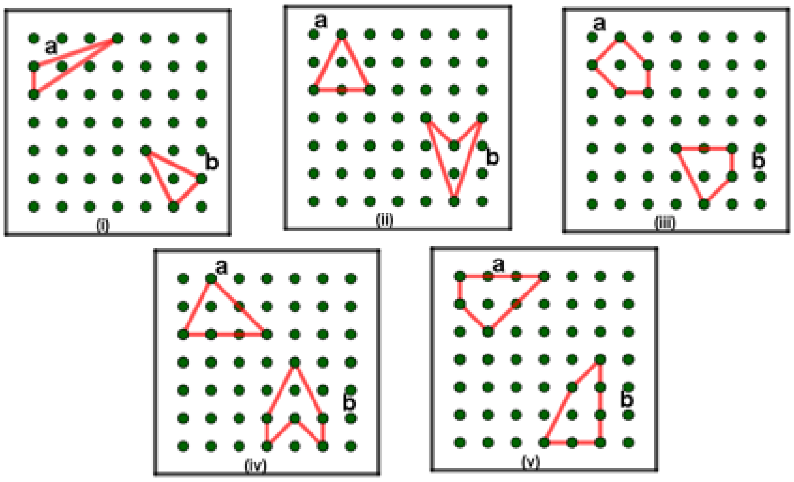


Figura	Puntos fronteras	Puntos Interiores	Área del polígono	
			a	b
(i)	3	1		
(ii)	4			
(iii)				
(iv)				
(v)				

Fig. 6. Actividad de exploración del Teorema de Pick

La idea es que los estudiantes de secundaria puedan inferir la fórmula que, como alternativa, les posibilita hallar el área de polígonos; establezcan sus alcances y limitaciones.

En esta actividad observamos que uno de los grupos se libera de las condiciones particulares de la tabla y presenta posibles estrategias de los/as estudiantes, así como posibles dificultades o errores y prever intervenciones.

Algunos alumnos en las actividades anteriores dedujeron que *si todos los polígonos (que se desean graficar) tienen la misma cantidad de puntos interiores y además el número de los puntos fronteras aumenta de a una unidad, entonces el área de cada una de esta figura aumentará 0.5 unidades cuadradas por cada unidad que se aumente de los puntos frontera.*

También está la posibilidad de que algunos alumnos no hayan notado esta regularidad en las actividades anteriores, por lo cual se tomarán el tiempo de graficar y calcular el área de polígonos con 0 puntos interiores y luego con 1 punto interior hasta deducir la regularidad esperada.

Otra posibilidad que puede surgir es que realicen el siguiente cuadro (Fig.7):

Puntos frontera	Área con Ningún punto interior	Área con 1 punto interior	Área con 2 puntos interiores	Área con 3 puntos interiores
3	1/2	½ + 1= 3/2	3/2 +1 = 5/2	5/2 + 1 = 7/2
4	1	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1
5	3/2	5/2	7/2	9/2
6	2	3	4	5
7	5/2	7/2	9/2	11/2

Fig. 7. Tabla propuesta por uno de los grupos

Para hallar una fórmula para el área siendo **b** la cantidad de puntos frontera e **i** la cantidad de puntos interiores, se plantea lo siguiente:

Se toma la fila de 7 puntos fronteras (Fig.7). Si se "desarma" cada área a partir de la regularidad general observada y teniendo en cuenta que en cada columna hacia la derecha se aumenta un punto interior podemos escribir lo siguiente (Fig.8):

b=7	$\frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$	$\frac{7}{2} - 0 = \frac{7}{2}$	$\frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$	$\frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$

Fig. 8. Tabla propuesta por uno de los grupos

Así, a partir de la tabla (Fig. 8), *se puede obtener la fórmula para calcular el área = b/2+i-1*

Supongamos que los alumnos realizan los siguientes polígonos (Fig.9) *para verificar la fórmula que se obtuvo:*

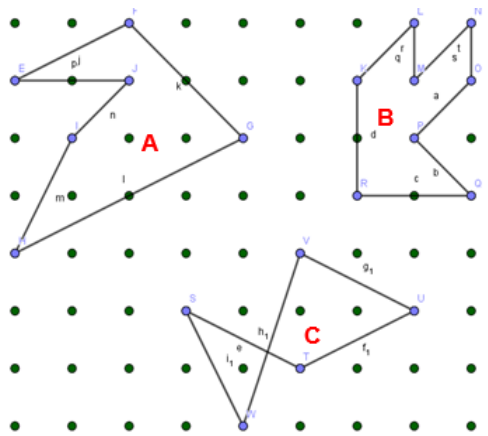


Fig.9. Polígonos propuestos por un grupo para verificar el teorema de Pick

Para verificar el resultado de la fórmula calcularon el área "encerrando" al polígono en un cuadrado. Al momento de calcular el área de los triángulos que están "alrededor" del polígono se encontraron con que en algunos casos no podían, observando que esto ocurría en los triángulos donde las líneas del polígono se cruzan.

Por lo tanto, dedujeron que la fórmula sólo es útil para polígonos simples, donde las líneas que lo forman no se cruzan.

Como se pudo observar, el teorema de Pick establece una relación entre el conteo de puntos en una cuadrícula de números enteros y el área de la figura. Tradicionalmente, en el currículo escolar el área se conceptualiza como un número definido por los lados de cualquier figura. En contraste, el teorema de Pick cambia la aproximación cognitiva al conteo como base para el cálculo del área. Este teorema usa, la suma, la resta y la división como operaciones para calcular el área. Se pensó en un acceso más simple al cálculo del área de cualquier figura irregular. En comparación, el currículo escolar opta por dos vías que alejan, temporalmente, la conceptualización del cálculo del área: 1) la triangulación como método de cálculo del área de figuras irregulares, el problema de esto es que en muchas ocasiones se necesita el teorema de Pitágoras; o 2) aprender una gran cantidad de fórmulas geométricas para calcular el área, por lo cual consideramos que el teorema de Pick funge como una visión del cálculo del área menos memorística.

El análisis desarrollado por cada uno de los grupos habilitó algunas reflexiones particulares referidas a la secuencia planteada y otras más generales acerca de la conceptualización de área y perímetro.

En la segunda parte de la secuencia el proceso abarca: contextualización, anticipación de los recursos con los que podrán abordar las situaciones, iniciativa de las interacciones que se podrían desplegar entre los estudiantes y con el docente, emergencia de preguntas relativas al funcionamiento didáctico de la secuencia planificada que surgen.

Elaboraron nuevas actividades interpelando también sus propias conceptualizaciones acerca de la enseñanza.

Se busca comprender y explicar las interrelaciones entre los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en el aula y también elaborar herramientas conceptuales que permitan transformar la enseñanza.

Al respecto la respuesta de un grupo de estudiantes fue: *"En conclusión, en todos los casos hay un trabajo exploratorio, de ensayos y errores, de ajustes, etc. En esta clase de trabajo resulta imprescindible que el docente genere debates entre los alumnos a propósito de lo que construyen. En todo momento, el docente tendrá que ir moderando el debate, orientando a los alumnos, ya que él es el único que sabe de antemano cuál es la propiedad que justifica la obtención o no de los resultados"*

El análisis de la secuencia resignifica para los futuros profesores la idea de que el problema que los alumnos resolverán no queda definido solamente por su enunciado y la situación que evoca sino, además, de la gestión que realice el docente a partir de las interacciones de los alumnos con el mismo [6].

El desarrollo relatado permite apreciar que alrededor del enunciado del problema se organizan una cantidad muy rica de actividades que no están "contenidas" en dicho enunciado y que son totalmente dependientes Somos conscientes de que el proceso que se ha desarrollado no es una demostración del teorema de Pick, pero sirve como ejemplo para que los futuros profesores experimenten cómo se puede llegar a obtener un resultado general a partir de situaciones concretas planteadas en clase.

La demostración del teorema se puede realizar mediante inducción, a partir de la demostración de la fórmula para triángulos y del hecho de que es posible la triangulación de cualquier polígono de vértices enteros [7], pero ello no era objeto de esta actividad.

4 Comentarios finales

Para que un cambio en la enseñanza de la Matemática ocurra, es necesario crear los espacios donde los futuros profesores tengan la oportunidad de familiarizarse desde su formación y construir un conocimiento profesional que le permita tomar una perspectiva de innovación.

Los autores Baumert et al. [8] señalan que el conocimiento pedagógico del contenido es una influencia decisiva tanto en la calidad de la instrucción como en la mejora de la calidad del aprendizaje de los escolares y también que para poder desarrollar conocimiento pedagógico del contenido es necesario un conocimiento sólido del contenido matemático.

Gamboa Araya [9] “La forma en cómo el estudiante interactúa con la tecnología, le aporta al profesor valiosa información para determinar el tipo de actividades que se pueden plantear, cómo se deben dirigir y los posibles alcances a los que se pueden llegar con cada una de ellas.

Que el estudiante logre construir su propio conocimiento con ayuda de la tecnología o que, por el contrario, “atrofie” habilidades ya adquiridas depende del profesor, pues es él quien toma de decisión de utilizarla, dónde,

cómo y cuándo”.

De la observación del desarrollo de la actividad en clase, y los trabajos elaborados con posterioridad por parte de los estudiantes, podemos obtener algunas conclusiones:

- La actividad les resulta motivadora y les brinda la posibilidad de “hacer” matemática al tener que descubrir ellos mismos el teorema, en lugar de partir del enunciado.
- El uso del Geoplano y GeoGebra aparecen como recursos innovadores para el desarrollo de la propuesta.
- Surgen dificultades relacionadas con contenidos matemáticos básicos, como el teorema de Pitágoras, y los conceptos de área y perímetro.
- Para resolver la dificultad con el cálculo de áreas, utilizan estrategias no convencionales (composición y descomposición de figuras) aunque señaladas en el currículo, tal vez propiciadas por el uso de la trama de puntos.
- Para establecer la fórmula general a partir de los casos particulares, consideran que debe darse un proceso de interacción con el docente.
- Los estudiantes muestran poca capacidad para relacionar la propuesta con los contenidos teóricos desarrollados en la actividad curricular.

Con respecto a la formación docente inicial las propuestas curriculares y las experiencias de aprendizaje deben promover en los/as futuros docentes las comprensiones y el desarrollo de capacidades centrales incorporando el uso de recursos digitales que favorecen el aprendizaje de la matemática.

Para que los futuros docentes alcancen las competencias y perfil deseado es necesario implementar dispositivos de formación que los lleve a problematizar la enseñanza elaborando preguntas que surjan de sus propias experiencias o del análisis de prácticas docentes; comprometiéndose a aumentar sus capacidades de observación, de agudizar prácticas reflexivas, de fortalecer el sentido de su propia capacitación.

Referencias

1. Gamboa, R.; Ballestero, E.: Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Vol.4, No.5, pp. 113-136 (2009)
2. Itzcovich, H.: *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Libros del Zorzal (2005)
3. Fonseca Castro, J.; Castillo Sánchez, M.: *Formación de Docentes de Matemática: Aspectos Relevantes*. Uniciencia, Vol. 27, No.1, pp. 2-14. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947762001 (2013)
4. Castells, M.:*La galaxia Internet*. Barcelona: Plaza & Janés editores. (2001)
5. *Coll, C.:* Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades, en*:Carneiro, R.; Toscano, J.C.; Diaz, T. Coord. Los desafíos de las TIC para el cambio educativo. C*olección METAS EDUCATIVAS 2021. OEI y Fundación Santillana. *(2011)*
6. Sadovsky, P.: *Enseñar matemática hoy: miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal. (2005)
7. Ramírez Ramírez, J.L.: El Teorema de Pick y Redes de Puntos. *Materials Matemàtics*, Vol.5, pp. 41 (2010)
8. Baumert, J.; Kunter, M.; Blum, W.; Brunner, M.; Voss, T.; Jordan, A., et al.: Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress.*American Educational Research Journal*, Vol. 47, No.1, pp. 133-180. doi:10.3102/0002831209345157 (2010)
9. Gamboa Araya, R.: Uso de las Tecnologías en la enseñanza de la matemática. C*uaderno de Investigación y Formación en educación matemática*. Año 2, No.3, pp 11-44 (2007)

Estudio preliminar sobre los efectos de la enseñanza virtual en el rendimiento académico de estudiantes de Ciencias Básicas de la FIO

Yésica Aispún, Eugenia Borsa, Alicia M. Gaisch, Liliana Irassar

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
(7400) Av. del Valle 5737. Olavarría, Buenos Aires, Argentina
yesica.aispun@fio.unicen.edu.ar, eborsa@fio.unicen.edu.ar,
agaisch@fio.unicen.edu.ar, lirassar@fio.unicen.edu.ar

Resumen. La pandemia ha transformado los contextos de implementación del currículo, no solo por el uso de-plataformas educativas online, la utilización de aplicaciones de videoconferencias y la necesidad de considerar condiciones diferentes a aquellas para las cuales el currículo fue diseñado, sino también porque existen aprendizajes y competencias que cobran mayor relevancia en el actual contexto. En este trabajo se propone analizar con metodologías estadísticas si los cambios en las prácticas pedagógicas han modificado el rendimiento académico de los estudiantes de cuatro asignaturas del departamento de Ciencias Básicas de la FIO; esto es, si la proporción de alumnos aprobados en 2020 es mayor que la proporción de alumnos aprobados en el período 2016-2019 de las asignaturas estudiadas.

Palabras Clave: Métodos estadísticos, Rendimiento académico, Enseñanza virtual

1 Introducción

Ante la nueva realidad mundial generada por las consecuencias del COVID-19, la educación en general y la universitaria en particular, se ha visto en la necesidad de ajustarse a un nuevo escenario formativo. En este contexto de enseñanza y aprendizaje las instituciones universitarias y principalmente los actores docentes, han debido tener en cuenta que es imposible trasladar la estructura presencial a un sistema en línea o virtual. En este marco, corresponde considerar que los recursos tecnológicos no reemplazarán la labor educativa, pero sí se pueden convertir en una herramienta fundamental para generar significativos procesos de enseñanza y de aprendizaje; estos recursos promoverán un espacio adecuado y servirán de conexión entre los docentes y sus estudiantes.

La Facultad de Ingeniería de la UNCPBA con sede en Olavarría (FIO) respondió con celeridad a la suspensión de clases presenciales implementando, a partir de la entrada en vigencia del aislamiento social, preventivo y obligatorio (ASPO), la modalidad virtual para impartir la enseñanza a través de la plataforma FIO Virtual, con la que ya se venía trabajando de manera incipiente en muchas asignaturas y trayectos formativos.

La pandemia ha transformado los contextos de implementación del currículo, no solo por el uso de plataformas educativas online, la utilización de aplicaciones de videoconferencias y la necesidad de considerar condiciones diferentes a aquellas para las cuales el currículo fue diseñado, sino también porque existen aprendizajes y competencias que cobran mayor relevancia en el actual contexto [1]. Esto demandó, por una parte, a los docentes analizar, generar e implementar acciones que permitan contextualizar las estrategias educativas con el fin de que respondan a las necesidades de los estudiantes, y por otra, a los estudiantes, adaptarse, disponerse a cambiar los modelos tradicionales de aprendizaje y encontrar roles más participativos, para que esta situación que se dio en la emergencia se traduzca en un cambio a nivel educativo que perdure.

En el presente trabajo se propone analizar si los cambios en las prácticas pedagógicas han modificado el rendimiento académico de los estudiantes de algunas asignaturas del departamento de Ciencias Básicas de la FIO.

Para realizar este análisis se han considerado datos de la proporción de alumnos aprobados en las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático I, ambas correspondientes al primer cuatrimestre de primer año de las carreras de Ingeniería y Profesorado en Química que se dictan en la FIO y Análisis Matemático III y Probabilidad y Estadística, ambas correspondientes al segundo año con dictado en el primero y segundo cuatrimestre respectivamente. Los datos analizados contemplan el período 2016 – 2019 con dictado presencial y el 2020 con modalidad virtual.

En tal sentido, surgen los siguientes interrogantes: ¿hay una cierta regularidad en la proporción de aprobados en las asignaturas mencionadas con dictado presencial en el período estudiado?; ¿hay diferencias entre la proporción de aprobados con dictado presencial y con dictado virtual en las asignaturas mencionadas?; ¿hay diferencia entre la proporción de estudiantes aprobados de primer año que han recibido sólo enseñanza virtual y los de segundo año que poseen experiencia previa con dictado presencial?; ¿podemos atribuir las diferencias en los rendimientos académicos sólo a la modalidad de dictado de las asignaturas (presencial-virtual) o influyen otros factores que es necesario considerar?

1.1 Prácticas pedagógicas utilizadas en la modalidad virtual en las asignaturas estudiadas

Es importante a la hora de analizar y cuantificar el rendimiento académico de los estudiantes en este grupo de asignaturas bajo estudio, dar cuenta de las principales acciones y estrategias educativas que se introdujeron en cada desarrollo curricular para abordar el dictado virtual, ya que la manifestación explícita de las mismas proporcionará un posible marco explicativo de los efectos y resultados que se obtuvieron.

- Algebra y Geometría Analítica (AyGA): durante el dictado virtual, se mantuvo la división de la asignatura en dos espacios de trabajo, uno destinado a desarrollar conceptos, llamado "teoría" y otro espacio para realizar una guía de trabajos prácticos.
  Es importante destacar que en la virtualidad, las clases teóricas tuvieron un fuerte cambio de metodología respecto a las clases magistrales presenciales tradicionales, se comenzó a trabajar con clases invertidas. Las docentes responsables elaboraron un apunte teórico-práctico, el cual era habilitado por secciones el día previo a cada encuentro virtual (por videoconferencia) para que los estudiantes realicen la lectura antes de la clase. Para recabar información acerca de los conceptos sobre los cuales los estudiantes presentaban mayores dudas, se implementaron cuestionarios de cada unidad temática con preguntas verdadero falso, opción múltiple y/o respuesta corta. Durante el encuentro con las docentes, el hilo conductor de las clases fueron las dudas o consultas de los estudiantes respecto de lo que habían leído previamente, generando un espacio de debate y discusión, convirtiéndose de esta manera en los protagonistas del encuentro. Estas clases de intercambio con los alumnos por videoconferencia fueron grabadas y puestas a disposición de los estudiantes; también se dispuso de un foro de consultas asincrónicas como segunda vía de comunicación con los docentes.
  En cuanto a las clases prácticas, las consultas fueron sincrónicas a través de foros de intercambio y se realizaron encuentros por videoconferencia, ambos días de trabajo, durante la última hora del encuentro práctico. El objetivo de los encuentros virtuales era generar un espacio de consulta, debate y resolución de ejercicios de la práctica. Los foros de consulta permanecieron disponibles fuera del horario de práctica, de forma asincrónica para que los estudiantes pudieran seguir realizando consultas.
  En cuanto al material disponible en la plataforma, además del apunte teórico-práctico y las guías de trabajos prácticos, se puso a disposición de los estudiantes: respuestas de los ejercicios planteados, resolución de ejercicios seleccionados, en formato texto y video.
  Otra diferencia respecto a las clases presenciales es que se implementaron "Actividades Obligatorias Individuales" (AOI) las cuales consistieron en ejercicios a resolver por los estudiantes, buscando evaluar de manera integral algunos contenidos desarrollados en la asignatura, incluyendo aspectos procedimentales, modo de escritura empleada y justificación. El objetivo de estas actividades fue

generar un intercambio mediante retroalimentaciones hacia los estudiantes que fortalezcan dichos aspectos.

En cuanto a la evaluación, teniendo en cuenta el nuevo contexto, si bien se acotó la cantidad de ejercicios para desarrollar y enviar a través de la plataforma FIO Virtual, se incorporó un cuestionario como complemento de dicha evaluación.

- Análisis Matemático I (AMI): Para el desarrollo de la asignatura en modalidad virtual se continuó trabajando en dos espacios, uno teórico-práctico y otro práctico. Los mismos tuvieron una frecuencia de dos encuentros semanales. La carga horaria total de la materia se repartió entre encuentros sincrónicos y asincrónicos. Los contenidos abordados en las clases teórico-prácticas se llevaron a cabo mediante aplicaciones de videoconferencias y fueron grabadas, poniéndolas a disposición de los estudiantes en el aula virtual de la materia. Tanto el material con los apuntes de clase, como las guías de trabajos prácticos (TP) estaban disponibles en la plataforma FIO Virtual. Se agregaron las respuestas de todas las situaciones planteadas en el TP y la resolución detallada y fundamentada de las actividades propuestas más representativas de cada tema. Los espacios de consulta se llevaron a cabo por medio de reuniones virtuales, éstas se desarrollaron en dos salas simultáneas para propiciar una participación más activa de los estudiantes. También se dispusieron foros de consulta ordenados por temas. Se procuró poner a disposición de los estudiantes múltiples formas de acceso a los contenidos de manera de poder facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje y alcanzar el desarrollo de los objetivos propuestos inicialmente.

  Para la evaluación se implementó, además de los parciales, la realización de actividades complementarias (AC). Estas instancias se plantearon con dos objetivos: de diagnóstico para el equipo de trabajo y de retroalimentación, de manera que permita a cada alumno percibir su grado de conocimiento previo a la instancia de parcial. Se diseñaron usando los recursos que proporciona la plataforma FIO Virtual (cuestionarios de opción múltiple, entrega de tareas). Cabe mencionar que estas AC eran de carácter optativo en la modalidad presencial y en la virtualidad se establecieron con carácter de obligatorias. En las evaluaciones parciales se les propuso a los estudiantes la resolución de cuestionarios de opción múltiple y el envío de tareas.

- Análisis Matemático III (AMIII): Se trabajó en ambos cuatrimestres con videoconferencias en la que se expusieron los temas teórico-prácticos en dos encuentros semanales de dos horas de duración, con un abordaje similar a las clases presenciales. Los materiales teóricos y prácticos ya estaban disponibles en la plataforma FIO Virtual, sólo se completaron las clases teórico-prácticas con ejemplos resueltos y en los trabajos prácticos se incluyeron las respuestas a las problemáticas planteadas. Las clases se grabaron y se pusieron a disposición de los estudiantes en el sitio de la asignatura. Se organizaron foros asincrónicos de consultas por unidades temáticas y bloques de ejercicios para el desarrollo de los trabajos prácticos y encuentros sincrónicos por videoconferencia para el cierre y revisión de dichas unidades.

  Las principales modificaciones realizadas en la modalidad de dictado virtual son las vinculadas con la evaluación de los aprendizajes. Una de ellas consistió en la incorporación de actividades obligatorias (AO) las que fueron diseñadas con objetivos de seguimiento, control, regulación, corrección y retroalimentación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, siendo las mismas de diversas características: opción múltiple con respuesta inmediata, de resolución con tiempo pautado, de manejo de software, entre otras y son vinculantes a la hora de habilitar/permitir a los estudiantes rendir las evaluaciones parciales. Por otro lado, en las evaluaciones parciales se redujo el número de problemáticas que se evaluaron y el tiempo fijado para su desarrollo, esto último vinculado a la disponibilidad del recurso institucional.

- Probabilidad y Estadística (PyE): A partir de la suspensión de las actividades presenciales se readecuó la estrategia didáctica para cumplimentar los objetivos planteados para la adquisición de las competencias necesarias, de forma tal de garantizar una continuidad en la enseñanza en modalidad virtual.

  Los contenidos planeados en el programa se desarrollaron a través de actividades teóricas y prácticas brindadas mediante videoconferencias, en el día y horario original de la asignatura. Tales clases fueron de contenido teórico-práctico, como así también de consultas e intercambio con los alumnos, por videoconferencia o por los foros y mensajería interna de la plataforma FIO Virtual, debido a esta modalidad virtual. Asimismo, fueron complementadas con trabajos prácticos y apuntes teóricos. Todo el material teórico y práctico y los videos de las clases teóricas fueron subidos a dicha plataforma para ayudar a facilitar el aprendizaje y entendimiento de los contenidos.

En cursadas presenciales se impartían clases teórico prácticas en el pizarrón, con ayuda de diferentes medios tecnológicos como cañón y pizarras digitales. A continuación se trabajaba en resolución de problemas y también se realizaban prácticas utilizando softwares específicos.

2 Metodología

El análisis realizado en este trabajo fue en base a la proporción de alumnos aprobados en el período 2016-2020, en las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático I, Análisis Matemático III y Probabilidad y Estadística, cuyos datos se encuentran reportados en el sistema SIU-Guaraní. La proporción de alumnos aprobados se determinó sobre el total de inscriptos que agotaron todas las instancias de evaluación, excluyendo aquellos que abandonaron y a los ausentes.

Respecto a la ubicación en el plan de estudios, dos de las asignaturas motivo de análisis corresponden a primer año primer cuatrimestre (AyGA y AMI), y dos al segundo año, AMIII al primer cuatrimestre y PyE al segundo cuatrimestre. El análisis se realiza haciendo una distinción de acuerdo a la modalidad de cursada, presencial (2016-2019) y virtual (2020).

Para realizar el estudio se aplicaron algunas metodologías estadísticas que posibilitan el análisis de los datos para la posterior interpretación y discusión de los interrogantes planteados.

En primera instancia, se analizó para cada asignatura la regularidad en la proporción de aprobados durante el período estudiado con modalidad presencial (2016-2019) utilizando medidas de centralización (media) y dispersión (desvío estándar), como así también gráficos representativos.

Para verificar si realmente existen diferencias significativas entre la proporción de alumnos aprobados durante las dos modalidades, presencial y virtual, se plantearon pruebas de hipótesis para diferencia de dos proporciones. El objetivo de una prueba de dos muestras independientes es determinar si ambas fueron tomadas de dos poblaciones que presentan la misma proporción de elementos con determinada característica, hipótesis nula (H_0). La prueba se concentra en la diferencia entre las dos proporciones muestrales de aprobados. Diferencias pequeñas denotan únicamente la variación casual producto del muestreo y el azar (se acepta H_0), en tanto que grandes diferencias llevan al rechazo de H_0 [2].

Se utilizó el software estadístico Infostat que brinda información sobre el p- valor, el cual fue comparado con el nivel de significación adoptado [3].

Para profundizar el análisis estadístico, se aplicó un diseño experimental el que tiene como objetivo identificar los factores más importantes que afectan el desempeño de un proceso [4]. Cuando existe variabilidad entre las unidades experimentales los grupos de unidades experimentales homogéneas pueden ser vistos como bloques para implementar esta estrategia.

El principio del bloqueo señala que las unidades experimentales dentro de cada grupo deben ser homogéneas y que debiera existir heterogeneidad entre bloques. Si cada bloque tiene tantas unidades experimentales como tratamientos y todos los tratamientos son asignados al azar dentro de cada bloque el diseño se denomina diseño en bloques completos al azar (DBCA). El diseño es en bloques completos porque en cada bloque aparecen todos los tratamientos, y al azar porque dentro de cada bloque los tratamientos son asignados a las parcelas en forma aleatoria [3].

El modelo para la respuesta de un experimento diseñado en bloques es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \text{ con } i = 1, \ldots, a;\ j = 1, \ldots, b \qquad \textbf{(1)}$$

donde: μ corresponde a la media general, τ_i es el efecto del i-ésimo tratamiento, β_j es el efecto del j-ésimo bloque y ε_{ij} es el error aleatorio asociado con la unidad experimental en el bloque j que recibe el tratamiento i (comúnmente los términos de error se asumen normalmente distribuidos con esperanza cero y varianza común s^2).

3 Resultados y discusión

3.1 Análisis de la regularidad en la proporción de aprobados en modalidad presencial

En la figura 1 se observa, para el período de modalidad presencial, la proporción de aprobados de las asignaturas: (a) AyGA con media 0.61 ± 0.12, (b) AMI con media 0.65 ± 0.15, (c) AMIII con media 0.61 ± 0.14 y (d) PyE con media 0.76 ± 0.01. Las tres primeras asignaturas se dictan en ambos cuatrimestres, siendo su cursada regular en el primer cuatrimestre y su contrapuesta en el segundo, mientras que Probabilidad y Estadística se dicta sólo en el segundo cuatrimestre. En todos los casos puede observarse que los valores de proporción de aprobados no se alejan del valor medio en más de dos desvíos estándar por lo que se puede inferir que hay cierta regularidad.

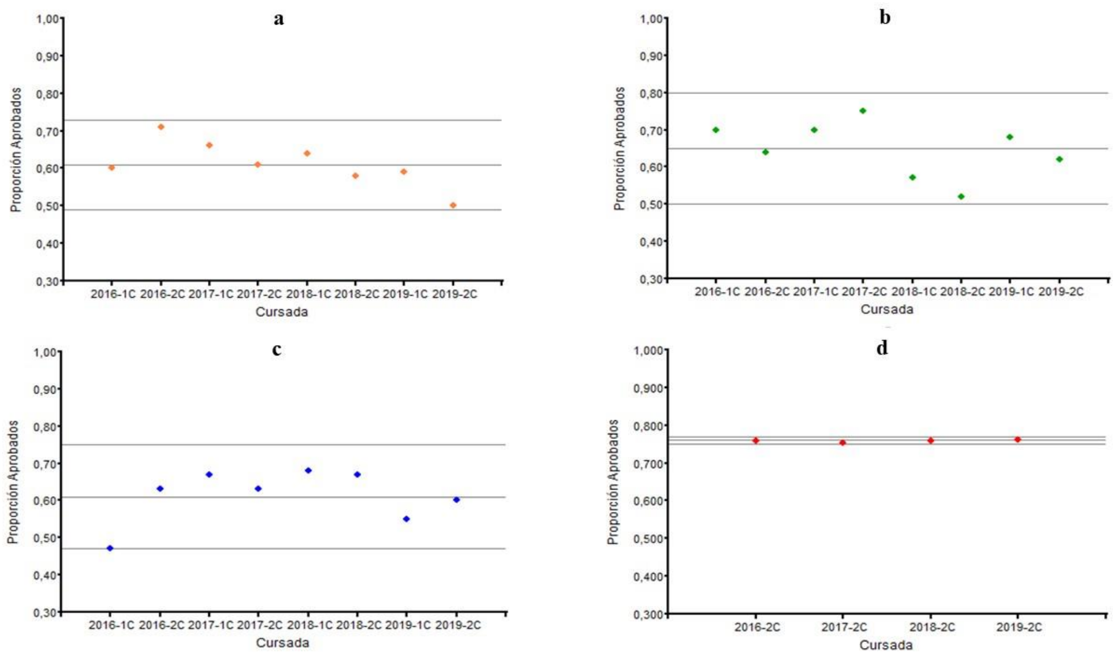


Fig 1. Proporción de aprobados para cada cursada presencial en el período 2016-2019, para las cuatro asignaturas analizadas: a) AyGA b) AMI c) AMIII d) PyE

3.2 Análisis de la diferencia entre la proporción de aprobados en modalidad presencial y virtual

Para analizar si existe diferencia entre la proporción de aprobados en modalidad presencial y virtual, para las asignaturas Análisis Matemático I, Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático III y Probabilidad y Estadística, se realizó una prueba de hipótesis donde la hipótesis nula postula la igualdad entre dichas proporciones con un nivel de significación de 0.05. En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos.

Tabla 1. Resultados del p-valor para las pruebas de hipótesis para las asignaturas en estudio.

Asignaturas	p-valor
AyGA	0.042
AMI	0.0025
AMIII	0.0023
PyE	0.011

En la tabla se puede observar que en todos los casos el p-valor es menor que 0.05, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula planteada. Es posible inferir que hay diferencias significativas entre las proporciones de aprobados cuando la modalidad es diferente. Dichas diferencias pueden atribuirse al cambio de metodologías de enseñanza implementadas en la modalidad virtual, detalladas en la sección anterior.

3.3 Análisis comparativo de la proporción de aprobados en diferentes modalidades de dictado y asignaturas

Con el objetivo de profundizar el análisis anterior se planteó un diseño en bloques. Se adoptaron los años de cursada de las asignaturas (2016-2020) como bloques y como tratamientos a las asignaturas en estudio en su respectivo cuatrimestre de dictado. La variable de respuesta fue la proporción de alumnos aprobados. En la Tabla 2 se muestran los resultados correspondientes al análisis de la varianza.

Tabla 2. Cuadro de Análisis de la Varianza para el diseño en bloques

	SC	Gl	CM	p-valor
Modelo	0.14	7	0.02	0.0034
Bloque	0.08	4	0.02	0.0071
Tratamientos	0.06	3	0.02	0.0085
Error	0.04	12	$3.4 \cdot 10^{-4}$	
Total	0.18	19		

A partir del análisis de la misma es posible inferir que tanto los bloques como los tratamientos presentan diferencias significativas, dado que el p-valor es menor a 0.05.

Respecto a la normalidad de los residuos, se verificó el supuesto de manera gráfica a través de un Q-Q plot (Figura 2) y de manera analítica con el test de Shapiro Wilks (Tabla 3).

Tabla 3. Test de Shapiro Wilks.

Variable	n	p
Residuo	20	0.671 7

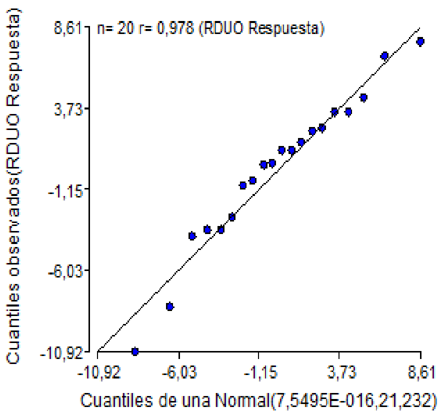


Fig. 2. Q-Q Plot para verificar el comportamiento normal de los residuos.

Se completó el estudio con los test de Tukey correspondientes (Tablas 4 y 5), donde se muestra cuáles son los bloques y tratamientos que se comportan de manera diferente. Medias con una letra común no son significativamente diferentes ($p > 0.05$).

Tabla 4. Test Tukey para los diferentes bloques en estudio α=0.05.

Años	Medias	n	E.E.	
2016	0.64	4	0.03	A
2019	0.65	4	0.03	A
2018	0.66	4	0.03	A
2017	0.70	4	0.03	AB
2020	0.81	4	0.03	B

Respecto de los bloques, se observa que la proporción de alumnos aprobados en modalidad virtual se diferencia significativamente de la mayoría de las cohortes dictadas de manera presencial.

Tabla 5. Test Tukey para los diferentes tratamientos en estudio α=0.05.

Asignaturas	Medias	n	E.E.	
AMIII	0.63	5	0.03	A
AyGA	0.67	5	0.03	A
AMI	0.68	5	0.03	A B
PyE	0.78	5	0.03	B

Respecto de los tratamientos, se observa que hay diferencias significativas con la proporción de alumnos aprobados en la asignatura que se dicta en el segundo año segundo cuatrimestre. De manera preliminar el resultado se atribuye al mayor recorrido académico que poseen los estudiantes que cursan la materia PyE.

Continuando con el análisis y para cotejar efectos, se aplicó un diseño en bloques similar al anterior, considerando en los bloques solamente los años de dictado presencial, y se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Cuadro de Análisis de la Varianza para el diseño en bloques

	SC	Gl	CM	p-valor
Modelo	0.06	6	0.01	0.0948
Bloque	0.01	3	$2.6 \cdot 10^{-3}$	0.6083
Tratamientos	0.06	3	0.02	0.0328
Error	0.04	9	$4.1 \cdot 10^{-3}$	
Total	0.10	15		

Analizando la Tabla 6 se observa que si bien no es necesario bloquizar ya que el p-valor indica que no hay diferencias significativas entre bloques (p-valor=0.6083), resulta interesante destacar que este resultado concuerda con la regularidad en la proporción de aprobados que se mostró en las Figura 1.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Los resultados obtenidos expresan evidencias objetivas en cuanto a que la proporción de alumnos aprobados en las asignaturas estudiadas con dictado virtual es mayor que la proporción de aprobados obtenida con dictado presencial.

Del análisis de los cambios metodológicos implementados en las asignaturas bajo estudio surgen como importantes los referidos al abordaje teórico: clases invertidas, disponibilidad de clases grabadas; a los trabajos prácticos: ejemplos resueltos, respuestas a los ejercicios; y a la modalidad de evaluación: incorporación de actividades obligatorias, uso de software específico en las evaluaciones y exámenes con menor cantidad de problemáticas y duración.

Es nuestro desafío seguir indagando, mediante encuestas, entrevistas en profundidad, etc., con el propósito de identificar cuál/es de los aspectos señalados son los más relevantes para los estudiantes, cómo impacta la modalidad virtual en la motivación de los estudiantes, cuáles les otorgan mayor autonomía para el desarrollo de sus estudios. Este conocimiento posibilitará en gran medida, adecuar la enseñanza a las necesidades de los estudiantes actuales, flexibilizando horarios, formas de trabajo, comunicación entre pares, acortamiento real de las carreras de ingeniería, entre otros.

Referencias

1. Iurich, F.; Maurel, M.; Aebicher, M.; Mayol, Y.: Perspectiva de los estudiantes en el uso de aulas virtuales como complemento de las clases presenciales. El caso del IESETyFP. *X Congreso de Tecnología en Educación & Educación en Tecnología*. (2015).
http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/49063/Documento_completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Accedido el 25 de Marzo de 2021
2. Juárez García, F.; Villatoro, J.; Velázquez, E.K.; López, L.: *Apuntes de Estadística Inferencial (1ª ed.)*. Instituto Nacional de Psiquiatría Ramón de la Fuente, México (2002)
3. Di Rienzo, J.A.; Casanoves, F.; Balzarini, M.G.; González, L.; Tablada, M.; Robledo, C.W.: *InfoStat versión 2012*. Grupo InfoStat, FCA, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. http://www.infostat.com.ar.
4. Montgomery Douglas, C.: *Diseño y Análisis de Experimentos*. *Segunda Edición*. Editorial Limusa, (2004).

Experiencias de cátedras: adaptación a un contexto de emergencia

Yesica Aispún, Mariano Ferreyro, Adriana Sequeira, María Beatriz Bouciguez

Departamento de Ciencias Básicas, Área Matemática,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Dirección postal
Av. del Valle 5737 (7400) Olavarría, Buenos Aires, Argentina
{yesica.aispun, ferreyro, adriana.sequeira, boucigue}@fio.unicen.edu.ar

Resumen. La pandemia que atravesamos desde el año 2020 y las medidas de aislamiento decretadas en Argentina hicieron que como docentes nos replanteáramos nuestras prácticas educativas, evaluando e incorporando nuevos recursos didácticos, pensando estrategias metodológicas y de evaluación acordes a los procesos de enseñanza y de aprendizaje en un nuevo contexto donde la virtualidad, o mejor dicho la educación mediada por tecnología, pasó a ser la única modalidad posible para asegurar la continuidad pedagógica.

Palabras Clave: Carreras de ingeniería, Enseñanza de la matemática, Enseñanza mediada por tecnología.

1 Introducción

Frente a la situación sanitaria mundial que enfrentamos durante el año 2020, a causa de la COVID-19, las distintas instituciones educativas debieron transformar sus prácticas en pos de garantizar la continuidad de las actividades académicas a través de espacios virtuales.

En ese contexto los docentes de los distintos niveles educativos, en general con poca o escasa experiencia en educación virtual y sin la posibilidad de recibir a corto plazo una capacitación acorde, tuvimos que idear y acordar de forma vertiginosa alternativas que pudieran ser factibles de aplicar en esta nueva realidad.

Por lo antes expresado consideramos que la modalidad de enseñanza que llevamos adelante no se enmarca en el concepto de educación a distancia, sino más bien en el de educación mediada por tecnologías en un contexto de emergencia. Nuestras clases fueron planificadas para una enseñanza presencial, y a partir de ello diseñamos objetivos de enseñanza y de aprendizaje, pensamos en la evaluación y en estrategias de enseñanza, seleccionamos recursos didácticos, entre otras. Pero de un momento a otro tuvimos que cambiar el chip y adaptar esa planificación a encuentros sincrónicos y asincrónicos a través de una pantalla. En esta dirección adoptamos el término enseñanza remota de emergencia que utilizan [1][2]:

> Online distance education involves more than simply uploading educational content, rather, it is a learning process that provides learners agency, responsibility, flexibility and choice. It is a complex process that requires careful planning, designing and determination of aims to create an effective learning ecology. In appearance, we are currently engaged in seems like online distance education, however, in essence, this is rather a temporary solution, one that would be more properly named emergency remote teaching. (p.2).

En este trabajo narramos nuestra experiencia docente durante el primer cuatrimestre del año 2020, a través de las asignaturas Análisis Matemático I (AMI) y Álgebra y Geometría Analítica (AyGA) de la Facultad de Ingeniería de Olavarría (FIO) de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN) con sede en la ciudad de Olavarría, Argentina.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Consideramos que construir espacios de intercambio y debate sobres nuestras prácticas educativas, más en momentos tan cruciales donde se ha revolucionado el sistema educativo, son el punto de partida para repensar y reflexionar acerca de lo que venimos haciendo, analizar qué alternativas tuvieron más éxito y cuáles no tanto, replantear nuestros objetivos en torno a una sociedad en continuo cambio y donde los avances tecnológicos crecen exponencialmente, pensar en la evaluación como medio necesario para el aprendizaje, considerar la tecnología como recurso o cómo mediadora de la enseñanza, entre otras.

Por último, proponemos un espacio de reflexión desde lo personal, en donde intentamos analizar qué cuestiones se vieron más beneficiadas en la enseñanza remota de emergencia, pensando en el perfil profesional de los ingenieros y en comparación con la enseñanza presencial que veníamos haciendo hasta el momento. En torno a esto cabe preguntarse: En tiempos de post-pandemia, ¿tiene sentido volver a las clases netamente presenciales? ¿Podríamos pensar en una bimodalidad como alternativa para mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje?

2 El contexto de la FIO

La FIO es una de las unidades académicas que conforman la UNICEN. En la misma se ofrecen las siguientes carreras de grado: Ingeniería Química, Ingeniería Civil, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Industrial e Ingeniería en Agrimensura, Profesorado de Química, Licenciatura en Tecnología de los Alimentos, dos ciclos de complementación curricular (Licenciatura en Tecnología Médica y Licenciatura en Enseñanza de las Ciencias Naturales) y una carrera con requisitos especiales de ingreso, Ingeniería en Seguridad e Higiene en el Trabajo. Cabe destacar que las ingenierías se encuentran acreditadas por CONEAU (Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria) con modalidad presencial y los planes de estudio vigentes están estructurados en cuatro bloques curriculares: Ciencias Básicas, Tecnologías Básicas, Tecnologías Aplicadas y Complementarias.

El bloque de Ciencias Básicas está formado por AMI, AyGA, Ciencia de la Computación, Análisis Matemático II, Análisis Matemático III, Probabilidad y Estadística, Física I, Física II, Cálculo Numérico, Química Tecnológica y Medios de Representación. Respecto de la fundamentación del bloque de ciencias básicas para carreras de ingeniería y en particular de la formación matemática esperada, en [3] se menciona que: “Dentro de los estándares de acreditación, las ciencias básicas abarcan los conocimientos comunes a todas las carreras de ingeniería, debiendo asegurar una sólida formación conceptual para el sustento de las disciplinas específicas y la evolución permanente de sus contenidos en función de los avances científicos y tecnológicos.

El objetivo de los estudios en matemáticas es contribuir a la formación lógico-deductiva del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza. Estos estudios estarán orientados al énfasis de los conceptos y principios matemáticos más que a los aspectos operativos. (p.9)”.

Cabe mencionar que en la FIO funcionan el Programa Educación y Comunicación con Tecnologías, EDU.COM y el Programa Institucional de Tutorías, PIT.

El primero se crea en el año 2016 [4] ante la necesidad de enmarcar y nuclear las actividades que integran las tecnologías y los espacios de comunicación y educación, teniendo en cuenta los avances tecnológicos. Tiene antecedentes significativos de propuestas formales en Educación a distancia, desde el año 2004, y la evolución del uso de la Plataforma Moodle (hoy FIO Virtual) desde 2009. El rol de los integrantes del mismo fue fundamental para que se pudiera asegurar la continuidad pedagógica durante el año 2020 y lo que va del 2021.

El segundo se crea en el año 2013 [5] y [6] a efectos de implementar acciones tendientes a contribuir a la inserción de los alumnos ingresantes en la dinámica universitaria. En ese marco, los proyectos de tutorías cumplen un rol fundamental a la hora de diseñar procesos de enseñanza inclusivos. Este programa tiene antecedentes desde el año 2003 con acciones no institucionalizadas. La intervención del PIT fue importante no sólo para el acompañamiento de los estudiantes que estaban cursando las asignaturas a las cuales haremos referencia, sino también de todas las que corresponde a primer año.

2.1 Nuestro contexto pre-pandemia

Las asignaturas consideradas para este trabajo, AMI y AyGA, son cuatrimestrales (primer cuatrimestre, primer año), tienen régimen de promoción y se dictan de manera contrapuesta el segundo cuatrimestre. La matrícula está compuesta por alrededor de 240 estudiantes de los cuales el 80% son ingresantes y el resto recursantes.
Por su lugar en el plan de estudios el único requisito de correlatividades es haber realizado el Programa Institucional de Ingreso a la Facultad de Ingeniería (PII).

La carga horaria de ambas asignaturas es de diez horas semanales, cuatro horas de teoría y seis de práctica. En las primeras, las docentes responsables abordaban el contenido teórico y resolvían ejercicios a modo de ejemplo, mientras que en las prácticas los docentes auxiliares acompañaban a los estudiantes en la resolución de los ejercicios de la guía práctica. Este acompañamiento consistía en responder consultas de manera individual o grupal. Además, en el caso de AMI, se realizaba una selección de ejercicios previamente para que resolvieran los estudiantes con el objetivo de que lograrán un panorama más abarcativo respecto del tipo de consignas y contenidos conceptuales y procedimentales con los que se iban a encontrar durante la resolución del trabajo práctico.

En ambas asignaturas se realizaban reuniones periódicas entre todos los integrantes de las cátedras con el propósito de discutir acerca del abordaje de los contenidos y de la metodología y recursos utilizados, en pos de favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

En los últimos años se comenzó a implementar de manera incipiente el uso de GeoGebra o softwares similares, con el objetivo de colaborar en la interpretación gráfica de los contenidos abordados. Además, se incentivó a los estudiantes a que los utilizaran para ayudarse a interpretar los problemas y ejercicios propuestos en la práctica cómo también para corroborar las soluciones alcanzadas.

En el caso particular de AyGA se realizó una experiencia a modo taller en el gabinete de informática de la FIO para trabajar con la interpretación gráfica de las raíces n-ésimas de un número complejo. Si bien la intención de la experiencia fue recabar datos respecto del impacto que tenía la incorporación de tecnología digital en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, no se continuó realizando esta innovación debido a la complejidad que involucró llevarla a cabo, especialmente por la cantidad de recursos humanos con los que contaba la cátedra, el número elevado de estudiantes que cursan la asignatura, el tamaño del gabinete de informática y la cantidad de ordenadores con los que se contaba.

Respecto de la plataforma institucional FIO virtual, ya estaba en funcionamiento para los cursos de educación a distancia, y poco a poco las cátedras de grado fueron realizando su incorporación de forma incipiente. Se utilizaba a modo repositorio (no había interacción entre los estudiantes y con los docentes), ya que sólo se subían los materiales teóricos y prácticos como otra alternativa al papel impreso.

Por otra parte, desde hace algunos años, se vienen realizado acciones metodológicas con el propósito de fomentar el desarrollo de competencias, trabajo en equipo, aprendizaje autónomo, comunicación oral y argumentación, indispensables para la formación profesional de los ingenieros, acorde a lineamientos de CONFEDI (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería). Como consecuencia se dividieron las clases teóricas en dos comisiones de alrededor de 120 estudiantes y las clases prácticas en 4 comisiones de alrededor de 60 estudiantes. A partir de esto fue posible realizar un trabajo más personalizado, además de propiciar una mayor interacción y debate entre los estudiantes y con los docentes. En las clases prácticas, los estudiantes eran los responsables de resolver por su cuenta los ejercicios y problemas de la guía, sin intervención directa de los docentes, buscando darles un mayor protagonismo en su proceso de aprendizaje. De esta manera el rol de los docentes en el aula se centró en ser los guías de dicho proceso fomentando el trabajo autónomo, la discusión entre pares, el trabajo en equipo y la necesidad de construir argumentos que respalden sus ideas. Como resultado de esta iniciativa se pudo evidenciar que desde ese momento la mayoría de los estudiantes, por su propia cuenta, armaron grupos de trabajo y se responsabilizaron de resolver las actividades propuestas.

En cuanto a las instancias de evaluación las dos asignaturas realizaron similares acciones, dos parciales con sus respectivos recuperatorios y un recuperatorio general para aquellos estudiantes que no aprobaron alguna/s o todas las instancias anteriores, esto enmarcado dentro de los regímenes de acreditación de asignaturas normados por la institución. Como parte del proceso de evaluación continua se desarrollaron instancias denominadas “parcialitos” (AyGA) o “actividades complementarias” (AMI), las cuales consistieron en preguntas conceptuales de respuesta concisa, teniendo como objetivo principal detectar dificultades y errores a nivel conceptual y favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, cabe mencionar que los docentes han trabajado de forma articulada con el Departamento de Orientación y Bienestar de la FIO y con el PIT, con el propósito de realizar un seguimiento de las trayectorias individuales de los estudiantes.

2.2 Nuestro contexto en pandemia

2.2.1 Readecuación de AyGA y AMI

En pos de garantizar la continuidad de las actividades académicas, se readecuaron las propuestas formativas presenciales migrando hacia diferentes entornos virtuales de aprendizaje. Se recurrió a la plataforma educativa online Moodle institucional FIO Virtual, aplicaciones de videoconferencias y pizarras digitales.

Además, se hizo uso de videos confeccionados por los integrantes de cada cátedra, de applets de GeoGeobra disponibles en el sitio oficial de GeoGebra y diseñados por los integrantes de los equipos de cátedra, calculadoras online como Matrix Calculator, entre otros.

En ambas asignaturas se elaboraron apuntes teórico-prácticos para que los estudiantes tuvieran un material de referencia, con gran nivel de detalle y ejemplos. La decisión de las cátedras de tener un material de elaboración propia se fundamenta en la necesidad de que se ajuste a los objetivos propuestos y en la falta de una biblioteca online de la universidad a la cual los estudiantes puedan acceder.

En ambas asignaturas continuó la separación de las clases en teoría y práctica, pero se redistribuyó el tiempo asignado a las mismas.

En el caso de las prácticas, se complementaron espacios de consulta sincrónica por videollamada con una duración de una hora aproximadamente (cuentas gratuitas de Zoom), con los foros de consulta tanto sincrónicos como asincrónicos.

En AMI las dos horas de teoría se dividieron en dos partes iguales y se realizaron mediante videoconferencia las cuales eran grabadas. Se mantuvo la misma metodología que en la modalidad presencial, quedando disponible la grabación y un archivo pdf de la presentación para aquellos estudiantes que no pudieran acceder a la clase sincrónica o bien para aquellos que necesitaran revisar algún contenido. Inicialmente fue difícil la participación de los estudiantes, pero con el transcurrir del cuatrimestre se fue logrando que intervinieran inclusive escribiendo ellos mismos en la pizarra digital o encargándose de revisar el chat mientras el profesor realizaba la presentación.

En AyGA la clase teórica cambió radicalmente su metodología, intentando llevar a cabo una clase invertida. Los estudiantes debían leer los apuntes, previo al encuentro sincrónico por videoconferencia, para luego poder realizar consultas sobre lo leído y desde este lugar generar un espacio de debate entre ellos y con los docentes. Además, en la plataforma se ponía a disposición de los estudiantes la grabación de dicha clase.

En cuanto a los regímenes de cursada, fueron readecuados según normativa del Consejo Académico. La incertidumbre sobre la evolución de la pandemia y el regreso a la presencialidad, hicieron que se realizará un único examen parcial con su respectivo recuperatorio y suspender la promoción de las asignaturas. Sin embargo, AMI y AyGA mantuvieron las evaluaciones continuas en el formato de Actividad Complementaria o de Actividad Obligatoria Individual.

Debemos destacar que en este nuevo contexto el trabajo de articulación con el Departamento de Orientación y Bienestar y con el PIT se intensificó debido a las dificultades de vinculación propias de un trabajo puramente virtual. De esta manera se buscó generar lazos con y entre los estudiantes, pudiendo detectar problemas de diversas índoles (económicos, sociales, territoriales, académicos, entre otros) a partir un trabajo cooperativo y más personalizado.

2.2.2. Espacios de encuentro, intercambio y retroalimentación

Un rol fundamental jugó el programa EDU.COM en el asesoramiento, acompañamiento y soporte técnico a todos los equipos de cátedra. Para esto implementaron talleres, videos elaborados a medida de las demandas, además de proporcionar atención personalizada. Se trabajó sobre los tipos de herramientas tecnológicas disponibles, la potencialidad de las mismas y la factibilidad de su implementación. La intervención de este programa también fue importante, al momento de diseñar las evaluaciones a partir de los nuevos recursos disponibles.

Por su parte, desde el equipo docente, se generaron espacios de intercambio y retroalimentación en los cuales se discutió sobre las ventajas y desventajas de los distintos recursos tecnológicos que cada uno iba utilizando, buscando en todo momento llegar a los estudiantes de la mejor manera posible, incluso a aquellos que tuvieran inconvenientes con la conectividad, falta de equipamiento o poca disponibilidad de los mismos. Estos espacios también sirvieron de acompañamiento y apoyo entre colegas para poder afrontar el momento de incertidumbre.

Los encuentros entre docentes como así también con los integrantes del programa EDU.COM fueron muy fructíferos para repensar y reflexionar sobre la forma de evaluar en la virtualidad considerando que "debe adoptar un carácter integral y que se constituya en una actividad continua del proceso educativo, una herramienta de información que permita evaluar el proceso de enseñanza y de aprendizaje, que valore y pondere los avances y los logros de aprendizaje alcanzados por las y los estudiantes, así como también la propuesta educativa en su conjunto, eso implica sus propósitos, objetivos y las decisiones pedagógicas y didácticas asociadas a ella" (documento CIN -RUEDA). [7]

Cabe mencionarse que, la institución acompañó el proceso dictando normativas acordes al momento de excepcionalidad que se transitaba y que se transita en la actualidad.

3 Espacio de reflexión

Si bien la enseñanza remota de emergencia significó un desafío en el cual como docentes sorteamos diferentes dificultades, podemos destacar que la readecuación de nuestra práctica frente al contexto pandémico significó una oportunidad para reflexionar y repensar sobre las metodologías, los recursos y las estrategias didácticas y la evaluación. En este sentido, consideramos que mucho de lo hecho bajo esta modalidad de enseñanza, contribuiría en una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, la enseñanza remota en emergencia intensificó el uso de herramientas informáticas tanto en los estudiantes como en los docentes. De esta manera, resultó en una oportunidad para capacitarnos en el uso de la plataforma FIO Virtual, en los recursos que ésta dispone y en su potencialidad, así como también nos alentó en la búsqueda de herramientas de cálculo on line y en la confección de material interactivo que contribuya en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, sentimos que la competencia tecnológica de los docentes se equiparó con la de los estudiantes en el contexto académico. También podemos destacar que se pudieron sortear las dificultades debido al gran número de estudiantes que cursan las asignaturas, tanto a nivel de infraestructura como de falta de equipamiento, en la utilización de dichas herramientas durante la presencialidad.

Sin embargo, ciertos aspectos de la presencialidad no pudieron lograrse bajo esta modalidad. Por ejemplo, el contacto con los estudiantes durante una clase presencial, lo que nos permitía una enseñanza más individualizada, teniendo la posibilidad no sólo de realizar un seguimiento "más de cerca" y de manera sincrónica de sus resoluciones y dificultades, sino también de realizar intervenciones en el momento pertinente.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Con este trabajo intentamos compartir nuestra experiencia durante el primer cuatrimestre del año 2020, con el objetivo de reflexionar sobre nuestra práctica y poder intercambiar opiniones respecto de alternativas potenciales a considerar en este nuevo escenario en el que aún hoy en día nos encontramos.

Si bien en un primer momento nos sentimos abatidos y cegados en cuanto a la mejor forma de proceder para lograr la continuidad pedagógica, hoy en día podemos ser optimistas respecto del trabajo que se ha realizado. En muchas ocasiones como docentes nos hemos replanteado la necesidad de trabajar en equipo, articular los distintos espacios, pensar en otras alternativas metodológicas para trabajar en el aula atendiendo a las dificultades de aprendizaje que las investigaciones nos proporcionan, adaptarnos a un cambio inminente y acorde a los avances tecnológicos, entre otras; pero la resistencia al cambio siempre ha hecho que lo posterguemos o lo hagamos de manera parcial. Estas consideraciones fueron realmente posibles cuando nos sentimos en la obligación y en la necesidad de hacerlo bajo las exigencias derivadas de la pandemia.

Tuvimos que salir de nuestra zona de confort, generando espacios de reflexión que sin dudas dieron lugar a más cambios en los últimos meses que en las últimas décadas. Cambios que consideramos positivos y que contribuyen al perfil del ingeniero demandado hoy por la sociedad.

Nos preguntamos qué modalidad será la que guiará los procesos de enseñanza y aprendizaje en un futuro inmediato, creemos que en cierta forma la virtualidad vino para quedarse.

Nos queda pendiente la construcción de instrumentos confiables que nos permitan medir el impacto de estas nuevas prácticas. De esta manera sería posible analizar qué recursos, qué metodologías y qué modalidad se ajusta mejor en el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación.

Referencias

1. Bozkurt, A.; Sharma, R. C.: Emergency remote teaching in a time of global crisis due to CoronaVirus pandemic. *Asian Journal of distance Education, 15(1).*2020
2. Hodges, C.; Moore, S.; Lockee, B.; Trust, T.; Bond, A.: The Difference Between Emergency Remote Teaching and Online Lerning. *Educause Review*. https://bit.ly/3b0Nzx7 Accedido el 07 de Abril de 2021 (2020)
3. Resolución Ministerio de Educación de la Nación N° 1232/01 Estándares para las carreras de ingeniería. https://www.coneau.gob.ar/archivos/538.pdf. Accedido el 15 de marzo de 2021.
4. Resolución Consejo Académico Facultad de Ingeniería 052/16. Aprobación del Programa Institucional Educación y Comunicación con Tecnologías, EDU.COM. https://www.fio.unicen.edu.ar/digesto/documento.frame.php?cod=21774. Accedido el 15 de marzo de 2021.
5. Resolucón Consejo Académico Facultad de Ingeniería 113/13. Aprobación del Programa Institucional de Tutorías. https://www.fio.unicen.edu.ar/digesto/documento.frame.php?cod=22500. Accedido el 15 de marzo de 2021.
6. Resolución Consejo Académico Facultad de Ingeniería 136/16. Aprobación del Programa Institucional de Tutorías. Deroga la Res.CAFI 113/13. https://www.fio.unicen.edu.ar/digesto/documento.frame.php?cod=21793. Accedido el 15 de marzo de 2021.
7. Documento conjunto CIN (Consejo Interuniversitario Nacional) - Rueda (Red Universitaria de Educación a Distancia de Argentina). Sugerencias para los exámenes finales y parciales a distancia en las universidades nacionales en el contexto del COVID-19. https://www.evelia.unrc.edu.ar/evelia/portal/files/articulosAulasExtendidas/sugerenciasExamenesRUEDA-CIN2020.pdf. Accedido el 15 de marzo de 2021.

Rediseño del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales: crecimiento de poblaciones y cadenas de Markov

Ana María Narvaez[1,2]

[1] Grupo IEMI, Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional
Rodriguez 273, (5500) Mendoza, República Argentina

[2] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNCuyo
Ciudad Universitaria, Parque General San Martín. (5500) Mendoza, República Argentina
ana.narvaez@frm.utn.edu.ar

Resumen. En los contenidos mínimos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica aparecen aplicaciones de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) al crecimiento de poblaciones y a cadenas de Markov que por problemas de tiempo no se dan en clase. El propósito de este trabajo es rediseñar el desarrollo de SEL para que en su tratamiento aparezcan modelos de estado lineal dinámico y discreto. La metodología ha consistido en trabajar en el contexto de aplicación y retroalimentar el contexto de educación, pues el conocimiento científico reconoce cuatro contextos: producción, justificación, educación y aplicación, este último es el más relacionado con la Ingeniería. En esta contribución se han obtenido un conjunto de competencias que podrían desarrollar los estudiantes, transformando las prácticas docentes, y, en consecuencia, poder migrar a una planificación de SEL que muestre un modelo de aprendizaje centrado en competencias en lugar de contenidos, como sugieren los Estándares de Segunda Generación para Ingeniería.

Palabras Clave: **S**istema de ecuaciones lineales, Modelo de estado discreto lineal, Competencias.

1 Introducción

En los contenidos mínimos de Álgebra y Geometría Analítica vigentes en las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) aparecen modelos de crecimiento de poblaciones y cadenas de Markov, que por razones de tiempo, en la UTN, Facultad Regional Mendoza, no se dan en las clases; habiéndose utilizado un criterio de utilidad para tomar esta decisión en los años precedentes.

El objetivo propuesto en este trabajo es rediseñar la planificación de SEL agregando algunas situaciones que permitan que estas aplicaciones sean interpretadas como modelos matemáticos de sistemas de estado dinámicos lineales y discreto.

Es bien conocido el hecho que estos modelos pueden darse también cuando se enseñan eigensistemas, contenido ubicado casi al final del programa del espacio curricular. Sin embargo, en esta propuesta se propone dar los modelos como aplicaciones de SEL por considerar que en esta etapa inicial del proceso de enseñanza y aprendizaje de Álgebra y Geometría Analítica se puede ir introduciendo, conscientemente, un modelo matemático sencillo como recurso para desarrollar las competencias de egreso necesarias del estudiante, futuro ingeniero [1]. Además, como se indicó anteriormente, se podrían retomar estos modelos en el estudio de los eigensistemas, tema dado casi al final en el espacio curricular.

El rediseño de la unidad temática SEL será utilizado en el próximo ciclo lectivo y evaluado mediante encuestas a profesores y alumnos para hacer los ajustes necesarios y ver si es pertinente incluir de manera definitiva estos modelos en la planificación del espacio curricular. Se tiene en cuenta que es necesario ir migrando hacia planificaciones curriculares que tengan en cuenta la Formación por competencias (FPC), el aprendizaje centrado en el estudiante (ACE) y los Estándares de Acreditación de Segunda Generación para Ingeniería [2].

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

2 Los contextos del conocimiento científico

Actualmente se reconoce que el conocimiento científico se despliega en cuatro contextos: descubrimiento, justificación, educación y aplicación. Tradicionalmente, estos contextos aparecían desligados unos de otros. El contexto de descubrimiento, lugar donde se gestan las teorías e hipótesis científicas, estaba reservado al ámbito de la psicología, pero sin mucha esperanza de lograr un tratamiento metódico del mismo, con lo cual aparecía más cercano a lo que Kant denominaba 'imaginación'. El contexto de justificación, en cambio, era el propio de la ciencia. Las diferentes escuelas epistemológicas y metodológicas nos proponían métodos alternativos para lograr la validación del conocimiento científico, al tiempo que se desvinculaba de la cuestión del descubrimiento. Por ejemplo, el influyente Círculo de Viena con sus métodos inductivos y el falsacionismo popperiano con su método hipotético-deductivo renegaban ambos de la pertinencia del contexto de descubrimiento para la ciencia. El contexto de educación, por su parte, estaba reservado a los pedagogos y no tenía mayor importancia para los científicos. Simplemente se trataba de la transmisión del conocimiento en las instituciones.

En otras palabras, se consideraba que el contexto de educación se ocupaba sólo de reproducir lo que los científicos habían logrado, pero sin tener incumbencia en los otros contextos.

Finalmente, el contexto de aplicación, que ocupaba un lugar secundario para el pensamiento clásico y que se transformara en una instancia importante de reflexión para la ciencia a partir del advenimiento de la segunda revolución industrial, también había sido descuidado en sus relaciones con los otros contextos mencionados. Sin embargo, varias reflexiones contemporáneas han superado esa visión sesgada del conocimiento científico y han puesto de relieve la interdependencia entre los contextos señalados. Así se ha tematizado la influencia del contexto de aplicación en el quehacer científico por un proceso de *feedback*. En el contexto de aplicación se discuten las aplicaciones del conocimiento científico, su utilidad, su beneficio o perjuicio para la comunidad; este contexto es el más relacionado con la Ingeniería.

La tecnología, lejos de actuar desligada de la ciencia o de ser un corolario de ella, impone rumbos de trabajo al científico, a la vez que modifica el conjunto de instrumentos con los cuales aquél obtiene su visión del mundo. Pero no sólo esto, el contexto de aplicación también influye en la educación, a través de las nuevas tecnologías y obliga a cambios radicales y permanentes de todo el sistema educativo con los nuevos contenidos que es necesario incluir, y, obviamente, revisar los existentes. El contexto de educación ha sido analizado y se ha descubierto la influencia que tiene no sólo en la formación sino también en la práctica de la ciencia. En este sentido, Thomas Kuhn fue uno de los autores que ha puesto de manifiesto que la educación que recibe el científico es trascendental para el análisis de la ciencia, a través de la noción de paradigma o de matriz disciplinar [3]. Lejos de ser un elemento que el científico olvida en su práctica, la educación es esencial para entender la permanencia en el tiempo de las matrices disciplinares. Junto con lo anterior, el contexto de educación se ve fuertemente influido por los otros: qué sea relevante para la educación de los futuros científicos, determinará las líneas directrices del sistema educativo en todos sus niveles. El contexto de descubrimiento, por su parte, ya no es considerado ajeno a la ciencia. Cómo se llega a las teorías científicas ha sido estudiado por las corrientes epistemológicas contemporáneas post kuhneanas, demostrando así que los contextos de la ciencia son en gran medida interdependientes y, además, que la ciencia está íntimamente relacionada con otras expresiones humanas, como son la cultura, la religión y la política [4].

3 Competencias

Como se indicó anteriormente, el conocimiento científico reconoce cuatro contextos, los cuales están interrelacionados. Esta nueva forma de entender el conocimiento científico nos señala la necesidad de articular los contextos y que la enseñanza no puede ser considerada escindida de los otros contextos. Dicha situación impacta de lleno en la enseñanza de las carreras de ingeniería a través de la idea de 'competencias', la cual plantea la necesidad de lograr una formación donde el futuro ingeniero pueda tender puentes con la práctica profesional. Las competencias surgieron frente a la necesidad de lograr que el saber enseñado en la currícula de las diferentes carreras sirva efectivamente en la práctica profesional. Así entendida, para obtener una competencia bastaba lograr una adecuada integración entre universidad y sector productivo. Sin embargo, actualmente se da dentro del ámbito profesional y productivo una obsolescencia acelerada de los saberes. Por ello, las competencias ya no son un mero ‘saber hacer’. En este sentido cobran especial relevancia las competencias formativas también en el ámbito profesional porque son estas las que brindan esquemas conceptuales amplios que permiten la adaptación y el auto- aprendizaje [4].

El concepto de competencias ligado a la profesión se observa claramente en el trabajo de Zablaza Beraza (2016), titulado ‘El trabajo por competencias en la enseñanza universitaria’[5], se sostiene que el enfoque del trabajo didáctico por competencias supone una forma distinta de afrontar la enseñanza universitaria. Estamos acostumbrados a pensar la formación universitaria en términos de listas de materias, de modo que cualquier cosa que altere esa lógica parece un *salto en el vacío* muy difícil de visualizar. Sin embargo, las competencias no son otra cosa que un planteamiento de la formación que refuerza la orientación hacia la práctica, tomando como punto de referencia el perfil profesional. Frente a una orientación basada en el conocimiento (concebido en abstracto, como un conjunto amplio e indeterminado de saberes disciplinarios situados en un espacio científico generalmente borroso), las competencias constituyen una aproximación más pragmática al ejercicio profesional (concebido como el conjunto de acciones o funciones que desarrollan un buen profesional en el ejercicio de su actuación profesional).

La formación basada en competencias ha llegado a constituir un amplio y extenso movimiento (*competency-based education and training)* que se ha proyectado sobre numerosos campos profesionales: educación, medicina, enfermería, danza, ingeniería, abogacía, administración de empresas, etc. Dado que la formación, sobre todo cuando va ligada al ámbito profesional, está muy relacionada a la acreditación, el enfoque de las competencias ha acabado bifurcándose en dos grandes ramas: la mencionada formación basada en competencias, y la evaluación de las competencias poseídas [6].

Asimismo, considerando que las competencias son la articulación de los tres saberes: *saberes conocer*, *saberes hacer* y *saberes ser* en el modelo de Formación por Competencias al que adhiere el Libro Rojo de CONFEDI [7] y teniendo presente que el método de la Ingeniería es el Diseño [2], se expresan las siguientes competencias específicas o también denominadas resultados de aprendizaje y, que se pueden desarrollar en el espacio curricular con el recurso aplicaciones de SEL a cadenas de Markov y a crecimiento de poblaciones.

- Modelar problemas de crecimiento de población y cadenas de Markov para ser tratados como sistemas de ecuaciones lineales con los métodos de eliminación gaussiana y de Gauss-Jordan.

- Modelar problemas de crecimiento de población y cadenas de Markov para interpretar sus soluciones mediante los vectores generadores.

4 Metodología para la enseñanza

El tema SEL ha sido tratado, en nuestro ámbito, de forma estándar según la bibliografía clásica para un primer curso de Álgebra y Geometría Analítica, dictado en primer año de las carreras de Ingeniería, tanto del país, como en Latinoamérica [8], [9], [10], [11]. No han sido contempladas aplicaciones que muestren modelos dinámicos discretos como en la presente propuesta.

Se propone rediseñar la unidad de SEL, haciendo hincapié en las aplicaciones, que como se menciona en la fundamentación sobre contextos de producción del conocimiento científico, permiten retroalimentar la producción del conocimiento y desarrollar competencias relacionadas con el juicio crítico, la comunicación y el interés por el espacio curricular. Para ello, se darían previamente a los ejemplos de aplicación referidos a crecimientos de poblaciones y cadenas de Markov, algunas definiciones y conceptos básicos, que, en general, no son conocidos por los estudiantes en esta etapa, y permiten organizar el rediseño que nos ocupa.

A continuación se describe una forma para encarar el tema.

Por definición, el *estado* de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (llamadas variables de estado) tal que, el conocimiento de esas variables en un determinado tiempo t_0 junto con el conocimiento de los valores de la señal de entrada para los instantes $t \geq t_0$, permite determinar el comportamiento y evolución del sistema para cualquier instante $t \geq t_0$.

Las variables de estado se agrupan en el llamado *vector de estado* y el espacio n-dimensional que determinan los posibles valores de esas variables, se denomina *espacio de estado*.

Se entiende a un sistema de estado discreto como un operador matemático que transforma una señal de entrada o de excitación (input), representada mediante $x(n)$ o x_n que es un vector genérico del espacio n-dimensional, en otra de salida (output), representada mediante $y(n)$ o y_n que también es un vector n dimensional, por medio de un grupo finito y fijo de leyes y funciones; en símbolos,

$$y_n = T\, x_n \text{, o bien } y_n = T(x_n)$$

donde T es un operador algebraico o mapeo o transformación lineal sobre el espacio n-dimensional, conocido como procesamiento en las aplicaciones, realizado por el sistema sobre x_n para producir y_n.

Un sistema de estado lineal es aquel que satisface el *principio de superposición;* es decir, la respuesta del sistema a una suma ponderada de señales es igual a la correspondiente suma ponderada de las salidas de cada una de las señales de entrada. O bien, un sistema es lineal si para dos entradas cualesquiera x_n y x'_n y dos constantes arbitrarias a y b, se cumple para la transformación lineal matemática T, que la transformación (o transformada) de la combinación lineal $a\, x_n + b\, x'_n$ es igual a la combinación lineal de las transformaciones, es decir

$$T(a\, x_n + b\, x'_n) = a\, T(x_n) + b\, T(x'_n)$$

4.1 Modelo matemático

Según se indicó anteriormente, una forma de enseñar las aplicaciones modelo de crecimiento de poblaciones y cadena de Markov es utilizando el objeto matemático SEL. En consecuencia, surgen las siguientes preguntas: ¿cómo vincular SEL con estas aplicaciones?; en otras palabras, ¿cómo explicar el uso del modelo matemático SEL para obtener resultados en las cadenas de Markov o en crecimiento de poblaciones?;¿los estudiantes se interesarán por estos modelos?; ¿estos modelos les permitirán a los profesores enseñar recursos (*saberes conocer, hacer* y *ser*) más enseñar a articular, movilizar e integrar dichos recursos? [2]

Una explicación posible es entender que los modelos reales de cadenas de Markov y crecimiento poblacional se pueden representar algebraicamente de la forma

$$x_{k+1} = A\, x_k, \text{ donde } k = 1, 2, \ldots, n, \ldots; \qquad \textbf{(1)}$$

donde x_{k+1} es un vector de estado correspondiente al periodo $k+1$, x_k es el vector del periodo anterior k y A es la matriz de datos o de información del proceso que transforma el vector del estado k en el vector del estado $k+1$, A es la matriz estándar de nxn que representa matricialmente al operador matemático T. Es decir,

$$x_{k+1} = T(x_k) \text{ es equivalente a escribir } x_{k+1} = A\, x_k$$

La matriz A de *transición de estados* o, simplemente *matriz de transición*, contiene toda la información sobre movimientos libres del sistema descrito por **(1)**. Estos movimientos libres se refieren a los cambios de estado o evolución del estado del sistema en ausencia de entrada.

La expresión **(1)**, matemáticamente es una ecuación vectorial en el espacio n-dimensional, en diferencias o recursiva y, lineal.

Usando el álgebra matricial en **(1)**, se escribe

$$I\, x_{k+1} - A\, x_k = 0,$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

Si y sólo si, cuando k aumenta indefinidamente ($k \to \infty$) y se observa que $x_{k+1} = x_k = u$, se puede escribir

$$I\, u - A\, u = 0$$

O bien

$$(I - A)\, u = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

que es la expresión matricial de un SEL homogéneo, donde *I-A* es la matriz *nxn* de coeficientes del SEL, *u* el vector de estado de variables o incógnitas de *nx1* del SEL y *0* el vector cero de términos independientes de *nx1* del SEL.

4.1.1 Cadenas de Markov

Consideremos un sistema que está, en cualquier momento dado, en uno y sólo un estado entre una cantidad finita de ellos. Por ejemplo, el clima en cierta región puede ser lluvioso o despejado; vivimos en un área urbana, suburbana o rural; compramos un celular marca *A*, *B* o cualquier otra; etc. Al pasar el tiempo, el sistema puede pasar de un estado a otro y, supondremos que el estado del sistema es observado a periodos fijos (cada día, cada semana, cada año, etc.). En muchas aplicaciones se conoce el estado actual del sistema y se desea predecir el que tendrá en el siguiente periodo de observación o en cualquier otro.

Definición Una *cadena de Markov* o *proceso de Markov* es aquel en el que la probabilidad de que el sistema esté en un estado particular en un periodo de observación dado, depende solamente de su estado en el periodo de observación anterior.

Supongamos que el sistema tiene n estados posibles. Para cada i = 1, 2,..., n y cada j = 1, 2,..., n, sea a_{ij} la probabilidad de que si el sistema se encuentra en el estado j en cierto periodo de observación, estará en el estado i en el siguiente; a_{ij} recibe el nombre de *probabilidad de transición*. Además, a_{ij} se aplica a cada periodo; es decir, no cambia con el tiempo. Como a_{ij} es una probabilidad, se cumple que

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \text{ para todo } i, j$$

Además, si el sistema está en el estado j en cierto periodo de observación, entonces debe estar en alguno de los n estados (también puede permanecer en el estado j) en el siguiente, o sea $a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = 1$.

Es conveniente disponer las probabilidades de transición como elementos de la matriz $A = (a_{ij})$ de *nxn*, llamada *matriz de transición*, o *matriz de Markov* o *estocástica* (el término *estocástico* quiere decir "conjetura respecto a") o de *probabilidades*.

Ejemplo Supongamos que una consultoría dedicada al estudio de mercados está analizando la preferencia de los consumidores respecto de dulces cada semana. Se ha determinado que 50% de las personas que actualmente utilizan la marca *A*, la comprarán de nuevo la próxima semana, 25% cambiará a la marca *B* y 25% preferirá alguna otra. De las personas que ahora consuman la marca *B,* 30% la comprará otra vez la próxima semana, 60% optará por la marca *A* y 10% cambiará a otra. De los consumidores que actualmente compran otra marca, 30% adquirirá de nuevo otra marca la próxima semana, 40% escogerá la marca *A* y 30% cambiará a la *B*. Los estados *A, B* y *C* representan las marcas *A, B* y otra marca, respectivamente. Las probabilidades de que una persona que consume la marca *A* cambie a la marca *B* es 0,25; la probabilidad de que una persona que consume la marca *B* la siga comprando es 0,3 y, así sucesivamente. Por lo tanto, la matriz de transición de esta cadena de Markov es

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0.60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix}$$

Ahora se utilizará esta matriz de transición para determinar la probabilidad de que el sistema se encuentre en cualquiera de los n estados en el futuro.

Sea $x_k = [x_{1k} \ \ x_{2k} \ \ x_{3k}]^T$, $k > 0$ el *vector de estado* del proceso de Markov en el periodo de observación k, donde x_{jk} es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j en el periodo de observación k. Al vector x_0, que denota el vector de estado en el periodo 0, se le llama *vector de estado inicial.*

Se puede demostrar que siendo A la matriz de transición de un proceso de Markov, el vector de estado x_{k+1}, en el $(k+1)$-ésimo periodo de observación, puede determinarse a partir del vector de estado x_k en el k-ésimo periodo de observación como $x_{k+1} = A\, x_k$.

Utilizando la expresión **(2)**, $(I - A)\, u = 0$, queda el siguiente SEL homogéneo

$$\begin{bmatrix} 0,50 & -0.60 & -0,40 \\ -\ 0,25 & 0,30 & -0,30 \\ -0,25 & -0,10 & 0,30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por el método de eliminación gaussiana, se obtiene el siguiente conjunto solución

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2,3\ t \\ 1,25t \\ t \end{bmatrix} \epsilon\ IR^3 \right\}$$

Es importante tener en cuenta que si bien el modelo matemático tiene la solución trivial más infinitas soluciones no triviales para cada valor real de t, el modelo real de una cadena de Markov tiene solución única que verifica la restricción que la suma de las componentes del vector de probabilidad es igual a 1, es decir

$$2,3t + 1,25t + t = 1, \text{ de donde } t = 0,2198$$

Por lo tanto, $u = [0,5055 \quad 0,2747 \quad 0,2198]^T$

Interpretación: cuando n crece, los vectores de estado tienden al vector fijo $u = [0,5055 \quad 0,2747 \quad 0,2198]^T$. Esto quiere decir que, a largo plazo, la marca A tendrá el control de cerca del 51% del mercado, la marca B dominará aproximadamente el 27% del mercado y las otras marcas tendrán la preferencia de casi el 22% restante.

Observación Otra explicación consiste en ver la forma recursiva de la ecuación en diferencia

$$x_{k+1} = A\, x_k = A\,(A\, x_{k-1}) = A^2\, x_{k-1} = A^2(A\, x_k) = A^3 x_k \;=\!....= A^{k+1}\, x_0$$

$$x_{k+1} = A^{k+1}\, x_0$$

Es decir, el vector del estado $k+1$ sólo depende de la potencia $k+1$ de la matriz de transición A y del vector de estado inicial x_0.

Si en el ejemplo, $x_0 = [0,2 \;\; 0,2 \;\; 0,6]^T$,

$$x_1 = A\, x_0 = [0,4600 \quad 0,2900 \quad 0,2500]^T$$

$$x_2 = A\, x_1 = A^2\, x_0 = [0,5040 \quad 0,2770 \quad 0,2190]^T$$

$$x_3 = A\, x_2 = A^3\, x_0 = [0,5058 \quad 0,2748 \quad 0,2194]^T$$

$$x_4 = A\, x_3 = A^4\, x_0 = [0,5055 \quad 0,2747 \quad 0,2198]^T$$

$$x_5 = A\, x_4 = A^5\, x_0 = [0,5055 \quad 0,2747 \quad 0,2198]^T$$

En consecuencia, cuando n crece los vectores tienden al vector fijo $u = [0,5055 \quad 0,2747 \quad 0,2198]^T$, idéntico al calculado mediante el SEL [10], [11].

4.1.2 Crecimiento de poblaciones

Un modelo de crecimiento de población se estudia a lo largo del tiempo. En el caso que nos ocupa se cuenta la población en ciertos puntos discretos del tiempo, tal como cada año, o cada segundo, etc. Aquí no es importante la *naturaleza* de estos individuos, personas, bacterias, etc., sino su número. Un ejemplo clásico son las poblaciones de competencia.

Ejemplo Sea el caso de dos poblaciones, de zorros y gallinas, que compiten una contra otra. Los números de estas poblaciones se denotan mediante z_i y g_i que corresponden al conteo de zorros y gallinas, respectivamente. Suponga que las gallinas, sin zorros que las molesten, tienen una tasa de natalidad que excede a la tasa de mortalidad, supongamos que $g_{i+1} = 1{,}2\, g_i$. Sin gallinas para alimentarse, sería de esperar que los zorros comenzarían a extinguirse, sea por ejemplo $z_{i+1} = 0{,}6\, z_i$.

El modelo cuando los zorros tienen éxito devorando cierto número de gallinas en cada periodo de tiempo, suponiendo que esto permitiera un incremento en la población de zorros proporcional al número de gallinas que serían devoradas, por ejemplo, $z_{i+1} = 0,6\, z_i + 0,5\, g_i$. La población de gallinas comenzará a decrecer debido a los zorros, de modo que se toma $g_{i+1} = 1,2\, g_i - k\, z_i$, donde k representa la tasa de gallinas devoradas por zorros; k permanece como variable para estudiar el efecto de diferentes tasas de mortalidad. Suponiendo que existe un número inicial de 1.000 gallinas y de 100 zorros, se obtiene el modelo

$$z_{i+1} = 0,6\, z_i + 0,5\, g_i \quad \text{y} \quad g_{i+1} = -k\, z_i + 1,2\, g_i \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots \text{ con } \quad z_i = 100 \ \text{ y } \ g_i = 1.000.$$

Expresando matricialmente el comportamiento de estas poblaciones conforme pasa el tiempo, se tiene

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ g_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -k & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ g_i \end{bmatrix}, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -k & 1,2 \end{bmatrix} \text{ y } x_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

El modelo es

$$x_{i+1} = A\, x_i \ \text{ para } \ i = 1, 2, \ldots$$

y se resuelve mediante un SEL como en el caso de la cadena de Markov. Cabe destacar que en esta situación no se tienen las condiciones adicionales de la suma de componentes del vector igual a 1. De modo que el modelo puede dar dos tipos de comportamiento totalmente diferentes, para diferentes valores de k.

Otra explicación posible es mediante el estudio de las potencias de la matriz A como en las cadenas de Markov, puesto que $x_{i+1} = A^i x_1$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$ [10], [11].

5 Conclusiones y trabajos futuros

Es necesario trabajar en la formación docente con el enfoque por competencias en carreras de Ingeniería para potenciar el desarrollo de competencias en los estudiantes, futuros ingenieros, al menos, porque como docentes podemos plantear más hipótesis explicativas sobre un mismo tema y jerarquizar contenidos de acuerdo con el perfil profesional requerido por la institución. A tal efecto, primero se debería tener en claro qué competencias deseamos desarrollar para, posteriormente, diseñar "documentos de clase" sobre el contenido que se desarrollará con los estudiantes.

Los modelos científicos en general y, los modelos matemáticos para crecimiento de poblaciones y cadenas de Markov, que permiten predecir, tienen una base sencilla que facilita la construcción de recursos didácticos. Y, la doble condición empírico-matemática del modelo lo habilita para establecer cómo se puede aprender de ellos cuando se usan para representar la realidad; además permiten articular, movilizar e integrar recursos.

Los contextos del conocimiento científico están íntimamente relacionados; sin embargo, es útil distinguirlos y analizarlos para su utilización en la enseñanza de la Ingeniería. El contexto de aplicación es sumamente relevante para la Ingeniería, porque es en este contexto donde se trabaja principalmente.

Es importante reconocer el lenguaje compacto que ofrecen las matrices a las ciencias en general y en las ciencias ingenieriles en particular. Asimismo, las distintas representaciones matriciales de operadores lineales y su tratamiento, enriquece la enseñanza mediante los cambios de registros de representación semiótica [12].

Los temas de crecimientos de poblaciones y cadenas de Markov, como aplicaciones de sistemas de estado dinámico, se pueden retomar en el tema eigensistemas, al finalizar el programa del espacio curricular, pues la convergencia o estabilidad de los modelos a un valor de estado de equilibrio, depende del radio espectral (valor absoluto del mayor eigenvalor de la matriz de transición).

Los trabajos futuros consisten en la revisión de la puesta en acto de este diseño en 2020, realizar ajustes, observar la pertinencia de lo actuado y rediseñar la planificación y/o guías de lectura para los estudiantes.

Referencias

1. Berman, C.; Narvaez, A.: El Lenguaje de la Matemática. Modelos para la enseñanza. En *Conceptos y lenguajes en ciencia y tecnología*. Vol. 3, pp. 223-234 (2015).
2. Kowalski, V.; Morano, D.; Erck, I.; Cirimelo, S.; Enriquez, H. Formación por Competencias, Aprendizaje Centrado en el Estudiante y Estándares de Acreditación de Segunda Generación para Ingeniería. Primer documento. En *Serie Materiales de Apoyo*. UNMisiones. Argentina (2019).
3. Kuhn, T. *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago press (1970).
4. Calderón, J. Cómo evaluar el contexto de aplicación. En *Educación en ciencias empíricas en Facultades de Ingeniería*. Buenos Aires: UTN. FRM. pp.84 -92 (2014).
5. Zabalza Beraza, M..A. *El trabajo por competencias en la enseñanza universitaria*. Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/poncom/2007/71100/conferencia.pdf (2016)
6. Zabalza Beraza, M.A, *La formación por competencias: entre la formación Integral y la empleabilidad.* Disponible en*:* http://tecnologiaedu.us.es/formaytrabajo/Documentos/lin6zab.pdf (2016)
7. CONFEDI, Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina: 'Libro rojo del CONFEDI', mayo 2018. Disponible en: https://www.ing.unlp.edu.ar/sitio/institucional/difusion/archivos/LIBRO_ROJO_DE_CONFEDI_estandares_de_segunda_generacion.pdf
8. Kolman, B.; Hill, D. *Álgebra Lineal*. México: Pearson Prentice Hall (2006).
9. Lay, David *Álgebra Lineal con enfoque por competencias*. Argentina: Pearson (2017)
10. Noble, B. y Daniel, J. *Álgebra Lineal Aplicada*. Tercera edición. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. (1989)
11. Grossman, S. *Álgebra lineal*. Quinta edición. México: McGraw-Hill (1996)
12. Duval, R.: *Semiosis y pensamiento humano*. *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Peter Lang S.A.Editions scientifiques européennes (1995).

¿En qué Situaciones Reales Aplicamos las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias?

Grabiela L. Robles, Lidia C. de Pablo, María M. Simonetti

Departamento Académico de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías
Universidad Nacional de Santiago del Estero
Av. Belgrano (S) 1912, Santiago del Estero, Capital, CP.4200
roblesgrabiela@gmail.com , lidiadepablo@gmail.com , mariamercedessimonetti@gmail.com

Resumen. En el marco del Proyecto de Investigación: "Las competencias en el proceso de formación de los estudiantes del Profesorado en Matemática de la FCEyT, usando GeoGebra", y haciéndolo extensivo a las carreras de ingeniería, se expone una propuesta didáctica sustentada en el Enfoque por Competencias y en la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, para llevar a cabo un taller sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con el que se busca motivar a los estudiantes de ingeniería mostrando la utilidad de estas herramientas matemáticas en situaciones reales, y lograr un aprendizaje significativo.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Competencias matemáticas, GeoGebra, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

En el marco del Proyecto de Investigación: "Las competencias en el proceso de formación de los estudiantes del Profesorado en Matemática de la FCEyT, usando GeoGebra", Cod. N°23/C145 de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Santiago del Estero, y haciéndolo extensivo a las carreras de ingeniería, se propone llevar a cabo un Taller dentro del espacio curricular Análisis Matemático II, en el tema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, denominado "¿En qué situaciones reales aplicamos las ecuaciones diferenciales ordinarias?", el cual es una adaptación del taller "Los problemas de ayer, hoy y mañana, ¿tienen solución sin matemática?" [1], que ha sido aprobado satisfactoriamente para ser presentado en la Reunión Anual de la UMA junto a la Somachi - SUMA 2019, como experiencia de aula.

Los objetivos que se persiguen con este taller son que los alumnos sean capaces de visualizar la utilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias en otros espacios curriculares y en otras ciencias, aplicar saberes matemáticos adquiridos a lo largo de su trayectoria como estudiantes y en particular de ecuaciones diferenciales, en la resolución de situaciones problemáticas reales en distintos contextos, y hacer uso del software GeoGebra como herramienta mediadora de su aprendizaje.

Para abordar el tema es necesario considerar que, para orientar a las carreras de ingenierías hacia el Modelo de Formación por Competencias, se debe trabajar en dos planos. El primero es el trabajo en los espacios curriculares, mientras que el segundo es el trabajo en el diseño curricular, o rediseño, según cual sea la situación.

El trabajo en los espacios curriculares es puro y exclusivo de los docentes a cargo del mismo, se puede comenzar rediseñando la planificación, considerando para ello los Resultados de Aprendizaje, la mediación y el sistema de evaluación, pilares principales del modelo conceptual de la Formación por Competencias para el Programa de Posgrado: "La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes" [2], cuidando siempre el alineamiento constructivo de los mismo, puesto que el Estandar II.14 de la Res ME 1232/01 sostenía que "La evaluación de los alumnos debe ser congruente con los objetivos y la metodología de enseñanza previamente establecidos".

¿A que nos referimos al hablar de Resultados de Aprendizaje? Hay distintas formas de usar el concepto de Resultados de Aprendizaje. A continuación, citamos algunas definiciones:

- *Son declaraciones de lo que se espera que un estudiante conozca, comprenda y/o sea capaz de hacer al final de un período de aprendizaje (European Communities, 2009)* [2].
- *Los Resultados de Aprendizaje son posibles de gestionar, en términos de actividades de aprendizaje y de evaluación, a diferencia de las competencias que son complejas y densas (Harden, 2002)* [2].

En total acuerdo con la posición de los autores del Programa de Posgrado, se considera que los Resultados de Aprendizaje son Unidades Menores Operativas de Competencias (UMO), algunas intermedias y otras muy vinculadas a las competencias de egreso. En este sentido *Harden (2007)* afirma: "*Un conjunto de Resultados de Aprendizaje van a dar cuenta de la formación de una competencia"* [2].

Cabe aclarar que las competencias no se forman de un día para el otro y, como se dijo en párrafos anteriores, está conformada por un conjunto de Resultados de Aprendizajes. Por lo que este taller sería un eslabón dentro de la asignatura que colabora en el logro de Resultados de Aprendizaje previstos.

Ahora bien, ¿Cuál es el rol de la matemática en la formación de los ingenieros? Desde el Enfoque de Formación por Competencias en las carreras de ingenierías, la matemática es considerada una herramienta, la cual le brinda al ingeniero la base teórica, el pensamiento lógico deductivo, y el lenguaje adecuado para comenzar el estudio de las disciplinas específicas y para su trabajo profesional. En este sentido Fernández et al. afirma que: "*La educación matemática es fundamental para la formación de los ingenieros, no como un fin en sí misma, sino como herramienta científica de su trabajo profesional"* [3].

Consideramos oportuno rescatar la propuesta de Competencias para el Ciclo Básico dada en el Libro Celeste de CONFEDI, en particular algunas Competencias Específicas para las áreas Matemática y Estadística (Morano, Micheloud, Lozeco, 2005):

- Planificar y ejecutar estrategias para la resolución de problemas relacionados con matemática
- Aplicar ecuaciones diferenciales a diferentes situaciones problemáticas puesto que estas están estrechamente relacionadas con los objetivos del taller.

Como la propuesta del taller, toma como referencia a la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (TMCC), es apropiado enfatizar que la misma está ligada estrechamente con el Enfoque por Competencias, puesto que esta ha incluido, definido y trabajado las competencias profesionales y competencias para la vida desde hace más de treinta años, enfocándose en carreras universitarias en donde la matemática, la física y la química no son una meta por sí mismas, es decir, donde no se van a formar matemáticos , ni físicos, ni químicos.

La principal referente de la TMCC, Patricia Camarena Gallardo, afirma que: "*La Matemática en el Contexto de las Ciencias reflexiona acerca de la vinculación de la matemática con las demás áreas del conocimiento, con las actividades profesionales, así como con las situaciones de la vida cotidiana. Se quiere una matemática para la vida y una formación integral y humanística en el estudiante*" [4].

De este modo se busca que la matemática tenga sentido para el estudiante, que tenga aplicación en la praxis social de su profesión, construya el conocimiento, desarrolle en él habilidades del pensamiento, y que su comportamiento sea para el bien de la sociedad y de sí mismo [5].

Desde esta teoría se define competencia como: "*Una competencia es la movilización cognitiva de las fortalezas de un profesionista para enfrentar una situación problemática haciendo uso de la integración de todo su bagaje de conocimientos, habilidades, actitudes y valores*" [4].

Por todo lo desarrollado, se considera fundamental abandonar el proceso de enseñanza de estructura lineal e inflexible de la matemática que se imparte en la gran mayoría de las instituciones educativas, donde se limitan a mostrarla, como ciencia exacta sin relación con la vida y con los problemas de otras ciencias, esto evidencia una falta de conexión con él "para qué los estudiantes deben aprender determinados temas de matemática", lo que lleva a que se pierda el interés y hasta se sienta rechazo hacia la misma, por lo cual vemos la necesidad de reformular la mediación docente.

Mediación que debe estar enfocada hacia el Aprendizaje Centrado en el Estudiante, siendo este un eje principal del Modelo de Formación por Competencias. Esto conduce a hablar de metodologías activas, que para Labrador Piquer y Andreu Andrés "*se entiende hoy en día aquellos métodos, técnicas y estrategias que utiliza el docente para convertir el proceso de enseñanza en actividades que fomenten la participación activa del estudiante y lleven al aprendizaje*" [6].

En este sentido, la metodología que se utilizará es la de aula taller, pues esta implica que se aprenda haciendo y además favorece el aprendizaje colaborativo entre pares.

El taller se desarrollará en un laboratorio de informática, donde las actividades propuestas serán del tipo ejercicios y resolución de problemas, las cuales serán trabajadas en equipos de dos estudiantes por máquina, y para lo cual podrán hacer uso de internet, para realizar consultas y evacuar dudas, contar con la ayuda de los docentes a cargo del taller, y, además tendrán a disposición apuntes de elaboración propia de los docentes de las cátedras donde se sintetizaran la definición de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, definición y tipo de soluciones, problemas de valor inicial y de fronteras, métodos de resolución para las ecuaciones diferenciales de variables separables, homogéneas, exactas. Al finalizar cada actividad se hará la puesta en común de los resultados obtenidos mediante plenarios que permitan el intercambio de experiencias, evacuación de dudas, y verificación de resultados.

2 Preparación de la contribución

Las ecuaciones diferenciales aparecen en casi todas las ramas de las ingenierías y tiene como finalidad básica servir como instrumento para el estudio del cambio en el mundo físico. La razón de estas aplicaciones se debe a que la derivada puede interpretarse como el índice de cambio de una variable respecto de la otra, y las variables, que explican los fenómenos, se relacionan entre sí por su índice de cambio.

Resolver una ecuación diferencial ordinaria es encontrar la familia de curvas que verifica dicha ecuación diferencial, lo cual admite tres puntos de vistas distintos: el algebraico, el numérico y el geométrico. El enfoque algebraico hace referencia a encontrar las ecuaciones de la familia de curvas que pueden ser expresadas en forma implícita o explícita; el numérico a la búsqueda de soluciones mediante aproximaciones numéricas, y el enfoque geométrico se refiere a la visualización y el análisis de las familias de curvas cuyas ecuaciones se obtuvieron de la solución algebraica, como también el análisis de campos de pendientes.

Puesto que el espacio curricular Análisis Matemático II se encuentra en el segundo módulo del primer año, se estudia el primer y tercer enfoque, y en este último solo se hace la visualización y el análisis de las familias de curvas contando además con apoyo del software GeoGebra.

Se prevé que, en el taller, la resolución de las ecuaciones diferenciables ordinarias no solo quede en el análisis algebraico o en un simple esquema de cálculo numérico sino mostrar su utilidad para resolver problemas propios de otros espacios curriculares y de la vida cotidiana, y, con esto, contribuir en la articulación vertical con la asignatura matemática aplicada.

Por otro lado, debido a que los docentes se deben ajustar al cronograma de la planificación y al tiempo de dictado de cada una de las unidades curriculares, se termina enseñando la totalidad de los temas con clases del tipo expositivas, de esta manera resolver una ecuación diferencial ordinaria sería para los alumnos utilizar recetas de resolución algebraicas con escaso análisis de la solución dentro del contexto.

Además encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales es una tarea complicada la mayor parte de las veces, sin embargo verificar si una función es o no solución es muy sencillo, basta derivar, sustituir en la ecuación y comprobar si se obtiene una identidad o no para todos los valores posibles de la variable independiente para los que la ecuación tiene sentido.

Por esta razón se prevé que, en el taller, los alumnos hagan uso del software GeoGebra, para obtener y graficar la familia de curvas, solución de la ecuación diferencial, permitiendo con esto, que los estudiantes cuenten con una herramienta para corroborar los resultados obtenidos analíticamente y además puedan resolver ecuaciones diferenciales de mayor complejidad.

La utilización de GeoGebra se debe a que es un software matemático para todo nivel educativo que dinamiza el estudio, armonizando lo experimental y lo conceptual. A continuación, se muestran ventajas y desventajas de hacer uso de este.

Ventajas de utilizar GeoGebra:

- Reúne herramientas para trabajar en diferentes áreas de la matemática
- Dispone del idioma requerido
- Software de código abierto, libre y gratuito
  - Libertad de usar el programa
  - Libertad de analizar su funcionamiento

    - Libertad de mejorar su código
- Interfaz ágil y clara
- Interfaz interactiva
- Gráficas dinámicas
- Exporta las figuras a formato web con absoluta facilidad
- Posee una wiki donde compartir resultados con todos los usuarios
- Se puede usar en cualquier computadora
    - Con acceso a internet: se puede trabajar en línea
    - Sin acceso a Internet: Se puede trabajar instalándolo

Desventajas de utilizar GeoGebra:

- Solo para profesores y estudiantes que tengan noción de matemáticas
- En ocasiones presenta inconvenientes en cuanto a ejecutar los comandos

2.1 Algunas actividades diseñadas

A continuación, se presenta una de las actividades iniciales que se llevarán a cabo en el taller:

1. Considerar la ecuación

$$y' = x/y \qquad \textbf{(1)}$$

   a) Obtener en forma analítica la solución
   b) Resolver la ecuación diferencial dada y graficar la solución de la misma, usando el software GeoGebra
   c) ¿Cómo podría verificar que la solución obtenida es la correcta?

Con esta actividad se busca que los alumnos reconozcan que la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que identifique el método correspondiente para resolverla de manera analítica (método de separación de variable) y a la vez se pretende familiarizarlos en el uso del software GeoGebra, encontrando la solución a través del comando ResuelveEDO(<Ecuación>) en la Barra de Entrada de la Vista CAS y graficando las familias de curva que surgen de la solución general haciendo variar, a través de un deslizador que se encuentra en la Vista Algebraica, la constante de integración, como se muestra en la Fig.1. A la vez con el último ítem se busca promover la retroalimentación de los estudiantes y la autocrítica.

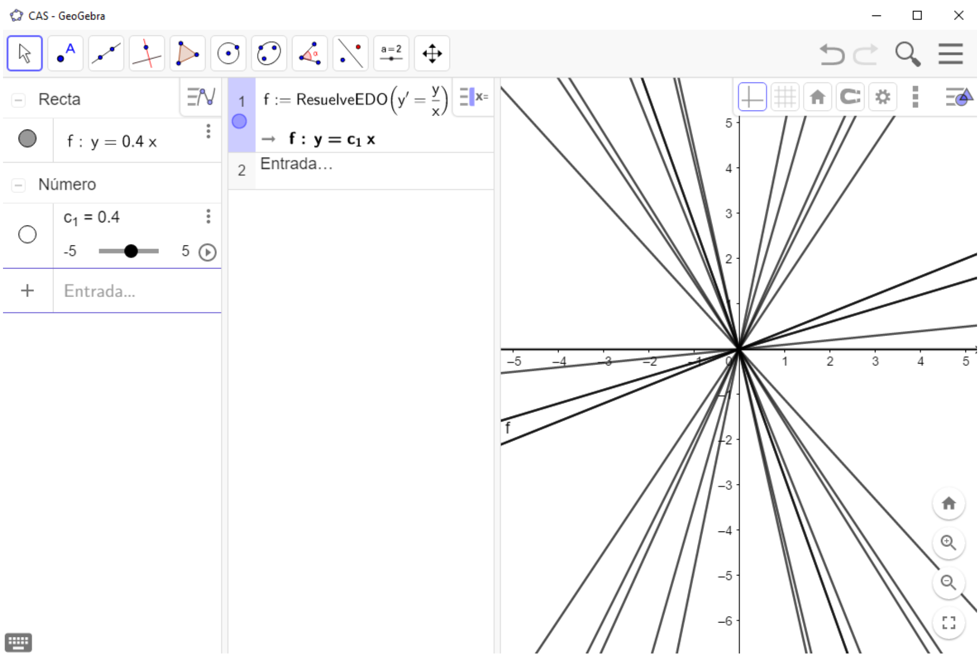


Fig. 1. En la parte del centro de esta imagen se encuentra la Vista CAS donde se ingresa el comando ResuelveEDO(y'=y/x), lo cual nos brinda una solución general con una constante c1. En la parte izquierda se muestra la Vista Algebraica, donde se encuentra la ecuación de la recta que se obtiene al sustituir la constante c1 por un valor especifico a partir del deslizador, el cual también es autogenerado por el comando. Y, por último, a la derecha se observa la gráfica de la familia de curvas, que es solución a la ecuación diferencial dada.

De manera análoga, se proponen actividades similares a la anterior donde los estudiantes harán uso de otros comandos como por ejemplo ResuelveEDO(<Ecuación>, <Punto(s) de f>) que se aplica para resolver problemas de valor inicial, o bien el comando ResuelveEDO(<Ecuación>, <Punto(s) de f >, <Punto(s) de f'>) que sirve para resolver problemas de frontera.

A continuación, presentamos algunos problemas contextualizados que se desarrollaran en el taller, es decir, problemas reales con sentido, significado y reto [7]:

2-Un depósito contiene 100 galones de salmuera que tiene 200 libras de sal en disolución. En el depósito fluye agua que contiene 1 libra de sal de galón a razón de 3 galones/minutos, y la mezcla que se mantiene uniforme por agitación escapa del depósito al mismo ritmo. Calcular la cantidad de sal al cabo de 90 minutos.
3-Se sabe que la población de cierto país aumenta de forma proporcional al número de habitantes actuales. Si después de 2 años la población se ha duplicado y después de 3 años la población es de 20.000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en el país.

Con estas actividades se desea que lo estudiantes modelicen y resuelvan las situaciones planteadas haciendo uso de los saberes previos adquiridos en la asignatura y otros espacios curriculares, con lo cual se muestra que las ecuaciones diferenciales no sólo son aplicables en física sino también en otras ramas como la estadística, economía, etc.

2.2 Evaluación

Tobón Tobón et al. afirma que, *"el fin esencial de la evaluación de las competencias es determinar cómo se forman éstas en los estudiantes durante los módulos y a lo largo de un programa educativo, con el fin de que aprendan a desempeñarse con un compromiso ético e idoneidad ante los problemas del contexto actual y futuro, en el marco de un aprendizaje y mejoramiento continuos que aseguren el emprendimiento y la empleabilidad "* [8]. Más allá de la Evaluación de Competencias, la Evaluación en general es un proceso que debe ser entendida como "uno o más procesos formativos que sirven para identificar, recolectar y preparar datos que permitan determinar el logro de los resultados del aprendizaje" y además "puede utilizar tanto métodos cualitativos como cuantitativos, según cuál sea el resultado del aprendizaje a verificar, y debe ser entendida como un proceso de mejora" (CONFEDI, 2017) [9].

La herramienta de evaluación que se utilizará en el taller será una Rúbrica de Evaluación, en particular una rúbrica analítica, la cual se representa mediante una matriz de doble entrada, donde en las filas se ubican los Criterios de Evaluación y en las columnas los Niveles de Dominio. Entendiendo que, según Cabrera Pommiez, Inostroza: *"Los criterios de evaluación se definen como un referente conceptual que permite establecer el tipo y el nivel de aprendizaje que deben alcanzar los estudiantes en cada uno de los hitos declarados de un proceso formativo. En este sentido, dichos criterios ayudan a precisar el nivel de desempeño de los estudiantes. En efecto, a través de una comparación entre el criterio definido y el desempeño demostrado por el estudiante, el docente formula una opinión fundada sobre la calidad de los aprendizajes"* [10]. Por otro lado, los Niveles de Dominio o Indicadores de Logros pueden ser interpretados de la siguiente manera: "*Los indicadores son señales que muestran el nivel de dominio en el cual se desarrolla una competencia a partir de los criterios. Esto significa que para cada criterio se establecen indicadores en cada nivel que permitan su evaluación"* [8].

En este sentido, para evaluar el trabajo de los estudiantes en el taller, se prevé que cada grupo archive la resolución de cada problema en una carpeta que guardará en la computadora, las cuales serán los instrumentos para recolectar la información a evaluar, mediante una rúbrica analítica dada por la Tabla 1. La misma será entregada a cada grupo al inicio del taller, para que estos conozcan los criterios que se tomarán en cuenta al momento de ser evaluados.

Tabla 1. Rúbrica.

Criterios de evaluación	Insuficiente	Suficiente	Bueno	Excelente
Reconoce los conceptos matemáticos involucrados	Demuestra que reconoce y entiende de manera muy limitada los conceptos, o no lo hace.	Demuestra que reconoce y entiende los conceptos, aunque a algunos de manera limitada.	Demuestra que reconoce y entiende todos los conceptos involucrados.	Demuestra que reconoce y entiende con detalle todos los conceptos involucrados. Incluso menciona otros.
Realiza una representación gráfica	La representación gráfica es incorrecta, no se entiende.	La representación gráfica es correcta, aunque cuesta entenderla.	La representación gráfica es correcta y fácil de entender.	La representación gráfica es correcta, clara y fácil de entender. Además, resulta atractiva y motivadora.
Utiliza estrategias y procedimientos	La estrategia no es efectiva para resolver el problema y/o no detalla el procedimiento.	La estrategia es efectiva para resolver el problema, pero no detalla claramente el procedimiento.	La estrategia es efectiva para resolver el problema y detalla claramente el procedimiento.	La estrategia es efectiva y eficiente para resolver el problema y detalla claramente el procedimiento, incluso sugiere alguna alternativa para resolver

3 Conclusiones y trabajos futuros

Con esta propuesta se busca que el futuro ingeniero le encuentre el sentido y la utilidad de la matemática, en particular a las ecuaciones diferenciales ordinarias, enfrentándolo a problemas dentro de un contexto real, los cuales deben modelizar, resolver e interpretar, y contribuir así al desarrollo de competencias matemáticas. Para ello, consideramos que es necesario introducir cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de modo de consolidar el aprendizaje centrado en el estudiante y modificar el sistema de evaluación en el sentido de dejar de reducirlo a una colección de pruebas y de calificaciones, sino como un conjunto de evidencias de desempeño.

Por otra parte, es preciso incorporar desde el ciclo básico de las carreras de ingenierías las Tecnologías de la Información y Comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que esta sociedad de constantes cambios demanda ingenieros competentes en el uso de las mismas.

Nada de todo lo expuesto es posible sin una adecuada formación y capacitación en la Formación por Competencias por parte de los docentes de carreras de ingenierías, es decir, se debe contar con docentes competentes para formar ingenieros competentes.

Nos resta reformular la planificación de la asignatura en términos de la Formación por Competencias.

Referencias

Robles,G.;Bravo,N.;Espindola Coronel,M.: Los problemas de ayer, hoy y mañana, ¿tienen solución sin matemática?. *Reunión Anual de la UMA junto a la Somachi* (2019).

Kowalski, V.; Morano, D.; Erck, I.; Cirimelo, S.;Cheeín, N.; Arlettaz, M.: Curso de Posgrado 1: Formación por Competencias en Matemática. Sexto Documento. Resultados de Aprendizaje. Programa de Posgrado: *La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes*. pp. 1-9 (2019)

Kowalski, V.; Morano, D.; Arlettaz, M.; Erck, I.: Curso de Posgrado 1: Formación por Competencias en Matemática. Tercer Documento. Ingenieria, Ciencias Basicas, Matematica y un Nuevo Marco. Programa de Posgrado: *La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes*. pp. 28 (2019)

Camarena, G. P.:Teoría de las Ciencias en Contexto y su Relación con las Competencias. *Ingenium*, vol. 16, No. 31, pp. 108-127 (2015)

Kowalski, V.; Morano, D.; Erck, I .; Enriquez, H.; Cirimelo, S.; Arlettaz, M.;Cheeín, N.; Leguiza, P.: Curso de Posgrado 2: La Mediación Pedagógica en la Enseñanza de la Matemática. Segundo Documento. ¡Vayamos al Aula!, pero ¿a poncho?. Programa de Posgrado: *La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes*. pp. 20 (2019)

Erck, I .; Enriquez, H.;Kowalski, V.; Morano, D.; Cirimelo, S.; Cheeín, N.; Arlettaz, M.; Leguiza, P.: Curso de Posgrado 2: La Mediación Pedagógica en la Enseñanza de la Matemática. Primer Documento. Enseñar y Aprender: ¿desde dónde lo abordamos? Programa de Posgrado: *La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes*. pp. 29 (2019)

Kowalski, V.; Morano, D.; Erck, I.; Cirimelo, S.; Cheeín, N.; Arlettaz, M.: Curso de Posgrado 2: La Mediación Pedagógica en la Enseñanza de la Matemática. Tercer Documento. Secuencias Didácticas a partir de Eventos Contextualizados. Programa de Posgrado: *La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes*. pp.5-17 (2019)

Tobón Tobón,S.; Pimienta Prietro, J.; García Fraile, J.: *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias*. Pearson Educación, pp.114-135 (2010)

Kowalski, V.; Morano, D.; Erck, I.; Cirimelo, S.; Cheeín, N.; Arlettaz, M.: Curso de Posgrado 3: La Evaluación de Competencias Matemáticas. Primer Documento. ¿Puedo pedir un VAR, profesor?. Programa de Posgrado: *La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes*. pp.1-5 (2019)

Kowalski, V.; Morano, D.; Erck, I.; Enriquez, H.; Cirimelo, S.; Cheeín, N.; Arlettaz, M.: Curso de Posgrado 3: La Evaluación de Competencias Matemáticas. Segundo Documento. Del "Sabe o No Sabe" al "Es Competente o No". Programa de Posgrado: *La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes*. pp.23 -41 (2019)

Potencial matemático y demanda cognitiva de una tarea de flujo potencial con software Mathematica

Adriana G. Favieri

Departamento de Ingeniería Aeronáutica, Facultad Regional Haedo, Universidad Tecnológica Nacional
París 532, B1706EAH Haedo, Buenos Aires
afavieri@frh.utn.edu.ar

Resumen. En esta ponencia reflejamos el análisis del diseño de una tarea sobre flujo potencial con uso del software Mathematica para ser usada en la plataforma gratuita online Wolfram. Estas tareas forman parte del proyecto de investigación PID 7726, denominado *Modelando flujos potenciales en Facultad Regional Haedo*. El objetivo es justificar dicho diseño analizando su potencial matemático, entendido como las posibilidades de exploración y argumentación que la misma habilita, el de habilidades matemáticas con uso de software y el de demanda cognitiva para referir al tipo y nivel de pensamiento requerido para resolverla con éxito. Mostramos el procedimiento de resolución con el análisis realizado. El trabajo aquí expuesto nos permite decir que contamos con una tarea que tiene un alto potencial matemático y elevada demanda cognitiva.

Palabras Clave: Flujo potencial, Software Mathematica, Potencial matemático, Demanda cognitiva**.**

1 Introducción

El tema flujo potencial es uno de los pilares de la asignatura Matemáticas Aplicada a la Aeronáutica (MAA) de la carrera Ingeniería Aeronáutica de la Facultad Regional Haedo (FRH) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) pues describe el comportamiento cinemático de los llamados fluidos ideales. La razón es que a partir de este concepto los alumnos podrán tener una base teórica para encarar los contenidos referentes a flujo de fluidos de la asignatura del nivel superior Aerodinámica. La teoría de funciones de una variable compleja, en particular la de las funciones analíticas resulta adecuada para el abordaje teórico práctico del tema flujo potencial.

Por otro lado, el software matemático disponible en la plataforma gratuita Wolfram Cloud [1] permite el trabajo con variable compleja, favorece la visualización de las funciones analíticas representativas del flujo potencial, el trabajo algebraico con ellas y facilita el cálculo de derivadas y límites. Desde la cátedra consideramos esencial que el futuro ingeniero se habitúe a trabajar con software como el de Wolfram Mathematica ya que en su vida profesional usará este u otros programas, por lo que es esperable que adquiera no sólo habilidades matemáticas que favorezcan el razonamiento y el pensamiento crítico, sino también habilidades digitales para adaptarse al uso de diferentes softwares. Con este propósito en mente, diseñamos tareas para el proyecto de investigación PID 7726, denominado *Modelando flujos potenciales en Facultad Regional Haedo,* que intentan promover el desarrollo de dichas habilidades incluyendo diferentes posibilidades de exploración con el software, en términos de uso de distintos comandos, y de justificación de las respuestas y procedimientos, lo que los autores Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodriguez [2] denominan potencial matemático y establecer su nivel de demanda cognitiva, entiendo por ésta, el tipo y nivel de pensamiento requerido para resolverla con éxito [3]. Por lo que el objetivo de esta ponencia es:

Justificar el diseño de una tarea sobre flujo potencial para resolver en la plataforma Wolfram Cloud analizando su potencial matemático y determinando su nivel de demanda cognitiva.

2 Potencial matemático y demanda cognitiva

Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodriguez [2] acuñaron el termino potencial matemático (pm) que permite valorar las consignas de las tareas en la etapa de planificación. En esta etapa es clave pensar en lo que los alumnos harían ante nuestra propuesta didáctica. Estas acciones de los alumnos se denominan actividad matemática (*am*) [2].

El pm de una consigna alude a las posibilidades de exploración que la consigna habilita o no; y a las de argumentación sobre la validez de la resolución o justificación de la respuesta [2].

Con respecto a las posibilidades de exploración puede considerarse dos cuestiones, por un lado, que la consigna admita diferentes caminos de resolución y, por otro, que no incluya los pasos a seguir, es decir que no esté pautado el procedimiento a seguir por el estudiante.

La actividad matemática del alumno abarca varias opciones como ser, el recurrir a heurísticas [4], utilizar distintas habilidades generales matemáticas [5], reflexionar sobre lo realizado, explicar el porqué de su respuesta, argumentar el procedimiento y/o demostrar. Por lo tanto, proponen atender a dos aspectos, al potencial matemático de la consigna y al rol del estudiante pensando en la exigencia cognitiva esperada [2].

Stein, Smith, Henningsen y Silver [3], consideran la demanda cognitiva de una tarea como el tipo y nivel de pensamiento requerido para poder participar en la tarea y resolverla con éxito. Elaboraron criterios teóricos para identificar el nivel de demanda cognitiva necesario para resolver problemas o ejercicios y se denomina modelo de la demanda cognitiva. Este modelo identifica cuatro niveles de demanda cognitiva que son: memorización, que corresponde a las tareas de menor demanda cognitiva, es decir que sólo requieren razonamientos simples; algoritmos sin conexiones; algoritmos con conexiones; y hacer matemáticas, en el que se ubican las tareas de mayor demanda cognitiva, es decir, que requieren razonamiento complejo.

Una tarea consta de tres partes, un contexto, el objetivo y una consigna. Estas tres partes deberían coherentes entre sí. El contexto es una descripción del trabajo que vienen realizando los alumnos, los conocimientos previos, y las formas de trabajo. El objetivo es de aprendizaje, es decir, lo que se pretende que el alumno aprenda o afiance y la consigna es el enunciado de la tarea [2].

3 Aclaraciones sobre el trabajo con números complejos y variable compleja en el software Mathematica

Este software permite trabajar tanto en forma algebraica como simbólica; es decir, con números complejos y variable compleja respectivamente. Aunque hay que ser cuidadosos con los resultados obtenidos en las dos formas. Por ejemplo, al calcular el valor absoluto y argumento de números complejos, los resultados obtenidos son los esperados (véase Fig. 1).

In[∘]:= Abs[2 + 3 i]

Out[∘]= $\sqrt{13}$

In[∘]:= Arg[2 + 3 i]

Out[∘]= ArcTan$\left[\frac{3}{2}\right]$

Fig. 1. Valor absoluto y argumento de un número complejo hallado con el software Mathematica.

Pero si aplicamos los mismos comandos a la variable compleja los resultados obtenidos no son los esperados (véase Fig. 2).

```
In[∘]:= Abs[x + y ⅈ]
Out[∘]= Abs[x + ⅈ y]

In[∘]:= Arg[x + y ⅈ]
Out[∘]= Arg[x + ⅈ y]
```

Fig. 2. Valor absoluto y argumento de una variable compleja hallado con el software Mathematica.

Por lo tanto, hay que interpretar estas respuestas y reescribirlas de manera conveniente. Para este trabajo vamos a considerar como habilidades matemáticas con uso del software Mathematica a las acciones mentales que, mediante el entrenamiento continuo se convierten en modos de actuación, métodos necesarios, ejecución de las acciones y operaciones en el marco de una actividad matemática para solucionar a tareas teóricas y prácticas que incluyen el uso de la aplicación. Definición surgida de varios aportes teóricos y adaptada al contexto tecnológico en el que estamos trabajando [6, 7, 8]. En particular definimos *Habilidad Matemática Interpretar los resultados del Software Mathematica (HMISM)*: *HMISM es comprender o entender el resultado obtenido con el software en forma simbólica, asociarlo con la teoría correspondiente y reescribirlo en forma conveniente.*

En nuestro caso la interpretación de estos resultados puede verse en la Fig. 3.

```
In[∘]:= Abs[x + y ⅈ]          In[∘]:= Arg[x + y ⅈ]
Out[∘]= Abs[x + ⅈ y]          Out[∘]= Arg[x + ⅈ y]
```

$$\text{In[∘]:= } \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{In[∘]:= ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$\text{Out[∘]= } \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{Out[∘]= ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]$$

Fig. 3. Interpretación de los resultados del software Mathematica del valor absoluto y argumento de una variable compleja.

Algo similar ocurre al trabajar con algunas funciones analíticas, en particular con las funciones logarítmicas con el comando "ComplexExpand" para separar en parte real e imaginaria. Por ejemplo, si aplicamos el comando a la función logaritmo natural de z se obtiene lo que puede verse en la Fig. 4.

$$\text{In[∘]:= ComplexExpand[Log[x + y ⅈ]]}$$

$$\text{Out[∘]= ⅈ Arg[x + ⅈ y]} + \frac{1}{2}\,\text{Log}\left[x^2 + y^2\right]$$

Fig. 4. Aplicación del comando ComplexExpand a la función logaritmo natural de z en el software Mathematica.

Podemos observar que la parte imaginaria no está en el formato adecuado para trabajar; por lo que tenemos que interpretar esta salida y escribir, como se muestra la Fig. 5.

$$\text{In[∘]:= } \frac{1}{2}\,\text{Log}\left[x^2 + y^2\right] + \text{ⅈ ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$\text{Out[∘]= ⅈ ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right] + \frac{1}{2}\,\text{Log}\left[x^2 + y^2\right]$$

Fig. 5. Interpretación de los resultados del comando ComplexExpand para la función logaritmo natural de z.

Otro aspecto esencial de este software es que permite trabajar con celdas de texto que funcionan como un procesador de texto, celdas de ingreso de comandos, celdas de resultados y gráficos en una misma pantalla, lo que facilita la visualización del proceso de resolución y las justificaciones, explicaciones y/o aclaraciones que sean necesarias realizar. De esta manera el alumno puede hacer una entrega de la tarea en un solo documento que incluya todos los aspectos pedidos.

4 Análisis de la tarea sobre flujo potencial

Para el análisis de la tarea mostraremos los siguientes pasos:

- Precisiones sobre la exploración y argumentación
- Presentación de la tarea que incluye contexto, objetivo y consigna
- Descripción de la actividad del alumno indicando las posibilidades de exploración y de argumentación
- Reflexiones sobre el análisis

4.1 Precisiones sobre la exploración y argumentación

Vamos a considerar posibilidades de exploración a las diferentes opciones que pueden usarse en el software para ingresar variables, funciones y gráficos. Y por las posibilidades de argumentación a las explicaciones sobre los comandos y símbolos elegidos para los ingresos de variables y funciones, la interpretación de los resultados del software, las explicaciones sobre el procedimiento realizado y las justificaciones sobre los resultados.

4.2 Presentación de la tarea

Contexto: Los alumnos de la cátedra MAA de la FRH de UTN vienen realizando actividades relativas a números complejos y sus propiedades, funciones de una variable compleja, parte real e imaginaria de la función, derivabilidad, condición de Cauchy Riemman y la teoría sobre flujo potencial, incluyendo trabajo con el software Mathematica en la plataforma gratuita que ellos tienen [1]. Además de las explicaciones de clases en el laboratorio de informática de la facultad, se les entrega un tutorial sobre uso del software de la plataforma y los comandos vistos.

Esta tarea forma parte de un trabajo práctico que tiene varias tareas con un orden creciente de dificultad. La que presentamos en esta ponencia es la primera, luego se complementan con otras en las que se incluye la comprobación de las condiciones de derivabilidad y el gráfico de los flujos potenciales.

Objetivos:

A través de esta actividad se pretende que el alumno utilice y desarrollo las habilidades matemáticas:

- Identificar flujos potenciales y sus funciones componentes
- Explicar y justificar los procedimientos realizados con el software y respuestas

Consigna

Dado un flujo potencial con sumidero en z=1+ i y k= 2 hallar el potencial de velocidades y la función de corriente. Justificar todos los pasos y verificar gráfica y/o analíticamente.

4.3 Descripción de la actividad del alumno indicando las posibilidades de exploración y de argumentación

Para exponer este ítem mostraremos los pasos que el alumno debería realizar, explicando las posibilidades de exploración y argumentación en cada caso.

- *Definir la variable compleja en el software*

Posibilidades de exploración: en esta oportunidad están relacionadas con las diferentes formas de ingreso de la unidad imaginaria: el alumno puede usar el símbolo de unidad compleja del software la letra "I" mayúsculas. También incluimos las posibilidades de visualización de la variable compleja: el alumno puede elegir visualizar o no lo ingresado. En el primer caso sólo usaría el símbolo "=" y en el segundo ":=". Todas estas opciones pueden verse en las **Fig. 6 a 9.**

```
In[∘]:= z = x + ⅈ y
Out[∘]= x + ⅈ y
```

Fig. 6. Ingreso de la variable compleja usando el símbolo de unidad compleja del software y con visualización del resultado.

```
In[∘]:= z = x + I y
Out[∘]= x + ⅈ y
```

Fig. 7. Ingreso de la variable compleja usando la letra mayúscula I para indicar la unidad imaginaria y con visualización del resultado.

```
In[∘]:= z := x + ⅈ y
```

Fig. 8. Ingreso de la variable compleja usando el símbolo de unidad compleja del software y sin visualización del resultado.

```
In[∘]:= z := x + I y
```

Fig. 9. Ingreso de la variable compleja usando la letra mayúscula I para indicar la unidad imaginaria y sin visualización del resultado.

Posibilidades de argumentación: una vez elegida cualquiera de las opciones anteriores el alumno debería explicar en una celda de texto, que está haciendo al ingresar este comando y el porqué.

– *Definir la función de una variable compleja analítica que corresponde al flujo potencial de la consigna.*

El alumno debería usar las habilidades matemáticas:

– Recordar concepto de sumidero y de potencia de un flujo potencial
– Identificar la función analítica que represente un flujo potencial con sumidero
– Usar los datos y escribir la función correspondiente

Posibilidades de exploración: están relacionadas con las opciones de definición de la función: el alumno puede asignarle o no nombre a la función y a las posibilidades de visualización similar al ítem anterior. Se mantienen las distintas opciones de ingreso de la unidad imaginaria. Aclaración: Si no le asigna nombre la función se visualiza siempre. Todas las opciones pueden verse en las **Fig. 10 a 15.**

```
In[∘]:= f[z_] = -2 Log[z - (1 + ⅈ)]
Out[∘]= -2 Log[(-1 - ⅈ) + x + ⅈ y]
```

Fig. 10. Ingreso de la función de una variable compleja usando el símbolo de unidad compleja del software, con visualización del resultado y asignándole nombre.

```
In[∘]:= f[z_] = -2 Log[z - (1 + I)]
Out[∘]= -2 Log[(-1 - ⅈ) + x + ⅈ y]
```

Fig. 11. Ingreso de la función de una variable compleja usando la letra mayúscula I para indicar la unidad imaginaria y con visualización del resultado y asignándole nombre.

```
In[∘]:= f[z_] := -2 Log[z - (1 + ⅈ)]
```

Fig. 12. Ingreso de la función de una variable compleja usando el símbolo de unidad compleja del software, sin visualización del resultado y asignándole nombre.

```
In[∘]:= f[z_] := -2 Log[z - (1 + I)]
```

Fig. 13. Ingreso de la función de una variable compleja usando la letra mayúscula I para indicar la unidad imaginaria, sin visualización del resultado y asignándole nombre.

```
In[∘]:= -2 Log[z - (1 + ⅈ)]
Out[∘]= -2 Log[(-1 - ⅈ) + x + ⅈ y]
```

Fig. 14. Ingreso de la función de una variable compleja usando el símbolo de unidad compleja del software sin asignarle nombre.

```
In[∘]:= -2 Log[z - (1 + I)]
Out[∘]= -2 Log[(-1 - ⅈ) + x + ⅈ y]
```

Fig. 15. Ingreso de la función de una variable compleja usando la letra mayúscula I sin asignarle nombre.

Posibilidades de argumentación: el alumno tendría que explicar que esta es la función de una variable compleja que identifica un flujo potencial con sumidero y cómo usó los datos de la consigna. Es decir, tendría que vincular con la teoría de flujo potencial.

– *Hallar el potencial de velocidades y la función de corriente*

Primera parte

Posibilidades de exploración: El alumno deberá aplicar el comando "ComplexExpand" a la función analítica representativa del flujo potencial correspondiente. Las opciones son use la función con asignación o no de nombre. Ver las **Fig. 16 a 18.**

```
In[∘]:= ComplexExpand[f[z]]
Out[∘]= -2 i Arg[(-1 - i) + x + i y] - Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
```

Fig. 16. Uso comando ComplexExpand habiendo definido previamente la función.

```
In[∘]:= ComplexExpand[-2 Log[z - (1 + i)]]
Out[∘]= -2 i Arg[(-1 - i) + x + i y] - Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
```

Fig. 17. Uso comando ComplexExpand sin haber definido previamente la función y usando el símbolo de unidad compleja del software.

```
In[∘]:= ComplexExpand[-2 Log[z - (1 + I)]]
Out[∘]= -2 i Arg[(-1 - i) + x + i y] - Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
```

Fig. 18. Uso comando ComplexExpand sin haber definido previamente la función y usando la letra mayúscula I para indicar la unidad imaginaria.

Posibilidades de argumentación: tendría que justificar el uso del comando, es decir, con qué fin lo usa.

Segunda parte

Posibilidades de exploración y argumentación: para poder definir las funciones pedidas el alumno debería usar (HMISM), pues deberá interpretar los resultados obtenidos. Al hacer esta interpretación estaría justificando el procedimiento pues tiene que vincular con la teoría para poder escribirlas. Y para la definición de estas funciones de dos variables reales se presentan las opciones que se ven las Fig. 19 a 24.

```
In[∘]:= PV[x_, y_] = - Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
Out[∘]= -Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
```

Fig. 19. Ingreso función potencial de velocidades con asignación de nombre y visualización.

```
In[∘]:= PV[x_, y_] := - Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
```

Fig. 20. Ingreso función potencial de velocidades con asignación de nombre y sin visualización.

```
In[∘]:= - Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
Out[∘]= -Log[(-1 + x)^2 + (-1 + y)^2]
```

Fig. 21. Ingreso función potencial de velocidades sin asignación de nombre.

```
In[∘]:= FC[x_, y_] = - 2 ArcTan[(y - 1) / (x - 1)]
Out[∘]= -2 ArcTan[(-1 + y)/(-1 + x)]
```

Fig. 22. Ingreso función de corriente con asignación de nombre y visualización.

```
In[∘]:= FC[x_, y_] := - 2 ArcTan[(y - 1) / (x - 1)]
```

Fig. 23. Ingreso función de corriente con asignación de nombre y sin visualización.

```
In[∘]:= - 2 ArcTan[(y - 1) / (x - 1)]
Out[∘]= -2 ArcTan[(-1 + y)/(-1 + x)]
```

Fig. 24. Ingreso función de corriente sin asignación de nombre.

4.4 Reflexiones sobre el análisis

El análisis de la actividad del alumno al resolver la tarea en el software, detallando las posibilidades de exploración y argumentan estarían indicando el potencial matemático de ésta es alto pues aquí se conjugan dos aspectos. Por un lado, el alumno está usando los conceptos teóricos de flujo potencial, aplicando las funciones de una variable compleja, el concepto de sumidero, potencia de un flujo, las funciones componentes, potencial de velocidades y función de corrientes y; por otro, recordar y usar los comandos adecuados del software para resolver la tarea. Generalmente es la primera vez que trabajan en la plataforma, y en el caso que lo hayan hecho previamente en otras asignaturas, la exigencia de uso del software era menor. El software de la plataforma tiene una sintaxis específica, como sucede con cualquier software, por lo tanto, requiere cierto cuidado a la hora de ingresar los comandos. Suele pasar que el olvido involuntario de un símbolo, o el uso de paréntesis en lugar de corchetes de por resultados expresiones incorrectas o mensajes de error. Consideramos que esto es una dificultad extra al resolver las tareas de esta manera, aunque sostenemos que la incorporación del software favorece la visualización de las funciones, facilita cálculos rutinarios y abre la posibilidad de explorar conceptos que en lápiz y papel serían más complicados de hacer.

A pesar de que en la consigna está indicado lo que debe hallar y cuenta con tutoriales sobre los comandos a utilizar, igualmente la tarea tiene un potencial matemático considerable pues el alumno tiene que conjugar los dos aspectos mencionados en el párrafo anterior. Está aprendiendo conceptos nuevos a la par que aprende el uso del software y los tiene que combinar para resolver la tarea.

El uso de software es pertinente ya que las gráficas que representan los flujos potenciales son complejas de realizar a mano alzada. También el trabajo algebraico para obtener las funciones componentes se facilita con el uso de esta tecnología.

Así que la demanda cognitiva de la tarea alcanza el nivel tres de la categorización propuesta por Stein, Smith, Henningsen y Silver [3]; es decir, los alumnos realizan razonamientos simples al recordar los aspectos teóricos necesarios para la resolución, hacen algoritmos sin conexiones al usar comandos para ingresar variable y funciones y al utilizar ComplexExpand. Por último, estarían haciendo algoritmos con conexiones pues tienen que recurrir a la teoría para identificar la función de una variable compleja correspondiente, utilizar bien los datos y utilizar habilidades matemáticas como la *Habilidad Matemática Interpretar los resultados del Software Mathematica (HMISM).*

5 Conclusiones y trabajos futuros

El análisis realizado nos habilita a realizar algunas conclusiones.

Contamos con el diseño de una tarea sobre flujo potencial que incluye el uso del software Mathematica en la plataforma Wolfram que invita a que el alumno realice una actividad matemática interesante. Esto se debe a que tiene un potencial matemático alto, ya que incluye aspectos teóricos de la teoría de flujo potencial como aplicación de las funciones analíticas de una variable compleja como así también uso intensivo del software adaptado al tema

Al realizar esta tarea el alumno no solo estaría adquiriendo los conceptos necesarios para luego poder abordar el tema flujo de fluidos de la asignatura del nivel superior Aerodinámica. como dijimos en la introducción, sino también estaría adquiriendo habilidades matemáticas generales y con uso de tecnología. Esto posiciona al alumno en ventaja con respecto a las tareas realizadas solamente en lápiz y papel, ya que las posibilidades de exploración son mayores al utilizar el software.

Al ser una tarea con demanda cognitiva alta, de nivel de algoritmos con conexiones de acuerdo con la teoría [3] podríamos decir que es una actividad interesante de realizar con los alumnos la carrera de ingeniería aeronáutica pues estaría favoreciendo su razonamiento crítico y adaptándose al uso de software.

Como trabajos a futuro pensamos realizar lo siguiente:

Rúbricas de corrección de la tarea basada en el análisis hecho y presentado en esta ponencia.

Repetir el análisis en las otras tareas de la actividad que mencionamos anteriormente, las relativas al estudio de las condiciones de derivabilidad y a la de los gráficos de los diferentes flujos potenciales

Otras rúbricas de corrección surgidas de los futuros análisis planteados.

Y por último recabar datos de la experiencia y rever los diseños y el análisis con el fin de una mejora continua de las tareas para los alumnos.

Referencias

1. Wolfram: *Wolfram Development Platform*, https://develop.wolframcloud.com/app/ (2015-2020). Accedido el 23 de febrero de 2020
2. Barreiro, P.; Leonian, P.; Marino, T.: Pochulu, M. y Rodriguez, M.: *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*, Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNGS, 2016.
3. Stein, M.; Smith, M.; Henningsen, M. y Silver, E.: *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*, Nueva York: Teachers College Press., 2009.
4. Rodríguez, M.: Resolución de problemas. Pochulu, M. y Rodriguez, M. (Ed): *Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ungs-eduvim, pp. 155-177 (2012)
5. J. Delgado Rubí, «Las habilidades matemáticas» Documento interno del Seminario-Taller de Didáctica de la Matemática, Buenos Aires: UTN Regional Haedo, 1997.
6. Ferrer Vicente, M.: L*a resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*, http://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/mfv/Las%20habilidades%20matematica.htm. (2000) Accedido el 23 de febrero de 2020
7. García Bello, B.; Hernández Gallo, T. y Pérez Delgado, E.: *El proceso de formación de habilidades matemáticas*, https://es.scribd.com/document/360870457/Proceso-Formacion-Habilidades-Matematicas (2010). Accedido el 23 de febrero de 2020
8. Morales Díaz, Y.; Bravo Estévez, M. y Cañedo Iglesias, C.: Enseñanza de la matemática en ingeniería mecánica para el desarrollo de habilidades. *Pedagogía Universitaria*, Vol. 18, No 4, pp. 75–90 (2013)

Diseño de actividades de enseñanza aprendizaje: GeoGebra y habilidades matemáticas

Adriana G. Favieri, Betina Williner, Roxana Scorzo

Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas
Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, B1754 San Justo, Buenos Aires
{afavieri, bwilliner, rscorzo}@unlam.edu.ar

Resumen. Mostramos el diseño de Actividades Interactivas con uso de GeoGebra (AIGG) que permiten que el alumno construya conocimiento sobre funciones, límite y derivada, con énfasis en el proceso de enseñanza aprendizaje mediante la experimentación y con centro en el dominio de procedimientos y operaciones para la cátedra de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). El diseño está basado en el modelo didáctico-tecnológico de Camarena e incluye ítems para resolver con la aplicación y otros para responder en lápiz y papel. Los indicadores del aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados están relacionados con el desarrollo de habilidades matemáticas, estableciendo dos categorías, las relativas al uso de la aplicación que denominamos Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HMGG) y las que se refieren al trabajo tradicional, que llamamos Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL). Exponemos la adaptación del modelo a nuestro contexto, las habilidades matemáticas involucradas y la forma de implementación. De acuerdo con esto podemos decir que contamos con varias actividades interactivas que favorecen el desarrollo de habilidades matemáticas.

Palabras Clave: Actividades de enseñanza aprendizaje, GeoGebra, Habilidades matemáticas, Modelo didáctico-tecnológico

1 Introducción

En el grupo de investigación sobre educación matemática de la cátedra Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) venimos trabajando en dos líneas de investigación, una sobre el desarrollo de habilidades matemáticas ([1]; [2]; [3]) y otra sobre la incorporación y uso de TIC en el aula. En el último proyecto de investigación nos propusimos como objetivo general desarrollar un recurso didáctico usando la aplicación para dispositivos móviles GeoGebra destinado a mejorar los niveles de desempeño de la habilidad matemática *Aplicar el concepto de derivada en la solución de problemas*. El buen desempeño de esta habilidad, por parte de los alumnos, es de suma importancia en la asignatura Análisis Matemático I ya que este concepto es uno de los pilares de esta.

Para ello diseñamos una serie de actividades que incorporan el uso de GeoGebra de manera gradual e intensiva que intentan desarrollar habilidades matemáticas desde el concepto de funciones hasta derivada, poniéndose el énfasis en el proceso de enseñanza aprendizaje mediante la experimentación por el alumno y con centro en el dominio de procedimientos y operaciones. Camarena [4] propone un modelo didáctico-tecnológico para la elaboración de materiales computacionales interactivos que consideramos apropiado para el diseño de las actividades mencionadas.

Por lo que el objetivo de esta ponencia es: *Mostrar el diseño de actividades de enseñanza aprendizaje con uso de GeoGebra para Análisis Matemático I del DIIT basadas en el modelo didáctico-tecnológico de Camarena con acento en el desarrollo de habilidades matemáticas.*

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

2 Referentes teóricos

2.1 Modelo didáctico-tecnológico para la elaboración de materiales computacionales interactivos

El modelo de Camarena [4] está basado en dos teorías, la Matemática en el contexto de las ciencias y la teoría del diálogo didáctico mediado (en este caso por la tecnología). Comprende tres dimensiones que se explican a continuación.

- *Dimensión de las figuras o actores*. Está formada por las personas que participan en el diseño y elaboración del material computacional interactivo. Para esta autora debería ser un equipo interdisciplinar, formado por el profesor (experto en contenidos), ingeniero de software, diseñador editorial, gráfico y comunicadores.
- *Dimensión de los recursos didácticos tecnológicos*. Estos recursos son internet, plataformas tecnológicas educativas, computadora, software educativo, simuladores, chats, sitios web y/o dispositivos móviles. Son los que se utilizan para elaborar los materiales computacionales interactivos, la mediación pedagógica se realiza a través del uso de ellos. Incluye tanto el aspecto intelectual de organización y estructura del proceso de enseñanza y de aprendizaje en la elaboración del mensaje o contenido que se va a enseñar, como el técnico, el relacionado con el equipo, computadoras, software.
- *Dimensión de los procesos*. Esta dimensión se enfoca en tres acciones principales.
  - El tratamiento del contenido matemático. Desde la fase cognitiva se identifican y documentan problemas cognitivos que usualmente presentan los alumnos y desde la fase epistemológica se reconocen los obstáculos epistemológicos del contenido matemático ya que la superación de éstos contribuye a la construcción del concepto en cuestión y determina indicadores para el aprendizaje. También se toma en cuenta el enfoque que se le quiere dar al aprendizaje del concepto, qué representaciones semióticas se van a utilizar y qué habilidades son requeridas.
  - La identificación de los indicadores del aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados en el contenido a aprender. tienen que ser observables cuanti o cualitativamente.
  - El diseño del software interactivo se refiere a que el material realizado con el software seleccionado invite a una actividad no mecánica. Entendemos por material computacional interactivo aquel que permite que el estudiante construya su conocimiento, para lo cual requiere estar fundamentado en alguna teoría constructivista para el aprendizaje; esto va más allá de establecer acción entre el alumno y el material.

La autora del modelo recomienda distintos tipos de actividades entre ellas: actividades para la construcción del concepto, para explorar diferentes registros de representación, para desarrollar habilidades operativas del concepto matemático, para aplicar heurísticas, para conjeturar, para utilizar el lenguaje matemático, para observar regularidades en el comportamiento de los datos, entre otras. También sostiene que el conocimiento se debe mostrar en espiral para que sea un continuo repaso de lo que se está construyendo, lo que apoya la construcción y reconstrucción del conocimiento.

2.2 Habilidades matemáticas

Dentro de la bibliografía especializada se suele hablar de “procedimientos” (habilidades) como los modos de actuación, de un “saber hacer”, de contenidos procedimentales, de competencia, pensamiento hábil ([5]; [6]; [7]; [8]; [9]; [10]; [11]), Nosotros discernimos entre procedimiento y habilidad vinculados con la matemática. Por una parte, el procedimiento es la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación con el logro del objetivo planteado. En general, una habilidad nos permite realizar adecuadamente otras actividades jerárquica y/o lógicamente asociadas.

3 Diseño de actividades de enseñanza aprendizaje con uso de GeoGebra basadas en el modelo didáctico-tecnológico de Camarena con acento en el desarrollo de habilidades matemáticas.

Describimos las dimensiones del modelo aplicadas al diseño de las actividades para nuestro contexto, la asignatura Análisis Matemático I del DIIT de la UNLaM.

- *Dimensión de las figuras o actores*. En nuestro caso está formada por las docentes autoras de la ponencia que forman parte del proyecto de investigación siendo la directora, codirectora e investigadora principal. Dado que no contamos con recursos humanos expertos en tecnología en el equipo de investigación la tarea fue realizada por las docentes participantes del proyecto. Para ello analizamos las diversas aplicaciones de GeoGebra, sus comandos y utilidades. En un principio de la investigación trabajamos con GeoGebra CAS. Luego de la elaboración de las actividades la aplicación fue actualizada por la empresa desarrolladora y, en la actualidad, para realizar las mismas actividades es preciso usar la aplicación GeoGebra Calculadora Gráfica.
- *Dimensión de los recursos didácticos tecnológicos*. El recurso tecnológico es la aplicación GeoGebra Graficador y GeoGebra CAS, luego de la actualización mencionada. Los aspectos intelectual y técnico se combinaron en cada actividad pues incluye ítems para trabajar en la aplicación y otros en los que los alumnos trabajan en el papel. Adaptando el modelo teórico a estas actividades la denominamos Actividad Interactiva con uso de GeoGebra (AIGG) pues permite que el alumno construya conocimiento sobre funciones, límite y derivada, poniéndose el énfasis en el proceso de enseñanza aprendizaje mediante la experimentación y con centro en el dominio de procedimientos y operaciones.
- *Dimensión de los procesos*. Como el objetivo era evaluar el desarrollo de la habilidad matemática Aplicar el concepto de derivada en la solución de problemas consideramos apropiado ir secuenciando el contenido y la incorporación de la aplicación desde el inicio de clases con el tema de funciones. Así decidimos diseñar tres actividades.

La primera actividad relacionada con la enseñanza de funciones, dominio, imagen y modificaciones de la gráfica usando la aplicación. De esta manera aunamos el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos y de los comandos adecuados de la aplicación.

Esta actividad la realizamos durante las clases, cada docente en su curso. Indicábamos y enseñábamos los contenidos y el uso de la aplicación de acuerdo con ellos. Así, teníamos espacios de explicaciones en el pizarrón, de trabajo de los alumnos usando GeoGebra de acuerdo con nuestras indicaciones y puesta en común de lo realizado por los alumnos y en la cual podíamos resumir la información importante y centrarnos en los conceptos esenciales de la clase. La misma se encuadra dentro de la clasificación propuesta por la autora en la categoría actividad para desarrollar habilidades operativas del concepto matemático.

La segunda y tercera actividad la pensamos para desarrollar en un espacio curricular de la cátedra en el cual se trabaja bajo modalidad taller en grupos de dos alumnos y está destinado a la resolución de problemas. Las actividades de este espacio curricular son problemas que pueden tener como objetivo introducir un tema aplicar un concepto o evaluar algún tema en particular. La segunda actividad es sobre el tema de límite del cociente incremental e introductoria al concepto de recta tangente como posición límite de las rectas secantes y la tercera sobre el problema del volumen de un cierto gas en función de la presión y como actividad anticipatoria al teorema del valor medio de funciones derivables. Esta actividad encaja en la clasificación actividades de construcción de conceptos.

Decidimos incluir ítems para desarrollar en GeoGebra y otros para responder en el papel. Los ítems relativos a la aplicación lo diferenciamos usando letra cursiva en el enunciado y los ítems correspondientes al trabajo en lápiz y papel incluían explicaciones sobre lo realizado con la aplicación, uso de los datos obtenidos y justificaciones sobre los procedimientos realizados. La entrega de estas actividades debía dejar constancia de las dos formas de trabajo por lo que la misma incluye lo resuelto en papel y el envío al correo institucional de cada docente de curso de lo realizado con GeoGebra. Establecimos que las mismas podían ser completadas por los alumnos en dos horas y media.

Como indicadores del aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados los relacionamos con el desarrollo de habilidades matemáticas.

Mostramos a continuación las actividades junto con las habilidades matemáticas involucradas.

3.1 Primera actividad: enseñanza de funciones, dominio, imagen y modificaciones de la gráfica usando la aplicación

Luego de explicarles a los alumnos que se iba a trabajar usando la aplicación App GeoGebra, se les pidió que la descargaran de Play Store de Android o App Store de Apple. Durante la clase definimos función, dominio e imagen. A continuación, explicamos la manera de ingresar funciones en la aplicación, aclarando que existe la posibilidad de ingresarlas directamente y que el nombre de la función sea determinado por la aplicación, o bien ingresarlas asignándole un nombre de manera manual. Trabajamos con diferentes grupos de funciones, con el fin de presentarlas y clasificarlas. Se aprovechó la oportunidad para desarrollar el tema modificaciones de los gráficos de las funciones, incluyendo tanto las traslaciones verticales y horizontales, como dilataciones y contracciones verticales y horizontales (véase Fig. 1).

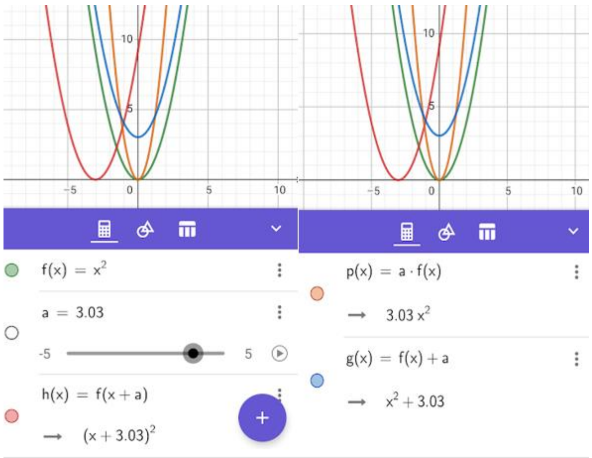


Fig. 1. Ejemplo de la tarea sobre modificación de funciones de la actividad 1 usando la aplicación GeoGebra.

También les enseñamos el uso de deslizadores, gráfico de rectas móviles y de puntos (véase Fig. 2).

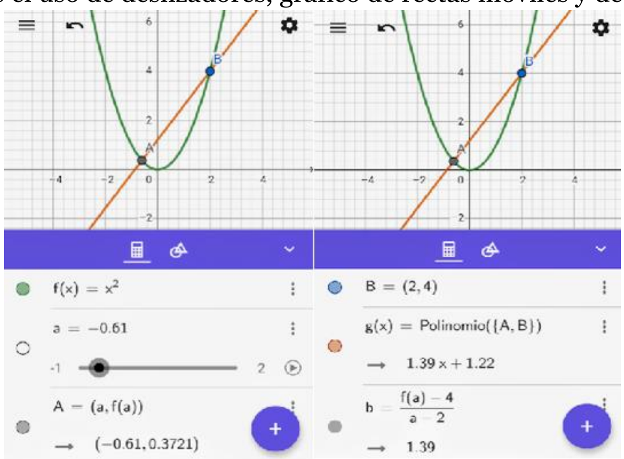


Fig. 2. Ejemplo de la tarea sobre deslizadores y puntos móviles de la actividad 1 usando la aplicación GeoGebra

Como complemento se les ofreció a los alumnos videos y documentos tutoriales sobre el uso de la aplicación que fue enviado vía mail.

3.2 Segunda actividad: límite del cociente incremental

El tema de esta actividad es límite del cociente incremental e introductoria al concepto de recta tangente como posición límite de las rectas secantes (véase Fig. 3).

Universidad Nacional de la Matanza

Cátedra: Análisis Matemático I - Actividad Nro 2 – Límite

Integrantes:

____Curso 04

Problema 1

Realizar las siguientes acciones con GeoGebra y luego responder lo pedido:

Graficar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Crear el deslizador "a" que tome valores en el intervalo [0, 2] con un incremento de 0.01

Marcar el punto P(1,f(1)) y un punto Q(a,f(a)).

De acuerdo con estos puntos escribir: la variación de la variable independiente, la de la dependiente y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Utilizando comando Recta(A,B) trazar la recta que pasa por P y Q (esta recta se llama recta secante)

¿Qué significado geométrico tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Al mover el deslizador a ¿qué efecto produce sobre la recta secante?

Completar el siguiente cuadro.

a	0	0.5	0.8	0.9	0.95
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$					
a	2	1.5	1.2	1.1	1.11
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$					

Comparar las pendientes de las rectas secantes a medida que a se acerca a 1 y estimar a qué valor se acercan y completar

$$\lim_{a\to 1^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \quad , \lim_{a\to 1^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \quad , \lim_{a\to 1} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

Resolver el límite analíticamente justificando los pasos realizados.

Luego verificarlos usando el comando Limite(f(x),a)

¿Qué sucede con la recta cuando a es igual a 1? ¿Por qué creen que sucede esto?

Se define recta tangente a una función en un punto P de la misma como la posición límite de las rectas secantes trazadas desde un punto móvil Q a P, a medida que Q se acerca a P. Teniendo en cuenta esta definición ¿cuál sería el significado del límite recién calculado?

Problema 2

Un objeto cae desde 4 metros de altura y las posiciones a lo largo de 2 segundos está dada por los puntos: A=(0,4) B(0.5,3.75) C=(1,3) D=(1.5,1.75) E=(2,0). Graficarlos en GeoGebra.

¿Qué curva te parece pasa por todos esos puntos?

Usando comando Polinomio ({P1, P2, P3}), siendo P1, P2, P3 puntos, hallar el polinomio P(x) que pasa por los puntos A, B y C y responder: ¿dicho polinomio pasa por los puntos D y E? ¿Por qué? *Verificarlo analíticamente usando GeoGebra.*

Considerando como variable independiente el tiempo y como variable dependiente la posición del objeto, que llamaremos s(t), ¿Cuál sería la función s(t) en el contexto del problema, indicando dominio e imagen? Se considera sentido positivo hacia arriba, tanto para la posición como para la velocidad del objeto. *¿Podrías graficar en GeoGebra esta función hallada? (Sugerencia: usar comando "Si")*

Se define como velocidad media a la expresión: $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Crear un deslizador "t" que tome valores en el intervalo [0.5, 1.5] con un incremento de 0.01 y definir:

$v_m = \frac{s(t)-s(1)}{t-1}$. Accionar el deslizador y contestar:

¿Qué pasa cuando t=1? ¿Qué valores toma la velocidad media en los valores de t indicados en la tabla?

t	0.5	0.8	0.9	0.95	0.99
v_m					

t	1.5	1.2	1.1	1.05	1.01
v_m					

¿A qué valor se acerca la velocidad media a medida que t se acerca a 1?

¿Cómo podría expresarse esto analíticamente?

Fig. 3. Actividad N[ro.] 2 con uso de GeoGebra Interactiva

3.2.1 Habilidades matemáticas de la actividad

Consideramos dos tipos de habilidades, las relativas al uso de la aplicación que denominamos *Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HMGG)* y las que se refieren al trabajo tradicional, que llamamos *Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL).*

A continuación, las describimos para cada uno de los problemas

Problema 1

Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HBGG)

- Graficar funciones
- Crear deslizadores
- Definir puntos de la gráfica, fijo y móvil
- Utilizar comando Recta
- Completar tabla de acuerdo con los resultados del GG
- Usar comando Límite

Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL).

- Recordar el concepto de variación de variables independiente, dependiente y cociente incremental
- Interpretar significado pendiente de la recta secante
- Analizar cambios en la posición de la recta secante
- Justificar los pasos realizados
- Explicar lo que sucede con la recta tangente en a=1
- Explicar significado del límite calculado relacionando lo realizado en GG con la teoría

Problema 2

Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HBGG)

– Graficar puntos
– Usar comando polinomio
– Verificar que el polinomio pase por los otros puntos
– Graficar función en determinado dominio (uso comando Si (condicional))
– Crear deslizadores
– Completar tabla de acuerdo con los resultados del GG

Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL).

– Identificar la curva que pasa por los puntos indicados
– Definir función en contexto del problema
– Estimar el valor de la velocidad cuando t tiende a 1
– Identificar cociente incremental y escribir el límite correspondiente

3.3 Tercera actividad: problema del volumen de un cierto gas en función de la presión

El tema de esta actividad es sobre el problema del volumen de un cierto gas en función de la presión y como actividad anticipatoria al teorema del valor medio de funciones derivables (véase Fig. 4).

Universidad Nacional de la Matanza

Cátedra: Análisis Matemático I - Actividad Nro 3 – Derivada

Integrantes:

____Curso 04

La siguiente fórmula relaciona el volumen V (en litros) de un cierto gas, a temperatura constante, en

función de la presión P (en atmósferas): $f:[1;12] \rightarrow [2{,}5;\,30] / V = f(P) = \frac{30}{P}$.

Realizar las siguientes acciones en la aplicación y responder

a) *Definir la función en GeoGebra y graficarla en el intervalo.*
b) *Usando el comando **"Derivada(f)"**, calcular la razón de cambio instantánea (rci) del volumen respecto a la presión para cualquier valor de P.*
c) ¿Cuál es el significado de la rci negativa en todo punto del intervalo?
d) *Definir los puntos* P(2,f(2)) y Q(6,f(6))
e) *Utilizando comando **"Recta(A,B)"** trazar la recta que pasa por* P y Q
f) *Escribir en GeoGebra el cálculo para determinar la pendiente de dicha recta*
g) ¿Qué relación tiene con la razón de cambio media (rcp) en el intervalo [2,6]?
h) *Usando el comando **"Resuelve(ecuación)"**, hallar el valor de la Presión para el cuál la rci es igual a la rcp en el intervalo [2,6]. (Expresarlo en forma aproximada, usar el símbolo que aparece a la derecha del resultado)*
i) *Definir un deslizador "a" que tome los valores de 2 a 6*
j) *A través del comando **"Tangente(Punto, Función)"**, hallar la recta tangente a la función f dependiendo del punto (a,f(a)).*
k) *Accionar el deslizador y buscar el valor de "a" (aproximado) para el cuál la recta tangente es paralela a la secante.*
l) ¿Coincide con lo hallado en el punto h?
m) ¿Cómo se relaciona lo hecho en el punto h) y l)?
n) ¿Podrían pensar alguna interpretación geométrica?

Fig. 4. Actividad N$^{ro.}$ 3 con uso de GeoGebra Interactiva

3.3.1 Habilidades matemáticas de la actividad

Describimos las habilidades del problema

Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HBGG)

- Graficar función en determinado dominio (uso comando Si (condicional))
- Usar comando Derivada
- Utilizar comando Recta
- Ingresar en GG el cálculo para determinar la pendiente de dicha recta
- Usar comando Resuelve
- Crear deslizador
- Utilizar comando Tangente
- Relacionar pendientes de rectas usando un deslizador

Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL).

- Interpretar signo de la razón de cambio instantánea
- Relacionar la pendiente de la recta secante con la razón de cambio media (rcp) en el intervalo
- Relacionar lo trabajado en registro gráfico y analítico
- Elaborar una interpretación geométrica

4 Reflexiones sobre el diseño de las actividades

Para reflexionar sobre el diseño nos centraremos en:

- Interactividad de las actividades
- Habilidades involucradas
- Tiempo destinado a la actividad
- Entrega de las producciones de los alumnos

4.1 Interactividad de las actividades

Consideramos que la interactividad está dada pues, el diseño de *Actividades Interactivas con uso de GeoGebra (AIGG)*, habilita a los alumnos a resolver algunos ítems en la aplicación y luego usar los resultados para completar tablas, descubrir comportamientos de la recta secante al aproximarse a un valor establecido y al verificar gráficamente y/o analíticamente lo realizado. Constantemente el alumno pasaba de un entorno al otro. El uso de la aplicación excedía la simple representación de funciones.

4.2 Habilidades involucradas

Las actividades diseñadas de acuerdo con el modelo didáctico-tecnológico de Camarena tienen como indicadores del aprendizaje de los conceptos matemáticos a las habilidades matemática y hemos logrado clasificarlas en dos grupos, de acuerdo con el trabajo con la aplicación GeoGebra y en referencia al trabajo con lápiz y papel. A las primeras las denominamos *Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HMGG)* y a las segundas *Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL).*

4.3 Tiempo destinado a la actividad

El tiempo destinado para el desarrollo de las actividades lo consideramos adecuado, aunque es posible que en los cursos en los cuales los alumnos se enfrentan con la asignatura y la aplicación por primera vez puede extenderse media hora más.

4.4 Entrega de las producciones de los alumnos

Tal como dijimos previamente la entrega consistía en dos partes, lo trabajado en papel y lo hecho con el GeoGebra. Aquí hubo una dificultad que tuvo que ver con el nombre del archivo generado por la aplicación, para todos los grupos el mismo se llamaba *construcción.ggb* por lo que hubo que aclararles a los alumnos que al enviar el mail con el archivo escribieran en el asunto los apellidos de los integrantes o, en su defecto, en el cuerpo del mensaje. Si los alumnos no respetan esta regla se complicaba la gestión de las correcciones al no poder determinar a qué grupo pertenecía ese archivo, Algunos estudiantes lograron modificar el nombre al archivo generado, pero no fue la mayoría.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Las reflexiones recién expuestas nos permiten escribir algunas conclusiones.
Para el diseño de estas actividades es preciso una planificación meticulosa, enfocada en los contenidos que se desarrollan, las habilidades matemáticas y las guías que serán necesarias para que los alumnos la resuelvan de la mejor manera posible.

Logramos el diseño de *Actividades Interactivas con uso de GeoGebra (AIGG)* sobre los conceptos de funciones, límite y derivada, poniendo el énfasis en el proceso de enseñanza aprendizaje mediante la experimentación y con centro en el dominio de procedimientos y operaciones.

Coincidiendo con la postura de Camarena [1] consideramos apropiado presentar las en forma gradual tanto para los conceptos como para el uso de la aplicación.

Contamos con indicadores del aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados relacionados con el desarrollo de habilidades matemáticas, tanto para el uso de la aplicación como para el trabajo en lápiz y papel: las *Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HMGG)* y a las segundas *Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL).*

El diseño de las actividades con un enfoque mixto, de trabajo en lápiz y papel y con GeoGebra, promueven una interactividad entre los dos entornos de trabajo que, creemos, invita al desarrollo de habilidades matemáticas de orden superior, relacionadas con explicaciones, justificaciones e interpretación de datos.

El ofrecer tutoriales sobre el uso de comandos específicos del GeoGebra resulta ser una herramienta más para ayudar a los alumnos durante el proceso de enseñanza aprendizaje y resolución de este tipo de actividades.

Consideramos que los trabajos a futuro estarán vinculados a:

Diseño de *Actividades con uso de GeoGebra Interactiva (AGGI)* con otros conceptos de la asignatura.

Intensificar el análisis de *Habilidades Matemáticas con GeoGebra (HMGG)* y *Habilidades Matemáticas en papel y lápiz (HMPL).*

Elaboración de rúbricas de corrección de la tarea basada en las habilidades matemáticas analizadas.

Y por último rever los diseños, las habilidades matemáticas para mejorar de manera continua nuestra tarea docente y las tareas y materiales ofrecidos a los alumnos.

Referencias

1. Delgado Rubí, J.: Las habilidades matemáticas. Documento interno del Seminario-Taller de Didáctica de la Matemática, Buenos Aires: UTN Regional Haedo, (1997).
2. Hernández Fernández H, Delgado Rubí J.R., Fernández de Alaíza B, Valverde Ramírez L, Rodríguez Hung T.: Cuestiones de didáctica de la Matemática, Homo Sapiens Ediciones, (1998).
3. Ferrer Vicente, M.: La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana, http://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/mfv/Las%20habilidades%20matematica.htm. (2000) Accedido el 23 de febrero de 2020.
4. Camarena, P.: Un modelo para el diseño de material computacional interactivo. Revista Iberoamericana de Informática Educativa, Vol. 19, pp. 3-16 (2014).
5. Rodríguez, M.: Resolución de problemas. Pochulu, M. y Rodriguez, M. (Ed): Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Ungs-eduvim, pp. 155-177 (2012)
6. García Bello, B., Hernández Gallo, T. y Pérez Delgado, E.: El proceso de formación de habilidades matemáticas, https://es.scribd.com/document/360870457/Proceso-Formacion-Habilidades-Matematicas (2010).
7. Morales Díaz, Y.; Bravo Estévez, M. y Cañedo Iglesias, C.: Enseñanza de la matemática en ingeniería mecánica para el desarrollo de habilidades. Pedagogía Universitaria, Vol. 18, No 4, pp. 75–90 (2013).

8. Zabala, A.: Los enfoques didácticos. Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M. Onrubia, J., Solé, I. y Zabala, A. (Ed): El constructivismo en el aula. Editorial GRAÓ, (2007).
9. Sánchez, M.: La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. Revista Electrónica de Investigación Educativa, Vol. 4, No 1, (2002).
10. Godino, J.: Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Vol. 29, pp. 9-19, (2002ª).
11. Nickerson, R., Perkins, D. y Smith, E.: Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual, Barcelona: Paidós. Ministerio de Educación y Ciencia, (1987).

Acerca de las modalidades de evaluación implementadas por los docentes del Departamento de Materias Básicas de la UTN – Facultad Regional San Francisco

Laura María Rivara, Romina Gisela Karlich, Valeria Elisa Lidia Giletta, Gustavo Yoaquino

[1] Departamento de Materias Básicas UTN - Facultad Regional San Francisco
Av. de la Universidad 501
{lrivara, rkarlich, vgiletta, gyoaquino}@facultad.sanfrancisco.utn.edu.ar

Resumen. El año 2020 obligó a que docentes y alumnos se adaptaran a nuevas formas de enseñar y aprender. En ese marco, la evaluación se trasladó a entornos virtuales. Este trabajo muestra los mecanismos de evaluación virtual implementados por un grupo de docentes del Departamento de Materias Básicas de la Facultad Regional San Francisco de la Universidad Tecnológica Nacional, así como las dificultades que se hallaron, las alternativas de solución escogidas y el análisis de los docentes sobre esta práctica que se tornó ineludible.

Palabras Clave: Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA), Evaluación virtual, Moodle, Campus Virtual, Universidad Tecnológica Nacional.

1 Introducción

El inicio del ciclo lectivo 2020 estuvo condicionado por la emergencia sanitaria que generó el brote de un nuevo coronavirus (COVID-19) en todo el mundo, situación que fue declarada como pandemia por la Organización Mundial de la Salud (OMS), y el 19 de Marzo de 2020, según Decreto 297/2020, el presidente de la República Argentina declara el Aislamiento Social, Preventivo y Obligatorio (ASPO), a partir de ese momento se paralizaron todas las actividades, salvo algunos sectores laborales y personal esencial; entre todos ellos los docentes, que si bien no pudieron volver a las instituciones educativas, silenciosamente, nunca dejaron de trabajar.

Entre los desafíos que impuso la inédita realidad hubo dos que resultaron importantes: en un primer momento la readecuación de la propuesta docente a la nueva modalidad no presencial, desplazando las estrategias habituales de enseñanza a diferentes entornos virtuales de aprendizaje (EVA). En un breve periodo, estudiantes y docentes, se adaptaron a esta nueva condición. Luego, una vez superada esta instancia, debieron pensar en el proceso de evaluación que se implementaría.

Entre otras cuestiones que se debieron afrontar, caben destacar:

- Lograr acuerdos básicos entre los claustros y que los mismos fueran refrendados por los órganos de gobierno de cada Facultad Regional, generando de esta forma un marco legal en el cual fuera posible llevar adelante la instancia evaluativa.

- Para los docentes, significó un proceso acelerado de formación que permitiera adquirir nuevas habilidades para evaluar en virtualidad como así también la utilización de los entornos virtuales de aprendizaje (EVA) para este fin, el de evaluar.

- Flexibilidad y versatilidad de todos los actores para adecuación a las condiciones cambiantes que se planteaban, nuevas herramientas que surgían en el transcurso y el avance de este 2020.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

- El personal no docente del área de TICs tuvo que trabajar para adecuar los sistemas informáticos a las necesidades académicas requeridas por los docentes y dar soporte técnico en el uso de plataformas virtuales de video conferencia y plataforma Moodle. Éste área, la de TICs, también debió adaptar los sistemas de gestión administrativa que para que fuera posible formalizar las inscripciones, condiciones finales y gestión de la acreditación de los estudiantes luego de las instancias de evaluación.

- Los estudiantes enfrentaron variados desafíos que fueron desde aspectos más sencillos como cambios en los hábitos de estudio, la asignación de tiempos, la adquisición de nuevas habilidades y herramientas tecnológicas, a otros más complejos como desigualdad en el acceso a esta nueva modalidad debido a la carencia o disponibilidad acotada de dispositivos como notebook, teléfonos inteligentes, computadoras de escritorio u otros dispositivos, como así también la falta de acceso y/o falencias en la conectividad a la red de Internet.

La evaluación virtual presenta características diferentes de la evaluación presencial que debemos conocer, dominar y saber implementar para poder obtener los resultados deseados.

El objetivo de este trabajo es conocer y analizar las modalidades de evaluación implementadas por los docentes del Departamento de Materias Básicas de la Facultad Regional San Francisco de la Universidad Tecnológica Nacional, los recursos técnicos que fueron utilizados para llevar a cabo la evaluación, así como la percepción de variados aspectos ligados al proceso de evaluación.

2 Materiales y métodos

Con el objetivo de relevar los datos necesarios para el presente trabajo, implementamos un estudio descriptivo – exploratorio de corte cualitativo, para lo cual se utilizó un formulario Google conformado de 20 preguntas, en las que se combinan preguntas cerradas, de selección múltiple, y de respuesta corta. A partir de los datos se elaboraron las tablas de frecuencias.

La población que se consideró para realizar el relevamiento fueron los docentes que integran en Departamento de Materias Básicas de la Facultad Regional San Francisco de la Universidad Tecnológica Nacional, que estuvieron a cargo de elaborar las instancias evaluativas parciales y finales en el ciclo lectivo 2020.

El formulario fue enviado a los 16 docentes y la totalidad respondieron el cuestionario. El instrumento de recolección a partir del cual se obtuvieron los datos que se presentan a continuación, se puede ver en:

https://docs.google.com/forms/d/1bKtGFSihFWY4TWFG3pD7jvEWDvC3qcb6IQ_63rj9quI/edit?usp=sharing

3 Discusión de los resultados

El análisis de los mismos se realizó en base a las respuestas brindadas por los 16 docentes que respondieron el cuestionario. La primera parte del cuestionario estaba dedicada conocer acerca de los problemas de conectividad a la red de Internet, a los entornos virtuales de aprendizaje (EVA) y a las plataformas de video conferencias.

Tabla 1. Problemas de conectividad (conexión a Internet) durante las instancias evaluativas del ciclo 2020.

Problemas de conectividad	% de respuestas
Nunca	6,3
Casi nunca	62,5
Ocasionalmente	31,3
Total	100,00

Tabla 2. Quién/quienes tuvieron problemas de conectividad (conexión a Internet) durante las instancias evaluativas del ciclo 2020.

Quien/quienes tuvieron problemas de conectividad	% de respuestas
Usted	12,5
El/los estudiantes	68,8
Ambos (Usted y los estudiantes)	18,8
Total	100,00

Cuando hubo problemas de conectividad a la red de Internet en el desarrollo de las instancias evaluativas las soluciones que se implementaron con más frecuencia fueron: 33,3% de los docentes esperaron un tiempo hasta que se restituyó la conexión de una o ambas partes, 26,7% envió la instancia evaluativa por otro medio y el 13,3% esperó un tiempo hasta que se restituyó la conexión de una o ambas partes y utilizaron datos móviles para concretar la instancia evaluativa. El resto mencionan haber suspendido la evaluación o dar un tratamiento diferente de acuerdo al problema que se presentó.

La Universidad Tecnológica Nacional cuenta, desde hace varios años, con un Campus Virtual Global bajo Plataforma Moodle y, además, en el marco de situación, se proporcionaron cuentas de la plataforma para video conferencias Zoom con licencia Pro, dando libertad a los docentes de utilizar otras plataformas si así lo consideraban conveniente.

Con respecto al Campus Virtual Global 37,5% no tuvo problemas de acceso en una instancia evaluativa, 31,3% alguna vez tuvo problemas de acceso y el resto no utiliza esta plataforma. Con respecto a la plataforma de video conferencia Zoom el 31,3% alguna vez tuvo problemas de acceso y el 68,2% nunca tuvo problemas de acceso a esta plataforma.

Cuando se preguntó acerca de qué tipo de problema se les había presentado; 33,3% manifestó que se les corto la conexión durante el desarrollo de la instancia evaluativa y el 22,2% tuvo problemas de seguridad con alguna de las plataformas. Otras respuestas brindadas: Se cortó el audio de la plataforma Zoom, no pudo acceder a la plataforma en el momento pactado para la evaluación.

Luego se preguntó acerca de cómo había logrado dar solución a estos problemas con las plataformas Moodle y Zoom: 33,3% necesitó de la ayuda de un colega, del área de TICs o de una autoridad, el resto pudo resolver el problema a partir de ensayo y error o utilizando sus conocimientos previos sobre el Campus Virtual y/o la plataforma Zoom. Un docente manifestó que acordó previamente que si se cortaba la conexión los estudiantes debían mandar vía e-mail la solución del examen.

Un segundo grupo de preguntas estuvo orientado a aspectos propios de la evaluación como: la acreditación de la identidad de los estudiantes, difusión de los criterios de evaluación, manejo de los recursos tecnológicos por parte de los estudiantes, asignación de tiempo a la resolución por parte de los estudiantes y al tiempo dedicado por los docentes para elaborar estas instancias evaluativas, entre otros aspectos.

Con respecto a la acreditación de la identidad del estudiante: 37,5% de los docentes no la solicito, el 62,5% de los docentes que, si lo hicieron, implementaron una o más de las siguientes acciones: solicitaron DNI, solicitaron libreta universitaria, contrastaron con las imágenes cargadas por lo estudiantes en la plataforma o bien utilizaron la información brindada por la institución, verificaron el e-mail.

Con respecto a si la instancia evaluativa permitió reflejar el nivel de logro esperado de los temas evaluados: 25,0% de los docentes manifestó que siempre y el 75,0% que casi siempre.

Con respecto a si el docente pudo elaborar instancias evaluativas que permitieran asegurar que el estudiante era el autor individual del trabajo presentado: 62,5% de los docentes manifestó que casi siempre y el 37,5% que no se pudo lograr.

Con respecto a los medios utilizados para difundir los criterios de evaluación: 43,7% de los docentes utilizó solo un medio para difundir los criterios de evaluación, mientras que el resto; 56,3% utilizó al menos dos medios.

Transcribimos aquí, las respuestas brindadas por los docentes:

- Enviaron e-mail a los estudiantes a través de su cuenta particular.
- Enviaron e-mail a los estudiantes a través del Campus Virtual.
- Subieron los criterios de evaluación al Campus Virtual.

- Consignó los criterios en la instancia de evaluación.
- Los notificó en grupo de WhatsApp.
- Los consignó en la clase de revisión anterior a la instancia evaluativa.
- Los especificó oralmente durante la clase de Zoom anterior a la instancia y antes de comenzar la misma.
- Los detalló en la planificación.

Con respecto al nivel de conocimientos tecnológicos (enviar un e-mail, uso de software en general, adjuntar archivos, manejo de las distintas plataformas, ...) por parte de los estudiantes, necesarios para poder desarrollar las instancias evaluativas: 75,0% de los docentes consideró que el nivel de conocimiento es medio; 18,7% es alto y 6,3% que es bajo.

Con respecto a la asignación del tiempo para la resolución de las instancias evaluativas: 56,3% de los docentes asignó un tiempo limitado para la resolución de la misma, 12,5% no puso tiempo para la resolución y el 31,3% no desarrolló la instancia evaluativa por medio del Campus Virtual Global.

Con respecto a la forma de comunicación, los docentes que utilizaron el Campus Virtual Global para desarrollar instancias evaluativas 56,3% lo hizo con actividades sincrónicas, el 12,5% con actividades asincrónicas.

Con respecto a las herramientas del Campus Virtual Global utilizadas 25,0% utilizo cuestionarios, 31,3% tareas y cuestionarios. Preguntamos también acerca de cómo había organizado las preguntas del cuestionario 43,8% permitió la libre navegación y 25,0% organizó el cuestionario de manera secuencial.

Con respecto al respaldo solicitado: 68,8% de los docentes solicitaron respaldo con fotografías que contuvieran la resolución de las preguntas de la instancia evaluativa, el 31,2% restante no pidió respaldo, no utilizo el Campus Virtual o bien utilizó otro ambiente virtual.

Con respecto al tiempo empleado en resolver la instancia evaluativa por parte de los estudiantes: 43,8% de los docentes manifestó que el tiempo empleado es igual al de una evaluación presencial, 25,0% piensa que el tiempo es mayor y 18,8% que es menor al de una evaluación presencial. 6,3% manifestó que es un aspecto que no tomó en consideración y el 6,3% restante adaptó el formato del examen a la modalidad virtual y no puede establecer una comparación.

Con respecto al tiempo de preparación por parte del docente de la instancia evaluativa virtual, el 93,7% de los docentes manifestaron que les demandó más tiempo de preparación que una instancia de evaluación presencial.

Con respecto a la calificación de las instancias evaluativas: 37,5% de los docentes no utilizó la calificación que proporciona el Campus Virtual Global, sino que realizó una revisión previa y procedió a la recalificación, en caso de que correspondiera, 25,0% tomó las instancias evaluativas de manera tradicional y la calificación la publicó por el sistema de gestión académica; 18,8% proporciono al estudiante la calificación que brindada por el Campus Virtual Global o plataforma utilizada, el resto tomo evaluaciones orales o eran actividades "abiertas" o "semi-abiertas" que requirieron corrección personalizada por parte del docente.

Con respecto a cómo se sintió el docente al tomar las instancias evaluativas mediante el Campus Virtual Global, 31,3% de los docentes no utilizó este medio para tomar instancias evaluativas, el 12,6% se sintió incómodo o muy incómodo y el resto se sintió muy cómodo (25,0%) o medianamente cómodo (31,3%).

Con respecto a cómo se sintió el docente con respecto a la utilización de la plataforma Zoom para el desarrollo de las instancias evaluativas: 56,3% dijeron sentirse muy cómodo; 37,5% medianamente cómodo y solo el 6,3% incomodo.

Con respecto a las fortalezas de las instancias evaluativas con modalidad virtual, los docentes mencionaron:

- Agilidad en la devolución o retroalimentación a los estudiantes.
- Posibilidad por parte de los estudiantes de utilizar herramientas variadas en la resolución del examen además de la calculadora, por ejemplo, software (Excel, Mathematica, Geogebra, etc.); aplicaciones de teléfono celular, entre otras.
- Mayor agilidad en la corrección.

- Posibilidad de generar varios exámenes/parciales diferentes con la función de aleatoriedad de las preguntas del cuestionario.
- Posibilidad de evaluar más temas.
- Si utiliza el Campus Virtual Global, todas las acciones quedan registradas.

Con respecto a las debilidades de las instancias evaluativas con modalidad virtual los docentes mencionaron:

- Mayor tiempo de organización de la evaluación.
- Retroalimentación menos eficiente.
- Menor nivel de comunicación con el estudiante.
- Puede haber problemas de seguridad.
- Problemas de conectividad.
- No saber quién realiza el examen.
- Demanda tiempo en la corrección.

Con respecto a la retroalimentación de las correcciones: 37,5% de los docentes programó una instancia de retroalimentación con los estudiantes por Zoom, 25,0% usó el Campus Virtual Global y utilizó los espacios de recalificación para realizar la retroalimentación correspondiente, 18,8% realizó retroalimentación sólo si el estudiante lo necesitó y un docente hizo su devolución vía e-mail.

4 Conclusiones y trabajos futuros

- Los problemas de conectividad durante las instancias evaluativas fueron solamente ocasionales y en todos los casos se hallaron alternativas para dar continuidad a la evaluación.
- Mas de un tercio de los docentes encuestados considera que no pudo elaborar instancias evaluativas que permitan asegurar que el estudiante era el autor individual del trabajo presentado.
- Aproximadamente dos tercios de los docentes encuestados solicitaron respaldo fotográfico que contuviera la resolución de las preguntas de la instancia evaluativa.
- Más del 90% de los docentes encuestados considera que la preparación de una instancia de evaluación virtual demanda más tiempo que la de una instancia presencial.
- Más de la mitad de los docentes encuestado manifiesta sentirse muy cómodo utilizando la plataforma Zoom para las instancias de evaluación.

Atento a que las evaluaciones virtuales continuarán – durante un tiempo difícil de predecir –; creemos que los trabajos futuros deberían orientarse a hallar mecanismos que permitan resolver las dificultades de seguridad, consolidar las fortalezas y revertir las debilidades detectadas.

Referencias

1. Vogliotti, A: Algunas consideraciones en torno a la evaluación en la virtualidad. https://www.evelia.unrc.edu.ar/evelia/portal/algunasConsideracionesEnTornoALaEvaluacionEnLaVirtualidad.html. Accedido 21 de marzo 2021.
2. CiN Rueda. Sugerencias para los exámenes finales y parciales a distancia en las universidades nacionales en el contexto del COVID-19: https://www.frc.utn.edu.ar/prensa/pub/file/2020/Sugerencias%20Ex%C3%A1menes%20RUEDA-CIN.pdf. Accedido 21 de marzo 2021.
3. Zarco Pérez, F; Fernández, C; Lopéz Asencio: Técnicas de evaluación formativas. http://www.economicas.uba.ar/wp-content/uploads/2016/05/CECONTA_SIMPOSIOS_T_2010_18_ZARCO_PEREZ_FERNANDEZ.pdf. Accedido 21 de marzo 2021.
4. Iturrioz, G; González, I: Evaluar en la virtualidad. https://p3.usal.edu.ar/index.php/signos/article/view/3212. Accedido 21 de marzo 2021
5. Grasso, L: ENCUESTAS: Elementos para su diseño y análisis. Encuentro Grupo Editor. 2006.
6. Ander – Egg, E. Técnicas de Investigación Social. Lumen. 1995.
7. Martínez Jaén, A. Uso pedagógico de las TICs en los diferentes contextos educativos. IC Editorial. 2013.

EMCI 2021

Eje 5: Investigación Educativa

Estrategia de Ingreso a Ingeniería y su Evaluación Mediante las Trayectorias Escolares

Ana M. Soto-Hernández[1], Victoriano Reyes-Méndez[1], Sergio Saldaña-García[1], Laura S. Vargas-Pérez[2]

[1] Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, Tecnológico Nacional de México
1º de Mayo y Sor Juana Inés de la Cruz, Los Mangos, Cd. Madero, Tamaulipas
sotohana@gmail.com, victorianoreyes@hotmail.com, saldaser55@gmail.com

[2] Departamento de Ciencias Computacionales, Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, Tecnológico Nacional de México
Juventino Rosas 114, Los Mangos, Cd. Madero, Tamaulipas
laurasilviavargas@gmail.com

Resumen. Este trabajo presenta la evaluación de una estrategia de ingreso a programas de ingeniería. Se analizó el proceso de ingreso, los resultados de los exámenes de admisión, y se aplicó una estrategia diferenciada de ingreso al programa deseado que incluía un intervención educativa, para, finalmente, revisar el desmpeño de los estudiantes a través de su trayectoria escolar. Algunos hallazgos muestran que, al menos durante el primer semestre de carrera, los estudiantes de cualquier programa presentan resultados similares, igual que en el examen de Pensamiento Matemático. No siendo así por género de los estudiantes ni las diferentes generaciones, pues las mujeres obtuvieron mejores resultados en el manejo de la lengua en Español y tienen una mejor trayectoria que los hombres. Por lo cual se muestra un área de oportunidad de profundizar en el diagnóstico del problema y mejorarlo.

Palabras Clave: Estudiantes de ingeniería, Trayectoria escolar, Programas de ingeniería.

1 Introducción

Estudios en México muestran que los estudiantes de reciente ingreso a un programa de licenciatura presentan diversas experiencias en el proceso de transición; algunos se adaptan más fácilmente que otros al cambio del nivel educativo, pero todos tienen experiencias diversas con compañeros, amigos, profesores, normas culturales, nuevos contenidos y estilos de enseñanza aprendizaje, que a veces están llenos de "sobresaltos, ambigüedad e incertidumbre en diversos planos de acción" [1, p. 29]. Porque, además de los problemas con la socialización, cuando se trata de programas de ingeniería, las asignaturas de las ciencias denominadas duras, es el mayor reto que enfrentan los profesores de matemáticas, física y química, y sus evaluaciones basadas en la evidencia del aprendizaje de los conceptos y procedimientos.

No obstante

> el reto para la enseñanza consiste en impedir el déficit de las actividades cognitivas de nivel superior. La enseñanza tiene, por tanto, dos facetas: identificar y eliminar las características de nuestra enseñanza que fomentan el uso de los verbos sustitutos de bajo nivel y apoyar lo que pueda estimular a los estudiantes para que utilicen, en cambio, los verbos de alto nivel. Gran parte del problema del primer tipo radica en el área afectiva: motivación y clima de clase e institucional" [2, p. 96].

En el Tecnológico Nacional de México (TecNM), como un subsistema de institutos tecnológicos públicos, se realizan diversas investigaciones con el objetivo de mejorar los índices de aprobación de las asignaturas del primer año. Tratándose de programas de ingeniería, la demanda por un mínimo nivel

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

de dominio de las bases matemáticas requeridas y las competencias asociadas con su capacidad y habilidades lectoras, son elementos básicos sin los cuales el estudiante del primer año de ingeniería presenta complicaciones en su desempeño académico. Su trayectoria escolar se ve trastocada hasta llegar a la deserción, o el retraso que genera a su vez problemas de toda índole, incluyendo los indicadores de eficiencia terminal o problemas emocionales dramáticos en grado sumo.

A partir de lo anterior, la búsqueda de estrategias de regularización o de nivelación para los estudiantes de nuevo ingreso a la ingeniería que no reúnen los requisitos del perfil de ingreso, sobre todo en matemáticas, pareciera que ha dado pobres resultados; y los profesores parecen normalizar el trabajo de hacer lo que se puede con lo que se tiene. Esto es, la definición de las estrategias de enseñanza y aprendizaje con un déficit de actividades cognitivas "ha propiciado el fortalecimiento de una cualidad de los profesores: la resiliencia, su capacidad de adaptación al entorno, a las nuevas circunstancias" [3, p. 803].

En el TecNM, los programas de ayuda para los estudiantes, como las tutorías, tienen el objetivo de "apoyar al estudiante en el proceso de toma de decisiones relativas a la construcción de su trayectoria formativa… orientada a que los estudiantes mejoren en forma continua a partir de la propia reflexión sobre su desempeño" [4, p. 18]. Esto es, la formación integral del profesional en ingeniería está soportada con diversas estrategias, algunas de ellas centradas en el desarrollo de la persona, del ser y sus capacidades físicas e intelectuales. Los aspectos relacionados con el desarrollo de la persona en su ámbito biopsicosocial están vinculados con la alimentación, la autoestima, el ejercicio y la respiración, el equilibrio físico y mental, que permite mejores condiciones para el aprendizaje.

En este documento se presentan los resultados sobre las trayectorias escolares de dos generaciones de estudiantes, a una de las cuales se le aplicó una estrategia integral de ingreso a los programas de ingeniería del ITCM, perteneciente al TecNM. La hipótesis se basaba en el mejoramiento del desempeño de los estudiantes en el primer año de carrera, a través de un acceso diferenciado, una atención puntual y específica a los requerimientos de herramientas intelectuales, y socioafectivas, y un impulso a la formación de hábitos de estudio sanos y equilibrados.

1.1 Las neurociencias, los profesores, y los estudiantes de nuevo ingreso a ingeniería

El cerebro y el cuerpo aprenden de forma integral, los movimientos y las percepciones a través de los órganos sensoriales, la comunicación corporal, las experiencias directas y concretas "estimulan el desarrollo de los sistemas sensoriales, de los sistemas motores y de diferentes regiones en el cerebro" [5, p. 7]. De acuerdo con la autora, los ejercicios físicos "permiten mayor oxigenación del cerebro, mejorar habilidades cognitivas, estimulan capacidades mentales, sociales y emocionales" [5, p. 7]; y se han comprobado estos hechos también, con estudiantes de nivel superior en asignaturas consideradas como difíciles –Química- [6].

En [5] se menciona que los estímulos emocionales interactúan con las habilidades cognitivas, que "los estados de ánimo, los sentimientos y las emociones pueden afectar la capacidad de razonamiento, la toma de decisiones, la memoria, la actitud y la disposición para aprender" [5, p. 6]. Esto es, un alto nivel de estrés afecta negativamente el aprendizaje. Por lo cual, condiciones agradables en el aula y un maestro emocionalmente inteligente son factores esenciales para el aprendizaje.

Estas habilidades socio-emocionales incluyen el conocimiento de sí mismo, la autogestión emocional, la conciencia social, las habilidades para relacionarse y la toma de decisiones responsables, de acuerdo con la cita de Casel [6], las cuales, se reconoce, son factibles de desarrollarse.

Así ocurre con los estudiantes, pero también se ha reportado que en los profesores sus habilidades socio-emocionales permiten crear entornos educativos más positivos con los estudiantes y ellos mismos mejoran sus índices de bienestar y salud [7]. También se enfatiza que "los proyectos innovadores requieren del compromiso, la formación continua y la coordinación del profesorado, así como de la flexibilidad de las instituciones para acoger dichas innovaciones" [7, p. 181]. Lo anterior implica un ambiente propicio para el aprendizaje, en sus aspectos físico, emocional y social, lo cual ha sido comprobado de forma experimental en el nivel de la educación superior [8].

Así que, es importante brindar atención al aspecto emocional presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y reforzarlo, sobre todo, porque, en general, los titulares de los cursos de matemáticas y física en los programas de ingeniería tienen un perfil que minimiza o ignora la importancia del trato humano con el estudiante, cómo aprende. Muchas veces ni siquiera con la disposición para atender sus cuestionamientos y proporcionar ayuda porque están muy ocupados [9].

Por lo tanto, las problemáticas de reprobación y deserción que conllevan a la exclusión quedan entonces sin narrativa que incluya estos aspectos señalados por [10], [11] e [12]. Y en descargo de los profesores, podría decirse que tampoco sabrían cómo hacerlo, por lo cual se reducen a describir su falta de conocimientos y habilidades cognitivas.

A partir de los avances de las neurociencias, la neurodidáctica emerge para combinar la psicología, la pedagogía y la didáctica. Para planear una clase, un profesor entonces debe considerar los intereses, las necesidades y las emociones de sus estudiantes para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje [13]. La base de todo ello es la ruptura del modo tradicional de ejercer la docencia –con el profesor como centro de la acción- y colocar en el centro al estudiante en acción al ponderar el aprendizaje cooperativo, lo que se denomina aula invertida *–flipped classroom-*, la inclusión frecuente de las tecnologías, la flexibilidad y, ante todo, la apertura para hacer actividades diferentes.

El uso de organizadores gráficos como las infografías y cuadros comparativos, de la mayéutica –arte de enseñar con preguntas-, los recursos mnemotécnicos –visuales y orales-, la metáfora, la analogía, los mapas mentales, los mapas conceptuales, las aplicaciones tecnológicas [13] inclusive con los dispositivos móviles, son algunas opciones. Aunque algunas de esas técnicas pudieran parecer no ser apropiadas para los profesores de matemáticas, por ejemplo, se trata de recursos para diversificar el acercamiento del estudiante con el conocimiento y el desarrollo de competencias.

Además de lo anterior, como lo proponen Falconi y sus colegas [13], los profesores deben tener presentes las estrategias socioemocionales que les permitan canalizar las inquietudes y generar ambientes de aprendizaje propicio. Considerar la inclusión de técnicas de relajación, de sensibilización, de reflexión y de autoevaluación y retroalimentación, pareciera hoy en día una demanda más hacia los profesores.

Otras técnicas utilizadas ampliamente son el *Brain Gym®* o ejercicios de Gimnasia Cerebral®, y el *Mind Mapping* o elaboración de mapas mentales. Los primeros son marcas comerciales muy conocidas en muchos países y que se promueven como un método que incluye movimientos físicos para activar el cerebro, promover las conexiones neuronales y facilitar el aprendizaje con el cerebro completo aduciendo que este funciona de mejor manera cuando está activo en su totalidad y de forma coordinada [14]. La elaboración de mapas mentales es la técnica para visualizar las relaciones entre diferentes conceptos y se distingue por el uso del color y las formas libres y que promueven la lluvia de ideas [15].

El trabajo con los mapas mentales está asociado a la forma en que el cerebro organiza la información –irradiante- por lo que el mapa mental simula una red neuronal con una idea o imagen central y una "cascada de asociaciones de potencialidad infinita en forma nodal" [16, p. 165]. Además de facilitar el surgimiento de ideas y sus conexiones, también motivan el desahogo de la creatividad, del arte y las iniciativas científicas o tecnológicas incluso, y pueden convertirse en un medio para las relaciones cercanas y empáticas, dentro y fuera del aula. Un dibujo, y en particular un mapa mental, retrata los pensamientos de las personas, es un medio de comunicación de sus ideas [3].

Los recursos anteriores tienen sus detractores desde el punto de vista científico, pero también han sido utilizados por profesores y estudiantes cuyas experiencias y testimonios sobre los beneficios personales asociados los han considerado relevantes, para niños con capacidades distintas, pero también para estudiantes en lo general [17]; [18]; [19]; [20]; [21].

1.2 Los estudiantes que ingresan a ingeniería

La Secretaría de Educación Pública (SEP) en México se enfocó en años anteriores a buscar estrategias para minimizar indicadores como la exclusión en el nivel medio superior, antecedente de la licenciatura. Una de ellas era el programa Construye-T establecido para todas las escuelas públicas de ese nivel educativo. Este programa se mantuvo con el afán de desarrollar competencias individuales y sociales de los jóvenes, con un modelo de intervención que contemplaba "la realización de proyectos y actividades en dimensiones relacionadas con el conocimiento de sí mismo, vida saludable, cultura de paz y no violencia, proyecto de vida, participación juvenil, escuela y familia" [22, p. 11].

Lo anterior, asociado a la Reforma Integral de la Educación Media Superior, iniciada en 2008, buscando el desarrollo de un proyecto de vida y la prevención de situaciones de riesgo en los jóvenes, y como una estrategia de intervención en el ámbito psicosocial.

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), a partir de un estudio sobre el impacto que tuvo este programa Construye-T en la educación media superior, afirmó que los estudiantes con mayores habilidades socioemocionales obtienen mayores niveles de logro escolar y que las brechas asociadas a la condición socioeconómica se reducen –ver figura 1.

Por lo anterior, la SEP y el INEE trabajaron esa estrategia para fortalecer a los docentes con prácticas y ejercicios, aplicables a los estudiantes, sobre 18 habilidades socioemocionales: autopercepción, autoeficacia, reconocimiento de emociones, manejo de emociones, postergación de la gratificación, tolerancia a la frustración, motivación de logro, perseverancia, manejo del estrés, empatía, escucha activa, toma de perspectiva, asertividad, manejo de conflictos interpersonales, comportamiento pro social, generación de opciones, pensamiento crítico, y análisis de consecuencias [23].

Los grandes subsistemas de educación media superior, como los que incluyen el bachillerato tecnológico, ya lo tenían operando, lo cual implicaba que la mayoría de los estudiantes que se incorporaron al ITCM en el 2016 tenían ciertas bases para su manejo emocional.

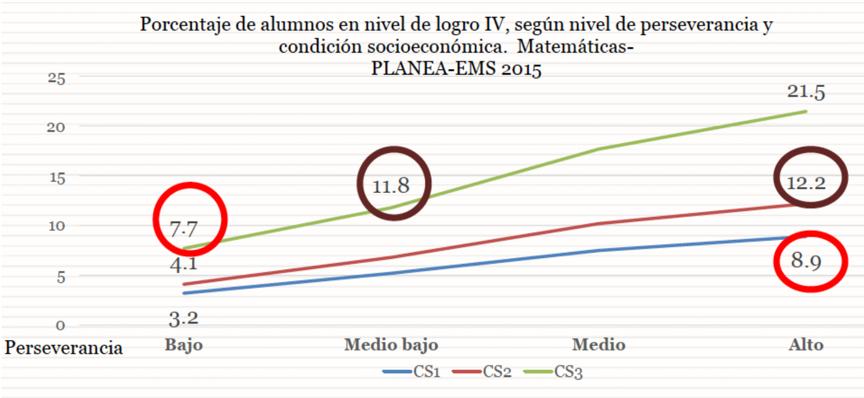


Figura 1. Relación entre el máximo nivel de logro en Matemáticas de un estudiante y su perseverancia y condición socioeconómica, en educación media superior. Fuente: [23].

1.3 El proceso de nuevo ingreso a ingeniería en el ITCM

El ITCM está enfocado en la formación de ingenieros, pero también cuenta con programas de posgrado de maestría y doctorado. Se trata de una institución pública federal con 65 años de antigüedad y con una matrícula de más de 7000 estudiantes, principalmente en 10 programas de ingeniería. Se encuentra ubicado en una zona urbana de alta concentración poblacional y desarrollada comercial e industrialmente, en un estado de la frontera norte del país, sin asentamientos indígenas y con una población flotante diversa originada por la industria petroquímica y la actividad portuaria, esencialmente.

Para iniciar estudios de ingeniería en el ITCM, es un requisito haber obtenido el certificado correspondiente al nivel educativo antecedente –educación secundaria alta vocacional o educación secundaria alta general- y presentar un examen de admisión estandarizado, lo cual permite incorporarse al proceso de admisión en la carrera su interés. Este examen, EXANI-II® del Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (CENEVAL) incluye exámenes de habilidades –Pensamiento Matemático (PM), Pensamiento Analítico (PA), Estructura de la Lengua (ELE), Comprensión Lectora (CLE)- y de conocimientos –Matemáticas (M), Física (F), Lenguaje Escrito (LE), Inglés (I). Pero también un cuestionario denominado de contexto, sobre antecedentes, intereses, actitudes y hábitos personales en los ámbitos académico y familiar [24].

En el ITCM se han realizado investigaciones sobre este proceso, con un fuerte componente que involucra el análisis de las respuestas de los aspirantes en este examen del CENEVAL. Además, se han estudiado las actitudes y hábitos, mostrados a través del cuestionario de contexto [25] y con otros instrumentos [26]; así como del desempeño de los estudiantes en el primer semestre de ingeniería [27], y de algunas características de los profesores asignados a los cursos de dicho periodo [28]. Así mismo, se han analizado los resultados en los cursos previos de entrada al instituto –propedéutico- y en los exámenes de diagnóstico en Cálculo Diferencial [29].

Por lo anterior, antes de iniciar el proceso de nuevo ingreso al instituto correspondiente al segundo semestre de 2016, se revisaron los datos históricos, se realizó una comparación con lo que estaban haciendo otras instituciones similares, y se decidió replantear la estrategia de nuevo ingreso. De lo cual se derivaron dos momentos de ingreso para la generación 2016, el primero en agosto de 2016, y el segundo en enero de 2017, a la cual se le aplicaría una intervención educativa.

1.4 Diagnóstico de los aspirantes a ingeniería 2016

En 2016, los 1581 aspirantes se distribuyeron como se muestra en la tabla 1, donde se indican los 10 programas de ingeniería: Ambiental (IA), Eléctrica (IE), Electrónica (IEo), Geociencias (IG), Gestión Empresarial (IGE), Industrial (II), Mecánica (IM), Petrolera (IP), Química (IQ) y Sistemas Computacionales (ISC).

Tabla 1. Distribución de frecuencias de los aspirantes por carrera en 2016.

Carrera	IA	IE	IEo	IG	IGE	II	IM	IP	IQ	ISC
Aspirantes	64	129	84	137	184	278	219	96	262	128
Porcentaje	4%	8.2%	5.3%	8.7%	11.6%	17.6%	13.9%	6.1%	16.6%	8.1%

En una de las investigaciones sobre los resultados de esta generación 2016, se identificaron diferencias significativas entre los resultados obtenidos en los exámenes de PM, PA, ELE y CLE, con respecto a la carrera elegida por los estudiantes –ver tabla 2. Esto es, los jóvenes aspirantes a ciertas carreras obtienen mejores calificaciones en los exámenes que otros.

Tabla 2. Tabla ANOVA para los resultados del examen de admisión por carrera para la generación 2016.

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Pensamiento Matemático	Entre grupos	27655.431	9	3072.826	8.585	.000
	Dentro de grupos	562336.787	1571	357.948		
	Total	589992.218	1580			
Pensamiento Analítico	Entre grupos	14971.261	9	1663.473	5.693	.000
	Dentro de grupos	459028.486	1571	292.189		
	Total	473999.747	1580			
Estructura de la Lengua	Entre grupos	16582.298	9	1842.478	6.160	.000
	Dentro de grupos	469922.284	1571	299.123		
	Total	486504.582	1580			
Comprensión Lectora	Entre grupos	20721.891	9	2302.432	5.532	.000
	Dentro de grupos	653830.539	1571	416.187		
	Total	674552.430	1580			

Fuente: Traducción libre de [25, p. 358]

La prueba de comparaciones múltiples de Scheffe sobre la diferencia de medias mostró que en PM los aspirantes a IQ no tuvieron diferencias significativas con quienes aspiraban a IEo e ISC, no así con los demás. Sobre los resultados de PA, la misma prueba mostró que los estudiantes de IQ, IEo, IG, II, IM e ISC no presentaban diferencias significativas. Mientras que, la prueba mostró que los resultados en ELE de los aspirantes a IQ, IA, IEo, IG, IGE e II tampoco presentaban diferencias significativas. Finalmente, en el caso de los resultados de CLE, los resultados de los aspirantes a IQ, IA, IEo, IG, IGE, II e ISC no mostraron diferencias significativas.

Así también, se encontraron diferencias significativas para las mujeres, en sus mejores promedios de calificaciones en ELE y CLE [25].

Las respuestas a las preguntas del cuestionario de contexto del examen de admisión del CENEVAL, vinculadas con las actitudes de los estudiantes, se pueden clasificar en dos rubros: las tres primeras - ver tabla 3– devienen de pensamientos positivos, de una mentalidad enfocada para esforzarse y conseguir lo que desea. Las cuatro aseveraciones siguientes están asociadas a responsabilizar a otras personas de los éxitos o fracasos, a suponer que situaciones fuera del control del estudiante mismo son las causantes de sus resultados y, por lo tanto, no ameritan que se realicen grandes esfuerzos para obtener el éxito.

En la tabla 3 se presenta un análisis del índice de correlación entre un bloque de actitudes positivas y negativas que reportaron los estudiantes, con respecto a los resultados de los exámenes de admisión. Se observa, en general, que las actitudes positivas están asociadas con mejores resultados en los exámenes, mientras que las actitudes negativas presentan una correlación negativa, excepto para la idea de que, con otro maestro, los estudiantes obtendrían mejores resultados.

Tabla 3. Resultados de las pruebas de hipótesis y correlación de las respuestas sobre actitudes de los estudiantes por área del examen de admisión, para la generación 2016.

Actitudes	Pensamiento Matemático	Pensamiento Analítico	Estructura de la Lengua	Comprensión Lectora
Si me esfuerzo lo suficiente tendré éxito en la escuela	(+)	No	(+)	(+)
Que me vaya bien o mal depende totalmente de mí	(+)	(+)	(+)	(+)
Si me lo propongo me irá mejor en la escuela	(+)	(+)	(+)	(+)
Con otros maestros me iría mejor en la escuela	No	No	No	No
Si mi familia me apoyara más me iría mejor	(-)	(-)	(-)	(-)
Mis calificaciones se deben a la suerte que tengo	(-)	(-)	(-)	(-)
Mis calificaciones en la escuela se deben a cosas que no puedo cambiar	(-)	(-)	(-)	(-)

Fuente: Traducción libre de [25, p. 365]

1.5 Metodología del estudio

El trabajo que se reporta en este documento inició con la pregunta de investigación: ¿mejora la trayectoria escolar de los estudiantes de nuevo ingreso al ITCM durante el primer año de carrera, después de aplicar una intervención educativa basada en los resultados de su examen del CENEVAL incluyendo las respuestas del cuestionario de contexto? Lo anterior, para que la intervención educativa no solamente incluyera la parte cognitiva deficitaria que pudieran tener los estudiantes en las áreas básicas para el ingreso e ingeniería, sino también a los hábitos de estudio, el manejo socioemocional en su nuevo nivel de estudios, y sus competencias intelectuales y físicas que les permitieran mejores capacidades de aprendizaje.

Para el diseño de la intervención educativa se consideraron los estudios anteriores sobre la propia generación 2016, el diagnóstico de su situación académica, relacionada con la carrera en la que ingresaron, y el género de los estudiantes. En este diagnóstico, basado en los resultados del examen del CENEVAL 2016, se identificaron principalmente las áreas de oportunidad de mejora en sus hábitos y actitudes, como una base fundamental en sus capacidades de aprendizaje.

Posterior a la intervención educativa, se decidió analizar la trayectoria escolar de los estudiantes después de su primer año de carrera, considerando que es el periodo crítico de la permanencia de los estudiantes, de acuerdo con estudios propios [27]. Para lo cual, las variables dependientes se definieron como: el porcentaje de créditos aprobados en el primer semestre, en el segundo semestre, y durante el primer año de carrera.

Los grupos que se estudiaron fueron muestras estratificadas de la generación 2016, que ingresó en ese año (241), y la que ingresó en enero 2017 después de la intervención (215), contrastada con la muestra de una generación que se había estudiado previamente (2013) y la cual había ingresado sin intervención alguna (365).

La comparación de estos resultados se realizó mediante pruebas de hipótesis no paramétricas y análisis de correlación, utilizando bases de datos generadas por el equipo de trabajo, y el programa de análisis estadístico *SPSS*. Las hipótesis se basaron en la esperanza de un mejor desempeño de los estudiantes de la generación 2017 que aquellos de la generación 2013.

Para todo lo anterior, a finales del 2018, se recuperó la información de la trayectoria escolar de las muestras representativas de: la generación de agosto 2016, y de la que ingresó en enero 2017. Los resultados de esta generación se compararon contra los de la generación 2013.

1.6 Intervención educativa en el nuevo ingreso a ingeniería

El principio que sostenía esta estrategia era que todos los estudiantes tienen opción de ingreso en tanto demostraran el mínimo de competencias en matemáticas, pero también en física o química del examen de CENEVAL, según la carrera que eligieran:

El momento de ingreso estaba condicionado al alcance de los resultados siguientes:

1. Si los estudiantes lograban un resultado Satisfactorio –en la escala de CENEVAL- en Matemáticas y Física y una calificación mayor o igual a 70% en Pensamiento Matemático en la aplicación del examen, su acceso era de forma inmediata a la carrera solicitada al plantel.
2. Si su resultado en el examen del CENEVAL se encontraba en el rango de No satisfactorio en Matemáticas y en Física, pero en Pensamiento Matemático obtenían un puntaje menor de 70% pero mayor o igual a 50% entonces los estudiantes tenían una opción de nivelarse con un taller propedéutico corto de tres semanas, donde se les prepararía para presentar un examen interno y alcanzar la mínima aprobatoria de 70%.
3. Si su resultado en Pensamiento Matemático era menor de 50%, los aspirantes a ingresar al plantel debían permanecer 13 semanas en un curso propedéutico con talleres de Matemáticas, de uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones, de Física o Química si la carrera lo ameritaba, y uno denominado Neurobalance enfocado a proporcionar técnicas para mejorar sus hábitos de estudio y su afectividad.
4. Si con todas las opciones anteriores los aspirantes no alcanzaban a cubrir ese mínimo indispensable en Pensamiento Matemático, ellos podían transitar del taller corto al largo y aún del taller largo a un curso virtual de un semestre hasta alcanzar la calificación mínima aprobatoria.

1.6.1 El taller de Neurobalance

El taller de Neurobalance se diseñó y lo dirigió una experta en el área con el objetivo de "orientar a los estudiantes en algunas técnicas para balancear el trabajo cerebral, para mejorar sus condiciones físicas para el aprendizaje y fortalecer sus técnicas para el estudio y las habilidades socioemocionales" [30, p. 29].

El taller se desarrolló durante 12 semanas, y lo atendieron 478 estudiantes -30% de la población aspirante en esa generación- a lo largo de cuatro módulos de seis horas cada uno, con dos horas por semana. Los módulos del taller incluyeron actividades que permitieran hacer conciencia a los estudiantes, sobre la importancia de utilizar todos sus sentidos corporales para mejorar su aprendizaje, y a mantener en equilibrio el desarrollo de su mente y de su cuerpo, había esfuerzo individual, pero también colaborativo.

Los grupos de estudiantes atendidos se conformaron por carrera solicitada, en virtud de las diferencias significativas encontradas entre unos y otros, a partir del diagnóstico realizado, ya mencionado. Sin embargo, a todos los estudiantes se les solicitó llevar una bitácora definida previamente para identificar el seguimiento que tenían de las actividades y técnicas recomendadas y practicadas. Ver la tabla 4.

Al término del taller de Neurobalance se aplicó un cuestionario de percepción para identificar rasgos de la experiencia del estudiante, aquellas actividades que hubieran tenido impacto en sus hábitos, que les hubieran dado respuestas a situaciones que vivían.

Tabla 4. Algunas actividades realizadas en el taller de Neurobalance.

Actividad	Sentidos	Recursos
Escuchar música para estudiar	Oído	Música barroca, Mozart
Escuchar música para relajarse	Oído	Música de arpa
Dibujar	Vista	Círculos (mandalas), colores
Ver película	Vista, oído	"Manos milagrosas" (biografía de Ben Carson)
Realizar ejercicio físico	Tacto	Tapete y pelota
Disfrutar aroma	Olfato	Velas aromáticas (lavanda, manzanilla, jazmín)
Realizar ejercicios	Tacto, vista	Guía de Gimnasia Cerebral®
Elaborar mapas mentales	Vista	Papel, colores
Elaborar figuras en papiroflexia	Tacto, vista	Papel
Realizar ejercicios de respiración	Olfato, tacto	Guía de respiración diafragmática
Tomar agua	Gusto	Agua natural

Fuente: [30, p. 32].

2 Desarrollo, resultados y discusión

En este apartado se muestran los hallazgos principales sobre la intervención del curso propedéutico con su Taller de Neurobalance. Así también, algunos hallazgos sobre la investigación de las trayectorias de los jóvenes que ingresaron en 2016; aquellos que lo hicieron en el primer semestre de 2017, después de la intervención; y su comparación con la generación 2013.

2.1 La experiencia del taller de Neurobalance

Al final del taller, se aplicaron tres cuestionarios de forma censal y mediante una plataforma virtual. El primero se refería al uso de las técnicas de Neurobalance, de lo cual, los estudiantes afirmaron que el 91% utilizaron la respiración diafragmática, 89% colorearon los círculos que les proporcionaron, 84% utilizaron pensamientos positivos y motivadores, y 80% recordó utilizar agua natural durante el día, 79% realizó sus ejercicios de Gimnasia Cerebral, y 70% incorporaron el color a sus apuntes de clase e hicieron ejercicios con tapete y pelota. Mientras que, las que presentaron menor frecuencia fueron el uso de los aromas con una frecuencia de 39% de los estudiantes, el 44% le dio seguimiento a su alimentación balanceada.

En un segundo cuestionario, se les solicitó a los estudiantes valorar su percepción sobre el resultado de colorear los círculos mediante tres opciones: sí, no y no lo sé. Las respuestas de los jóvenes se muestran en la tabla 5. En ella se puede observar que el mayor beneficio que percibieron los estudiantes sobre esta actividad fueron la relajación (88%), el mejoramiento en la concentración (87%), y la estimulación de la creatividad y la sensibilidad (85%). Las respuestas que obtuvieron la menor frecuencia están relacionadas con el equilibrio interno (62%), ayudó a su interiorización (64%), y sobre el control de sus impulsos (68%).

El tercer cuestionario tuvo un sentido integral pues se les preguntó si el taller les había ayudado en el aspecto mental para mejorar calificaciones y tener pensamientos más claros (84%); si en lo emocional para tener sentimientos positivos, más entusiasmo y mejor actitud (83%); si les había ayudado con el manejo del estrés (81%); y si se habían sentido más saludables y con más energía (56%).

Tabla 5. Respuestas sobre el cuestionario de percepción del beneficio de dibujar sobre los círculos.

Pregunta	Sí	No
¿Centró tu atención y evitó la dispersión?	82%	7%
¿Mejoró tu concentración?	87%	8%
¿Tus ideas se ordenaron?	71%	14%
¿Estimuló tu creatividad y sensibilidad?	85%	8%
¿Generó tranquilidad, confianza y seguridad en ti mismo?	78%	12%
¿Controlaste tus impulsos?	68%	20%
¿Disminuyó tu estrés?	74%	16%
¿Permitió ejercer tu libertad?	78%	7%
¿Ayudó a optimizar tus recursos mentales?	74%	8%
¿Estructuró mejor tus pensamientos?	82%	8%
¿Tuviste momentos de silencio?	84%	14%
¿Se recuperó tu equilibrio interno?	62%	12%
¿Ayudó a la interiorización, relación en ti mismo contigo mismo?	64%	12%
¿Te relajaste?	88%	9%
¿Mejoró tu expresión personal y tu apertura a la comunicación?	72%	12%

Fuente: [3, p. 807]

2.2 Trayectorias escolares de las generaciones 2013, 2016 y 2017

Se analizó el desempeño de los estudiantes de nuevo ingreso a ingeniería durante el primer año de estudios utilizando como variables el porcentaje de créditos aprobados en: el primer semestre, el segundo semestre y el primer año completo de carrera, incluyendo cursos en verano. Lo anterior para analizar las diferencias significativas de acuerdo con la generación de ingreso, la carrera elegida y el género del estudiante.

Las muestras estratificadas y analizadas por generación de ingreso se muestran en la tabla 6.

Tabla 6. Tamaño de las muestras analizadas para las generaciones 2013, 2016 y 2017*.

Generación	Sustentantes	Muestra analizada	Hombres	Mujeres
2013	2015	365	237	128
2016	1581	241	151	90
2017*	1581	215	144	71

*Esta generación es parte de los sustentantes del 2016.

Los índices de correlación entre variables se calcularon para la generación 2013 –que ingresó sin mayor restricción que la capacidad de recepción del ITCM-, la generación 2016 –que ingresó al cumplir los estándares mínimos establecidos-, y la generación 2017 –que ingresó después de haber cursado el propedéutico de 2016. Los resultados se muestran en la tabla 7.

Tabla 7. Coeficiente de correlación para variables definidas de las generaciones 2013, 2016 y 2017.

Variable	Rho de Spearman	Generación	Ingeniería	Género
Porcentaje de créditos aprobados en el semestre 1	Coeficiente de correlación	.238**	-.023	.136**
	Sig. (bilateral)	.000	.511	.000
	N	821	821	821
Porcentaje de créditos aprobados en el semestre 2	Coeficiente de correlación	.139**	-.087*	.191**
	Sig. (bilateral)	.000	.013	.000
	N	821	821	821
Porcentaje de créditos aprobados en el primer año	Coeficiente de correlación	.211**	-.052	.203**
	Sig. (bilateral)	.000	.133	.000
	N	821	821	821

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (bilateral).

En la tabla 7, resalta que el porcentaje de créditos aprobados está correlacionado definitivamente con la generación de que se trate, lo cual era de esperarse. Sin embargo, solamente el desempeño durante el segundo semestre está correlacionado con la carrera que eligió, porque durante el primer semestre los estudiantes de todas las carreras muestran un desempeño sin diferencias significativas. En tanto, el género de los estudiantes sí está correlacionado con sus créditos aprobados, las mujeres tienen más éxito en ello que los hombres.

El coeficiente de correlación entre el porcentaje de créditos aprobados durante el segundo semestre para las diferentes carreras de ingeniería resulta negativo. Lo anterior se explica en virtud de que se ordenaron las 10 carreras de acuerdo con el resultado en el examen de PM, esto es, se asignó una variable cuantitativa mayor al programa de IA que a IQ, por ejemplo, recordando que estos últimos tienen mejores resultados que los primeros. Entre estos dos extremos se colocó al resto de las carreras.

3 Conclusiones y trabajos futuros

El trabajo realizado con la generación 2016 de aspirantes a ingresar a los programas de ingeniería del ITCM, mediante la definición de una estrategia de admisión clara, una intervención de soporte para regularizar estudiantes que no cumplían el mínimo de calificación definido, y un seguimiento a la trayectoria escolar de los estudiantes ingresados, muestra una evaluación general de este proceso.

Con ella se observa el aspecto positivo de la regularización de los jóvenes a su ingreso en ingeniería, ya que, al menos durante el primer semestre, no se aprecia diferencia significativa entre los créditos aprobados en una carrera que en otra. Habrá que continuar analizando con investigaciones cualitativas los detalles de las áreas de oportunidad para otras intervenciones positivas en el trayecto escolar de estos aspirantes a ingeniería, incluyendo los hábitos de estudio, el desarrollo de habilidades intelectuales superiores, y la adquisición de técnicas para trabajar en equipo.

Por otro lado, es resaltable el mejor desempeño de las mujeres cuando ya se encuentran inscritas en el programa de ingeniería, por lo cual habría que comparar las estrategias y situaciones que vive uno y otro género durante su estancia escolar para identificar elementos que pudieran reforzarse, en el caso de los hombres.

Agradecimientos. Para el Programa para el Desarrollo Profesional Docente de la Secretaría de Educación Pública en México, por su apoyo al Cuerpo Académico ITCMAD-CA-15.

Referencias

1. Ramírez García, R.G.: ¿Qué representa para los estudiantes de hoy adentrarse en la educación superior? Guzmán Gómez, C.: *Los estudiantes y la universidad. Integración, experiencias e identidades*. ANUIES, pp. 27-61 (2013)
2. Biggs, J.: *Calidad del aprendizaje universitario*. Narcea (2005)
3. Soto Hernández, A.M.; Orta Kenning, R.M.: Neurobalance: Una experiencia con estudiantes de nuevo ingreso en ingeniería. *Memorias del III Encuentro de Educación Internacional y Comparada*, pp. 801-810 (2017)
4. DGEST: *Manual del tutor del SNIT*. Dirección General de Educación Superior Tecnológica (2013)
5. Campos, A. L.: Neuroeducación: uniendo las nuerociencias y la educación en la búsqueda del desarrollo humano. *La educación. Revista Digital*. http://www.educoea.org/portal/La_Educacion_Digital/laeducacion_143/articles/neuroeducacion.pdf (2010). Accedido el 3 de Marzo de 2017.
6. González, A.I.; Palomeque, L.A.: Integración de estrategias didácticas y neurocientíficas para mejorar la motivación y el aprendizaje en cursos de química básica. *Entre Ciencia e Ingeniería*, Vol. 11, No. 21, pp. 89-94 (2017)
7. Palomera, R.; Briones, E.; Gómez-Linares, A.: Diseño, desarrollo y resultados de un programa de educación socio-emocional para la formación de docentes a nivel de grado y postgrado. *Contextos educativos,* No. 20, pp. 165-182 (2017)
8. Valerio, G.; Jaramillo, J.; Caraza, R.; Rodríguez, R.: Principios de Neurociencia aplicados en la Educación Universitaria. *Formación Universitaria*, Vol. 9, No. 4, pp. 75-82 (2016)
9. Walton, S.D.: Exploring the relationship between resilience and learning styles as predictors of academic persistence in engineering. *Disertación para obtener el grado de Doctor en Filosofía de la Universidad de Texas A&M*. https://pdfs.semanticscholar.org/56a7/476b9d0dacdee80395a4134bcef38ccac02e.pdf (2010). Accedido el 24 de septiembre de 2019
10. Backhoff Escudero, E.: Habilidades socio-emocionales y educación. *Campus Milenio*. 6 de Abril de 2017.
11. Contreras, D.; Lafforte, M.: La dimensión subjetiva de los procesos de desescolarización. López, N.; Opertti, R.; Vargas Tamez, C.: *Adolescentes y jóvenes en realidades cambiantes*. UNESCO, pp. 41-62 (2017)
12. Ibarrola, B.: *Educar en las emociones es clave para favorecer el aprendizaje*. Ayala, A. (entrevistadora) Educación 3.0, 24 de mayo (2016)
13. Falconi Tapia, A.A.; Alajo Anchatuña, A.L.; Cueva, M.C.; Mendoza Poma, R.M.; Ramírez Jiménez, S.F.; Palma Corrales, E.N.: Las neurociencias. Una visión de su aplicación en la educación. *Revista Órbita Pedagógica*, Vol. 4, No. 1, pp. 61-74 (2017)
14. Hyatt, K.J.: Brain Gym®: Building stronger brains or wishful thinking? *Remedial and Special Education*, Vol. 28, No. 2, pp. 117-124 (2007)
15. Liu, Y.; Zhao, G.; Ma, G.; Bo, Y.: The Effect of Mind Mapping on Teaching and Learning: A Meta-Analysis. *Standard Journal of Education and Essay*, Vol. 2, No. 1, pp. 017-031 (2014)
16. Faúndez Pinto, J.: Estrategias no tradicionales en la educación diferencial y en procesos de mediación personalizada. *Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica*, Vol. 13, pp. 163-176 (2014)
17. Chamberlain, R.; McManus, I.C.; Brunswick, N.; Rankin, Q.; Riley, H.; Kanai, R.: Drawing on the right side of the Brain: A Voxelbased Morphometry analysis of observational Drawing. *Neuroimage*, pp. 1-33 (2014)
18. Ibarra, L.M.: *Mapeando con Luz Ma*. Garnik Ediciones (2002)
19. Mantilla, M.J.: Autoayuda cerebral y nuevas gramáticas del bienestar. Cuidar el cerebro para una vida saludable. *Athenea Digital*, Vol. 17, pp. 97-115 (2017)
20. Zamudio Franco, M.M.; Ríos de Garduño, M.R.; Méndez Reyes, J.: Calistenia docente: la gimnasia cerebral, una estrategia de mejora del aprendizaje. 9, Diciembre de 2012, *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, pp. 1-9 (2012)
21. Riley, H.; Rankin, Q.; Brunswick, N.; McManus, I.C.; Chamberlain, R.; Loo, P.: Inclusive Practice: Researching the Relationships between Dyslexia, Personality, and Art Students' Drawing Ability. *Include 09 Conference*, (2009)
22. CENEVAL: *EXANI-II ¿Qué es?* http://www.ceneval.edu.mx/exani-ii#tab-$i-9 Accedido el 25 de Marzo de 2017
23. Soto Hernández, A.M.; Orta Kenning, R.M.: *Equilibrio mente-cuerpo. Una experiencia con estudiantes de ingeniería*. Editorial Académica Española (2018)
24. Soto Hernández, A.M.; De Luna Rodríguez, M.E.; Ríos Barceló, J.L.; Saldaña García, S.: Mi primer año como estudiante de ingeniería. Soto Hernández, A.M.; De Luna Rodríguez, M.E.: *Reflexiones, propuestas, experiencias y afanes en la enseñanza de las ciencias*. Mariángel, pp. 131-144 (2014)
25. UNESCO: *Innovando en educación para prevenir la exclusión. "Construye T", una alternativa para la juventud mexicana*. UNESCO (2011)

26. SEP: *Planea EMS. Publicación de resultados.* http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2015/PLANEA_MS2015_publicacion_resultados_040815.pdf (2015). Accedido el 11 de Noviembre de 2016.
27. Soto Hernández, A.M.; Maldonado Soto, O.G.; Camero Berrones, R.G.: Attitudes and Learning. An Important Relationship for Engineering Students. *The 2018 WEI International Academic Conference Proceedings*, pp. 346-373 (2018)
28. Soto Hernández, A.M.; Camero Berrones, R.G.; Peralta Escobar, J.; Ríos Barceló, J.L.; Meraz Gámez, M.O.: Un contraste en aspirantes a ingenieros. Resultados de PLANEA Media Superior 2016 y de EXANI-II 2016. Soto Hernández, A.M.; y otros. *Formación de ingenieros. Análisis sobre la problemática del aprendizaje del estudiante*. Mariángel, pp. 29-47 (2017)
29. Soto Hernández, A.M.; Vargas Pérez, L.S.; Ríos Barceló, J.L.: Primer año como estudiante de ingeniería, una estrategia de intervención para mejorar la trayectoria escolar. *ACOFI, 2019*. *Retos en la formación de ingenieros en la era digital*. pp. 235-236 (2019)

Modelo explicativo de las relaciones entre factores socioeducativos y el rendimiento en Matemática

Antonio Humberto Closas, Edgardo Alberto Arriola, Mariela Rosana Amarilla, Ethel Carina Jovanovich

Secretaría de Ciencia y Tecnología, Facultad Regional Resistencia, Universidad Tecnológica Nacional
French 414, Resistencia (H3500CHJ), Chaco, Argentina
hclosas@hotmail.com, earriola2006@yahoo.com.ar, prof.mariela@live.com.ar, carijovanovich@yahoo.com.ar

Resumen. En este estudio nos hemos propuesto elaborar un modelo de ecuaciones estructurales que permita explicar de qué manera ciertos factores socioeducativos (ambientales e individuales) se relacionan con los resultados en una asignatura del área de Matemática. La muestra estuvo compuesta por 142 jóvenes, pertenecientes a la Facultad Regional Resistencia de la Universidad Tecnológica Nacional, con una media de 19.75 años (*DE* = 1.42). La investigación responde a un diseño explicativo, de estilo descriptivo mediante encuesta, de línea cuantitativa y de corte transversal. Los distintos criterios asumidos (*residuos e iteraciones*), así como los índices descriptivos y prácticos (*indicadores globales*), han permitido comprobar que el modelo propuesto se ajusta al empírico y sería de utilidad para explicar la variabilidad del *rendimiento académico* en la asignatura de interés. La representación final presentada se considera un recurso interesante a partir del cual sería posible plantear medidas de intervención que promuevan soluciones válidas al problema del fenómeno objeto de este estudio.

Palabras Clave: Rendimiento matemático, Factores ambientales e individuales, Estudiantes universitarios, Ecuaciones estructurales, Modelización estadística.

1 Introducción

1.1 Problemática y planteamiento

En la región nordeste de Argentina, como en otras zonas de este país y de América Latina, debido principalmente al escaso nivel de conocimientos con que los alumnos llegan a la Universidad, sumado a la fragilidad que poseen en la orientación vocacional, poco tiempo después de su ingreso, abandonan los estudios o deciden cambiar de carrera.

En este contexto, el presente trabajo está centrado en analizar, a través de métodos del área de Estadística Multivariada, de qué manera los resultados en una asignatura del área de Matemática –común en las carreras de Ingeniería (Sistemas de Información, Electromecánica y Química) que se desarrollan en la sede central de la Facultad Regional Resistencia (FRRe) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN)–, podrían ser atribuidos a determinados factores, así como a las vinculaciones que entre los mismos pudieran presentarse.

De modo que, el objetivo principal del presente estudio consiste en desarrollar mediante la técnica *ecuaciones estructurales* un modelo que explique de qué manera se relacionan ciertos factores ambientales (*sociofamiliares* y *académicos*) e individuales (*autoconcepto* y *estrategias de aprendizaje*) con el rendimiento académico de estudiantes universitarios, en el ámbito de la asignatura Análisis Matemático I (AMI).

Para ello se plantea un modelo a partir de bases teóricas del ámbito socioeducativo, que justifican las relaciones entre las variables involucradas en la investigación, que será contrastado empíricamente por medio de la técnica explicativa denominada *estructuras de covarianza* (la cual forma parte del análisis de ecuaciones estructurales).

Esta técnica se destaca por su carácter confirmatorio respecto del modelo que se postula, presentando la importante cualidad de tener la capacidad de generar constructos que estiman las variables latentes que

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

se reflejan en las variables medibles, para posteriormente calcular los parámetros especificados por las relaciones propuestas a nivel hipotético. Otro hecho para señalar es que, a las variables dependientes, sean éstas observadas o latentes, se las mide teniendo en cuenta su error residual.

1.2 Variables de tipo ambientales e individuales y su relación con el rendimiento académico

La literatura asociada con el rendimiento académico refleja la existencia de múltiples variables de tipo individuales que, de un modo u otro, participan y lo ocasionan. Sin embargo, existen otras variables de características ambientales que deberían tenerse en cuenta a efectos de integrar un conjunto de indicadores que permita esclarecer en forma ajustada las razones que determinan el desempeño académico. De acuerdo con Nortes [1], considerar únicamente variables individuales en el análisis del rendimiento, es sólo una verdad a medias, se debe tener en cuenta, además, aquellas que dependen del medio; es decir, de los factores ambientales y de integración social, tanto en su vertiente familiar como educativa.

En virtud de lo que antecede, se estima conveniente incluir en este estudio dos grupos de determinantes de los resultados educativos: a) vinculados con aspectos *sociofamiliares* y con el proceso de *enseñanza-aprendizaje*, y b) relacionados con cuestiones cognitivas y motivacionales del *propio sujeto*.

En la elección de las variables que componen este estudio, además del criterio correlacional (característico en *modelos de ecuaciones estructurales*), se ha tenido presente el concepto de diagnóstico-intervención, con el fin de detectar las causas del bajo rendimiento y sugerir la adopción de algunas medidas de intervención.

En la fase empírica de la investigación, las variables observables de los factores explicativos serán: a) ciertos aspectos *microsociológicos* (clima educativo y estructura familiar) y *macrosociológicos* (clase social y características del lugar de residencia); b) algunas cuestiones contextuales cognitivo-motivacionales como el *proceso de enseñanza* y el *clima de clase*; c) el *autoconcepto académico* y *en Matemática*; d) las *estrategias de codificación* y *de aprendizaje de Matemática*. En tanto que, los indicadores o variables observables del factor que se desea explicar (*rendimiento matemático*) serán las tres instancias de evaluaciones parciales escritas teórico-prácticas (calificaciones obtenidas por los estudiantes), correspondientes a la asignatura AMI.

Por cierto, habría otros factores, contextuales (p. ej., sociales y académicos) y personales (p. ej., aptitudinales y afectivos), en la explicación del desempeño de los estudiantes universitarios; no obstante, estos predictores no serán abordados en esta oportunidad. La localización y el estudio de los factores que intervienen en el rendimiento académico es un problema complejo debido tanto a la cantidad de variables que participan, como a las interacciones que entre ellas pueden presentarse. En esta ocasión se ha optado por formalizar una investigación en la que participan menos variables de las que en verdad existen, puesto que se pretende plantear un modelo explicativo más concreto que anhelamos pueda contribuir a esclarecer, aunque parcialmente, el panorama objeto de interés.

En este estudio, el abordaje de los aspectos sociofamiliares (*micro* y *macrosociológicos*), que se caracterizan por influir de una manera u otra en el rendimiento académico, estará centrado básicamente en dos cuestiones concretas: a) la implicación de los padres en la formación de sus hijos y la conformación de la familia; y b) el estatus socioeconómico, el contexto sociocultural y los rasgos de la zona donde vive el sujeto.

En lo que respecta a la perspectiva microsociológica, de acuerdo con distintos autores [2] [3], son dos los factores cuya influencia en el rendimiento se cree necesario estudiar: i) *Clima educativo familiar*, conformado tanto por la actitud de los padres hacia los estudios y el grado de información que poseen sobre el sistema educativo, como por el clima afectivo familiar en que se desenvuelve el sujeto y las expectativas que se han depositado en él; y ii) *Estructura o configuración familiar*, relativa al número de miembros que componen la familia y el lugar que ocupa el individuo en la fratría.

Desde el enfoque macrosocial, son tres los factores que, según la literatura consultada [4] [5], repercuten en la educación y, más específicamente, en el rendimiento de los estudiantes: i) *Clase social de procedencia*, compuesta por la profesión y el estatus social de los padres, así como por sus ingresos económicos; ii) *Ambiente y medios socioculturales* con que cuenta el sujeto; y iii) *Características de la población* de residencia del discente.

En definitiva, la relación entre los resultados de la educación familiar –la primera en educar al sujeto y que, en la mayoría de los casos, no abandona nunca esa función– y los resultados académicos, puede considerarse un hecho innegable. Como señala Husén [6], la clase social de la familia tiene un efecto acumulativo a lo largo del desarrollo de una persona y es uno de los factores más importante para tener éxito en la vida; o como consideran Juif y Legrand [7], el éxito intelectual de un sujeto está determinado por la atmósfera en la que está envuelto en su infancia, la cual depende del ambiente socioeconómico y del origen geográfico del sujeto.

Luego de hacer referencia a los aspectos sociofamiliares, corresponde abordar cuestiones vinculadas con el factor ambiental o contextual académico (cognitivo-motivacional) conformado por los indicadores: a) *satisfacción con el proceso de enseñanza*, y b) *elementos del clima de clase*.

La dimensión cognitiva del factor contextual en la que se está interesado se encuentra centrada en la opinión que los estudiantes tienen acerca del *nivel de satisfacción con el proceso de enseñanza que ha desarrollado su profesor*.

En efecto, de acuerdo con algunas investigaciones puntuales, el empleo de ciertas metodologías de enseñanza, como los sistemas activos, experimentales o asistidos por computadora, proporcionan mejores resultados académicos que la utilización de metodologías tradicionales. No obstante, resulta imposible sostener que un método en particular será exitoso en todos los casos o señalar que un determinado método es el mejor, dado que su valor depende de la relación causal con el aprendizaje del alumno en uno o más objetivos de educación [8]. Por tanto, la tarea primordial del profesor deberá consistir en facilitar y promover el aprendizaje, lo que dependerá en gran medida de su destreza didáctica.

Por otro lado, si la personalidad del profesor es más relevante para la enseñanza, que la competencia científica o que el método pedagógico que emplea [9], es lógico que el docente preferido por los alumnos sea aquel que sabe motivar, que se muestra afectivo y que, en definitiva, se preocupa porque el alumno aprenda [10]. De ahí que el enfoque metodológico adoptado por cada profesor repercuta en el aprendizaje y aprovechamiento de los alumnos, sobre todo porque determina los aspectos motivacionales del aula y desarrolla un estilo muy concreto de aprender, así como un autoconcepto académico determinado que incide en el rendimiento. Evidentemente, el rendimiento de los alumnos depende también de este elemento procedente de un fenómeno psicopedagógico [11].

Según lo anticipado, para completar el tema de las variables explicativas ambientales del modelo teórico que será propuesto, sólo restaría ocuparse del tópico motivacional que integra el factor contextual académico, al que se ha denominado *clima de clase* o *clima de aprendizaje*, que podría definirse como tono o atmósfera general de la sala de clase, percibido por los estudiantes; en ocasiones, incluye también la percepción de los profesores y, excepcionalmente, de otros miembros de la comunidad educativa.

En los múltiples trabajos sobre eficacia académica, el estudio de la relación entre clima y rendimiento está siempre de manifiesto; puesto que, como señalan Molina y García [12], el vínculo profesor-alumno, la organización de la clase y la creación de un clima de aula favorable influyen en los resultados académicos.

También otros autores [13] [14], han incluido en sus estudios diferentes variables relacionadas con el ambiente escolar, como el clima de aula, y confirman su influencia en el rendimiento académico. No obstante, se conocen algunos trabajos [15] [16], que no arrojan resultados tan positivos como cabría esperar, probablemente debido a que no se consideran para evaluar el producto educativo aquellos indicadores relacionados con factores afectivos, entre otros, que también tendrían una alta relación con el clima académico.

Quizás por ello resulte apropiado proponer modelos teóricos e intentar buscar evidencia empírica que confirme esta relación y la incidencia real del clima educativo en el rendimiento académico, junto con otras variables individuales (p. ej., cognitivas y motivacionales), conformando de este modo un conjunto en el que estas últimas desempeñen un rol mediador entre el clima y el rendimiento.

En efecto, de acuerdo con Deci y Ryan [17], la percepción del ambiente académico se encuentra relacionada significativamente con variables como la motivación intrínseca; también con sentimientos de autorrespeto y competencia percibida, siguiendo a Harter [18]. Para Ryan y Grolnick [19], la percepción de las características del ambiente académico constituye un poderoso agente en el nivel de autoestima de los propios sujetos. Ciertamente, el ambiente académico que favorece las experiencias de autonomía del individuo incide favorablemente en su adaptación y ajuste, así como sobre su autoconcepto.

Los dos indicadores que conforman el factor contextual académico, *satisfacción con el proceso de enseñanza* y *elementos del clima de clase*, se encuentran sin duda vinculados, ya que la percepción del clima educativo por parte de los alumnos está en función de las condiciones presentes de la clase, las que a su vez están determinadas por el estilo y orientación psicopedagógicas del profesor [20].

Llegados a este punto, corresponde comenzar a desarrollar distintas consideraciones relacionadas con los indicadores de los factores vinculados al *propio sujeto*; esto es, las variables personales *autoconcepto académico* (motivacional) y *estrategias de aprendizaje* (cognitiva).

Existen diversas definiciones sobre el constructo *autoconcepto de los estudiantes*; así por ejemplo podría decirse que es aquella variable motivacional en la que la implicación activa del sujeto en su proceso de aprendizaje se incrementa cuando se percibe autoeficiente. En tanto que para Marsh [21], el autoconcepto académico significa la concepción que tiene el estudiante de su capacidad para aprender y rendir en las tareas escolares.

Respecto de la relación causal entre el autoconcepto y el rendimiento académico, los resultados de investigaciones realizadas no aportan evidencia definitiva sobre la naturaleza exacta de la dirección del vínculo que une a estas dos variables [22]. No obstante, es una variable personal que, de una u otra forma, siempre se la relaciona con los resultados educativos; de hecho, es valorada como una condición necesaria –aunque no suficiente– para un adecuado desempeño académico.

Para Aranda [23], el autoconcepto constituye uno de los desafíos permanentes que enfrentan profesores, directivos y la comunidad educativa en general, con el objeto de mejorar el desempeño de los estudiantes.

Por su parte, Hattie (citado por Rodríguez-Rodríguez, D. y Guzmán, R. [24]), en un interesante trabajo debido a los resultados obtenidos, afirma que es probable que el autoconcepto incida más directamente sobre el aprendizaje que en el rendimiento, y que en este último lo haría por medio de la influencia en otras variables, como las estrategias de aprendizaje, la autorregulación o el establecimiento de metas adecuadas.

Si bien la falta de éxito en el logro de los objetivos por parte de los alumnos tiene su origen en diversas causas, intrínsecas y extrínsecas, en este estudio se ha optado por trabajar también con las *estrategias de aprendizaje*. Estas variables por una parte implican una secuencia de actividades u operaciones mentales dirigidas a facilitar el aprendizaje y, por otra, incluyen procesos de toma de decisión por parte de los estudiantes de carácter consciente e intencional, ajustados al objetivo que pretende conseguir.

En un estudio realizado por Rossi, Neer, Lopetegui y Doná [25], con estudiantes universitarios argentinos de ambos sexos, observaron que las estrategias utilizadas con mayor frecuencia por los alumnos corresponden a las dimensiones de *apoyo al aprendizaje* y *hábitos de estudio*; y que en general los varones utilizan menor cantidad de estrategias de aprendizaje que las mujeres, esa diferencia fue más notable en algunas de tipo *cognitivas* y de *control del aprendizaje*.

Respecto de la relación entre las estrategias de aprendizaje y el desempeño educativo en distintos niveles y modalidades de enseñanza, numerosas investigaciones han encontrado que el logro académico de los alumnos se incrementa en la medida en que estos utilizan mayor cantidad de estrategias [26] [27]. A su vez, en el trabajo publicado por Miñano y Castejón [28], se sostiene que uno de los conceptos más utilizados en la actualidad, como determinante personal de tipo cognitivo de los resultados educativos, es precisamente el de las estrategias de aprendizaje.

Aunque no es conveniente comparar, mucho menos extrapolar, resultados producidos en otros contextos académicos; se señala, sólo a título informativo, que en el estudio elaborado por Gargallo, Suárez y Ferreras [29] encontraron pruebas de la incidencia que las estrategias de aprendizaje tienen en los resultados educativos de estudiantes que asisten a dos universidades públicas de la ciudad de Valencia, España. A partir del poder predictivo que las dimensiones analizadas poseen respecto del rendimiento, el orden de relevancia es el siguiente: a) *estrategias de procesamiento y uso de la información*, b) *estrategias metacognitivas*, y c) *estrategias motivacionales*.

En atención a lo que antecede, así como en virtud de la literatura consultada sobre el tema, se puede señalar: a) el papel destacado de las estrategias en la explicación del rendimiento académico ha sido evidenciado en muchos estudios, sobre todo el efecto que tiene la capacidad de los sujetos para planificar, evaluar y regular su propio proceso de aprendizaje; y b) la relación de las estrategias con respecto al rendimiento académico no es exclusivamente directa, la capacidad predictiva de esta variable está mediatizada por otras, especialmente de corte motivacional, que ejercen influencia sobre el rendimiento, formando en realidad un entramado de relaciones directas, indirectas y recíprocas.

De las diversas estrategias que los estudiantes pueden utilizar, en este estudio se ha optado por trabajar con la dimensión *codificación* puesto que, siguiendo a Closas, Hisgen y Sanz de Acedo [30], es una variable que se ha demostrado influye, de una forma u otra, en el rendimiento de los jóvenes universitarios. En general, se entiende por *codificar* a la acción de *traducir* a un código o de un código; el proceso de codificación se sitúa en la base de los niveles de procesamiento –relativamente profundos– y, de acuerdo con éstos se aproxima más o menos a la comprensión y al significado del concepto.

Cabe señalar que las variables *autoconcepto en Matemática* y *estrategias de aprendizaje de Matemática*, fueron incluidas en el estudio por entender que era necesario tener en cuenta algunos aspectos más cercanos a nuestra realidad sociocultural y educativa, que aún no habían sido considerados y que se debía hacerlo a efectos de integrar un conjunto que permita esclarecer en forma ajustada las razones que determinan los resultados educativos en el área objeto de interés. Entre las cuestiones específicas de Matemática relativas a la variable motivacional que fueron abordadas pueden mencionarse: a) el desempeño como estudiante, b) la capacidad intelectual percibida, y c) el rendimiento académico anterior. En cuanto a la variable cognitiva, los conceptos trabajados tenían que ver con: a) la comprensión y planificación de la tarea, b) el análisis de las características de la tarea, c) la persistencia ante las tareas académicas, y d) el estudio en función de cómo será la evaluación.

La variable dependiente o explicada del modelo será, por cierto, el *rendimiento académico*. Para su evaluación se han seleccionado las calificaciones, puesto que son el criterio social y legal del rendimiento en el ámbito de los centros educativos, además de ser uno de los indicadores más utilizado en las investigaciones sobre esta temática.

Como se comprenderá, los párrafos precedentes tuvieron la intención de justificar la inclusión de las variables, explicativas y explicada, que formarán parte del modelo hipotetizado que será propuesto y contrastado por medio del método ecuaciones estructurales, aunque en rigor de verdad, de acuerdo con la literatura consultada, los argumentos de dicha acreditación son más de tipo teóricos que empíricos.

La decisión de incluir o excluir determinadas variables es un hecho que invariablemente se presenta condicionado por diversas circunstancias tales como la característica multidimensional del constructo, el criterio subjetivo de los investigadores y la viabilidad del proyecto en términos de las normas establecidas para la presentación de trabajos en el evento.

Sin embargo, en la presente investigación de línea cuantitativa, el diseño metodológico asumido y la posibilidad de contar con información directa del espacio académico de selección de la muestra, le proporcionan a este desarrollo características innovadoras y genuinas. Además, la posibilidad de sugerir tareas de intervención socioeducativas en el ámbito local universitario hace que este estudio resulte una herramienta de utilidad que sirve de apoyo a la práctica educativa propia, como también a la de otros escenarios pedagógicos de nivel superior; por cierto, con las adecuaciones que el escenario sociocultural de aplicación pudiera demandar.

2 Materiales y Métodos

2.1 Participantes

En el procedimiento utilizado para extraer la muestra hemos combinado los métodos estratificado, por conglomerados y aleatorio simple. En concreto, la muestra elegida estuvo conformada por 142 jóvenes (45 mujeres, 31.69% y 97 hombres, 68.31%), pertenecientes a las tres carreras de Ingeniería (Sistemas de Información, Electromecánica y Química) que se imparten en la FRRe de la UTN. La edad media de los estudiantes que respondieron los ítems de la encuesta fue de 19.75 años (*DE* = 1.42). Algunas de las características de la muestra utilizada en esta investigación, se ilustran en la Tabla 1.

Tabla 1. Detalles relativos a la muestra empleada en la etapa empírica del estudio.

Turno	Carrera	Alumnos	Edad
Tarde y Noche	Ingeniería en Sistemas de Información (ISI)	*n* = 40 (28.17%) (10 m, 25.00% – 30 h, 75.00%)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 24 *M* = 20.08 *DE* = 1.31
Tarde y Noche	Ingeniería Electromecánica (IEM)	*n* = 54 (38.03%) (06 m, 11.11% – 48 h, 88.89%)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 24 *M* = 19.93 *DE* = 1.49
Mañana	Ingeniería Química (IQ)	*n* = 48 (33.80%) (29 m, 60.42% – 19 h, 39.58%)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 23 *M* = 19.27 *DE* = 1.33
Muestra: *N* = 142 (45 m, 31.69% – 97 h, 68.31%) Edad: *Mín.* = 18, *Máx.* = 24, *M* = 19.75, *DE* = 1.42			

2.2 Diseño

Esta investigación, inicialmente de naturaleza *no experimental*, puede considerarse en una segunda etapa también *explicativa*, en razón del objetivo que se pretende lograr. Si consideramos como criterio el tipo de información que se proporcionará y el modo de recogerla, el diseño es de estilo *descriptivo mediante encuesta*.

Por otra parte, en atención a la forma de administrar el instrumento de medición, en este estudio empleamos la *técnica del cuestionario*. A su vez, si tenemos en cuenta el marco donde se lleva a cabo, estaríamos hablando de una *investigación de campo*. Además, debido a cómo se miden y analizan los datos, es una investigación de línea *cuantitativa*. Teniendo en cuenta la instancia de recolección de la información, este trabajo revela una estrategia de corte *transversal*. En virtud del interés por analizar las asociaciones entre las distintas variables que participan, el presente estudio es de perfil *correlacional* y *mediacional*; lo que le otorga una impronta *prospectiva*, puesto que la evaluación de las relaciones dará lugar a proyectar recomendaciones que resulten viables y sustentables en el tiempo.

En líneas generales, desde el ámbito de la confrontación teórica-empírica, podríamos señalar que la investigación responde a un proceso de carácter hipotético-deductivo, puesto que pretendemos comprobar si la conceptualización teórica de la cual partimos se ajusta a la realidad objeto de estudio, a través de la recolección de datos y su posterior análisis estadístico.

2.3 Procedimiento

Una vez seleccionada la muestra, la recolección de los datos se llevó a cabo, en cada uno de los 5 (cinco) grupos-clase (ISI "C" y "D", IEM "A" y "B", IQ "U"), en una única instancia. En primer lugar, se les informó a los alumnos participantes que la aplicación del instrumento en cuestión respondía a un trabajo de investigación mediante el cual se pretende explicar de qué manera se relacionan distintos factores educativos con el rendimiento matemático. También se les indicó sobre la importancia de responder con sinceridad a los distintos ítems que se plantean, que sus respuestas tendrán un carácter estrictamente confidencial y serán utilizadas sólo con finalidad científica, y que la participación en el estudio era una decisión totalmente voluntaria.

El momento temporal de este proceso fue el mes de octubre de 2019, en el marco de la asignatura AMI, cuyo régimen de cursado es anual. La aplicación de los cuestionarios la efectuaron los propios profesores, al comienzo de clase y con el margen de tiempo adecuado (30 minutos en promedio), en virtud de las consultas formuladas en las pruebas.

2.4 Instrumentos

A efectos de recoger los datos relativos al tema bajo estudio se utilizaron diferentes instrumentos (cuestionarios, escalas y test).

Así pues, para medir ambas variables del factor ambiental sociofamiliar se empleó un cuestionario conformado por dos grupos de ítems los cuales responden, por cierto, a variables de enfoques micro y macrosociológicos, acerca de los cuales ya se hizo referencia en el comienzo de este manuscrito. El primer grupo estuvo integrado por seis (6) ítems (aspectos microsociológicos), un ejemplo de ellos sería: El interés de mis padres por la marcha de mis estudios. El segundo grupo lo conformaron tres (3) ítems (aspectos macrosociológicos), entre los que por ejemplo se encontraba: La profesión y el nivel socioeconómico de mis padres. En las dos variables las respuestas a las cuestiones planteadas –pretendían relevar datos acerca de la creencia que los estudiantes tienen sobre el grado de influencia que aspectos familiares y sociales presentan en su rendimiento matemático–, fueron categorizadas mediante una escala de tipo Likert en la que las opciones estaban valoradas entre 1 (nada) y 5 (mucho) puntos.

Con el propósito de evaluar las dos variables que integran el factor contextual cognitivo-motivacional: a) satisfacción con el proceso de enseñanza, y b) elementos del clima de clase, aplicamos para la primera de las mencionadas la dimensión enseñanza (conformada por cuatro (4) ítems) de la Escala 8: Evaluación del producto de la enseñanza y del aprendizaje, correspondiente al instrumento Evaluación Interactiva del Proceso de Enseñanza-Aprendizaje (EIPEA), elaborado por De la Fuente y Martínez [31]. Un ejemplo de los ítems que componen esta escala sería: El profesor está motivado para enseñar esta asignatura.

En cambio, para medir el clima de clase se utilizó un grupo de tres (3) ítems, elaborados a partir de experiencias propias de los autores, los cuales aluden al estilo de enseñanza, a las expectativas del profesor, y a las relaciones interpersonales. Un ejemplo de las afirmaciones que integran este grupo de ítems sería: La cordialidad en las relaciones con mis compañeros y con el profesor son importantes pues generan un ambiente de estudio favorable. En la evaluación de las respuestas de ambas variables se utilizó una escala de tipo Likert, en la que las opciones fueron valoradas de 1 (nada) a 5 (mucho) puntos.

A efectos de evaluar la percepción que el sujeto tiene de la calidad del desempeño de su rol como estudiante, se utilizó la dimensión académica (conformada por seis (6) ítems) del test Autoconcepto Forma 5, elaborado por García y Musitu [32]. Un ejemplo de las afirmaciones que integran esta área sería: Soy un buen estudiante. Para responder a cada una de ellas los alumnos disponían de una escala con alternativas que estaban valoradas entre 1 y 99 puntos. La aplicación del test podía realizarse en forma individual o colectiva, en nuestro caso se implementó en forma colectiva.

La medición de la variable personal cognitiva se llevó a cabo por medio de un cuestionario, el cual corresponde a una adaptación para estudiantes universitarios (conformada por diez (10) afirmaciones) de la Escala II: Estrategias de Codificación de la Información, la que ha sido seleccionada del instrumento Escalas de Estrategias de Aprendizaje – ACRA de Román y Gallego [33]. Un ejemplo de los ítems que componen esta subescala sería: Hago resúmenes de lo estudiado al final de cada tema. Para la evaluación de las respuestas se ha utilizado una escala de tipo Likert, en la que las opciones fueron valoradas de 1 (nunca o casi nunca) a 4 (siempre o casi siempre) puntos.

Con el fin de medir las variables autoconcepto en Matemática y estrategias de aprendizaje de Matemática, se diseñaron sendos cuestionarios ad hoc, los cuales contienen en cada caso los aspectos intrínsecos al alumno señalados brevemente en la introducción de este trabajo. De manera que, la primera variable estuvo conformada por tres (3) ítems, mientras que la segunda variable la integraban cuatro (4) ítems. Un ejemplo de los enunciados que formaban parte del grupo de tres ítems sería: Creo que tengo una buena capacidad (aptitudes, inteligencia, etc.) para el estudio y la resolución de tareas de Matemática; mientras que para el grupo de cuatro ítems fue: Antes de ponerme a trabajar sobre una tarea de Matemática analizo sus características y demandas. Para la evaluación de las respuestas de ambas variables se utilizó una escala de tipo Likert, en la que las opciones fueron valoradas de 1 (completamente en desacuerdo) a 5 (completamente de acuerdo) puntos.

Con la finalidad de analizar, mediante ecuaciones estructurales, las asociaciones directas e indirectas entre los factores psicoeducativos considerados y el rendimiento en Matemática hemos utilizado como indicadores de la variable explicada las notas alcanzadas por los alumnos encuestados en tres instancias de evaluaciones parciales escritas teórico-prácticas (regulares y recuperatorios), concernientes al régimen de promoción y modalidad de cursado de la asignatura AMI, las que fueron obtenidas a partir del Sistema Académico SYSACAD (fuente de información secundaria). Se han seleccionado las calificaciones puesto que son el criterio social y legal del rendimiento en el ámbito de los centros educativos. Por otra parte, es el indicador más utilizado en las investigaciones sobre el tema a pesar de la dispersión o falta de consenso de las diferentes instituciones e incluso entre los profesores de una misma institución. La variable dependiente del modelo es de tipo continua, sus valores enteros varían entre 1 (uno) y 10 (diez) puntos.

La evaluación cualitativa de los instrumentos que se emplearon para recoger los datos de las variables explicativas (fuentes de información primaria), fue realizada por profesores del Área de Matemática del Departamento de Materias Básicas (FRRe−UTN), en cuanto a los aspectos: a) pertinencia del contenido de los ítems propuestos (indicadores subjetivos de validez), y b) conformación del cuestionario en su conjunto (indicadores de la validez factorial o estructural). Las apreciaciones formuladas por los docentes-investigadores que colaboraron tuvieron una amplia coincidencia en relación con ambos aspectos (a. juicio de expertos, y b. grado de acuerdo global). Los análisis efectuados en la línea de validez cualitativa resultaron verdaderamente valiosos, puesto que permitieron: a) reconocer que las pruebas eran capaces de medir lo que realmente se pretendía evaluar, y b) minimizar los márgenes de error de los cuestionarios al momento de su utilización.

En segundo término, con la base de datos en formato electrónico, se realizaron distintos análisis estadísticos. Los estudios implementados pertenecientes al dominio de la estadística descriptiva (algunos estadísticos centrales y de dispersión de las variables observadas que participan en la investigación), de la estadística inferencial (análisis de correlación entre los indicadores de las variables latentes explicativas, así como entre éstos y las calificaciones correspondientes a las tres instancias evaluatorias parciales), como también al área de la psicometría (correlación dimensión-total corregida y consistencia interna). El procesamiento de los datos fue realizado, en esta ocasión, con ayuda del programa IBM SPSS Statistics 22.

Los diferentes análisis cuantitativos señalados en el párrafo anterior permitieron, por un lado, conocer distintas características de los indicadores y el grado de confiabilidad de los instrumentos y, por otro, observar las asociaciones lineales que presenta el conjunto de variables observadas que participan en el estudio, en atención al tratamiento estadístico principal de esta investigación.

2.5 Análisis de datos

A efectos de examinar si las relaciones que conforman el modelo que se propone se ajustan a los datos de la muestra, se utilizó el *análisis de ecuaciones estructurales* del programa EQS 6.3 [34] [35]. En el procedimiento de estimación se trabajó con el método de máxima verosimilitud (*ML, Maximum Likelihood*), dado que se consideró razonable asumir la existencia de normalidad en la distribución de las variables observadas, pues la estimación normalizada del coeficiente de Mardia –indicador de la curtosis multivariante– alcanzó el valor .44, inferior al criterio de máxima (*normalized estimate* = 5) recomendado [34].

La evaluación del modelo se realizó a través de: a) estudio analítico, a efectos de determinar y contrastar las relaciones entre las variables postuladas en las hipótesis; y b) análisis de su grado de ajuste global, con el fin de comprobar en qué medida el modelo teórico reproduce correctamente las relaciones existentes en la matriz de correlaciones de datos empíricos.

Posteriormente a la valoración inicial del modelo teórico mediante el método de *ML*, se han estimado los errores típicos y se procedió a la determinación del índice de ajuste utilizando el test de χ^2 [36].

3 Resultados y Discusión

3.1 Estimación y evaluación del modelo

El estudio analítico de las relaciones entre las variables postuladas en el modelo reveló que tanto las cargas factoriales como los parámetros estructurales estimados son coeficientes estadísticamente significativos. En efecto, los 11 pesos factoriales, en el marco del modelo de medida (conjunto de relaciones entre las variables observadas y la variable latente respectiva), resultaron estadísticamente significativos para $p < .01$. Por lo tanto, pueden aceptarse las saturaciones obtenidas como indicios de validez de constructo de las diferentes variables latentes consideradas.

Asimismo, en el contexto del modelo estructural (conjunto de relaciones entre las variables latentes), los 6 coeficientes de regresión entre factores independiente, mediadores y explicado que fueron estimados, resultaron estadísticamente significativos; algunos para $p < .05$ y otros para $p < .01$.

Los diferentes valores originados como producto de las estimaciones realizadas en el marco del estudio analítico pueden verse en la Figura 1, elaborada mediante la notación de Bentler y Weeks [37]. Cabe señalar que también se observan en el modelo gráfico los coeficientes de regresión relativos a los errores tanto de las variables observadas (E), como de las variables latentes (D).

A efectos de juzgar el ajuste global del modelo, se ha tenido en cuenta, en primer lugar, la matriz residual de covarianzas (diferencia entre la matriz de covarianzas muestral y la matriz de covarianzas poblacional estimada), la cual en caso de que los valores de cada uno de sus elementos sean pequeños; esto es, cercana a una matriz nula, indicaría que el modelo ha sido capaz de ajustarse a los datos. Ahora bien, al examinar los residuos, es común observar el error promedio de los elementos estandarizados que se encuentran fuera de la diagonal; el cálculo de dicho valor en esta oportunidad ha resultado bajo (.04), indicando con ello un correcto ajuste.

En segundo lugar, siguiendo con el criterio de los residuos, fue posible comprobar que el 89.39% de éstos caen dentro del intervalo [−0.1, 0.1], aunque no de forma simétrica (entre −0.1 y 0.0 se halla el 39.39%, mientras que entre 0.0 y 0.1 está el 50.00%, de los valores residuales). En síntesis, se puede decir, a partir del análisis de los residuos, que el modelo teórico ha logrado bondad de ajuste.

Otro criterio que se valora mencionar, antes de exponer aquellos índices clásicos para juzgar globalmente el grado de ajuste, es el de la convergencia en el proceso de estimación. En efecto, dado que la estimación de un modelo es un proceso iterativo, el hecho de que el algoritmo converja de una manera rápida, es indicador de un buen ajuste. En este caso, han sido necesarias 10 iteraciones para la convergencia; el valor de la función de estimación fue .27.

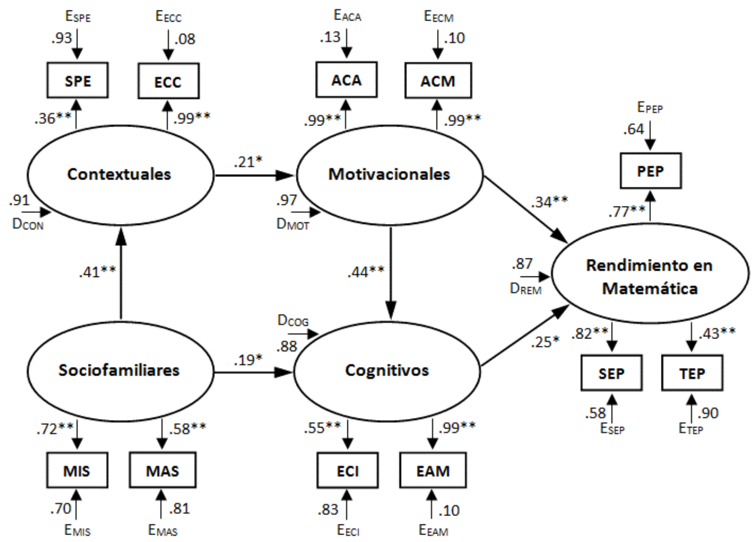


Figura 1. Resultados estandarizados del modelo propuesto para explicar relaciones estructurales entre factores contextuales, personales y el rendimiento en Matemática.

Nota. Variables observadas: MIS = Microsociales, MAS = Macrosociales; SPE = Satisfacción con el Proceso de Enseñanza, ECC = Elementos del Clima de Clase; ACA = Autoconcepto Académico, ACM = Autoconcepto en Matemática; ECI = Estrategias de Codificación de la Información, EAM = Estrategias de Aprendizaje de Matemática; PEP = Primera Evaluación Parcial, SEP = Segunda Evaluación Parcial, TEP = Tercera Evaluación Parcial. Variables latentes: Sociofamiliares (independiente, explicativa); Contextuales, Motivacionales y Cognitivos (mediadoras, explicativas); Rendimiento en Matemática (dependiente, explicada).

Grado de significación: $^{*}p < .05$ (bilateral), $^{**}p < .01$ (bilateral)

Para la evaluación global del modelo, de acuerdo con Schermelleh-Engel, Moosbrugger y Müller [38], se ha utilizado una estrategia basada en los siguientes indicadores: el estadístico χ^2, junto con la razón entre éste y los grados de libertad (χ^2/gl), así como los índices descriptivos *Comparative Fit Index* (*CFI*), *Non-Normed Fit Index* (*NNFI*) y *Root Mean Square Error of Approximation* (*RMSEA*); todos los cuales no dependen tanto del tamaño muestral.

El test chi-cuadrado ha resultado, para un nivel $\alpha = .05$, estadísticamente no significativo, $\chi^2(36) = 38.09$, $p = .37$, y el cociente $\chi^2/gl = 1.06$ realmente próximo a 1. A su vez, ambos índices *CFI* y *NNFI* adoptaron valores .99; mientras que la estimación puntual para la *RMSEA* fue .02, inferior a .05 [39], indicativos todos ellos de un buen ajuste entre el modelo y los datos.

A los índices de comparación estimados en primer término, se añaden otros estadísticos prácticos que proporciona EQS, entre los que se encuentran: *Normed Fit Index* (*NFI*) = .90, *Incremental Fit Index* (*IFI*) = .99, *McDonald's Fit Index* (*MFI*) = .99, *Goodness of Fit Index* (*GFI*) = .95 y *Adjusted Goodness of Fit Index* (*AGFI*) = .92, los cuales también dejan en evidencia que el modelo asumido alcanzó bondad de ajuste, dado que superan el criterio de mínima (.90) recomendado [34]. Una síntesis de los distintos estadísticos e índices relativos a la bondad de ajuste del modelo, originados a partir del método de *ML*, se encuentran detallados en la Tabla 2.

Tabla 2. Indicadores de bondad de ajuste global del modelo propuesto.

Estadísticos				Índices descriptivos			Índices prácticos				
χ^2	*p*	*df*	χ^2/df	CFI	NNFI	RMSEA	NFI	IFI	MFI	GFI	AGFI
38.09	0.37	36	1.06	0.99	0.99	0.02	0.90	0.99	0.99	0.95	0.92

En resumen, a través de los distintos criterios e indicadores utilizados (*análisis de los residuos*, *resumen de iteraciones* y *contraste global*), ha sido posible comprobar que la matriz de covarianzas observada y la predicha por el modelo propuesto no son significativamente diferentes; es decir, el modelo hipotetizado se ajusta al modelo empírico y, en consecuencia, sería de utilidad para explicar los datos.

Evidentemente, a partir de los resultados logrados, la adopción del modelo contrastado como modelo explicativo del fenómeno objeto de estudio es un hecho inmediato. En definitiva, ha sido posible alcanzar el propósito planteado; esto es, explicar mediante la técnica modelos de estructuras de covarianza la relación que se presenta entre ciertos determinantes *extrínsecos* e *intrínsecos* con el *rendimiento en Matemática*, en el ámbito de la asignatura AMI (FRRe-UTN).

4 Conclusiones

En atención a los resultados alcanzados durante el desarrollo de esta investigación, se podría decir que el tratamiento metodológico del tema objeto de interés y su abordaje mediante estructuras de covarianza han sido una decisión correcta. Esta afirmación se sustenta en el hecho de que fue posible diseñar y contrastar un modelo estadístico –a partir de teorías socioeducativas y en razón del objetivo planteado– que podría ser un recurso válido para proponer acciones de intervención a efectos de mejorar el desempeño de los estudiantes que pertenecen al escenario académico e institucional donde tuvo lugar el trabajo de campo.

El modelo desarrollado, ajustado a los datos de la muestra, representa una opción que permite explicar de qué manera se relacionan los aspectos *Sociofamiliares*, *Contextuales*, *Motivacionales* y *Cognitivos* con el *rendimiento académico en una asignatura de Matemática*; por lo tanto, se puede sostener que fue logrado el objetivo principal que se había trazado en este estudio.

Desde el punto de vista analítico, tanto las estimaciones de las cargas factoriales, como de los parámetros estructurales del modelo, resultaron en todos los casos valores estadísticamente significativos (algunos para $p < .05$, y otros para $p < .01$). A su vez, los distintos criterios asumidos (*análisis de los residuos* y *resumen de iteraciones*) e índices descriptivos y prácticos utilizados (*indicadores de bondad de ajuste global*) han permitido comprobar que el modelo hipotetizado se ajusta al empírico y, como se dijo, sería de utilidad para explicar la variabilidad de los datos.

Entre los aportes que este trabajo puede realizar, se encuentra la posibilidad de que algunas de las temáticas contextuales y personales que intervienen en el modelo propuesto pueden ser abordadas para su tratamiento. Este hecho resulta relevante, puesto que una vez conocidas las causas que afectan el rendimiento, el área tanto de psicopedagogía, como de gestión académica, de la institución respectiva tendrían la oportunidad de proponer estrategias de mediación, tanto preventivas como correctivas. Se presume que la implementación de esta acción sería fundamental, pues permitiría que el plan de intervención educativa que se adopte contribuya de manera eficiente en las características y capacidades de los alumnos, generando así mejorar el desempeño cognitivo de los mismos.

Otra cuestión que se desea destacar de la modelización estadística contrastada, es que los aspectos *Sociofamiliares* (variable latente independiente) son los que poseen un protagonismo destacado a la hora de explicar el *rendimiento en la asignatura objeto de interés*; puesto que inciden en forma directa sobre factores *Contextuales* y *Cognitivos*, los cuales a su vez influyen en el desempeño matemático, el primero de los dos últimos a través de *Motivacionales*, y el segundo, junto con el anterior, de manera directa. Aunque cabe señalar que el constructo *Motivacionales* también afecta el rendimiento por medio del factor *Cognitivos*.

Un aspecto importante que se debe tener presente es que los participantes de esta investigación fueron alumnos pertenecientes a un centro académico específico, así como a una asignatura determinada. Por esta razón, si bien la muestra fue seleccionada de manera aleatoria, en caso de desear extender los resultados y las conclusiones a otros estudiantes universitarios, sería conveniente realizar la tarea con mucha prudencia.

No obstante, se considera que el modelo que se propone es un paso adelante en el estudio de la problemática abordada, en el contexto sociocultural de origen de la muestra, que se anhela pueda servir como referencia para futuras investigaciones, quizás con los matices que el escenario de aplicación demande, las que sin duda contribuirán a enriquecer la representación que aquí se plantea.

Como última reflexión, se sugieren algunas medidas que podrían plantearse, desde el ámbito institucional, a efectos de contribuir con el mejoramiento del aprendizaje y rendimiento académico en Matemática:

1. Promover actividades de divulgación a través de medios tradicionales y electrónicos con el fin de concientizar a la sociedad sobre la relevancia que presentan los aspectos familiares (clima educativo y conformación familiar) y sociales (clase social de procedencia y características socioambientales de residencia) en el rendimiento académico de los estudiantes.

2. Disponer de infraestructura y equipamiento adecuados que posibiliten aulas cómodas y adaptadas al número de alumnos que concurren, así como acceso a medios tecnológicos, entre otras cuestiones, a efectos de facilitar el desarrollo del proceso de enseñanza y un favorable clima de aprendizaje.

3. Organizar el gabinete psicopedagógico de manera que se facilite a los estudiantes la realización de consultas y la recepción de asesoramiento acerca de: a) características académicas del alumno con buen autoconcepto, y b) algunas herramientas que permitan mejorar el autoconcepto académico y matemático.

4. Implementar cursos sobre contenidos específicos relativos a comprensión de textos, expresión oral y escrita, también a estrategias de estudio y aprendizaje de Matemática, como instrumentos tendientes a desarrollar en el alumno habilidades cognitivas y metacognitivas.

Finalmente, corresponde señalar que no es suficiente contar con un grupo de propuestas en materia de intervención educativa, cuya eficacia pudo haber sido demostrada, sino que es necesario además tener la voluntad de ponerlas en marcha. En efecto, disponer de herramientas pedagógicas y asumir la decisión de utilizarlas es lo que hará posible brindar soluciones válidas al fenómeno del rendimiento académico; una problemática que genera serias preocupaciones en diversos sectores sociales, así como en áreas de organización, administración, planificación y gestión de los sistemas educativos de muchos países y regiones occidentales.

Referencias

1. Nortes, A.: *Un modelo de evaluación diagnóstica en Matemáticas*. Murcia: Publicaciones Universidad de Murcia (1993).
2. Rodríguez, S. *Factores de rendimiento escolar*. Barcelona: Oikos-Tau (1982).
3. Song, I. G. y Hattie, J.: Home environment, self-concept and academic achievement: a causal modeling

approach. *Journal of Educational Psychology*, *76*(6), 1269-1281 (1984).
4. Jencks, C. S., Bartlett, S., Corcoran, M., Crouse, J., Eaglesfield, D., Jackson, G., et al.: *Who gets ahead? The determinants of economic success in America*. New York: Basic Books (1979).
5. Lerena, C.: *Escuela, ideología y clases sociales en España*. Barcelona: Ariel (1976).
6. Husén, T.: Talento, oportunidad y carrera: un seguimiento de 26 años. *Revista de Psicología General y Aplicada, 27*(119), 904-925 (1972).
7. Juif, P. y Legrand, L.: *Didáctica y renovación pedagógica*. Madrid: Narcea (1980).
8. Gage, N.: *The scientific basic of the out of teaching*. New York, NY: Teacher College Press (1979).
9. Polaino-Lorente, A.: El estrés de los profesores: estrategias psicológicas de intervención para su manejo y control. *Revista Española de Pedagogía, 157,* 17-46 (1982).
10. Villa, A.: *Multidimensionalidad del modelo de profesor ideal y condicionantes estructurales que la determinan*. Bilbao: ICE de la Universidad de Deusto (1985).
11. Marchesi, A. y Martín, E. (Eds.): *Evaluación de la educación secundaria. Fotografía de una etapa polémica*. Madrid: Editorial SM (2002).
12. Molina, S. y García, E.: *El éxito y el fracaso escolar en la EGB*. Barcelona: Laia (1984).
13. Thompson, W. W.: Environmental effects on educational performance. *The Alberta Journal of Educational Research, 31*(1), 11-25 (1985).
14. Angulo, M. E.: *Schooling in Illinois: An analysis of selected school variables and math performance of third grade students*. Illinois State University, Michigan: UMI Dissertation Services (1988).
15. Fuentes, A.: *Procesos funcionales y eficacia de la escuela. Un modelo causal* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España (1986).
16. Martínez, R. A.: Clima afectivo y rendimiento escolar. *Aula Abierta, 49,* 79-83 (1987).
17. Deci, E. L. y Ryan, R. M.: *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. New York: Plenum Press (1985).
18. Harter, S.: The perceived competence scale for children. *Child Development, 53,* 87-97 (1982).
19. Ryan, R. y Grolnick, W.: Origins and pawns in the classroom: Self-report and projective assessments of individual differences in children's perceptions. *Journal of Personality and Psychology, 50,* 550-558 (1986).
20. Deci, E. L., Schwartz, A. J., Sheinman, L. y Ryan, R. M.: An instrument to assess adults orientations toward control versus autonomy with children: Reflections on intrinsic motivation and perceived competence. *Journal of Educational Psychology*, *73*, 642-650 (1981).
21. Marsh, H. W.: Academic self-concept: Theory measurement and research. En J. Suls (Ed.), *Psychological perspectives on the self* (Vol. 4, pp. 59-98). Hillsdale, NJ: Erlbaum (1993).
22. Closas, A. H., Franchini, N. B., Kuc, L. C., Dusicka, M. A. y Hisgen, C. M.: Modelo logístico explicativo de las relaciones entre autoconcepto y rendimiento académico. *Revista de la Facultad de Cs. Económicas – UNNE*, No. 20, 187-208 (2018).
23. Aranda, R. F.: *Relación entre autoeficacia, autoconcepto y desempeño en la asignatura de Matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad de Concepción, Chile (2017).
24. Rodríguez-Rodríguez, D. y Guzmán, R.: Autoconcepto académico y atribuciones causales sobre el rendimiento académico en adolescentes en situación de riesgo. En J. L. Castejón (Ed.), *Psicología y Educación: Presente y Futuro* (pp. 2172-2179). Madrid: ACIPE (2016).
25. Rossi, L. E., Neer, R. H., Lopetegui, M. S. y Doná, S.: Estrategias de aprendizaje y rendimiento académico según el género en estudiantes universitarios. *Revista de Psicología*, No. 11, 199-211 (2010).
26. De la Fuente, J.: Perspectivas recientes en el estudio de la motivación: la teoría de la orientación de meta. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *2*(1), 35-62 (2004).
27. López, B. G.: Estrategias de aprendizaje, rendimiento y otras variables relevantes en estudiantes universitarios. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *59*(1-2), 109-130 (2006).
28. Miñano, P. y Castejón, J. L.: Capacidad predictiva de las variables cognitivo-motivacionales sobre el rendimiento académico. *Revista Electrónica de Motivación y Emoción, 11*(28) (2008).
29. Gargallo, B., Suárez, J. y Ferreras, A.: Estrategias de aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Revista de Investigación Educativa*, *25*(2), 421-441 (2007).
30. Closas, A. H., Hisgen, C. M. y Sanz de Acedo, M. T.: Estrategias de aprendizaje y su relación con el rendimiento académico mediante regresión logística. *Cuadernos de Pedagogía Universitaria*, *13*(25), 08-20 (2017).
31. De la Fuente, J. y Martínez, J. M.: *Escalas para la Evaluación Interactiva del Proceso de Enseñanza-Aprendizaje, EIPEA*. Madrid: EOS (2004).
32. García, F. y Musitu, G.: *AF5. Autoconcepto Forma 5*. Madrid: TEA (2001).
33. Román, J. M. y Gallego, S.: *Escalas de Estrategias de Aprendizaje, ACRA* (4a. ed.). Madrid: TEA (2008).
34. Bentler, P. M.: *EQS Structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software, Inc. (2006).
35. Bentler, P. M. y Wu, E. J.: *Supplement to EQS 6.3 for Windows User's Guide*. Encino, CA: Multivariate Software, Inc. (2015).
36. Satorra, A. y Bentler, P. M.: *Scaling corrections for statistics in covariance structure analysis*. Los Angeles, CA: UCLA Statistics Series 2 (1988).
37. Bentler, P. M. y Weeks, D. G.: Linear structural equations with latent variables. *Psychometrika, 45,* 289-308 (1980).
38. Schermelleh-Engel, K., Moosbrugger, H. y Müller, H.: Evaluating the Fit of Structural Equation Models: Tests of Significance and Descriptive Goodness-of-Fit Measures. *Methods of Psychological Research Online, 8*(2), 23-74 (2003).
39. Browne, M. W. y Cudeck, R.: Alternative ways of assessing model fit. En K. A. Bollen & J. S. Long (Eds.), *Testing structural equation models* (pp. 136-162). Newbury Park, CA: Sage (1993).

Conceptos de Paridad y Periodicidad de una Función en Carreras de Ingeniería: un Estudio de Caso

Viviana Angélica Costa, María de las Mercedes Trípoli

IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
Av. 1 y 47, CP1900, La Plata, Buenos Aires, Argentina
vacosta@ing.unlp.edu.ar, mercedes.tripoli@ing.unlp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se destaca la importancia que poseen los conceptos de paridad y periodicidad de una función, como herramienta matemática por su utilidad en diversos campos de la ingeniería. Se elabora un estudio de caso en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, que comprende varios aspectos. Se revisan los contenidos curriculares y las guías de estudio de las asignaturas de matemática en esa Facultad, y la bibliografía recomendada, con el objetivo de conocer cuándo y cómo se estudian esos conceptos. Luego se realiza un cuestionario a un grupo de estudiantes de distintos años y carreras sobre cuáles conocimientos poseen acerca de las funciones pares, impares y periódicas. Se concluye que esos conceptos son, en general, relegados en las guías de estudio y que los estudiantes vinculan la noción de periodicidad con las funciones trigonométricas y la noción de paridad no es siempre identificada por ellos.

Palabras Clave: Función periódica, Par, Impar, Ingeniería, Enseñanza.

1 Introducción

Sin importar la especialidad a la cual se dedique un profesional de la ingeniería, una de las ciencias que más utilizará es la matemática y, por consiguiente, deberá tener habilidades bien desarrolladas para trabajar con ella. Por ello, es necesario saber qué tipo de conceptos, saberes y objetos matemáticos debe conocer el ingeniero, tanto al transitar por el proceso formativo, como al ejercer su profesión.

La rama matemática conocida como Cálculo Diferencial e Integral es una herramienta poderosa para resolver múltiples problemas que surgen en Física, Astronomía, Ingeniería, Química, Geología, Biología, y otros campos nuevos que van surgiendo por al avance acelerado de la ciencia y de la tecnología. El Cálculo Diferencial e Integral reúne los conceptos básicos fundamentales que el ingeniero de las diferentes especialidades requerirá en la modelación matemática para resolver los problemas que se le presenten. Es por ello necesario que el estudiante de ingeniería adquiera la habilidad de comprender un conjunto de conceptos y operaciones de cálculo para afrontar las asignaturas que tiene a lo largo de su carrera y obtener éxito en las mismas.

En particular, los conceptos de paridad y de periodicidad son importantes en carreras de ingeniería, ya que su conocimiento permite realizar cálculos de modos más sencillos, reducir varios de los cálculos que se presentan, e inferir características cualitativas de una función (como por ejemplo, de su derivada o primitiva en caso de existir). Asimismo, las funciones periódicas son herramientas de modelización de fenómenos físicos que presentan un comportamiento ondulatorio, como vibraciones, ondas mecánicas, ondas acústicas, ondas gravitacionales, que son de estudio común en diversas especialidades de la ingeniería.

Dichos conceptos también son utilizados en el estudio de la aproximación de funciones mediante la Serie de Fourier (serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos). Esta es una herramienta matemática básica del análisis de Fourier, que se emplea para analizar funciones periódicas a través de su descomposición en una suma infinita de funciones sinusoidales más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). Además de ser una herramienta útil en la teoría matemática abstracta, es una aplicación muy utilizada en varias áreas de la ingeniería, que incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

compresión de datos. Se utiliza en áreas donde se analizan y diseñan sistemas dinámicos; en ingeniería mecánica se utiliza para balancear rotores y eliminar la vibración que generan cuando no está balanceado, entre otros ejemplos.

No hay que olvidarse que la matemática para las ingenierías es un medio y no un fin, con lo cual es pertinente ofrecerles a los estudiantes conceptos matemáticos que les permitan optimizar su trabajo. Como menciona Santaló [1], la matemática la necesitan por sus aplicaciones, con lo que basta que tengan de ella una comprensión intuitiva que les permita ver claro en qué casos y de qué manera puede utilizarse.

Es así que dada la importancia de los conceptos mencionados en la ingeniería, surgen algunas preguntas vinculadas a la enseñanza y aprendizaje de los mismos, las cuales orientaron la investigación:

- ¿En qué momentos de la carrera, los alumnos que cursan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI-UNLP) estudian los conceptos de función periódica, par e impar?
- ¿Identifican la paridad y periodicidad de una función, los estudiantes de la FI-UNLP?
- ¿Utilizan los estudiantes, los conceptos y propiedades de las funciones pares e impares para resolver situaciones problemáticas, tanto intra como extra matemáticas?
- ¿Cuáles ideas o situaciones físicas asocian al concepto matemático de función periódica estudiantes que han cursado los primeros años de la carrera?

Con el objetivo de dar respuesta a estos interrogantes, se realizó una revisión de los contenidos curriculares de las asignaturas de matemática de la FI-UNLP, se analizaron los materiales de estudio teórico-prácticos que brindan las cátedras de matemática a sus estudiantes, así como alguna de la bibliografía recomendada. Además, se realizaron encuestas a estudiantes de distintos años y de distintas carreras, con carácter anónimo, con el objetivo de indagar acerca de los conocimientos que ellos poseen de tales conceptos.

El propósito de la investigación fue indagar sobre el conocimiento de estos conceptos por parte de los estudiantes de la FI-UNLP y en qué momento de la carrera lo adquieren, con el objetivo de generar estrategias didácticas de articulación con otras disciplinas del área básica y con materias tecnológicas básicas de las distintas carreras, además de destacar la importancia de estos conceptos y por ende su enseñanza. Este trabajo se enmarca en el Proyecto de Investigación y Desarrollo Acreditado de la UNLP: "Articulación en la enseñanza de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería", integrado por docentes del Departamento de Ciencias Básicas de la FI.

Esta presentación se organizó del siguiente modo. Primero se presenta una breve reseña sobre la enseñanza de las matemáticas en la FI; en segundo lugar, se muestran las definiciones matemáticas de las funciones introducidas en este trabajo, así como las más importantes propiedades que poseen, que pueden ser aplicadas para facilitar tanto el planteo como la resolución matemática de una situación problemática que podría ser estudiada por un ingeniero. Luego se describe la metodología de la investigación, se muestran los resultados obtenidos y se exhiben las conclusiones y trabajos a futuro.

2 Las matemáticas en la Facultad de Ingeniería

En el año 2002, la FI realizó una reforma de los planes de estudio de todas sus carreras. Posteriormente se fueron haciendo revisiones que derivaron en cambios en algunas carreras, siendo la última reforma la acontecida en el año 2018 (en este caso para todas sus carreras). Dichas reformas se realizaron con el propósito de encuadrar las carreras dentro de los estándares definidos por el CONFEDI, para así posibilitar la acreditación por parte de la CONEAU.

En la reforma de 2002, el cambio curricular en las materias de matemática tuvo como objetivos: a) articular las asignaturas de matemática entre sí y con otras materias, b) mejorar el rendimiento en matemática y c) disminuir la dificultad del alumnado para recuperar los conceptos y herramientas matemáticas en otros contextos. Con el fin de mejorar la calidad de enseñanza impartida, el cambio incluyó que las materias de matemática fueran reorganizadas desde muchos puntos de vista: en cuanto a la organización de sus contenidos alrededor de ejes conceptuales, la conformación y el funcionamiento de sus equipos docentes, la metodología de la enseñanza y la infraestructura áulica; constituyendo esta reestructuración un posicionamiento innovador en el contexto de las Carreras de Ingeniería. En las reformas de los planes que se llevaron a cabo luego, sólo se revisó la organización de los contenidos.

Es pertinente destacar que, con respecto a la distribución de los contenidos, además de organizarlos alrededor de ejes conceptuales, se consideró la progresión en la apropiación de los métodos formales de la disciplina, de manera que los niveles de formalización exigidos sean bajos en la primera materia de matemática y más altos en la última. Este posicionamiento recayó en que el material teórico práctico para trabajar en clase se construya de modo que resultara funcional para una actividad que los estudiantes pudieran realizar por sí mismos –preferentemente en forma grupal - con la guía y la asistencia de los docentes.

Las clases de matemática pasaron de ser las llamadas "tradicionales", a una metodología de trabajo en la cual se considera a las clases como espacios de actividad, donde se desplaza el foco: del profesor como centro, a la clase como una totalidad, en la cual todos trabajan. Se propicia el trabajo colaborativo tanto entre docente como entre alumnos, y entre docentes y alumnos. Asimismo, se propende a contribuir a un aprendizaje constructivo, cooperativo y orientado a la resolución de problemas. No es menor destacar que el espacio físico se acondicionó para posibilitar la forma de trabajo: aulas planas con mobiliario adecuado para favorecer el trabajo grupal.

Este cambio en la forma de trabajar se basó en ciertos referentes teóricos construidos por los docentes que realizaron la reforma, desde los cuales analizar decisiones, hechos y problemas: que el aprendizaje es un proceso constructivo interno, que la interacción social favorece el aprendizaje, que la motivación es un elemento esencial para una buena marcha del aprendizaje y que se aprende mejor aquello que se comprende [2,3,4].

3 Las funciones periódicas, pares e impares

3.1 Función periódica

Una función $f(x)$ es periódica si existe un número T tal que $f(x) = f(x+T)$, para todos los valores de x en su dominio. Es decir, que es una función que repite el mismo valor a intervalos regulares de la variable. Al menor número T se lo llama período y se denomina frecuencia "f" a la inversa del período: $f = 1/T$.

Los ejemplos más comunes de funciones periódicas son las funciones trigonométricas, que en combinaciones adecuadas se emplean en el análisis armónico. Sin embargo existen otras, como por ejemplo, la función mantisa.

3.2 Función par e impar

Una función $f(x)$ es par cuando cumple $f(x) = f(-x)$, para todos los valores del dominio. Es decir, las imágenes de valores opuestos coinciden. De esta manera, la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de las ordenadas.

Una función $f(x)$ es impar si cumple que $f(x) = -f(-x)$, para todos los valores del dominio. A valores opuestos de x corresponden imágenes opuestas. De esta manera, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

3.3 Propiedades de las funciones periódicas, pares e impares

Las funciones periódicas, pares e impares tienen múltiples propiedades que son útiles para la resolución matemática, de un modo mucho más sencillo, de diversos problemas.

Algunas de estas propiedades son:

- Toda función continua se puede descomponer en la suma de una función par y de una impar.
- La única función que es tanto par e impar es la función nula.
- La suma de una función par y una impar no es ni par ni impar, a menos de que una de las funciones sea la nula.

- La suma de dos funciones pares es una función par y la suma de dos funciones impares es una función impar. Es decir que el conjunto de funciones pares (o impares) con la operación suma verifican la propiedad de cierre o de clausura.
- El producto de dos funciones pares es una función par, de dos funciones impares es una función par, de una función par y una función impar es una función impar.
- Si una función es par y existe su derivada, ésta es impar y si una función es impar, su derivada de existir, es par. Es decir que el conocimiento de la paridad de una función permite conocer el comportamiento de cualquiera de sus derivadas.
- Si $f(x)$ es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
- La suma y producto de funciones periódicas de un mismo período es también periódica con el mismo período.
- Si una función es periódica y existe su derivada, ésta es también periódica.
- Si *f(x)* es periódica, entonces $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{b}^{b+T} f(x)dx$, para a y b en el dominio de f.
- Los conjuntos formados por las funciones pares, impares y periódicas forman, cada uno de ellos, un espacio vectorial sobre el conjunto de los reales.
- El desarrollo en Serie de Taylor de una función par (impar) contiene sólo potencias pares (impares) de la variable y recíprocamente.
- La representación de funciones periódicas mediante Series de Fourier se simplifica en el caso de funciones pares o impares. En el caso que la función sea par, la representación en Series de Fourier sólo posee coeficientes con cosenos.

4 Metodología

La investigación es un estudio de caso, como bien detallan Gómez y Roquet [5], que analiza el fenómeno en la FI-UNLP. La revisión y análisis documental obtenido se interpreta cualitativamente. La metodología de la investigación es descriptiva y cualitativa.

Para comprender el fenómeno de estudio, y dar respuesta a las preguntas de investigación, se realizó una revisión de los contenidos curriculares de las asignaturas de matemática en esa facultad, así como del material de estudio de las mismas (editado por las cátedras y que se constituyen en el eje central del proceso de enseñanza y aprendizaje) y textos que forman parte de la bibliografía recomendada en relación a los conceptos de paridad y de periodicidad.

Además, se diseñó un cuestionario, en un formulario de Google Drive con acceso mediante enlace compartido, de carácter anónimo, como instrumento para obtener datos cuantitativos y cualitativos, destinado a estudiantes de distintos años y de distintas carreras de la Facultad. El cuestionario se compone de dos secciones. En la primera de ellas se indaga sobre las materias de matemática que el alumno tiene aprobadas y si posee conocimiento o no de las funciones periódicas, pares e impares. La segunda sección se dirige a los estudiantes que afirmaron conocer dichas funciones y se solicita clasificar varias funciones, según sean pares, impares, periódicas u otras. En esta parte se presentan siete funciones de variable real con casillas de verificación cada una: “Periódica”, “Par”, “Impar”, “Ninguna es correcta”, “No sé”. Las casillas de verificación permiten que el encuestado marque una o varias opciones. En algunos casos se muestra su gráfica y en otros se da la expresión analítica, con el objetivo de analizar si identifican las características de cada función independientemente del registro que se tenga de ella. Las funciones presentadas en el cuestionario contemplan distintas situaciones, sólo periódica, sólo par, periódica e impar, entre otras posibilidades.

5 Resultados

5.1 Contenidos curriculares de las asignaturas de matemática

De la revisión de los contenidos curriculares de las asignaturas de matemática que forman parte de los planes de estudio de las trece carreras que se dictan en la Facultad, se realizó el siguiente resumen:

- Matemática para Ingeniería: es una asignatura en la cual se repasan los temas de la escuela media, siendo un curso de nivelación en matemática.
- Matemática A (1° semestre): en esta asignatura se presentan las funciones, siendo su eje conceptual la variación en una y varias variables. Estudiar las características de las distintas funciones es central en la materia, ya que las mismas servirán para modelizar distintas situaciones.
- Matemática B (2° semestre): en esta asignatura se avanza en el estudio de las funciones, siendo el eje conceptual la integración en una y varias variables, por lo que las propiedades de las funciones cobran mucha importancia.
- Matemática C (3° semestre): en esta asignatura se estudia el álgebra lineal y aplicaciones, ecuaciones diferenciales lineales y aplicaciones y series de potencias. Se trabaja con matemática más avanzada donde las funciones periódicas, pares e impares se deben utilizar en los cálculos que se realizan. De hecho, se estudian las series de Fourier. Para varias especialidades, ésta es la última asignatura específica de matemática que tienen en su plan de estudios. El resto de las especialidades termina el ciclo básico con Matemática D.
- Matemática D (4° semestre): el objetivo de esta asignatura es utilizar herramientas metodológicas propias de la matemática para la descripción, modelización y resolución de problemas de las asignaturas específicas de las carreras. En cuanto a los contenidos, se estudian las funciones complejas de variable compleja, integración en el campo complejo, serie de Taylor y serie de Laurent, singularidades y teoría de residuo, transformada de Laplace (conceptos teóricos y resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias) y transformada e Integral de Fourier (conceptos teóricos y la relación con la transformada de Laplace).

5.2 Material de estudio y textos

Se analizaron los materiales educativos (guías de estudio teórico- prácticas) de las asignaturas de matemática. No se consideró para el análisis, Matemática para Ingeniería, ya que su contenido corresponde a temas de la escuela secundaria.

Se comenzó la revisión con las dos materias de matemática básica que se cursan en el primer año, Matemática A y Matemática B. En cuanto a Matemática A, en el primer capítulo del material de la cátedra (https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0301/) se definen las funciones numéricas y para el quinto capítulo aparecen las funciones circulares (también llamadas trigonométricas). Pero no se definen las funciones pares e impares. En cuanto a las funciones periódicas, dentro del capítulo cinco, se presenta el concepto de función periódica cuando se dice que las funciones circulares toman sus valores de forma periódica. Sin embargo, no se define función periódica en forma general. En Matemática B no se definen las funciones pares ni impares, y tampoco las periódicas (https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0302/).

En el material de estudio de Matemática C (https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0304/), dentro de la sección de Series de Potencias y Serie de Taylor, en los problemas que se plantean para resolver, se presenta una observación importante en donde se menciona que si una función es par, entonces su desarrollo de Mac-Laurin sólo contendrá potencias pares de la variable. También se hace una aclaración para las funciones impares. Asimismo, se menciona una propiedad de este tipo de funciones relacionada con la derivada. En la sección de Series de Fourier y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se define formalmente a las funciones periódicas y se dan ciertas propiedades de las mismas. Se recuerda a su vez, la definición de funciones pares e impares y se utilizan las mismas, a partir de allí, para facilitar los cálculos, de acuerdo a las propiedades que éstas poseen.

Con respecto a Matemática D, cuando se estudia la Transformada de Fourier, se mencionan propiedades de la misma relacionadas con la paridad de las funciones involucradas. Las funciones periódicas se mencionan cuando se calcula la Trasformada de Laplace de este tipo de funciones; no se definen, se usan.

En cuanto a los libros de texto, sólo se analizaron tres de Cálculo (básico) de los autores Larson y otros [6], Thomas y Weir [7] y Stewart [8], que forman parte de la bibliografía recomendada por las Cátedras de Matemática A y Matemática B. En la Tabla 1 se realiza un resumen de los conceptos de paridad y periodicidad de acuerdo a cómo se presentan en dichos textos.

Tabla 1. Libros de texto: conceptos de paridad y periodicidad de funciones reales.

Libro	Función par e impar. Descripción	Función periódica. Descripción
Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., & Abellanas, L. (2006). Cálculo. McGraw-Hill.	En el Capítulo sobre preparación para el Cálculo, dentro de la sección de funciones y sus gráficas, se definen las funciones pares e impares, primero considerando la simetría respecto al eje y y al origen respectivamente, y luego de manera funcional, que $f(-x) = f(x)$ y que $f(-x) = -f(x)$.	En uno de los apéndices referido a repasar las funciones trigonométricas, se dice que una función f es periódica si existe un número no nulo p tal que $f(x+p)=f(x)$ para x en el dominio de f, donde el menor de tales valores positivos de p (si existe) se llama el período de f. Se mencionan los períodos de las funciones trigonométricas.
Thomas, G. B., & Weir, M. D. (2006). Cálculo: una variable. Pearson Educación.	En los preliminares del primer capítulo dice que las funciones pares e impares se caracterizan por sus simetrías y menciona cuáles son para este caso. Se explica que el hecho que $f(-x) = f(x)$, que caracteriza a las funciones pares, significa que un punto *(x,y)* está sobre la gráfica si y sólo si el punto *(-x,y)* también lo está (y muestra un gráfico de la situación). Se hace lo mismo con las funciones impares. Se observa que las definiciones implican que tanto x como $-x$ deben estar en el dominio de f.	En los preliminares del primer capítulo se definen las funciones periódicas por ser una característica de las funciones trigonométricas y se definen como el texto de Larson y otros. Se observa que las funciones periódicas son importantes, ya que muchos de los comportamientos que se estudian en ciencias son casi periódicos. Uno de los teoremas del cálculo avanzado afirma que todas las funciones periódicas que se usan en la creación de modelos matemáticos pueden escribirse como una combinación algebraica de senos y cosenos. Luego se identifican las funciones trigonométricas como pares e impares, según el caso.
Stewart, J. (2006). Cálculo, conceptos y contextos, 3 ra Ed. International Thomson Editores, Distrito Federal, México.	En la primera sección del capítulo 1 se definen las funciones pares e impares de manera funcional. Da como ejemplos, $f(x)=x^2$ y $f(x)=x^3$, respectivamente. Menciona que el significado geométrico de una función par o impar se relaciona con la simetría con respecto al eje y si es par (y muestra una figura) y al origen si es impar. Explica que gráficamente significa que si hemos trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, obtenemos toda la gráfica con sólo reflejar con respecto al eje y. Si ya tenemos la gráfica de f para $x \geq 0$, podemos obtener la gráfica entera al hacerla girar *180°* alrededor del origen.	En el capítulo a cuando aparecen las funciones trigonométricas, se menciona que una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son periódicas y tienen período 2π. Y dice que esto significa que, para todos los valores de x, $sen(x+2\pi)=sen(x)$ y $cos(x+2\pi)=cos(x)$. La naturaleza periódica de estas funciones las hace apropiadas para modelar fenómenos repetitivos, como mareas, resortes vibrantes y las ondas sonoras.

En los tres libros analizados, se definen las funciones pares e impares, se dan algunos ejemplos y se menciona su significado geométrico, relacionado con la simetría de las funciones respecto de los ejes cartesianos. Esto es en contraposición con lo observado en los materiales de estudio de las asignaturas correspondientes, en los cuales no se definen dichos conceptos.

En cuanto a las funciones periódicas, se definen, pero en el contexto de las funciones trigonométricas, no como un tipo de funciones en particular. Esto de la misma manera que se observó en Matemática A, que es la asignatura de matemática en la cual aparecen (por primera vez) las funciones como una necesidad para modelar situaciones problemáticas.

Se consideró que no era necesario analizar textos de matemática avanzada utilizados en las otras asignaturas de matemática por comprender que los conceptos de paridad y periodicidad forman parte de la enseñanza básica del cálculo, y en esos tipos de libros ya sería una herramienta más que un concepto nuevo de matemática.

5.3 Cuestionario

Se obtuvieron 290 respuestas que se encuentran en el enlace compartido: https://docs.google.com/spreadsheets/d/1P3BsROzxv8i-qV9eGce-dpNxE_8p_j-INQzFyGYNtfk/edit?usp=sharing .

En cuanto a los resultados de la primera sección, se obtuvo que el 33,1% de los estudiantes mencionan tener aprobadas Matemática A, B, C y D, correspondiendo esto a 96 alumnos que estarían cursando materias del tercer año de la carrera. Al 36,2% les falta aprobar sólo Matemática D. La mayoría solamente tienen aprobadas Matemática A y B, por lo que estarían cursando el segundo año de la carrera.

El 74% mencionan haber estudiado o conocer el concepto de funciones pares e impares, e indican dónde lo estudiaron (Figura 1).

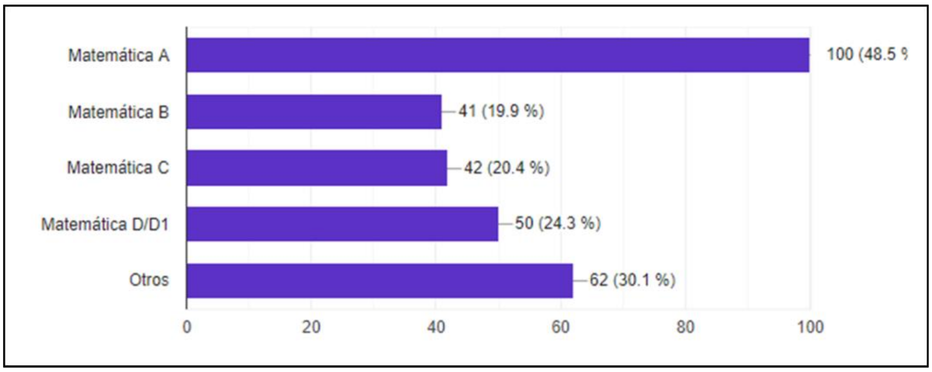


Fig. 1. Resultados acerca de en dónde los alumnos estudiaron el concepto de función par o impar.

Sobre el concepto de función periódica, el 87% menciona haberlo estudiado e indican dónde lo vieron (Figura 2).

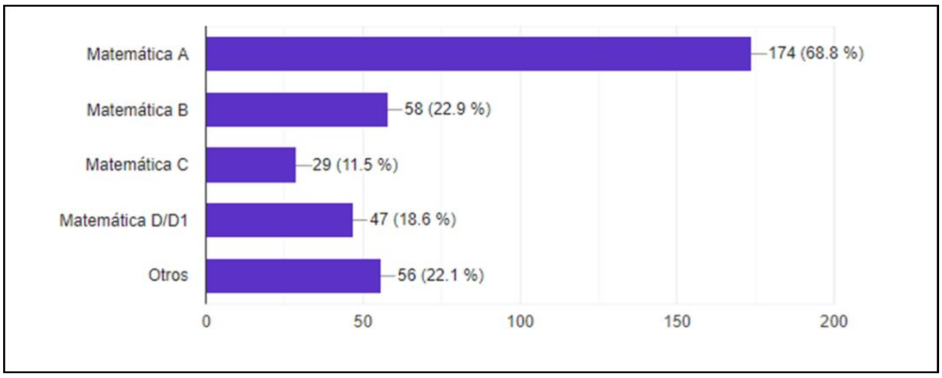


Fig. 2. Resultados acerca de en dónde los alumnos estudiaron el concepto de función periódica.

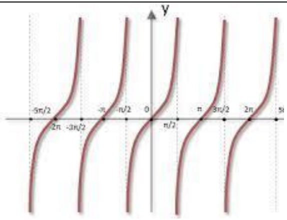
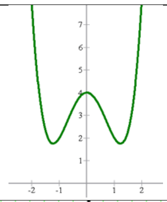
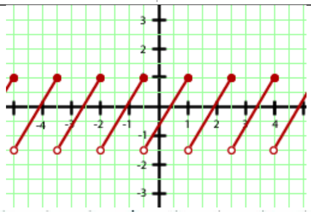
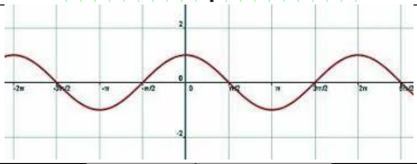
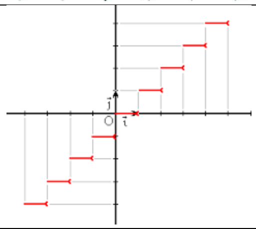
A la segunda sección podían acceder sólo aquellos estudiantes encuestados que habían manifestado conocer las funciones periódicas, pares e impares. Como ya se mencionó, en esta parte se presentaron siete funciones de variable real, con casillas de verificación cada una: “Periódica”, “Par”, “Impar”, “Ninguna es correcta”, “No sé”. Estas casillas de verificación permiten que el encuestado marque una o varias opciones.

En la Tabla 2 se muestran las funciones propuestas en la primera columna, las respuestas correctas en la segunda columna, y en la tercera columna los resultados obtenidos del cuestionario diferenciado en porcentajes.

Para las funciones que son periódicas, el mayor porcentaje de estudiantes que seleccionó la respuesta correcta, corresponde a la función coseno (en la que se presenta la gráfica) y a la función seno (que se da la expresión analítica). La función tangente también presenta un porcentaje importante y aquella que no es trigonométrica es la que tiene el menor porcentaje de respuestas correctas.

A pesar de que los estudiantes manifestaron conocer los conceptos de funciones pares e impares, no pudieron identificar, en mayor medida, este tipo de funciones. En el caso de la función par dada en forma analítica, sólo el 44% de los alumnos asociaron que era una función par, a pesar de conocer la expresión y que la variable independiente está elevada al cuadrado.

Tabla 2. Cuestionario sobre paridad, periodicidad. Resultados obtenidos.

Función propuesta	Característica	Respuestas
	Periódica Impar (Función tangente)	Periódica: 88% Par: 5% Impar: 46% Ninguna es correcta: 0% No sé: 2%
	Par	Periódica: 3% Par: 75% Impar: 5% Ninguna es correcta: 5% No sé: 12%
	Periódica	Periódica: 75% Par: 3% Impar: 15% Ninguna es correcta: 8% No sé: 12%
	Periódica Par (Función coseno)	Periódica: 93% Par: 42% Impar: 5% Ninguna es correcta: 1% No sé: 0,4%
	Ninguna	Periódica: 21% Par: 3% Impar: 28% Ninguna es correcta: 30% No sé: 25%
$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	Par	Periódica: 5% Par: 44% Impar: 12% Ninguna es correcta: 13% No sé: 12%
$f(x) = sen(x)$	Periódica Impar	Periódica: 92% Par: 9% Impar: 36% Ninguna es correcta: 0% No sé: 0,4%

En el caso de la función que no era ni periódica, ni par, ni impar, a pesar que el mayor porcentaje (30%) respondió correctamente, un 21% opinó que la función es periódica y un 25% impar.

Seguidamente se consultó sobre si habían utilizado en alguna oportunidad las propiedades de las funciones pares, impares y/o periódicas para resolver problemas de un modo más sencillo. El 62% de los estudiantes contestaron afirmativamente. Para terminar, se les pidió que mencionaran, en lo posible, alguna situación física que se modele mediante funciones periódicas. El 70% respondió, siendo las situaciones más señaladas: "ondas, MAS, ondas electromagnéticas, corriente alterna, ondas mecánicas, péndulo, ondas de sonido, electricidad, vibraciones periódicas, circuitos eléctricos".

6 Conclusiones y trabajos a futuro

En este trabajo se presentaron las funciones periódicas, pares e impares, sus propiedades y la importancia que posee su conocimiento para estudiantes en carreras de ingeniería. Se analizó cómo se presentan estos conceptos en los cursos básicos de matemática de la FI-UNLP: en los materiales de estudio y en los libros recomendados por las cátedras. Además, se encuestó a un grupo de estudiantes sobre sus conocimientos en tales conceptos.

Los resultados obtenidos evidencian que el concepto de paridad de funciones no está presente en las guías de estudio de las materias de matemática de primer año. Con respecto a las funciones periódicas, se mencionan por ser una propiedad de las funciones trigonométricas, en particular seno y coseno.

En los libros de texto analizados, que son parte de la bibliografía recomendada, se define el concepto de paridad y el de periodicidad se vincula con las funciones trigonométricas. Para las funciones pares e impares, se dan algunos ejemplos y se menciona su significado geométrico, relacionado con la simetría de las funciones.

En las materias de matemática de segundo año, las funciones pares e impares son utilizadas dado que es necesario para el desarrollo de algunos temas, como ya se mencionó en párrafos previos. Las funciones periódicas se definen en la tercera materia de matemática de manera general, aunque las que se utilizan para trabajar son las trigonométricas.

Del cuestionario se evidencia que las funciones periódicas son, por los alumnos, más frecuentemente reconocidas, tanto desde la gráfica como desde la representación analítica. No así las funciones pares e impares. Es interesante señalar que un número importante de estudiantes dicen haber estudiado el concepto de función par e impar en Matemática A y un número menor, menciona haberlo estudiado en Matemática B, materias en las cuales tanto los contenidos curriculares como el material de estudio no proponen estudiarlas. Esto podría deberse, o a una confusión por parte de los estudiantes de cuándo realmente definieron este tipo de funciones, o bien los docentes que tuvieron en esos cursos, las mencionaron.

Dado que en esta investigación se señala la importancia del concepto de paridad de funciones en la formación del ingeniero y dicho concepto se comienza a trabajar en el segundo año de las carreras, ¿qué beneficio tendrían los estudiantes de primer año al estudiar el concepto de función par e impar? Al momento de analizar una función para realizar su gráfica, se podría hacer un estudio cualitativo que permitiría, en algunos casos no considerar todo el dominio de la función para tomar decisiones de su comportamiento debido a las simetrías a las que responden este tipo de funciones. Al trabajar con la integración de funciones también sería beneficioso considerar si las funciones son pares, impares o ninguno de estos casos. Asimismo, si se sabe que una función es par o impar, se podría predecir la existencia o no de su función inversa. Considerando que previo a la realización de los cálculos matemáticos, el ingeniero debiera realizar un análisis del problema que se le plantea y estas funciones abren un abanico de análisis. Se considera que sería de gran beneficio para los estudiantes conocer estos conceptos desde el inicio de la carrera. Además el saber si una función es par o impar, permite conocer el comportamiento de todas sus derivadas, en el caso de existir.

En cuanto a la periodicidad de funciones, como se ha podido concluir y señala Buendía [9], no está siendo usada como una propiedad que califica a cierto comportamiento, sino se limita a calificar a una determinada función, la trigonométrica, lo cual hace que el estudiante haga una "vinculación cerrada" entre función periódica y función trigonométrica.

Se considera que introducir la paridad y periodicidad como propiedad que caracteriza ciertas funciones, podría hacer reflexionar a los docentes en la manera de preparar sus clases haciendo un análisis cualitativo de las funciones, y permitiendo de esta manera que el alumno también analice las situaciones y no que se reduzca a realizar sólo cálculos matemáticos, sino que estos confirmen su análisis previo.

Para encontrarle un sentido a reconocer estas funciones, sería importante articular con docentes de otras áreas o disciplinas, con el objetivo de encontrar situaciones reales para presentar a los estudiantes en las clases de matemática básica y de esta manera los docentes consideren abordar estos conceptos, dada su importancia en carreras de ingeniería. Realizar una propuesta que involucre estos aspectos, se propone como trabajo a futuro.

Referencias

1. Santaló, L.: Matemática para no matemáticos. Parra, C.; Saiz, I.: Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones. Paidós, pp. 21-38 (1994).
2. Bucari, N.; Abate, S.; Melgarejo, A.: Un cambio en la enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ingeniería de la UNLP: propuesta, criterios y alcance. Anales del IV Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, Buenos Aires, Argentina, pp. 104-111 (2004).
3. Bucari, N.; Abate S.; Melgarejo A.: Las clases de Matemática y la construcción de un contrato didáctico diferente. Anales del INMAT, Buenos Aires (2005).
4. Bucari, N.; Abate, S.; Melgarejo, A.: Estructura Didáctica e Innovación en Educación Matemática. Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Vol. 8, No. 14, pp. 17-28 (2007).
5. Gómez, David Rodríguez; Roquet, Jordi Valldeoriola. Metodología de la investigación. Universitat Oberta de Catalunya (2009).
6. Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., & Abellanas, L: Cálculo. McGraw-Hill. (2006)
7. Thomas, G. B., & Weir, M. D.: Cálculo: una variable. Pearson Educación. (2006).
8. Stewart, J. Cálculo, conceptos y contextos, 3ra ed. International Thomson Editores, Distrito Federal, México (2006).
9. Buendía, G., & Ordóñez, A. El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. 12, No.1, pp.7-28 (2009).

Trazabilidad como Estrategia Metodológica para la Detección de la Resignificación de un Saber en el Diseño Curricular en Carreras de Ingeniería

Trazabilidad como Estrategia Metodológica para la Detección de la Resignificación de un Saber en el Diseño Curricular en Carreras de Ingeniería

Andrea M. Comerci, Daniela B. Emmanuele

Grupo ITSM, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250, Rosario (2000)
andreamariana.comerci@gmail.com, emman@fceia.edu.ar, emmanueledaniela@gmail.com

Resumen. Este trabajo es la continuación de una comunicación breve presentada en el EMCI XXI (2018) y es parte de una tesis de maestría en Metodología de la Investigación Científica (Proyecto ING. 548). Bajo la construcción de un marco teórico surgido a partir de constructos provenientes de la Teoría Socioepistemologica de la Matemática Educativa, la epistemología de las prácticas profesionales de Schön y el concepto de conexiones de conocimiento matemático de Businskas, nos planteamos: ¿Qué estrategias metodológicas permitirían detectar la resignificación de los saberes enseñados autovalores y autovectores -correspondiente a la asignatura básica como Álgebra y Geometría Analítica- en las planificaciones de las materias integradoras de la carreras de ingeniería civil y mecánica? Esta pregunta nos condujo a elegir un instrumento metodológico como el de Trazabilidad que adaptamos al ámbito educativo. Actualmente nos encontramos en la fase de validación por expertos de los cuestionarios que serán aplicados a docentes y estudiantes.

Palabras Clave: Diseño curricular, Ingeniería, Trazabilidad

1 Introducción

Este trabajo es la continuación de una comunicación breve presentada en el EMCI 2018 (Villa María – Argentina) y es parte de una tesis de maestría de la primera autora, bajo la dirección de la segunda, para acceder al título de Magister en Metodología de la Investigación Científica, por la Universidad Nacional de Lanús.

Nuestro estudio tratará del análisis de los diseños curriculares correspondientes a la formación de ingenieros, ya que entendemos que es un tema que adquiere especial interés en los últimos tiempos en virtud de las constantes transformaciones que sufre la sociedad de conocimiento y la demanda por parte de ésta hacia el ámbito educativo en referencia a la formación profesional.

El problema de investigación da cuenta de aquello que pretendemos investigar como así también de su alcance. Consiste en pensar un instrumento metodológico que permita identificar la resignificación progresiva de un conocimiento matemático específico que se supone -ya que aparece en los planes de estudio de las carreras que tomamos por caso- fue seleccionado para enseñar, porque, de alguna manera, ha de tratarse de un saber que un ingeniero debe tener disponible para su uso en la práctica profesional.

Asumimos como hipótesis de trabajo el hecho de que, en un diseño curricular para las carreras de ingeniería, la presencia de contenidos que provoquen la emergencia de diversas racionalidades situadas, favorecería la resignificación progresiva del saber, en tanto y en cuanto, se consideren varios contextos. Como consecuencia de ello resultaría la vinculación entre los conceptos matemáticos seleccionados para enseñar (en nuestro caso, hemos tomado el tema autovalores y autovectores) y algunos de los conceptos tratados en las materias específicas de la especialidad, correlativas con Álgebra y Geometría Analítica (AyGA), y las materias integradoras. Es decir, se resignificarían los conocimientos matemáticos, entendiendo por resignificación al proceso compuesto por la movilidad de los usos y los significados del conocimiento matemático en las diferentes situaciones específicas propias de otros dominios de conocimiento y sus conexiones.

De modo que nos planteamos: ¿Qué estrategias metodológicas permitirían detectar la resignificación de los saberes enseñados autovalores y autovectores -correspondientes a la asignatura básica AyGA- en las planificaciones de las materias integradoras de la carrera de ingeniería civil / mecánica de la Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional General Pacheco (UTN-FRGP)?

1.1 Marco teórico

Concebimos que el problema debe encararse desde dos campos disciplinares: por un lado, desde una epistemología de las prácticas que advierta cómo identificar la demanda social hacia la institución universitaria encargada de formar profesionales, y por el otro lado, desde una Socioepistemología que dé cuenta de cómo son puestos en uso, los conocimientos - en nuestro caso matemáticos- en dicha formación.

Donald Schön, desde su epistemología de la práctica profesional, pone en evidencia la problemática que experimentan las instituciones encargadas de la preparación de profesionales –en particular, Schön trata los casos para medicina, arquitectura e ingeniería- consistente en que la necesidad que tienen los aspirantes a profesionales es aquello que los centros de formación no son capaces de enseñar, y afirma que el "origen de este conflicto se produce en una subyacente epistemología de la práctica profesional, durante mucho tiempo ajena a un examen crítico, consistente en un modelo de conocimiento profesional incrustado institucionalmente en el currículum y en los convenios entre el mundo de la investigación y el de la práctica. Los centros superiores de formación de profesionales, en el marco de la moderna investigación universitaria, sientan como premisa la racionalidad técnica" ([1]). Racionalidad técnica remite, en este contexto, a aquel tipo de racionalidad -derivada de la filosofía positivista- que jerarquiza los niveles de conocimiento donde la producción del conocimiento se separa de su aplicación.

Por otro lado, para la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), el problema educativo no es el de la constitución de objetos abstractos, sino el de su significación compartida mediante el uso culturalmente situado. El problema que motiva a las investigaciones desde la perspectiva socioepistemológica persigue el fin de contribuir a una visión alternativa que contemple las prácticas sociales asociadas y, en esa medida, una mirada social y cultural del saber matemático. Ricardo Cantoral explica que "la teoría Socioepistemológica sostiene que las prácticas sociales son los cimientos de la construcción del conocimiento (normatividad de las prácticas sociales), y que el contexto influye sensiblemente en el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso (racionalidad contextualizada). Una vez que este conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa a su entorno, ya que de ellos surgió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual lo dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndose con variantes significativas (resignificación progresiva)" ([2]).

Unas de las nociones de la TSME que consideraremos vertebral en nuestro estudio es el concepto de discurso matemático escolar (dME) que hace referencia a aquel discurso que fundamenta la inclusión de un saber matemático al sistema educativo y legaliza un nuevo sistema racional. Cantoral y otros sostienen que el dME se halla presente tras aquello que se pone de manifiesto como los planes de estudio, las planificaciones de cátedra, las actividades propuestas en clase; también, en las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y la institución académica en general ([3]). El dME se asocia con tres fenómenos, a saber: adherencia, exclusión y opacidad. Cabe aclarar que estos fenómenos no revisten orden alguno; de hecho, se observan vinculados en forma integral ([4]):

-El fenómeno de adherencia, en términos generales, se relaciona con el hecho de universalizar el conocimiento que fue construido en y para responder a las necesidades de regiones dominantes, y que como consecuencia se puede ver afectada la función de éste al ser usado en un contexto con especificidades distintas al que fue construido.

-La opacidad describe el efecto producido por el dME en tanto se constituye en un obstáculo que impide la relación entre la vida cotidiana y la matemática escolar. Esta última opaca a la primera y, en consecuencia, el conocimiento del cotidiano se encuentra opaco en los marcos referenciales de la matemática escolar.

-Por último, el concepto de exclusión permite hacer visible que la centración en los objetos matemáticos (conceptos y procedimientos matemáticos) pone en el centro la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, teoremas, demostraciones, entre otras, donde el uso del conocimiento no se percibe.

Por último, para construir un sistema clasificatorio del término, uso estará asociado con el concepto de conexiones de conocimiento matemático en el sentido de Businskas ([5]) quien considera dos tipos de conexiones generales: las intramatemáticas y las extramatemáticas.

Las conexiones intramatemáticas son aquellas que se establecen entre conceptos, procedimientos, teoremas, argumentos y representaciones matemáticas entre sí. Según Businskas, estas conexiones pueden ser de diversas tipologías; entre éstas resaltamos las siguientes: representaciones diferentes, inclusión, procedimiento. Por otra parte, las conexiones extramatemáticas hacen referencia al vínculo existente entre un concepto o modelo matemático con un problema en contexto (no matemático) o viceversa. Comprenden las conexiones entre contenidos matemáticos con otras disciplinas curriculares y con situaciones de la vida diaria.

En suma, bajo este marco de referencia, asumiremos como tipos de contexto, al ingenieril y al no ingenieril; en cuanto a los tipos de la racionalidad, consideraremos la práctica o la contextualizada; al referirnos a los tipos de dME, este discurso podrá ser adherente, opaco o excluyente y, finalmente para clasificar el tipo de uso, éste será clasificado en intramatemático o extramatemático.

1.2 Metodología

Nuestro objeto o asunto de estudio serán los diseños curriculares de las carreras de ingeniería civil y mecánica. Como técnicas de recolección de datos, atendiendo a la problemática planteada, seleccionamos: análisis de documentos y entrevistas. El conjunto de documentos que serán sometidos al análisis, serán: i) los planes de estudio correspondientes a las carreras de ingeniería civil y mecánica de la UTN-FRGP; ii) las planificaciones pertenecientes a las materias específicas de dichas carreras, correlativas con la materia básica AyGA y con las materias integradoras. En cuanto a las entrevistas, las mismas están destinadas a recolectar información por parte de: a) los docentes encargados de las materias específicas antes mencionadas, y b) los estudiantes egresados de las especialidades ingenieriles elegidas.

El objetivo principal de este trabajo es la indagación, en el dME presente en el diseño curricular de las carreras de ingeniería civil y mecánica, del abordaje que se hace de la vinculación entre el contenido matemático de autovalores y autovectores -perteneciente a una materia básica- y las materias o asignaturas integradoras. Y, como objetivos secundarios, nos proponemos: i) distinguir cuál es el prácticum reflexivo en que se asienta el perfil profesional de un ingeniero de la Universidad Tecnológica Nacional; ii) determinar qué tipos de contexto son utilizados para transformar el contenido matemático curricular en conocimiento en uso; iii) identificar cuál es el tipo de racionalidad que se exige para el abordaje de los contenidos de las materias integradoras.

Entendemos que nuestro trabajo se ajusta a un estudio de casos, y asumimos que no se trata de una elección metodológica sino de un acto de optar por un objeto de estudio. Comprendemos que es el interés en un objeto lo que lo define y no el método que se pueda usar. En este sentido, cualquier unidad de análisis puede convertirse en ese objeto el cual puede tratarse tanto de una unidad individual como colectiva: un estudiante, un grupo de estudiantes, una institución; un programa, un sistema, etc. En nuestra investigación, el caso está representado por las planificaciones dentro de los diseños curriculares de las carreras de ingeniería mecánica y civil de la UTN-FRGP. Nuestra atención investigativa está puesta en la comprensión de su especificidad más que en la búsqueda de generalizaciones, en virtud de que -como bien expresa Archenti y otros- “la búsqueda no se orienta hacia el establecimiento de regularidades empíricas sino hacia la comprensión del caso en su unicidad” ([6]).

2 Implementación del protocolo de trazabilidad

Sobre este punto cabe aclarar que si bien en la literatura científico-técnica es posible hallar una amplia muestra de protocolos, no hemos podido dar con documentos que sirvieran de guía para la elaboración de los mismos, según el tema que abordamos en este estudio, de tenor educativo. Por otro lado, pensamos que es necesario procurar que tal instrumento responda a una de las finalidades que se persiguen con su elaboración, esto es, minimizar la variabilidad en la práctica, y así, alcanzar una estructura normalizada. Un protocolo, en términos generales, es definido como un acuerdo entre profesionales expertos en un determinado tema y en el cual se han clarificado las actividades a realizar ante una determinada tarea tal como es mencionado por Lavado Núñez y otros ([7]).

La implementación del proceso de trazabilidad según Sánchez ([8]) se concreta a través de ocho pasos. Nosotras, dado que pretendemos aplicarlos dentro del campo educativo, hemos reformulado esta sucesión de pasos de modo que puedan resultar útiles a nuestros objetivos. En efecto, hemos construido un protocolo de trazabilidad para la recolección de información adecuada a los fines de la investigación propuesta, cuyos pasos se detallan más abajo.

La organización curricular de UTN-FRGP propone un tronco de asignaturas como línea curricular que se desarrolla a lo largo de las carreras de ingeniería -particularmente nos centramos en las especialidades civil y mecánica- conectadas entre sí a través de las asignaturas integradoras. El tronco integrador incluye contenidos actualizados considerados necesarios en la formación global del ingeniero civil/mecánico, conformándose los siguientes grupos de asignaturas:

-Asignaturas comunes básicas homogeneizadas (comunes para todas las especialidades)

-Asignaturas específicas de la especialidad

-Asignaturas integradoras

Paso 1. Identificar en el plan de estudios las asignaturas integradoras para su análisis. En cuanto al criterio de selección, se considerarán aquellas materias integradoras correlativas a las asignaturas específicas de la especialidad, que tengan como prerrequisito el cursado de la materia AyGA. En la Fig.1. mostramos un ejemplo de las conexiones entre el grupo de asignaturas para la especialidad de ingeniería civil.

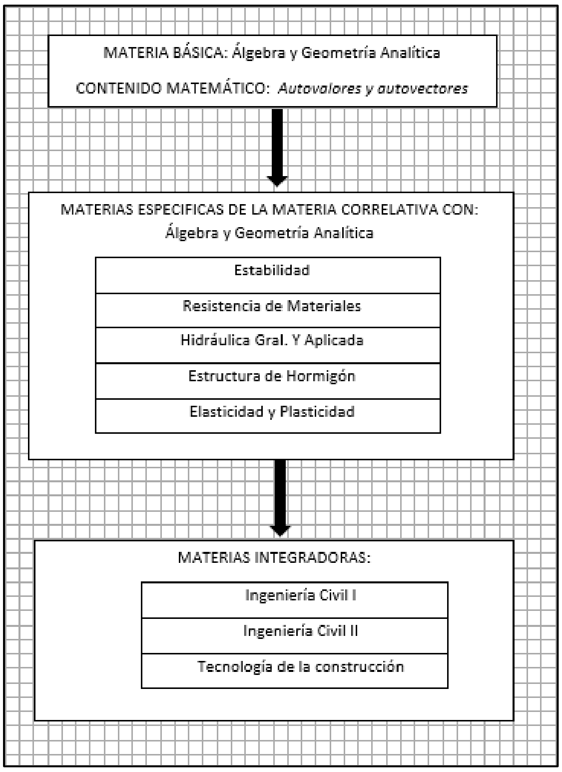


Fig.1. Relaciones entre asignaturas para ingeniería civil

Paso 2. Identificar aquellas categorías tales como objetivos, ejes de unidad, contenido, metodología, actividad de los alumnos, evaluación, cantidad de horas y bibliografía, que refieran al concepto de autovalores y autovectores ya sea en forma explícita como implícita. Cabe aclarar que las planificaciones de las asignaturas identificadas en el Paso 1 se organizan bajo categorías preestablecidas en un formulario general provisto por la institución, el cual debe ser completado por los docentes a cargo (véase como ejemplo la Fig.2).

UTN - FACULTAD REGIONAL PACHECO

PLANIFICACION DE LA MATERIA AÑO: XXXXXX

DEPARTAMENTO : XXXXX

ASIGNATURA : XXXXX CURSO: XXX HORAS SEMANALES: X

PROFESOR : XXXX JTP.: XXXXX HORAS TOTALES: X

OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA:

-
-
-

Eje de la Unidad	Contenido	Metodología	Actividad de los alumnos	Evaluación	Cantidad de horas

BIBLIOGRAFIA

F SAC 750-01-02-02 ED.: 00

Fig.2. Estructura estandarizada de la planificación de las asignaturas

Paso 3. Construcción de cuestionarios a los docentes y estudiantes. La participación y colaboración de alumnos y docentes en este estudio es voluntaria y anónima. En adelante nos referimos a ellos como: D1, D2, D3, etc. y E1, E2 respectivamente.

a) Para los docentes:

El instrumento de exploración es un cuestionario en el que se plantearon cinco preguntas sobre distintas categorías que conforman una planificación. Los participantes docentes responderán a cuestionarios en forma individual en una entrevista personal, con una duración aproximada de 45 minutos. Con la finalidad de obtener respuestas que evidencien las conexiones que nos permitan inferir el uso del contenido de autovalores y autovectores en la asignatura que dicta y por confirmar o no la trazabilidad de dicho concepto.

b) Para los estudiantes egresados:

Los participantes estudiantes responderán en forma individual a un cuestionario autoadministrado mediante un formulario configurado y distribuido mediante Google. Sabemos de las ventajas de este tipo de instrumentos caracterizadas por su rapidez debido a no precisar de entrevistador, esto es, contribuye con la disminución de sesgos introducidos por parte del entrevistador; el entrevistado puede obtener una visión global del cuestionario. Además, existe siempre la posibilidad de consultar fuentes adicionales.

Pero, también somos conocedores de las desventajas de cuestionarios de este tipo tales como: la alta tasa de no respuesta; la falta de oportunidad de formular preguntas aclaratorias; la misma visión de conjunto que puede lograr el entrevistado puede introducir sesgos; se presenta una reducción en la espontaneidad de las respuestas.

En suma, vemos que dos son los obstáculos principales que se presentan en encuestas que utilizan este tipo de cuestionario: la baja tasa de respuesta y el sesgo derivado de esa baja tasa.

Para disminuir el primero de los obstáculos, enviaremos dos ejemplares del cuestionario. En cuanto al segundo obstáculo, es más difícil de evitar dar con el mismo. Un procedimiento se basa en la suposición de que el grupo de personas que nunca contesta el cuestionario puede ser asimilado en sus características al grupo que contesta en segunda instancia (si es que se ha insistido). De esta manera puede obtenerse información global válida si se supusiera simplemente que el grupo que nunca contesta es similar al grupo que contesta en primera instancia.

El cuestionario se construyó a partir de las preguntas dicotómicas o con selección múltiple de respuestas utilizando como base a la Fig. 3.

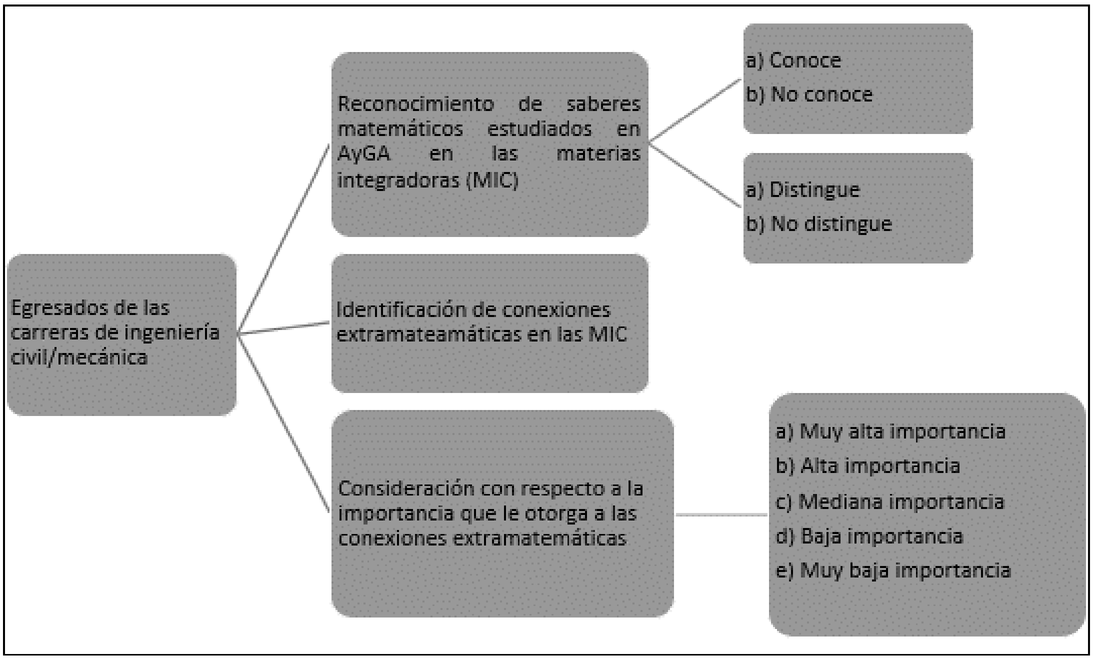


Fig.3. Esquema o matriz de datos para elaboración del cuestionario para los egresados.

Como ya ha sido mencionado, para generar nuestro dispositivo metodológico, tomamos instrumentos y herramientas provenientes de las ciencias sociales. Y, atendiendo a los esquemas metodológicos expuestos por la TSME, y con la intención de recolectar información y realizar posteriormente el análisis de datos sobre lo que dicen que hacen, lo que han dicho otros que hacen y lo que escriben que hacen los distintos objetos e individuos involucrados en nuestro caso, el modelo de triangulación resultará como lo muestra la Fig. 4.

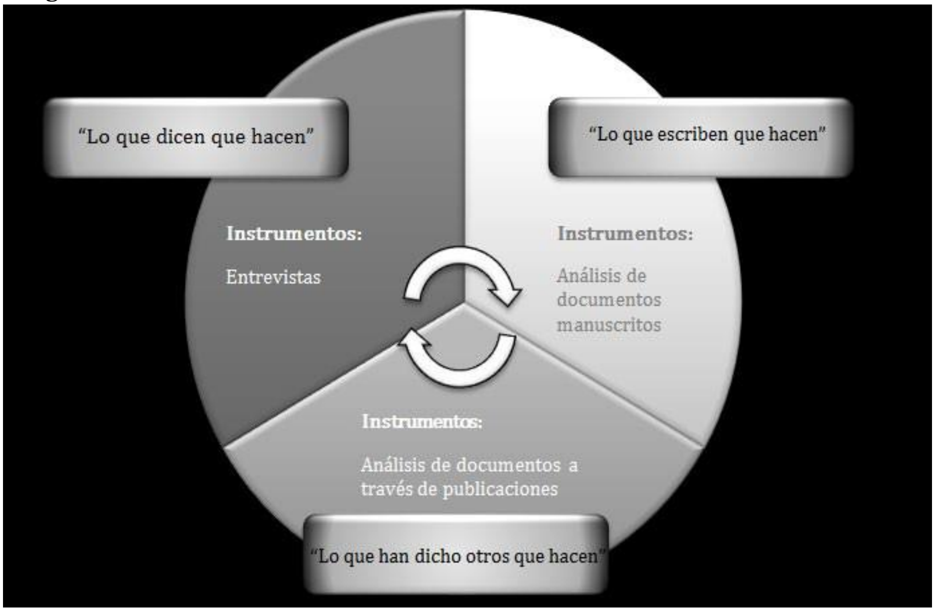


Fig. 4. Modelo de Triangulación basado en los esquemas metodológicos sugeridos desde la TSME

3 Conclusiones y trabajos futuros

Consideramos que hasta aquí hemos generado un constructo como es el de trazabilidad de un contenido matemático en una situación escolar entendido como un proceso que permite pesquisar el grado de resignificación progresiva de un saber o conocimiento en uso presente en los discursos profesionalizantes que se da en los sistemas didácticos en una carrera académica-profesional como es el caso de la ingeniería.

Empero, como hemos comentado inicialmente, se trata de un trabajo académico en proceso. En esta etapa, nos encontramos desarrollando y certificando la validez y confiabilidad de los instrumentos elaborados a partir del protocolo de trazabilidad mediante el juicio por expertos. No obstante, entendemos que hemos construido un instrumento metodológico que sería posible aplicar para todas las especialidades ingenieriles y para todos los conceptos matemáticos que se involucran en la universidad.

Referencias

1. Schön, D.: *La formación de profesionales reflexivos*. Paidós. (1998)
2. Cantoral, R.: *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Editorial Gedisa, pp. 162. (2014)
3. Cantoral, R., Montiel, G., Reyes Gasperin, D.: Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. AIEM - *Avances de Investigación en Educación Matemática*, Nº 8, pp. 9 – 28. (2015)
4. Cordero, F. et al.: *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa. (2015)
5. Businskas, A.: Conversations about connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. *Disertación de tesis doctoral por la Facultad de Educación* - Universidad Simón Fraser. (2008)
6. Archenti, N., Marradi, A.; Piovani, J.: *Metodología de las Ciencias Sociales*. Emece. pp. 125 – 127. (2007)
7. Lavado Núñez, Mª Elena, et al.: *Registros y protocolos*. Sevilla: Hygia de Enfermería, pp. 10 – 14. (2004)
8. Sánchez, R.: *Introducción a la Trazabilidad: un primer acercamiento para su comprensión e implementación*. Buenos Aires: El Escriba. (2008)

Análisis de los significados personales e institucionales relacionados a problemas de optimización

Flavia Valeria Alvarez

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Agrarias, Universidad Católica Argentina
Alicia Moreau de Justo 1500, Ciudad de Buenos Aires, Argentina
flaviaalvarez@uca.edu.ar

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo encontrar algunas posibles causas de los problemas de interpretación de enunciados de optimización que poseen los alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería. Para eso se analizaron las producciones de los alumnos mediante las configuraciones cognitivas obteniendo de esta manera el significado personal de los estudiantes, y comparándolo con el significado institucional: el de referencia, el implementado y el pretendido. Se concluyó que las principales causas están asociadas a falencias relacionadas con objetos geométricos y a no tener interiorizado el significado de la interdependencia de magnitudes. El trabajo está enmarcado dentro del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS).

Palabras clave: Significados personales e institucionales, Optimización, Configuraciones epistémicas y cognitivas, Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática.

1 Introducción

La optimización es un concepto que utilizamos diariamente en nuestra vida real, minimizar el costo y el tiempo para llegar a un lugar, comprar algo que más nos convenga, utilizar la menor cantidad de material para fabricar algo, maximizar las ganancias, etc. Sin embargo, siempre nos generó un profundo interés el hecho de que llegado el momento de su estudio en la clase correspondiente a análisis de una variable para las carreras de Ingeniería, se observa un marcado desinterés y rechazo por estos problemas, no así por el estudio de funciones, sino por aquellos problemas dados en sistema verbal con la necesidad de su modelización. Esta es una problemática consensuada por todos los docentes de matemática correspondientes a la materia Análisis Matemático 1 para las carreras de Ingeniería. Modelizar situaciones problemáticas es inherente a la actividad matemática, y conocer posibles causas de su dificultad puede ayudar a los profesores a pensar nuevas maneras de planificar sus clases. La didáctica de la matemática se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción. Intentamos analizar cuáles podrían ser las causas de las dificultades en la interpretación de estos problemas utilizando el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) que ha sido desarrollado, entre otros, por Godino, Font, Batanero, Wilhelmi y Contreras, mediante un análisis exhaustivo de las producciones de los alumnos, obteniendo de esta manera una visión de los significados personales de los mismos, cómo así la influencia de las clases impartidas en el marco de este tema y de las prácticas utilizadas, que dan sentido al significado institucional. Estas discrepancias entre los significados institucionales y personales nos brindan información de conflictos semióticos que deben ser atendidos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

2 Antecedentes

En la actualidad la resolución de problemas se convirtió en uno de los ejes principales de la actividad matemática en el aula a todo nivel educativo pues pone en juego diferentes capacidades básicas como la lectura, la reflexión y la toma de decisiones al planificar estrategias y procedimientos.

Polya [1] plantea dicha actividad como un arte en el que la imitación del maestro y la práctica ayudan a interiorizar un modo de hacer. Se basa en un proceso constituido por cuatro fases: comprender un problema, concebir un plan, llevarlo adelante y revisarlo, que van ayudando a desbrozar el camino que conduce a la solución, gracias a sugerencias y preguntas que suelen utilizar quienes dominan este arte. La actividad mental se traduce en un diálogo verbal con el maestro o un diálogo interior con uno mismo. Las ideas de Polya se basan en el modelo de la enseñanza de estrategias heurísticas, avanzando linealmente a la solución de un problema.

Para Schoenfeld [2] la resolución de problemas no es un proceso lineal como el que plantea Polya, sino que requiere de ir y volver de las distintas fases que propone, las cuales son*: análisis*: se traza un diagrama, se examinan los casos particulares y se prueba simplificar el problema; *exploración*: mediante problemas equivalentes, *ejecución*: se toma una estrategia y se usa para intentar resolverla, *comprobación de la solución obtenida*.

Noda Herrera [3] en su tesis doctoral centró su atención en la fase de preparación de problemas que están bien o mal definidos, analizando la fase de comprensión del problema, observando cómo identifican las situaciones problema, cómo actúan sobre las condiciones y el objetivo y qué relaciones establecen entre las condiciones y el objetivo, y qué recursos utilizan para justificar su accionar. Se encontraron mayor cantidad de resoluciones incorrectas en problemas de contextos geométrico y algebraico y los mal definidos a los cuales le sobran datos, por lo que el contexto del problema así como la tipología del mismo influyen en el comportamiento de los resolutores.

Muchos de estos estudios se basaron en la resolución de problemas dados mediante lenguaje verbal y su necesaria traducción al simbolismo algebraico para su resolución, constatándose que los alumnos se resisten al uso del simbolismo algebraico prefiriendo la utilización de estrategias y representaciones aritméticas [4].

Socas, Ruano y Hernandez [5] realizaron un análisis didáctico del proceso matemático de modelización en relación a las dificultades y los errores de un grupo de alumnos. En este trabajo concluyeron que el origen de las dificultades más frecuente es la ausencia de sentido y que éste se manifiesta en dos ámbitos: aspectos que han quedado sin resolver en aritmética o geometría y por las características propias del lenguaje algebraico, en los procesos de sustitución formal y generalización.

Malaspina [6] en su tesis doctoral realizó un análisis del rigor, la formalización y la intuición en resolución de problemas de optimización, tanto de variables discretas como continuas. Se arribaron a las siguientes conclusiones: hay deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver problemas de optimización. La deficiencia en la argumentación radica en la poca presencia de justificación de que el resultado es óptimo. Se perciben capacidades para intuir las respuestas correctas pero falta experiencia previa en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado.

Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto [7] realizaron varias investigaciones de optimización bajo el marco teórico EOS, en su trabajo concluyeron que en su gran mayoría los alumnos pueden plantear un área en dos variables, pocos logran armar la función a optimizar. Sin embargo aquellos que lo lograron estaban orientados a la utilización de herramientas del análisis matemático, y ningún caso de darle valores a las variables o usar función cuadrática y buscarla extremos mediante su vértice. En la continuación de su trabajo [8] encontraron 3 tipos de conflictos semióticos asociados a dos problemas de optimización, aunque dados en diferentes registros pero con resultados similares, todos del tipo interaccional, ya que entre los distintos sujetos involucrados se produce la disparidad de significados. El primero al interpretar un rombo como un cuadrado, el segundo respecto a la determinación de la función a optimizar y el tercero relacionado a la argumentación de que un punto crítico es un extremo.

Encinas, Avila y De la Fuente [9] realizaron un estudio sobre la eficacia de estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de optimización utilizando como marco teórico el EOS y algunos elementos de la metacognición. Concluyeron que para los estudiantes el principal obstáculo se presenta en el proceso de construcción de la función que modela matemáticamente el problema, específicamente, en la identificación de las magnitudes que varían y las relaciones entre ellas. Los estudiantes que logran obtener la función dan muestra de un buen dominio de los procesos algorítmicos para ejecutar lo planeado. Los estudiantes más eficaces en la resolución del problema no sólo tienen un buen nivel de comprensión de los objetos y procesos matemáticos, sino también de los procesos metacognitivos.

Con la idea de ampliar las investigaciones ya realizadas nos basamos específicamente en las primeras etapas planteadas por Polya, las de identificación y preparación, pues nuestro interés radica en la interpretación de los enunciados de los problemas de optimización, originados desde diferentes contextos y desde distintos sistemas: gráfico, verbal, algebraico, y su modelización, desde la cual analizar las dificultades a la hora de plantear la función a optimizar y su posterior puesta en práctica del concepto de estudio de funciones.

Esta investigación se direcciona en el mismo camino de las realizadas por Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto [7], [8], [10] y de Encinas, Ávila y De La Fuente [9], poniendo el acento en la ausencia o el conocimiento erróneo de los objetos primarios como lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos para explicar la problemática planteada, mediante una categorización de las configuraciones cognitivas de los alumnos. Como a su vez relacionarlo en forma global con el tratamiento del tema en el aula y a través de las practicas propuestas.

Como consecuencia nos surgen las siguientes preguntas como ejes para nuestra investigación:

- ¿La carencia de qué objetos primarios y/o su incorrecta utilización, son los que influyen en la dificultad para interpretar los problemas, poniendo el foco en las fases de identificación y preparación?
- ¿A qué distancia se encuentra el significado personal que alcanzan los alumnos del significado institucional pretendido en el tema de optimización?

Por lo que el objetivo que surge de estas preguntas es: Analizar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción, las configuraciones cognitivas de los alumnos y las configuraciones epistémicas de las prácticas utilizadas para determinar si hay discrepancia entre los significados personales e institucionales.

3 Marco teórico

Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la cognición matemática (EOS):

Este enfoque tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto y significado, con el fin de hacer patente y operativo el triple carácter de la matemática y la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, y su mutua interdependencia.

Godino y Batanero [11] consideran práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Interesa considerar los sistemas de prácticas puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas, si las realiza una persona se habla de "significado personal" y las compartidas en el seno de una institución se consideran "significado institucional".

Hay diferentes tipos de significados institucionales:

Implementado: sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.

Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.

Los significados personales son:

Global: totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno relativas a un objeto matemático.

Declarado: prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas.

Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. Interesará tener en cuenta los significados iniciales y los que finalmente alcancen.

En este enfoque se considera que los objetos matemáticos son emergentes de un sistema de prácticas. Hay dos niveles de objetos que emergen, por un lado en el primero tenemos aquellas entidades que pueden observarse en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) y en el segundo aquellos objetos que surgen de las diferentes maneras de ver, hablar u operar sobre los objetos del primer nivel.

Tipología de objetos primarios: elementos lingüísticos, situaciones-problema, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos, argumentos. Las situaciones-problema son la razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Estos objetos se relacionan formando configuraciones, las cuales pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

En este enfoque se entiende la comprensión como competencia y no tanto como proceso mental, y por lo tanto se puede interpretar la comprensión de un objeto por parte de un sujeto en términos de las funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que se pone en juego el objeto como expresión o contenido. Estas relaciones sirven para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos no resultan de su falta de conocimiento, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica [11]. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una o muchas funciones semióticas.

Como unidad de análisis didáctico esta teoría propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos. La configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, o sea, una tarea, procedimientos requeridos para su resolución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, pueden estar a cargo del profesor, del estudiante o de ambos. Tiene asociada una configuración instruccional constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo se realiza mediante las configuraciones cognitivas.

Todas las nociones previamente establecidas se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, la cual se define como la articulación coherente y sistémica de las siguientes seis componentes:

Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados respecto de un significado de referencia.

Idoneidad cognitiva: expresa el grado en que los significados pretendidos estén en la zona de desarrollo próximo de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos.

Idoneidad interaccional: grado en que las configuraciones didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales y resolverlos durante el proceso de instrucción.

Idoneidad mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Idoneidad emocional: grado de implicación del alumno al proceso de estudio.

Idoneidad ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas para hablar de idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global.

4 Campo y Metodología

El tipo de investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de carácter mixto. Se trata de un estudio de tipo exploratorio. Principalmente posee características propias de la investigación cualitativa ya que estamos interesados en describir las actuaciones de los estudiantes en relación a la interpretación de enunciados de optimización mediante instrumentos idóneos que permitan evaluar la presencia o ausencia de dicha capacidad y sus causas. Comenzamos trabajando con los significados institucionales, de referencia, pretendido e implementado, y luego analizamos los significados personales logrados mediante las configuraciones cognitivas de los alumnos. El componente cuantitativo lo encontramos al categorizar las configuraciones cognitivas y sus respectivos porcentajes de aparición, como así al considerar el grado de corrección de los problemas propuestos, respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, haciendo un tratamiento estadístico elemental de los datos obtenidos.

La población analizada son los alumnos de primer año de la facultad de Ingeniería de UCA, entre los tres cursos de ese momento seleccionamos una muestra estadística aleatoria simple compuesta por los alumnos de uno de esos tres cursos. Seleccionamos uno sólo para así analizar las producciones de los alumnos en relación a la clase impartida.

A fin de contestar a las preguntas que motivan esta investigación realizamos la semiometría, o sea la caracterización de los significados personales e institucionales del tema, para luego analizar la ecología de los significados, el estudio de las relaciones entre ambos significados [12].

Para cumplir con dicho fin comenzamos realizando un análisis del significado de referencia basado en libros de textos de Cálculo diferencial en una variable utilizados en este nivel, mostrado en la Tabla 1.

Tabla 1. Configuración epistémica del significado institucional de referencia utilizando como base los libros de análisis de una variable de los siguientes autores: Piskunov (1969), Rey Pastor (1952), Stewart (2000), y Apostol (1984).

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	Verbales: Optimizar. Máximos relativo y absoluto. Mínimo relativo y absoluto. Extremos o valores extremos. Puntos críticos. Simbólico: expresiones de las fórmulas de la función a optimizar. Gráficos: esquemas de las situaciones.
Situaciones-problemas	Los problemas encontrados en los libros de textos analizados versan en distintos contextos: geométricos, aritméticos, físicos, económicos. También se observan distintos grados de generalidad y particularidad. Problemas con números específicos, y problemas generales como los encontrados en el libro de Apostol: Principio del producto máximo con suma constante o principio de la suma mínima, con producto constante. Además encontramos distinción de problemas según el dominio trabajado, en un segmento cerrado, o en dominios abiertos.
Conceptos	Definición de mínimo relativo. Definición de máximo relativo. Definición de mínimo absoluto. Definición de máximo absoluto. Punto crítico de una función. Derivada.
Proposiciones	.Si f es derivable en a y en ese punto hay un extremo entonces $f'(a)=0$. . Sea f derivable en (a,b) y $f'(x)<0$ para todo x en (a,b), entonces f decrece en (a,b) . Sea f derivable en (a,b) y $f'(x)>0$ para todo x en (a,b), entonces f crece en (a,b)
Procedimientos	Identificación de los datos y la relación entre ellos. O sea, una ecuación que los relaciona. Construcción de la función a optimizar. Escritura de la función a partir de una única variable. Determinación del dominio de la función según el contexto del problema. Derivada de la función a optimizar mediante reglas de derivación. Búsqueda de puntos críticos.
Argumentos	Criterio de la primera derivada para determinar extremos relativos. Posterior estudio del comportamiento en los infinitos en caso de que el dominio sea todos los números reales para asegurar que es absoluto. O dentro del dominio que corresponda. Criterio de la segunda derivada para determinar extremos relativos. Teorema de Weierstrass para justificar la existencia de extremos absolutos en un intervalo compacto.

Luego analizamos el significado institucional pretendido mediante configuraciones epistémicas de los ejercicios de la práctica de la materia Cálculo Elemental de la Universidad Católica Argentina (UCA) referidos a optimización, como observamos en la Tabla 2, con el ejemplo del análisis de uno de los problemas.

Tabla 2. Ejemplo de la configuración epistémica de uno de los problemas de la guía.

a) ¿Qué puntos sobre la gráfica de f(x) = 4 – x² son más cercanos a (1, 2)?

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	Verbal: puntos de la gráfica de f, más cercanos. Simbólico: fórmula a optimizar. Gráfico: gráfico de la función cuadrática y el punto (1,2)
Situación-problema	Problema geométrico con dominio abierto. R
Conceptos	Distancia entre dos puntos del plano. Mínimo. Función derivada. Puntos críticos. Dominio.
Proposiciones	La distancia entre dos puntos del plano es: $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ Los extremos se alcanzan en los puntos críticos de la función a optimizar. Si d'(x) es positiva en un intervalo (a,b) entonces d crece en (a,b) Si d'(x) es negativa en un intervalo (a,b) entonces d decrece en (a,b)
Procedimientos	Armado de la función a optimizar: $d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}$ Cálculo de la derivada de d. Búsqueda de puntos críticos de d igualando a 0 la derivada y resolviendo la ecuación correspondiente.
Argumentos	Analizar signo de la derivada y aplicar el criterio de la derivada primera para conocer mínimos y máximos y compararlos para encontrar el absoluto.

Para el análisis del significado institucional implementado, realizamos el estudio de la clase observada mediante un modelo teórico para el análisis de procesos de enseñanza-aprendizaje en matemática desarrollado por Font, Planas y Godino [13], basado en cinco niveles de análisis los cuales son aplicados conjuntamente a un episodio de clase. Este modelo se ha elaborado para describir (¿qué ha ocurrido aquí?), explicar (¿por qué ha ocurrido?) y valorar (¿qué se podría mejorar?) procesos de instrucción en el aula de matemáticas. El objetivo es lograr una valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción [14].

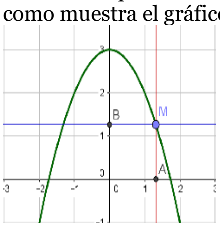
Para estudiar el significado personal logrado por los estudiantes recolectamos una muestra de 39 alumnos del primer año de Ingeniería de UCA, en la cual se propusieron tres problemas de optimización, elegidos en relación al significado institucional, dos semanas después de su trabajo en clase. (Tabla 3)

Tabla 3. Problemas trabajados por los alumnos.

Problema A:
Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.

Problema B:
Encontrar dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno por el cubo del otro sea mínimo sabiendo que el que está elevado al cubo se encuentra en el intervalo [14;22].

Problema C:
Considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica, M, situado en el primer cuadrante (x ≥ 0, y ≥ 0). Si por el punto M se trazan paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos, A y B, respectivamente, como muestra el gráfico dado a continuación.



Hallar las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga área máxima.

Para el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* [15], la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los alumnos al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (*elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos*) que intervienen en las prácticas que permiten su resolución [11].

Utilizamos las herramientas configuración epistémica y configuración cognitiva del EOS para examinar las producciones individuales de los alumnos y analizar los objetos primarios y sus relaciones, o falta de ellas.

Para cada problema realizamos una grilla con los objetos primarios presentes en las configuraciones epistémicas realizadas por los expertos y se analizó de esta manera a cada estudiante para categorizar las configuraciones cognitivas que se presentaron. En el caso del problema A las configuraciones son las descriptas en la Tabla 4.

Tabla 4. Descripción de las configuraciones cognitivas de los alumnos en el Problema A.

Configuración nº	Descripción
A1	Muestran poseer los conceptos y proposiciones asociados al área lateral y al volumen, como así también los procedimientos necesarios para realizar el estudio de funciones, pero sus argumentos son incompletos pues prueban que el extremo es relativo no absoluto.
A2	Muestran poseer los conceptos y proposiciones asociados a la geometría y los procedimientos necesarios hasta la obtención de los puntos críticos. Sin embargo, aparenta tener falencias en el concepto de punto crítico, al considerarlo un extremo sin realizar ningún análisis
A3	Relacionan bien conceptos y proposiciones para proceder al armado de la función a optimizar, pero entendiendo que las 4 caras laterales son iguales. Los procedimientos seguidos en cuanto a la aplicación de derivadas son coherentes.
A4	Tienen conocimiento del lenguaje, conceptos y proposiciones, pero no logran la relación entre los objetos para armar en forma correcta la función a optimizar, sin embargo sí considera que necesita minimizar el área. Ante esta situación no proceden con su estudio o lo hacen mal, como por ejemplo, derivando con dos variables.
A5	Parecen poseer el lenguaje, los conceptos y proposiciones geométricos necesarios pero sin embargo no pueden relacionarlos para armar la función a optimizar correctamente.
A6	Noo poseen los conceptos y proposiciones de volumen o área incorporados.

5 Resultados

5.1 Significado institucional pretendido

Lo constituyen ocho problemas que forman parte de la práctica de aplicación de la derivada de la materia. Encontramos objetos en común en todos ellos como son los conceptos, proposiciones y procedimientos utilizados relacionados con la herramienta del uso de derivada y estudio de funciones para hallar extremos. En sus argumentos encontramos 3 diferentes, trabajar dentro de un dominio compacto utilizando el teorema de Weierstrass, en un conjunto abierto con un único punto crítico y en un abierto pero con tres puntos críticos y al haber dos mínimos relativos hay que analizar cuál es el absoluto.

En cuanto a los conceptos y proposiciones que tienen que manipular nos encontramos con siete problemas de ocho en contexto geométrico. Tanto como de figuras planas en su mayoría, como uno de cuerpos y otro de distancia, notando la necesidad de conocer las fórmulas de perímetros, áreas, volúmenes, medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo y la fórmula de distancia.

En el 75% de los problemas es necesario conocer la condición que relaciona magnitudes asociado al significado de ser solución de una ecuación de varias variables.

5.2 Significado institucional implementado

Las prácticas matemáticas llevadas a cabo en esta clase se centró en la ejemplificación de problemas de optimización, aplicando conceptos estudiados previamente como el estudio de funciones y determinación de extremos. No se incorporaron conceptos nuevos sino que cada configuración didáctica estaba pensaba para trabajar problemas en distintos contextos y con dominios diferentes que implicaban argumentaciones de variada índole.

En toda la clase el trabajo fue realizado por el profesor en el pizarrón con poca participación de los alumnos, éstas aparecieron en algunas interacciones de tipo dialógicas. Por lo tanto, observamos un tipo de configuración didáctica magistral. El docente llevó adelante las funciones de planificación, al seleccionar problemas que abarcaban diferentes contextos y argumentaciones necesarias para resolver la práctica, también la de regularizar o institucionalizar, ya que la clase fue expositiva a cargo del docente de presentar conceptos, propiedades y procedimientos, como también la formulación y validación.

La valoración de la idoneidad didáctica se encuentra desarrollada en la Tabla 5.

Tabla 5. Valoración de la idoneidad didáctica de la clase observada.

Idoneidad	Descripción
Epistémica	Clase de tipo magistral, no se permite al alumno ocasiones de "generación del problema", ni de asumir los problemas como propios. Diferentes formas de lenguaje: verbal al momento de enunciar las situaciones-problemas, gráfica al transcribir los problemas en esquemas para una mayor comprensión por parte del alumno y para ejemplificar las situaciones planteadas, y algebraica al momento de modelizar en forma genérica las fórmulas que los definen, todas consistentes con las observadas en el significado de referencia. Los conceptos trabajados; los procedimientos y argumentaciones son coincidentes con los desarrollados en el significado de referencia. Los objetos matemáticos se relacionan entre sí pues, por ejemplo, se utilizan las proposiciones para justificar que el extremo es absoluto. La idoneidad epistémica es media a alta.
Cognitiva	Los alumnos poseen los conocimientos previos necesarios para afrontar estos problemas y se encuentran dentro de la zona de desarrollo potencial ya que en clases anteriores se impartieron los conceptos asociados al estudio de funciones. Hay un acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planteados. En el registro de clase no se puede observar claramente si el armado de la función a optimizar, ni si el proceso de justificación de la existencia de extremos absolutos fue apropiado por todos los alumnos. Consideramos que el proceso de instrucción posee idoneidad cognitiva media.
Afectiva	Las propuestas generan interés ya que muestran la aplicación de la matemática a la vida real. Se resalta la precisión de las matemáticas al evidenciar la necesidad de respuestas formales y no dadas al tanteo. No se promueve la participación de los estudiantes en las actividades, son observadores. Por lo tanto la clase posee una idoneidad afectiva media.
Interaccional	El aprendizaje se produce por observación de lo que hace el experto, y el alumno es receptor del proceso y sigue instrucciones. No se implica a los alumnos en la resolución de los problemas por lo que se evidencian pocos conflictos semióticos, son preguntas cerradas y específicas cuyas respuestas son convergentes y fácticas. Los alumnos no interactúan entre sí, solo se producen interacciones entre docente y alumnos. No podemos observar evidencia del progreso cognitivo de los alumnos. La idoneidad interaccional es baja.
Mediacional	El aula en forma de auditorio con escalones anchos donde se encuentran los bancos favoreciendo el tipo de clase magistral. Durante la misma no se utilizan materiales manipulativos e informáticos, aun cuando el aula cuenta con computadora y proyector, y se recuerda que en clase pueden usarse calculadoras mientras que en las etapas de evaluación no. El tiempo de la clase fue aproximadamente de 90 minutos, permitiendo completar los ejemplos. La idoneidad mediacional es de media a baja.
Ecológica	Los contenidos desarrollados en la clase forman parte de un objeto nuclear de la disciplina. Por un lado se apoya principalmente en la modelización de situaciones, y por otro lado es la principal aplicación del estudio de funciones. No se integran nuevas tecnologías ni se trabaja en investigación ni practicas reflexivas por parte de los alumnos. Se relaciona este contenido con otras disciplinas de la matemática como la geometría, y con disciplinas extra matemáticas como la economía. La idoneidad ecológica es media.

5.3 Significado personales de los alumnos

5.3.1 Problema A:

El 16% que los alumnos lograron interpretar correctamente el problema, con conocimiento de la herramienta que tienen que utilizar para su resolución. Mientras que un 21%, pudo reconocer al volumen como la condición, lo que falló en estos casos fue el procedimiento "armado" de la función a optimizar, al no considerar las caras laterales diferentes y verlas como 4 iguales, pero continuando con el procedimiento de derivadas, en este caso consideramos que pudieron interpretar el problema, obteniéndose así un total de 37%. Hay un total de 49% de los alumnos que no pudieron interpretar el problema ni qué herramienta utilizar. De ellos, 8% conoce el lenguaje, conceptos y proposiciones asociadas al área lateral y al volumen pero no pueden relacionarlos para armar una función de una variable. Otro 8%, aun sabiendo las fórmulas del volumen o del área, según el caso, no pudieron armar la función área lateral. En este caso consideramos una falla en la relación de los conceptos y las proposiciones sin alcanzar los procedimientos necesarios. El resto (33%) ni siquiera conocen los conceptos geométricos involucrados, ni las proposiciones asociadas.

Del total de alumnos que no interpretaron el problema encontramos que un 68% no tiene los conceptos básicos de geometría, y el restante 42% los conoce pero no puede establecer una relación entre ellos para proseguir con el problema.

A su vez realizamos un análisis cuantitativo (Figura 1) en relación al grado de corrección de los problemas propuestos, en este caso consideramos correctas, aunque incompletas por la falta de justificación del extremo absoluto, puesto que lograron llegar al mínimo. Parcialmente correctas a los alumnos que alcanzaron los puntos críticos, aquellos alumnos que consideraron 4 caras iguales pero continuaron con la herramienta correcta. El resto incorrectas.

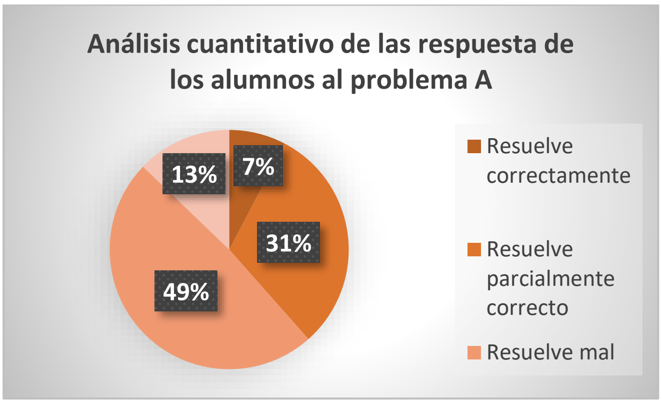


Figura 1. Análisis cuantitativo de las respuestas al problema A.

5.3.2 Problema B

El 31% de los alumnos lograron interpretar el problema y aplicar correctamente la herramienta a utilizar por encontrarse dentro de un intervalo compacto y por lo tanto cambiar las consideraciones de los puntos críticos y su justificación. Tienen el lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos incorporados, algunos no saben cómo utilizar el teorema de Weierstrass pero sí que existe esa herramienta, y no se trabaja de la misma manera que si fuesen extremos libres.

Un 46% pudo traducir del sistema verbal al algebraico, consideraron correctamente la condición que implica la relación entre las variables y reemplazaron en la función a optimizar. Por lo tanto tienen incorporado el lenguaje, los conceptos, proposiciones y procedimientos asociados al armado de la función. De ellos, el 36% conoce la idea de buscar en la derivada puntos críticos pero sin tener en cuenta los extremos del intervalo, en algunos casos aplicando justificaciones incorrectas y en otras sin poder continuar o no saber cómo. Por lo tanto fallaron en conceptos y proposiciones relacionadas con los puntos críticos en un intervalo cerrado y procedimientos acordes.

El 21% no posee los conocimientos necesarios, fallando los conceptos y principalmente los procedimientos al no poder armar la función a optimizar.

Por lo tanto consideramos que el 67% de los alumnos no logró interpretar el problema de forma adecuada. Sin embargo haré una distinción entre ellas. Un 36% fallaron en la proposición: “Los extremos se alcanzan en los puntos críticos de la función dentro del intervalo o en los extremos del mismo”, tanto por no tenerlos en cuenta, como por no calcularlos o hacerlo en forma incorrecta, llegando a una interpretación parcial del problema, reconociendo la función a optimizar pero no usando la herramienta correspondiente al dominio dado.

En el análisis cuantitativo (Figura 2), obtuvimos los siguientes resultados, considerando correctas aquellas resoluciones de alumnos que completaron el ejercicio con la argumentación correspondiente. Parcialmente correctas aquellas que tuvieron en cuenta los extremos pero argumentaron mal, y las que obtuvieron puntos críticos y trabajaron como si fueran extremos libres. El resto consideradas respuestas incorrectas.

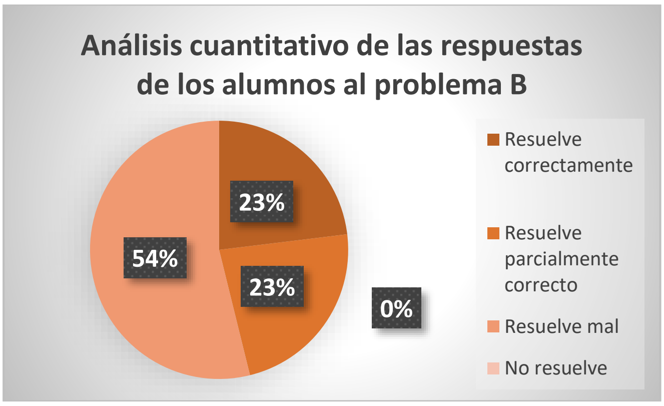


Figura 2. Análisis cuantitativo de las respuestas al problema B.

5.3.3 Problema C

Un 15 % de los alumnos poseen el lenguaje, los conceptos, proposiciones y procedimientos que permiten identificar la interpretación correcta del enunciado. El 15% restante que lo resolvió, no lograron interpretarlo de manera adecuada. Entre estos últimos, un 8% parece fallar es el concepto de área, mientras que un 5% más, aunque saben el área del rectángulo y cómo identificar el punto M, no pudieron relacionarlos para proceder al armado de la función, el procedimiento no pudo llevarse a cabo. Lo que llama la atención es la gran cantidad de alumnos que no resolvieron este ejercicio, 67%. Por lo que consideramos que este problema no nos brinda información relevante a la hora del análisis por el bajo número de resoluciones.

En el análisis cuantitativo (Figura 3), en relación al grado de corrección de los problemas propuestos, consideramos correctas aquellos alumnos que encontraron el máximo relativo aunque incompleto por la falta de justificación del extremo absoluto. Parcialmente correctas a los alumnos que alcanzaron los puntos críticos. El resto incorrectas.

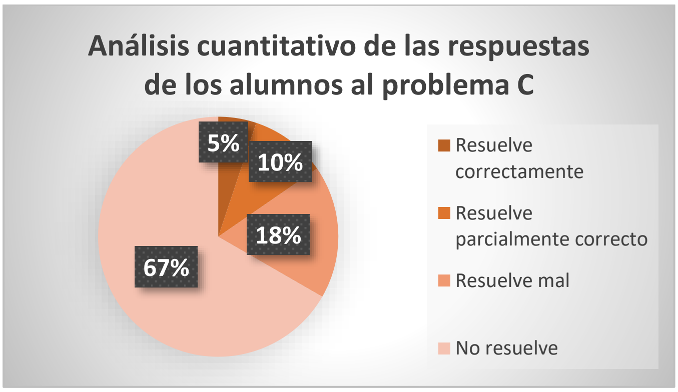


Figura 3. Análisis cuantitativo de las respuestas al problema C.

6 Conclusiones y sugerencias

6.1 Conclusiones

Coincidimos en las conclusiones que obtuvo Noda Herrera [3] al encontrar mayor dificultad en la fase de comprensión del problema en contextos geométricos que en contextos aritméticos. La traducción al lenguaje algebraico del lenguaje verbal en contexto aritmético no trajo aparejadas dificultades significativas, los errores provinieron, en general, de desconocer fórmulas geométricas, no de su traducción al sistema algebraico.

Se observaron falencias en los conceptos de ecuación y función acarreando como consecuencia errores en el procedimiento "armado de la función a optimizar". Mostraron una carencia de conexión entre la condición, dada por la ecuación, y la función a construir, parecen no tener interiorizado el significado de la interdependencia de las magnitudes.

Se evidenciaron dificultades en la conceptualización de extremos absolutos, no mostrando una diferenciación con extremos relativos.

La clase posee una idoneidad didáctica media a baja. La idoneidad epistémica nos permitió identificar que las situaciones elegidas por el docente son representativas del significado institucional de referencia y del pretendido al considerar todos los objetos primarios y sus relaciones. Sin embargo, al tratarse de una clase magistral, no hay participación activa por parte del alumnado en la generación de problemas ni de la asunción de tales como propios lo que provoca una baja en la idoneidad didáctica de todo el proceso.

Concluimos que una clase enfocada desde la exposición limita la idoneidad interaccional que promueve la comprensión del tema, tanto entre pares como entre alumnos y docente, desfavoreciendo la aparición de conflictos semióticos y su resolución.

Inferimos que es idónea cognitivamente al haber tratado previamente los conocimientos necesarios, tales como derivadas y estudio de funciones, permitiendo que los conceptos trabajados se encuentren en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, pero sin tener indicios del grado de apropiación de ellos en ese momento.

El significado institucional pretendido es acorde al significado de referencia establecido en los libros de texto analizados, considerando los mismos tipos de ejercicios, los cuales se basan en conceptos, propiedades y procedimientos relacionados con el estudio de funciones del cálculo diferencial.

Al momento de analizar el significado implementado se observa una gran importancia a la distinción entre los tipos de dominio y su influencia en las argumentaciones, la cual no es evidenciada por los alumnos al resolver el problema B. Por lo tanto se nos brinda información de un conflicto semiótico epistémico respecto a una disparidad de significado en el concepto de punto crítico en un intervalo cerrado.

Tanto en el significado institucional pretendido como en el implementado se puso especial énfasis en la justificación del extremo absoluto, sin embargo no es evidenciado en el significado personal declarado, pues los estudiantes identificaron extremos relativos como absolutos, generando de esta manera un conflicto semiótico interaccional.

6.2 Sugerencias

Teniendo en cuenta que se habían trabajado previamente los conceptos de estudios de funciones y los mismos se encontraban en una zona de desarrollo próxima, consideramos que se podría permitir un trabajo autónomo del alumno mediante la exploración de las situaciones problemáticas y su posterior comunicación y validación delante del resto de la clase, favoreciendo de esta manera un posible aumento de las distintas idoneidades, principalmente la interaccional, la cognitiva y la epistémica, sin necesidad de una exposición previa del docente.

Así mismo, el trabajo en grupos colaborativos podría aumentar la idoneidad interaccional, favorecida por la comunicación entre los pares.

Para las falencias de tipo geométrico proponemos ofrecerles a los alumnos una lista con las fórmulas que podrían llegar a necesitar para que éste no sea un obstáculo en el desarrollo de estos problemas.

Referencias

1. Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. Trillas. México. (1995)
2. Schoenfeld, A. Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press. (1985)
3. Noda Herrera, M.A. La resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Revista Números. Vol.47, pág. 3-18. (2001)

4. Kieran, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F.K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-62). Charlotte, NC: Information Age Publishing. (2007)
5. Socas, M.; Ruano. R.; y Hernandez, J. Análisis didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. Avances de Investigación en Educación Matemática. Nº9, 21-41. (2016)
6. Malaspina, U. Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(3), 365-399. (2007)
7. Baccelli, S.; Anchorena. S.; Figueroa, S.M. y Prieto, G. Análisis de un problema de optimización desde el enfoque ontosemiótico. Revista Educación Matemática de la FAMAF. Vol. 27. Recuperado de: http://www.famaf.unv.edu.ar/rev_edu/#rev_intro_volumen (2012)
8. Baccelli, S.; Anchorena, S.; Moler, E. y Aznar, M. Análisis exploratorio de las dificultades de alumnos de ingeniería en la resolución de problemas de optimización. Revista Números. Volumen 84, Noviembre 2013, páginas 99-113. (2013)
9. Encinas, A.; Ávila, R. y De la Fuente, M. Eficacia en la resolución de problemas de optimización por estudiantes de Ingeniería. Comité latinoamericano de matemática educativa. México. Pp:663-671 (2013)
10. Baccelli, S.; Anchorena, S.; Figueroa, S.M. y Prieto, G. Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados. Documento presentado en el Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires, Argentina. (2014)
11. Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf (2009)
12. Font, V. y Godino, J.D. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educacao Matemática Pesquisa 8 (1), 67-98. (2006)
13. Font, V.; Planas, N. y Godino, J.D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje 33 (1), 89-105. (2010)
14. Godino, J.D.; Bencomo, D.; Font, V. y Wilhelmi, M.R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma, 27(2), 221-252. (2006)
15. Godino, J.D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. (2002)

Una investigación que promueva la comprensión lectora en la formación por competencias

Marisel Joffrés, Natalia Alvarado, Adriana Schilardi

Departamento de Materias básicas, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional
Rodriguez 273, Mendoza
{lisa.joffres, natalia.alvarado, adriana.schilardi}@docentes.frm.utn.edu.ar

Resumen. El presente artículo describe los lineamientos generales del proyecto de investigación "Comprensión lectora en matemática y física en alumnos de primer año de ingeniería". Dicho proyecto está llevado a cabo por docentes de materias básicas de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional. Se describen algunas dificultades con las que se encuentran los estudiantes de primer año de las ingenierías al momento de abordar textos de semi-divulgación científica que hacen pertinente la implementación del proyecto. Además, se muestran las preguntas que orientan el trabajo de los investigadores, como así también, la metodología para relevar estrategias de enseñanza que promuevan la comprensión lectora. Finalmente se destacan algunos aportes que se esperan que puedan disminuir el fracaso de los estudiantes de primer año de las ingenierías.

Palabras Clave: Comprensión lectora, Investigación, Ingenierías.

1 Introducción

Los docentes que trabajamos en las cátedras de primer año de la FRM-UTN nos encontrábamos, en el tiempo en que las clases eran presenciales, con el problema que alrededor del 50% de los alumnos no logra la regularidad en las cátedras de materias básicas como Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático I y Física I. En el momento actual, donde el aislamiento impuesto para evitar la propagación del COVID-19, la no regularización de las asignaturas mencionadas ha aumentado.

Si buscamos los motivos de este fracaso, podríamos pensar que uno de ellos es la naturaleza de los contenidos disciplinares de matemática y física, la primera por su carácter abstracto y ambas por su aparente complejidad, sin embargo podemos ir más allá y pensar que no es el único motivo.

El uso de los entornos virtuales de aprendizaje (EVA) como recurso educativo, que nos hemos visto obligados a utilizar debido al aislamiento producido para evitar la propagación del COVID-19 requiere del desarrollo de pedagogías distintas a las que llevábamos a cabo en la presencialidad. Desde el momento en que nuestros estudiantes "presenciales" interpretaban información proporcionada por un docente en forma presencial, la decodificación y la interpretación que realizaban era completamente distinta a la llevada a cabo a través del material proporcionado por un EVA. Este proceso de extraer información no es suficiente para realizar un proceso de comprensión "exitosa", que le permita llevar a cabo su aprendizaje.

El tipo de comunicación que se establece entre el docente y el estudiante a través de una plataforma virtual difiere completamente del que se produce en una clase presencial. Por lo tanto, las estrategias empleadas para desarrollar competencias deberán ser también distintas.

Se han realizado estudios que muestran que entre otros factores de fracaso antes mencionado, está la deficiencia en la comprensión lectora de los alumnos ingresantes a las carreras de ingeniería.

En cuanto a los antecedentes, se pueden encontrar diversos artículos que tratan sobre la comprensión lectora en distintos niveles educativos. Si bien nosotros nos concentraremos en aquellos relacionados a los últimos años del nivel medio y los primeros de la universidad, hay estudios de nivel primario que nos dan indicios de metodologías de investigación que adaptadas pueden ser apropiadas para este proyecto.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Como en todos los campos del pensamiento, las ciencias básicas requieren de un lenguaje científico o específico, [1] por lo que se requiere de ciertas habilidades y competencias para poder dominar o por lo menos lograr comprender ciertos aspectos de este lenguaje que si bien se correlaciona con la comprensión lectora en general, es específica en el campo del pensamiento matemático y físico. La matemática y la física necesitan del lenguaje natural para comunicar sus resultados, pero además le añaden símbolos, fórmulas y vocabulario específico que son necesarios para comprenderlas. La lectura en ciencias requiere además de comprender las palabras del lenguaje natural, entender el sentido, el significado de los símbolos, las fórmulas, los términos específicos, entre otros.

La comprensión lectora, en cualquier nivel escolar, es un proceso complejo que implica la orquestación de diversas habilidades y procesos cognitivos, que van desde la decodificación y reconocimiento de palabras hasta procesos de alto nivel, como la integración del significado de las distintas partes del material leído, con el objetivo de construir un modelo mental coherente del texto [2]. Constituye el medio básico por el que se adquiere información en nuestra sociedad. La comprensión de textos implica la formación de una representación del sentido de lo leído, que toma la forma de un modelo mental o de situación, integrado y coherente. Para lograrlo es necesario que operen los procesos de integración e inferencia. La integración entre palabras y oraciones es necesaria para poder establecer la coherencia local, y las inferencias acerca de diferentes eventos, acciones y estados son necesarias para que el texto forme una totalidad coherente. Además, estos procesos requieren que la información relevante, tanto del texto como del conocimiento del mundo que tiene el lector, estén disponibles y en un estado accesible. La comprensión lectora en matemática y física supone un concepto amplio, ya que implica la evaluación de propiedades y relaciones expresadas en textos, números, símbolos, gráficos, entre otros.

García Olivera [3] explica que la comprensión lectora es la capacidad que tiene el ser humano de representar mentalmente un texto, de decodificar, analizar e inferir sobre lo que se lee, por lo que este proceso tan complejo es la base del aprendizaje que no sólo le permite al estudiante aprender sino aprender a partir de lo que lee y construir conceptos nuevos. Si bien hace referencia a estudiantes universitarios de una licenciatura, concluye que la lectura y la comprensión es parte fundamental para ampliar el conocimiento, y teniendo en cuenta que la mayoría de los textos que se trabajan en la universidad son del tipo científico, la comprensión de los estudiantes no es la adecuada para este nivel. Otra conclusión es que la competencia lectora es una tarea que se debe reforzar en cada nivel educativo, sin olvidar que el estudiante necesita conocer estrategias de aprendizaje además de estar motivado para poder aprender de manera significativa. También hace referencia a que pocas veces se hacen investigaciones sobre la comprensión lectora en universitarios, sobre las dificultades que presenta el estudiante y los factores que intervienen en dicho proceso. Concluye que la comprensión lectora es una tarea importante en este nivel educativo, ya que los profesores esperan que sus estudiantes comprendan y argumenten los textos que revisan, debido a que en su mayoría son artículos especializados. Se recalca también que la lectura es un proceso interactivo de comunicación en el que se establece una relación entre el texto y el lector, quien al procesarlo en lenguaje e interiorizarlo construye su propio significado. La lectura es un proceso constructivo al reconocer que el significado no es una propiedad del texto, sino que el lector lo construye mediante un proceso ya que, conforme va leyendo y según sus conocimientos previos y experiencias en un determinado contexto, lo lleva a una nueva situación cognoscitiva.

La comprensión lectora es una competencia que desarrollarla no implica sólo una tarea de los profesores encargados de los primeros años de escolarización, es un proceso que se va construyendo a lo largo de los diferentes niveles educativos. Cada nivel plantea una visión e intención diferente que le permite al estudiante desarrollar habilidades y emplear estrategias como herramientas para comprender un texto las cuales deberán ser empleadas y aprendidas según su nivel educativo.

Gonzalez Moreyra [4] explora la comprensión lectora inferencial en estudiantes universitarios, identificando las dificultades que ofrecen textos de corte científico para la comprensión lectora. Encuentra que entre los alumnos universitarios prevalecen aquellos dependientes en textos básicos informativos, documentales y numéricos y también lectores con grandes déficits en la lectura de textos científicos. Indica la responsabilidad de la educación secundaria en las carencias lectoras del recién egresado pero haciendo énfasis en la responsabilidad de la universidad para desarrollar programas de apoyo y consolidación de las competencias comunicativas.

Si bien todos los investigadores acuerdan que la lectura de textos representa el proceso de descifrar el código escrito, el dominio de la mecánica lectora es un instrumento para alcanzar el objetivo de interpretar los significados que se transmiten a través del texto. Esta comprensión requiere del proceso de atribuir significado a la información que proporciona el texto y de esta forma, el lector debe construir un modelo o representación mental con dicha información.

Uno de los instrumentos que utilizó para determinar los niveles de comprensión lectora fue el cloze estándar, es decir, elaborar un texto al que se le ha suprimido una palabra cada cinco, con excepción de las diez primeras y las diez últimas que se mantienen intactas. La tarea de los alumnos es completar el texto, identificando las palabras que han sido suprimidas. Uno de los objetivos de este trabajo es crear un instrumento de tipo cloze pero con textos de semi-divulgación científica propios de las áreas de matemática y física de primer año de ingeniería.

Por otro lado, y analizando los diagnósticos realizados por diferentes Unidades Académicas, coinciden en que los alumnos aspirantes y que ingresan a las carreras universitarias poseen, entre otras, "Dificultades y carencias en relación a la lectoescritura y a la interpretación de textos, fundamental para un eficiente abordaje del aprendizaje universitario". Si bien podríamos decir que la problemática proviene de la Escuela Secundaria, los alumnos ya ingresantes a las carreras de ingeniería trasladan estos problemas a la vida universitaria y nosotros, como docentes de los primeros años, tenemos que poder ayudar a los alumnos a lograr un mejor nivel en la lectura comprensiva y sobre todo orientada a la lectura comprensiva en matemática y física.

El nuevo enfoque de la enseñanza universitaria posee dos rasgos esenciales, uno que apunta a orientar el aprendizaje hacia la comprensión y otro que ayuda a promover un uso estratégico de los conocimientos adquiridos que permitan afrontar la solución de problemas nuevos. Estos rasgos no podrían desarrollarse si los alumnos no poseen las competencias básicas de ingreso a la universidad.

Las competencias básicas, necesarias para el ingreso a la universidad, están referidas a los conocimientos, procedimientos, destrezas y actitudes fundamentales para el desarrollo de otros aprendizajes, considerando, entre otras "Comprender e interpretar un texto, elaborar síntesis, capacidad oral y escrita de transferirlo" [5].

Para analizar si un individuo ha logrado una capacidad, se deben tener en cuenta los indicadores de logro como señales que ponen en evidencia un aprendizaje acreditable. Los indicadores facilitan el diseño de tareas o actividades que permiten observar, medir y constatar si el indicador de logro se va alcanzando o no, o en qué medida. A través de dichas tareas el docente podrá evaluar si se satisface o no el aprendizaje a acreditar. En este proyecto se definirán indicadores de logro para determinar la comprensión lectora en matemática y física en los alumnos de primer año de ingeniería.

Una competencia básica alude a capacidades complejas y generales necesarias para cualquier tipo de actividad intelectual, es decir hace referencia a las competencias básicas, conocimientos, destrezas y actitudes fundamentales para el desarrollo de otros aprendizajes. Teniendo en cuenta esto, en el marco de las competencias básicas esperadas para el ingreso a la universidad está incorporada aquella que apunta a "comprender e interpretar un texto, elaborar síntesis, capacidad oral y escrita de transferirlo".

Según la "Declaración de Valparaíso" sobre Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Iberoamericano, se denomina "Comprensión Lectora" a la competencia que desarrollan los sujetos en relación con las buenas prácticas de lectura. La comprensión lectora, por lo tanto, no es una técnica sino un proceso transaccional entre el texto y el lector, que involucra operaciones cognitivas y un complejo conjunto de conocimientos. Podemos afirmar que aprendemos a interpretar textos pertenecientes a un determinado discurso, organizados según un género y formateados en un tipo de soporte. Por lo tanto, la comprensión lectora supone un conjunto de saberes y "saber hacer", es decir, procedimientos que implican operaciones cognitivas de diferente nivel de complejidad, fuertemente vinculadas con la elaboración de inferencias. Estos niveles están caracterizados en: fase I: lectura exploratoria. Fase II: lectura analítica. Fase III: representación de la información. Fase IV: verificación de la información. Fase V: analítico-crítica.

El nivel esperado en los ingresantes a la universidad y en particular en los ingresantes a ingeniería es el nivel intermedio. Ello supone que deben ser capaces de cumplir con los indicadores de logro relacionados con esta competencia y correspondientes a textos de semi-divulgación, es decir por ejemplo, manuales destinados al aprendizaje específico de una disciplina.

Es por ello que las preguntas orientadoras de nuestra investigación son:

Utilizando los estándares propuestos por el CONFEDI, ¿qué nivel de desarrollo de la competencia comunicativa tienen los alumnos de primer año de ingeniería?

¿Cuáles son las experiencias educativas que promueven la comprensión lectora en ciencias básicas de la ingeniería?

¿Qué características tienen estas experiencias educativas y qué estrategias didácticas utilizan los docentes para lograr que sus alumnos alcancen mayores niveles de desarrollo de la competencia?

Por ello el objetivo de este trabajo es caracterizar este tipo de prácticas educativas, primero analizando el nivel de Comprensión Lectora que poseen los alumnos que están transitando primer año de las carreras de ingeniería y en virtud de los resultados poder proponer acciones para elevar dicho nivel.

Se incorpora como investigadores de apoyo a docentes de otras universidades, que poseen carreras de ingeniería, para poder validar los instrumentos y en un futuro analizar si las problemáticas y propuestas de mejora son transferibles a otras instituciones.

2 Objetivos de la investigación

2.1 Objetivo general

"Caracterizar las experiencias educativas que promueven el desarrollo de la comprensión lectora en matemática y física en alumnos de primer año de ingeniería de la FRM-UTN"

2.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar el nivel de comprensión lectora en textos de semi-divulgación científica en matemática y física de los alumnos de primer año de ingeniería.
- Clasificar los problemas esenciales que tienen los alumnos en la comprensión lectora de asignaturas específicas de matemática y física.
- Identificar prácticas de enseñanza que promuevan el avance del grado de comprensión lectora de los alumnos.
- Diseñar experiencias de enseñanza que contengan prácticas que promuevan al menos un nivel intermedio de comprensión lectora en textos de semi-divulgación científica en matemática y física.
- Validar e implementar experiencias de enseñanza que promuevan la comprensión lectora en las áreas de ciencias básicas.
- Evaluar los resultados de las prácticas de enseñanza diseñadas.

3 Descripción de la metodología

El trabajo de investigación será descriptivo y explicativo. En el primer tipo (descriptivo) se reseñarán características de la población objeto de estudio y en el segundo, (explicativo), se darán razones del porqué de los fenómenos. En esta investigación se intentará conocer y describir los logros y dificultades de los alumnos de primer año de ingeniería, en relación con la comprensión lectora en el área de matemática y física. También se intentarán proponer acciones y experiencias de enseñanza con base en las fuentes teóricas consultadas, así como en los resultados encontrados en la población seleccionada, con la finalidad de promover el desarrollo de la comprensión lectora en los estudiantes. La investigación se realizará desde el aula, implicando necesariamente la participación de los alumnos.

Para determinar las dificultades y el nivel de comprensión lectora de los alumnos, se generarán tests del tipo cloze con textos de semi-divulgación científica en matemática y física.

El test Cloze es una prueba de comprensión lectora descripto por Taylor [6]. Si bien fue demostrada su validez para la lengua inglesa, existen también trabajos sobre su aplicabilidad en textos en castellano.

Este test permite calcular qué tan efectiva es la comunicación mediante la supresión periódica de palabras de un texto, que deben ser aportadas por el lector para restituirle sentido a un párrafo.

Esta técnica proviene de la teoría psicológica de la Gestalt (forma) que propone que la persona tiene un papel activo en la construcción de unidades de significación. Se interpreta la realidad y se toman decisiones sobre ésta en función de las formas mentales que se van creando. Un ejemplo de esto sería ver una sucesión de fotografías que se muestran rápidamente. La interpretaríamos como una película, o sea, en movimiento. Según esta teoría se tiende a completar estructuras incompletas. También, se podría considerar que utiliza algunos mecanismos que operan en el ser humano como ser:

- En un mensaje, una parte de él genera todo el mensaje.

- El sentido de un mensaje depende del contexto en el que se encuentra dicho mensaje
- En todo mensaje, las palabras no están dispuestas al azar, sino que tienen restricciones impuestas por la gramática. La secuencia de las palabras sigue reglas gramaticales que las organizan.

Esta técnica se ha hecho popular, entre otros aspectos, debido a que [7]:

- Es fácil de construir. Los textos elaborados por distintas personas, con la técnica cloze omitiendo la misma enésima palabra, no va a diferir entre ellos.
- No se requiere de personal especializado para elaborar los textos.
- Ha sido demostrada su validez

Esta metodología nos permitiría obtener tres niveles de comprensión:

1) Comprensión deficiente: pocas condiciones para aprender del material de lectura.
2) Obtención de información sólo con asistencia y apoyo tutorial: lectura fluida pero con dificultades en el reconocimiento de palabras. Se capta el contenido pero presenta evidentes fallas en la comprensión.
3) Lectura independiente: lectura sin asistencia y buena comprensión.

Para relevar estrategias de enseñanza que promuevan la comprensión lectora, se realizarán entrevistas abiertas a alumnos y docentes, junto a la técnica de la práctica interpretativa, así como las técnicas de observación estructurada y no estructurada de los grupos de trabajo y de los individuos.

Luego, para proponer y validar experiencias de enseñanza en matemática y física que promuevan la comprensión lectora, se utilizará la metodología llamada en Educación Matemática, Ingeniería Didáctica.

Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de experiencias de enseñanza.

En el proceso experimental, en la ingeniería didáctica, se pueden distinguir cinco fases [8]:

- análisis preliminar: se buscará profundizar sobre el análisis epistemológico de los contenidos a enseñar, análisis de dificultades y obstáculos didácticos y las restricciones de la acción didáctica
- concepción y análisis a priori de la secuencia de enseñanza: se identificarán las variables macro y micro didácticas relacionadas con el estudio y tipo de actividad propuesta a los alumnos.
- experimentación: se ejecutarán los diseños y se recogerán los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis a priori.
- análisis a posteriori: análisis de los resultados obtenidos en la implementación
- confrontación del análisis a priori y el análisis a posteriori.

Esta metodología de investigación se diferencia de otras que también recurren a la experimentación en clase, por su forma de validación. Estas últimas recurren a la validación externa, comparando estadísticamente el grupo en estudio con el cual se ha realizado una experiencia, con un grupo testigo; en cambio la Ingeniería Didáctica recurre a la validación interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de las experiencias llevadas al aula. Es decir, desde la misma fase de concepción de la experiencia se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a priori de la misma.

Con relación a la bibliografía se indagarán las publicaciones más recientes de los referentes nacionales, iberoamericanos y europeos en el ámbito de la formación por competencias.

4 Contribuciones del proyecto

La pandemia ha acelerado el proceso de digitalización y la necesidad de adaptar las estrategias de enseñanza a la nueva realidad a la que se enfrentan nuestros estudiantes universitarios. En los entornos virtuales de aprendizaje que han tenido que manejar los alumnos actuales, también son fundamentales los procesos de lectura comprensiva. Estos procesos han sufrido cambios al pasar del manejo de textos impresos a la lectura e interpretación de material digital. Es por esto que resulta necesario conocer las dificultades que les impiden a nuestros estudiantes que promuevan la competencia en comprensión de textos.

El presente proyecto pretende contribuir a poner a disposición del medio universitario y no universitario, instrumentos que permitan medir el nivel de comprensión lectora en matemática y física en alumnos que transitan los primeros años de la universidad, y plantear posibles estrategias para elevar ese nivel, con el fin de disminuir la deserción y el fracaso en los primeros años de las carreras de ingeniería.

Esta contribución está enmarcada dentro de las corrientes actuales del desarrollo de competencias planteadas por el CONFEDI y por toda la comunidad universitaria en las cuales, el ingeniero no sólo debe saber, sino también saber hacer. Esto no surge de la sola adquisición de conocimientos sino, también del desarrollo de habilidades y destrezas que necesitaran para su desempeño profesional.

Referencias

1. Santos Barón, E: Propuesta metodológica de lectura en clase de matemáticas a través de textos de divulgación científica *Revista UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, No 43, pp 49-69 (2015)
2. Vernucci, S; Canet-Juric; L.; Andrés, M.; Burin, D: *Comprensión Lectora y Cálculo Matemático: El Rol de la Memoria de Trabajo en Niños de Edad Escolar*, Vol.26, No.2 pp. 415–438. http://dx.doi.org/10.7764/psykhe.26.2.1047. Accedido el 10 de diciembre de 2020.
3. García Olivera, B.E.; Nájera Martínez, N.A.; Téllez Hernández, M.G: *Comprensión Lectora en Estudiantes Universitarios*. Tesis de Licenciatura en Psicología Educativa. Universidad Pedagógica Nacional Ajusco. México DF (Eds) (2014)
4. González Moreyra, R: *Comprensión lectora en estudiantes universitarios iniciales*. Universidad de Lima. Perú (1998)
5. CONFEDI. *Competencias y perfil del ingeniero Iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación*. (Documentos Plan Estratégico ASIBEI). ASIBEI (Eds) (2016)
6. Taylor, W.: *Cloze procedure: A new tool for measuring readability*. Journalism Quarterly 30, pp. 415-433. (1953)
7. Rodriguez Trujillo, N: *El procedimiento "cloze": un procedimiento para evaluar la comprensión de lectura y la complejidad de materiales*. Revista Lantinoamericana de lectura. (1983)
8. Artigue, M: Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Pp.33-59 (1995)

Percepción de los Estudiantes de Ingeniería sobre la Implementación de Metodologías Activas para la Enseñanza y el Aprendizaje de Análisis Matemático I. Una Aproximación al Desarrollo de Competencias.

Rocío L. Ambrosio, Martha S. Rosso, Mercedes Soria, José Peralta

[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Villa María, Universidad Tecnológica Nacional.
Av. Universidad 450, Villa María, Córdoba.
ro98ambro@gmail.com, marthasrosso@gmail.com, mersoria1@gmail.com, josperalt@hotmail.com

Resumen. El propósito del presente trabajo es conocer la percepción de los estudiantes del primer año de las carreras de ingeniería, que se dictan en la Facultad Regional Villa María de la Universidad Tecnológica Nacional, respecto de las metodologías activas implementadas para la enseñanza de Análisis Matemático I y su posible relación con el desarrollo de competencias. Este reporte se enmarca en el PID "Estrategias de enseñanza, aprendizajes ubicuos y desarrollo de competencias matemáticas en carreras de ingeniería". Metodológicamente adhiere al paradigma de la investigación educativa, siendo un estudio exploratorio descriptivo. En esta primera aproximación, los resultados muestran que, si bien la mayoría de los estudiantes realizan una valoración positiva respecto de la propuesta didáctica, la clase tradicional sigue ocupando un lugar destacado para algunos de ellos. Asimismo, se pudo establecer que competencias tales como el compromiso, la organización, la autonomía y la búsqueda y selección de la información han resultado las más favorecidas.

Palabras Clave: Metodologías activas, Competencias, Ingeniería, Enseñanza y aprendizaje, Análisis matemático I

1 Introducción

Resultados de investigaciones anteriores realizadas en nuestra facultad, nos permitieron observar que existen evidencias de que algunas asignaturas presentan en sus prácticas educativas, avances en relación a los nuevos modos de enseñar y aprender. Empíricamente podemos advertir que, como correlato al impulso dado por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) para fijar los nuevos estándares de acreditación basados en competencias, se activa en la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) una serie de capacitaciones sobre la temática, lo que instala una cierta inquietud entre el cuerpo docente de nuestra facultad al respecto.

En esta línea, CONFEDI tiene una larga trayectoria transitada, siendo su preocupación central la calidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en las carreras de ingeniería [1]. A partir de la creación de la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) y luego de superar el primer ciclo de acreditaciones de las carreras de Ingeniería, cuyos estándares se basaron en documentos históricos de CONFEDI: "Libro Azul" y "Libro Verde", se establece un compromiso institucional para establecer lo que denominaron la segunda generación de estándares. También comenzó a discutir y a realizar algunos talleres sobre la "enseñanza por competencias", promoviendo la centralidad del alumno en los procesos de aprendizaje. En 2018 se presenta el "Libro Rojo" que, si bien es una propuesta de estándares de acreditación para las carreras de ingeniería, plantea una forma de enseñanza que incorpora un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante y orientado al desarrollo de competencias, tanto genéricas de egreso del ingeniero argentino, como específicas de cada terminal. Este enfoque, sumado a algunos aspectos claves en cuanto a las condiciones generales y curriculares en este sentido, pensamos que contribuirá a una mejora de la efectividad en el proceso de formación, y de los indicadores de retención, duración real y graduación del sistema [2].

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

En este marco, la asignatura de Análisis Matemático I (AMI) que se dicta en las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Villa María de la Universidad Tecnológica Nacional (FRVM-UTN), a partir del año 2017 presenta y comienza a desarrollar una propuesta de innovación curricular, que tiene por objetivo principal, colaborar en la disminución del desgranamiento que se produce durante el primer año de cursado de las carreras de ingeniería y comenzar a transitar el cambio de paradigma educativo. Esto es, de la enseñanza centrada en el docente a la enseñanza centrada en el alumno. Los ejes centrales de la propuesta se basan en el empleo de metodologías activas para las actividades de enseñanza y de aprendizaje, entornos virtuales de aprendizaje y el acceso a las Tecnologías de la Información y de la Comunicación, tratando de promover la interacción entre el conocimiento, el docente y el alumno en el contexto de los aprendizajes ubicuos para el desarrollo de habilidades que permitan un aprendizaje más autónomo.

Asimismo, para transitar el cambio propuesto, un hecho importante a tener en cuenta es el perfil educativo de los estudiantes que ingresan. La comunidad estudiantil de nuestra unidad académica es cada vez más heterogénea en términos de perfil educativo, por lo que, la intensidad y calidad con los que se realice el traspaso del control de los procedimientos de aprendizaje al estudiante está relacionado, no sólo con sus características personales, sino también con la realidad socio-cultural-educativa que le ha tocado vivir. Lo que, consecuentemente, determinará su integración en ella, facilitando u obstaculizando dicho proceso. En este sentido, es significativo mencionar que a partir de 2018 el Seminario de Ingreso comienza a implementar el uso de la plataforma educativa Moodle con el propósito, -entre otros-, de introducir al estudiante en entornos virtuales de aprendizaje. Si bien, en mayor medida, se la utiliza como repositorios de archivos, también se plantean "desafíos" a los estudiantes, tales como responder cuestionarios al finalizar cada tema tratado, lo que le permite conocer un recurso didáctico que será de mucho valor durante la cursada de AMI. El acercamiento a esta herramienta educativa, indirectamente contribuye a disminuir la resistencia inicialmente observada en la aceptación y adaptación de la propuesta metodológica de AMI.

El trabajo que se expone, es una primera aproximación y pretende conocer la percepción que los estudiantes tienen sobre las metodologías activas implementadas para la enseñanza y el aprendizaje de Análisis Matemático I, a partir de lo vivenciado por ellos. Al tiempo que permite advertir que los distintos tipos de aprendizaje que realizan los alumnos se relacionan a las intenciones explícitas o implícitas que realiza el docente, es decir, un aprendizaje más dependiente como el puesto en juego en la clase tradicional, más demandada en el curso de recursantes, o garantizar que los estudiantes busquen conocer otros procedimientos para aprender el contenido, desarrollando independencia, compromiso, y tomar sus propias decisiones en función de dicho análisis. El buscar, utilizar y reflexionar sobre otros quehaceres, dirigen a los alumnos para mejorar su aprendizaje y gestionarlo de forma autónoma y eficaz.

2 Fundamentación

Como sabemos, la enseñanza no causa el aprendizaje ni el aprendizaje es una consecuencia de la enseñanza, lo que sí podemos decir, es que existe una relación positiva entre ambos procesos en el sentido de que el aprendizaje es un propósito de ésta. Entonces, si entendemos por procesos de enseñanza aquellos que el docente organiza, ejecuta y evalúa para incidir en los procesos de aprendizaje, al momento de planificar su enseñanza, debería tener en cuenta los grandes paradigmas que provienen de las teorías del aprendizaje, tales como, conductismo, cognitivismo, constructivismo, conexionismo.

Haciendo un rápido repaso de la abundante bibliografía y trabajos de investigación referidos a los distintos métodos de enseñanza, podemos decir que se sitúan en un continuo. En un extremo se ubican las clases magistrales, en las cuales la participación y el control del alumno son mínimos. En el otro extremo, estaría el estudio autónomo, donde la participación y control del docente son mínimos. Entre ambos extremos se ubican, por ejemplo, la resolución de problemas, el estudio de casos, proyectos, método cooperativo, método colaborativo, la clase al revés, simulación, entre otros. De este modo, podemos decir que no existe un único mejor método, sino que el mejor método será una combinación adecuada de diferentes situaciones diseñadas de manera intencional y sistemática en función de los objetivos de aprendizaje que se fijen.

Asimismo, podríamos describir los tipos de aprendizajes, en un extremo se ubica el aprendizaje mecánico, en el otro, el aprendizaje significativo [3]. El primero es aquel en el que la nueva información se interioriza de manera literal, sin interacción cognitiva con conocimientos previos y sin incorporación a la estructura cognitiva, es decir, es el aprendizaje memorístico, de corta duración, se reproduce literalmente y se aplica en actividades rutinarias. En contraposición se define el aprendizaje significativo como el aprendizaje en el que hay una interacción cognitiva entre los nuevos conocimientos y los previos específicamente relevantes, existentes en la estructura cognitiva del que aprende. No debemos pensar que estos dos tipos de aprendizaje son dicotómicos, un aprendizaje no es necesariamente significativo o memorístico, en la práctica, los aprendizajes se ubican en algún lugar entre ambos extremos.

Por otra parte, en la actualidad, se puede aprender en cualquier momento y lugar. Las plataformas virtuales y los dispositivos móviles (celulares, notebooks, tablets, el uso de la herramienta web 2.0), se han convertido en mediadores del proceso de enseñanza que le otorgan la capacidad de que el estudiante pueda aprender en entornos ubicuos de aprendizaje. "En una época en que las personas pueden llevar internet en sus bolsillos la enseñanza y el aprendizaje deben reconsiderarse. .... Hablamos de este cambio en términos de ubicuidad: la brecha tradicional entre contextos formales e informales de aprendizaje están desmoronándose." [4].

Lo expuesto nos lleva a pensar en una transición entre paradigmas educativos, que evoluciona de un modelo educativo centrado en la enseñanza, hacia un modelo que considera al estudiante y al proceso que realiza para lograr que sus aprendizajes le resulten significativos. En esta transición, la combinación de metodologías activas resulta favorecida y potenciada por la incorporación genuina de las TIC [5]. De hecho, al tener el estudiante todo el material didáctico a su disposición, en cualquier momento y lugar, puede elegir el horario, puede elegir un lugar de su preferencia, puede elegir el recorrido a hacer, puede elegir hacerlo solo o en compañía de otros estudiantes, requiere de él una actitud diferente frente al aprendizaje. Estos requerimientos que van surgiendo llevan implícitamente el desarrollo de competencias.

Si bien el empleo del término competencias es controversial en educación, por la multiplicidad de sus usos en distintos campos del conocimiento [6], incluido el laboral, se pueden identificar en las definiciones aspecto comunes tales como conocimientos, habilidades y destrezas, aptitudes y actitudes. A los efectos de este trabajo, adoptamos como marco referencial la definición dada por de CONFEDI [7]: "Competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales". En este caso, las situaciones a resolver son las que deberán enfrentar y resolver los estudiantes en el transcurso del desarrollo de la asignatura. No estamos diciendo con esto que el alumno está solo frente al aprendizaje ya que el docente es quien organiza el recorrido y plantea los desafíos, pero sí, que hay decisiones que debe tomar por sí mismo, hacerse cargo de su aprendizaje e involucrarse directamente en el acto educativo

3 Metodología

Este trabajo se posiciona en el campo de la investigación educativa [8], a la que se define como el proceso sistemático de conocimiento de una determinada problemática, que supone un trabajo intelectual de análisis, crítica y confrontación de múltiples informaciones que posibilita construir un objeto de estudio en sus interdependencias y relaciones histórico contextuales, no pretendemos comprobar teoría sino construir conocimiento para comprender y explicar la problemática planteada.

La metodología de investigación desarrollada adhiere al paradigma cuanti-cualitativo de la investigación educativa [9]. Es un estudio del tipo exploratorio descriptivo. La población estudiada está conformada por los ingresantes de las cohortes 2017, 2018 y 2019, de las carreras de ingeniería Mecánica, Electrónica, Química y en Sistemas de Información de la FRVM - UTN, que han cursado la asignatura de Análisis Matemático I (AMI) y por el grupo de alumnos que recursan dicha asignatura, en adelante, recursantes. En esta primera aproximación, los datos fueron obtenidos mediante entrevistas semiestructuradas aplicadas a estudiantes ingresantes y recursantes, seleccionados siguiendo los criterios del muestreo intencional. La recogida de las respuestas se hizo mediante grabación de audio, las que posteriormente se transcribieron a una matriz de datos. La muestra estuvo constituida por un total de 24 alumnos. Los criterios de selección tuvieron en consideración el rendimiento académico (aprobación directa, regular, libre), carrera de procedencia y año de cursado. Se utilizó el análisis interpretativo del discurso para el reconocimiento de categorías conceptuales que permitan describir el fenómeno bajo estudio. Esto es, conocer la percepción que tienen los estudiantes acerca de las metodologías activas implementadas para la enseñanza de Análisis Matemático I y su posible relación con el desarrollo de competencias. Dentro de los propósitos del análisis de la información empírica incluimos: interpretar la información desde la perspectiva teórica para descubrir clases, propiedades y relaciones y crear una base sistemática de la información.

La técnica de análisis se basó en la identificación de unidades de sentido en la información. Una vez que la información fue clasificada, se continuó con el análisis utilizando el método comparativo constante del análisis cualitativo [10], para identificar diferencias y semejanzas entre las unidades fichadas. Esto permitió la identificación de categorías que emergen de la información empírica, "cercana a los datos".

Recurrimos a representaciones gráficas como el Diagrama de Pareto, -entre otras-, en esta primera descripción, ya que nos permite asignar un "orden de prioridades" entre las categorías conceptuales identificadas.

4 Resultados y análisis

Sin dudas, la transición desde un modelo educativo centrado en la enseñanza hacia un modelo centrado en el aprendizaje, supone un gran desafío y un gran cambio en la cultura educativa en general y en particular para la FRVM-UTN, donde las nuevas prácticas tratan de abrirse camino entre las prácticas tradicionales fuertemente arraigadas.

Como expusimos en la metodología, con el análisis de la información recabada a través de las entrevistas, en una primera etapa, se buscó encontrar las unidades de sentido que nos permitieran, luego, clasificarlas en categorías. A continuación, presentamos algunas de las unidades de sentido identificadas en la información.

Unidades de sentido que hacen referencia a la categoría *Autonomía*.

"ver vos que cosas no entendés vos y reforzar ahí" (e.1)

"bueno me ayudo a ser independiente al momento de estudiar" (e.2)

"fue como, que me tuve que independizar un montón" (e.4)

"la universidad es un mundo muy individual, donde cada uno decide su ritmo de estudio, su progreso" (e.10)

"ayudó a darse cuenta que uno tiene que independizarse y que los profesores no van a hacer todo el trabajo de uno." (e.15)

Unidades de sentido que hacen referencia a la categoría *Compromiso/Responsabilidad*.

"son materias que requieren mucha lectura y mucho estudio, entonces sino te pones a estudiar antes o después de clases, obviamente, es difícil no solo aprobar finales, porque no se estudia para eso, se estudia para aprender" (e.6)

"no solo te sirve para estudiar, sino que también te sirve para darte cuenta que uno no estudia solo para aprobar un parcial sino para, para agregar conocimientos" (e.6)

"me ayudo bastante a tomar yo responsabilidad" (e.7)

"porque si no te pones a buscarlo vos, no lo busca nadie, no te lo busca nadie, entonces vas a terminar perjudicándote solo." (e.8)

"me parece que lo principal es ponerse a estudiar por si solo porque es donde más aprende" (e.16)

Unidades de sentido que hacen referencia a la categoría *Búsqueda/Selección de la información*.

"me sirvió para aprender a usar la computadora, los videos, poder buscar en otros lados otras cosas, además de lo que nos daban en clase y bueno, así como complementar más" (e.1)

"buscarme yo la información, buscar videos, ejercicios y todo ese tipo de cosas, para poder ir aprendiendo" (e.2)

"averiguando por métodos propios" (e.6)

Unidades de sentido que refieren a la categoría *Organización*.

"Y el método no está malo, porque vos básicamente cuando entras a la universidad tener que saber el tipo de régimen que tenés que llevar de estudio" (e.10)

"me dio un concepto de organización porque me pasaba que sino realizaba las cosas a tiempo me atarazaba mucho, a mi punto de vista." (e.13)

"la organización, pasa por uno mismo, ya que tienes que ponerte las pilas" (e.19)

"Si tome conciencia de que pasa por uno, ehh… y más que todo en análisis que fue la que más tiempo me llevo aprenderla y que si uno no se pone a estudiar de ante mano con tiempo es muy difícil poder aprender los contenidos bien." (e.20)

Unidades de sentido que hacen referencia a la categoría *clase tradicional*.

"yo soy una persona que primero le gusta escuchar que dice el profesor, entenderlo, practicarlo en mi casa, sacarme las dudas y de esta forma no lo podía hacer, lo tenía que ver sola directamente y no me ayudo nada." (e.14)

"En las últimas experiencias, en la última materia, eh… no se aplicó la metodología, fueron clases" (e.3)

"me pareció muy malo, una pérdida de tiempo, porque en realidad no aprendías nada." (e.11)

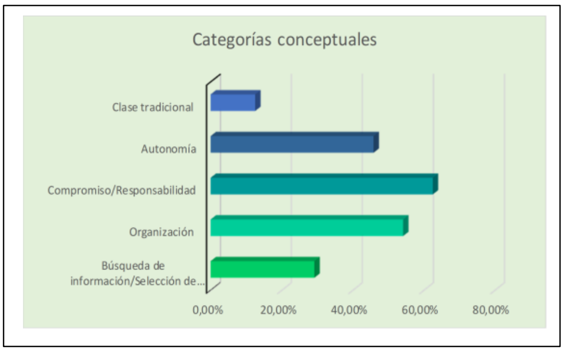
"me gusta que me expliquen el teórico, o sea que me den las bases en lo teórico, y después bueno, en mi casa si, que me den los ejercicios y reniego en mi casa." (e.12).

Continuando el análisis mediante el método comparativo constante, las categorías conceptuales que remiten al desarrollo de competencias y que emergen de los datos son las que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías conceptuales que referencian el desarrollo de competencias. Descriptores.

Categoría	Descripción
Compromiso/Responsabilidad.	Actitud asumida por los alumnos frente a la propuesta educativa para dirigir su aprendizaje.
Organización	Manejo de tiempos de estudio en función de sus necesidades respecto de cada contenido.
Autonomía	Surge a partir de la autorreflexión sobre la organización y la búsqueda y selección de la información.
Búsqueda y selección de la información.	Búsqueda de bibliografía ampliatoria, videos, internet, útil para completar información.
Clase tradicional	Depender de la explicación del profesor para llevar adelante sus actividades de aprendizaje. Cuestiones como la organización están fuera del alumno, le "viene dado". El compromiso se restringe a la responsabilidad impuesta por el cursado.

Utilizamos un gráfico de barras, **Fig. 1**, y el Diagrama de Pareto, **Fig. 2**, para mostrar la relevancia de cada categoría en el total de la muestra.



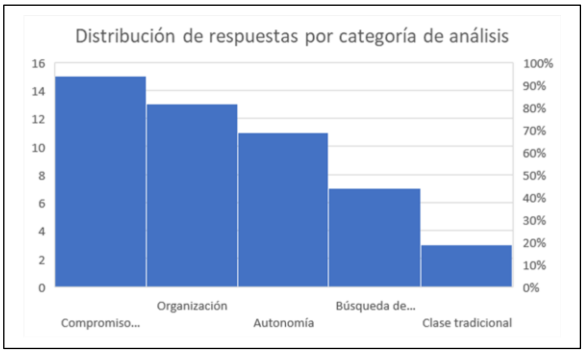


Fig. 1. Datos extraídos de entrevistas semiestructuradas aplicadas al muestreo intencional.

Fig. 2. Datos extraídos de entrevistas semiestructuradas aplicadas al muestreo intencional.

Por otra parte, cabe destacar que los alumnos no solo fueron críticos a la propuesta y al cuerpo docente, sino que también dieron lugar a la autocrítica, observaron su trayectoria donde la mayoría concluía y resaltaba la autonomía que esta propuesta le había ayudado a lograr, y que no solo les fue útil en AMI, sino que transfirieron lo aprendido a otras materias de su correspondiente plan de estudio. Esta idea trajo a consideración lo que plantea CONFEDI en los documentos publicados, respecto del "enfoque por competencias" para la enseñanza y el aprendizaje en ingeniería, en términos de evaluación, por un lado, y por otro, permite pensar en el desarrollo de las competencias transversales al perfil profesional como una cuestión posible, no alejada de la realidad.

A través del relato de los estudiantes, se pudo interpretar que la realidad socio-cultural-educativa que le ha tocado vivir actuó como factor importante, -entre otros-, que determinó el grado de integración a las nuevas metodologías aplicadas en AMI, facilitando u obstaculizando dicho proceso. Esta característica, se hizo presente en mayor medida en los alumnos que estuvieron parcialmente de acuerdo con la propuesta didáctica. A ellos les costó lograr el hacerse cargo de su aprendizaje, la transición entre los paradigmas educativos puestos en juego. No obstante, el "querer cursar con éxito", propició la autorreflexión lo que, a su vez, les permitió concluir que son los únicos protagonistas de su aprendizaje. La mayoría de los estudiante que estuvieron en desacuerdo, manifestaron principalmente que la explicación del profesor actúa como el organizador principal de sus actividades de aprendizaje. El compromiso está vinculado principalmente a la responsabilidad impuesta por el cursado.

De la misma manera que trabajamos para establecer las categorías conceptuales que referencian el desarrollo de competencias, fue utilizado para establecer la valoración que los estudiantes hacen de la propuesta metodológica de AMI. A continuación, se muestran algunas unidades de sentido que refieren a las categorías: Desacuerdo, Parcialmente de Acuerdo, De Acuerdo.

- Unidades de sentido que remiten a *Desacuerdo.*
  "la primera vez que dieron la materia, me pareció una pesadilla, literalmente me pareció una pesadilla. Es decir, ehh…. La metodología armar grupos y avance cada uno a su ritmo me parece ilógico, porque… para algo se hace un cursillo nivelatorio para que todos queden al mismo nivel, por ende vos tratas de ir aumentando ese nivel, a medida que va pasando el tiempo, noo… no me parece conveniente formar grupos y que cada uno avance" (e.3)
  "el sistema de enseñanza de análisis matemático uno experimentado desde el 2017 hasta el periodo 2019 que fue 4 veces cursado, no me pareció correcto" (e.3)
  "Personalmente a mí no me pareció muy buena, me parece que cada uno estudia a su manera, cada persona es mundo por así decirlo, cada uno estudia como más le sale, a algunos le puede haber favorecido a mi personalmente no, yo soy una persona que primero le gusta escuchar que dice el profesor, entenderlo, practicarlo en mi casa, sacarme las dudas y de esta forma no lo podía hacer, lo tenía que ver sola directamente y no me ayudó nada "(e.14)

- Unidades de sentido que remiten a *Parcialmente de Acuerdo.*

“mira por lo que yo sé, ahora, lo hacen mejor que cuando nosotros arrancamos, que fue el primer año que lo hicieron, porque me cuentan muchos que sí, que, sí los incentivan a que vean las cosas antes, a usar el campus y todo eso y explican más que es lo que ellos buscan que nosotros aprendamos, que creo que eso no estaban bien definido cuando nosotros empezamos”(e.5)
“me costó bastante, porque por ahí había… me surgían dudas y… como que no tenían nada que ver con lo que estábamos viendo en clase o sea … emm… me costó bastante” (e.4)
“está bueno el método de enseñanza, pero no sé si en primer año, es mucho cambio, y, me costó adaptarme” (e.4)

- Unidades de sentido que remiten a *De Acuerdo*.
  “Me pareció muy productivo porque todos veníamos con una idea del secundario…. que la responsabilidad de que una prenda era del profesor, vos ibas, te sentabas y ya tenías que salir del aula aprendiendo, esa es la idea con la que todos veníamos del secundario generalmente, pero gracias a esto nos damos cuenta de que no podés venir a clases en blanco y ya querer salir del aula sabiendo, es más un… un aula invertida, es ir averiguando por métodos propios y venir acá sacarse las dudas y terminar de ayornar esos conocimientos, no venir en blanco y esperar que los profesores te llenen de conocimientos y querer salir del aula ya con todo sabido.”(e.6)
  “me pareció que estuvo buena, es bastante útil y…. nos ayudó a poder afianzar conocimientos” (e.7)
  “me pareció útil, para desarrollar hábitos de estudio para fomentar la independización del alumno” (e.8)

Para expresar gráficamente los resultados de las opiniones vertidas, recurrimos al siguiente gráfico (Fig. 3)

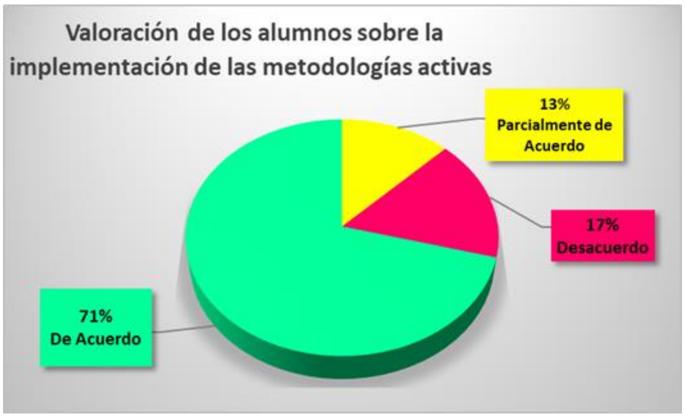


Fig. 3. Valoración de las Metodologías Activas en AMI.

El análisis de resultados expuesto nos conduce a reflexionar más profundamente sobre los factores endógenos que influyen en el rendimiento académico de los alumnos tales como las prácticas docentes, tecnologías pedagógicas implementadas y cultura organizacional entre otros. Factores ya fueron identificados en investigaciones de orden nacional [11] y por este grupo de investigación en estudios realizados sobre el desgranamiento que opera en el primer año de las carreras de ingeniería [12].

5 Conclusiones y trabajos futuros

El acelerado cambio tecnológico y las potencialidades que éste ofrece, han provocado fuertes transformaciones en la manera en que los jóvenes se relacionan con su grupo de pares y con los adultos, y en las modalidades en que incorporan los saberes y conocimientos. A su vez, el impacto que han producido las tecnologías de la información y de la comunicación en las sociedades contemporáneas y el consumo que de ellas se realiza, junto con la creciente utilización de tecnologías móviles y/o portátiles, ponen al sujeto en permanente conectividad, en una constante red de intercambios, configurando una realidad que atraviesa a las instituciones educativas en general, y en particular, a la Universidad.

Los resultados de este trabajo de investigación nos permitieron realizar avances sobre una primera identificación de categorías conceptuales relacionadas con el desarrollo de las competencias. Las que pueden lograrse a través de una propuesta didáctica que combine, de manera adecuada, diversas metodologías de enseñanza, tales como la resolución de problemas, el estudio de casos, proyectos, método cooperativo, método colaborativo, la clase al revés, simulación, el uso de entornos virtuales de aprendizaje, la implementación de TIC con objetivos didácticos específicos y la clase "tradicional", -en términos de los estudiantes-, para poder cubrir el abanico de expectativas por ellos planteado. Otro aspecto que permitió conocer, es la valoración que los estudiantes realizan de la propuesta educativa de AMI más allá de los resultados académicos obtenidos. En este sentido, esa valoración positiva que hacen los estudiantes, dirige nuestra atención hacia otra competencia, no considerada en este primer reporte, que es la "resiliencia".

Asimismo, cabe destacar que las categorías encontradas están en relación con lo demanda el mundo laboral en términos de competencias generales. Así, el "compromiso", una de las categorías más reconocida por los estudiantes, es también muy valorada en el ámbito laboral. Otra de las categorías encontradas, y también altamente valorada, es el sentido de la "organización" y la "responsabilidad" con el trabajo asignado. Es decir, saber priorizar los asuntos, cumplir con los objetivos, entregar el trabajo en un tiempo razonable, es una habilidad que muchos profesionales no poseen y que es fundamental para cumplir con las tareas programadas. Una competencia requerida, pero no plenamente aceptada por los estudiantes, es el trabajo en equipo. Cuestión que se incluirá en trabajos futuros.

Tanto las apreciaciones favorables como aquellas que se manifestaron claramente en desacuerdo nos impulsan a ahondar en la reflexión de un nuevo rol docente, la de "curador". Este término, tomado de la persona que se ocupa de organizar exposiciones y recorridos en los museos o muestras de arte, es aquel que cuenta con la preparación y la habilidad de desarrollar estrategias para que las exhibiciones de arte sean eficientes, investigando sobre la obra, el artista, contextos, movimientos, estilos. Organiza y presenta la muestra guiando y orientando al espectador. Así, y considerado como "curador", el docente sigue siendo el guía de los aprendizajes, cuidando de organizar las actividades de enseñanza de modo de orientar, tutelar e indicar a los estudiantes los recorridos más adecuados para comprender los conocimientos y resolver situaciones problemáticas, más allá de los soportes que se utilicen.

Por último, y en relación a trabajos futuros, este reporte abre la reflexión en dos direcciones, una, profundizar esta línea de investigación, otro, el aprendizaje ubicuo y el rol docente como "curador" en ingeniería.

Referencias

1. CONFEDI. Libro Azul y Libro verde. https://confedi.org.ar/libro-azul-y-libro-verde/. Accedido el 12 de Diciembre de 2019.
2. CONFEDI. https://confedi.org.ar/librorojo/. (2018). Accedido el 14 de Febrero de 2020.
3. Moreira, M. A. Abandono de la narrativa, enseñanza centrada en el alumno y aprender a aprender críticamente. https://www.if.ufrgs.br/~moreira/Abandonoesp.pdf. (2010). Accedido el 13 de Mayo de 2019.
4. Burbules, N. C. Los significados de "aprendizaje ubicuo". *Education Policy Analysis Archives/Archivos Analíticos de Políticas Educativas*. https://epaa.asu.edu/ojs/article/view/1880. (2014). Accedido el 15 de Octubre de 2019.
5. Maggio, M.; Lion, C. Perosi, M. V. Las prácticas de la enseñanza recreadas en los escenarios de alta disposición tecnológica. http://www.polifoniasrevista.unlu.edu.ar/sites/www.polifoniasrevista.unlu.edu.ar/files/site/5%20maggio.pdf . (2014). Accedido el 13 de Mayo de 2019.
6. Ortiz García, M.; Vicedo Tomey, A.; González Jaramillo, Recino Pineda, U.. Las múltiples definiciones del término «competencia» y la aplicabilidad de su enfoque en ciencias médicas. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S2077-28742015000300002&lng=es&nrm=iso&tlng=pt. (2015). Accedido el 7 de Febrero de 2020.
7. Documentos de CONFEDI. Competencias en Ingeniería de la Declaración de Valparaiso. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf. (2014). Accedido el 10 de Febrero de 2020.
8. Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C.; Baptista Lucio, P. *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill. (2000).
9. Goetz, J. P.; LeCompte, M. D. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Morata. (2010).

10. Glaser, B.; Strauss, A. *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research.* Aldine. http://www.sxf.uevora.pt/wp-content/uploads/2013/03/Glaser_1967.pdf. (2006). Accedido el 18 de Julio de 2019.
11. García de Fanelli, A. M.: Rendimiento académico y abandono universitario: Modelos, resultados y alcances de la producción académica en la Argentina. *RAES, Revista Argentina de Educación Superior*. 6(8) 9-38. http://www.cedes.org.ar/PUBLICACIONES/%20EDSUP/%202014/10646.pdf. (2014). Accedido el 10 de Marzo de 2015.
12. Rosso, M.; Soria, M.; Peralta, J.; Aimar, J.; Lunatti, D. Desgranamiento Temprano y su relación con Materias Básicas. *Educación Matemática en Carreras de Ingeniería 2015. XIX Encuentro Nacional, VII Internacional.* http://www.frsn.utn.edu.ar/EMCI/files/Acta_XIXEMCI.pdf. (2015). Accedido el 14 de Abril de 2018.

Sistemas de ecuaciones lineales utilizando GeoGebra

Carlos G. Herrera[1], María Inés Cisterna Fernández[1], Agustín Carrazana Constán[2], Antonella Carabus[3]

[1] Departamento de Formación Básica, Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca. Argentina
Maximio Victoria 55. Catamarca. Argentina
cgherrera@tecno.unca.edu.ar, minescisterna@tecno.unca.edu.ar

[2] Departamento de Formación Básica, Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca
Maximio Victoria 55. Catamarca. Argentina
agustin.carrazana@tecno.unca.edu.ar

[3] Departamento de Formación Básica, Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca
Maximio Victoria 55. Catamarca. Argentina
antonellacarabus@gmail.com

Resumen. El uso de software de carácter dinámico como GeoGebra puede resultar importante en la asimilación de diversos contenidos matemáticos. En este trabajo se presentan resultados preliminares luego de haber introducido el concepto matemático sistemas de ecuaciones lineales utilizando GeoGebra como herramienta complementaria a través de diferentes actividades de tratamiento y conversión de los registros semióticos algebraico, matricial y geométrico del concepto en estudio. Se trabajó durante un período de tres semanas con un grupo de estudiantes de la carrera de Ingeniería. Se utilizó como instrumento de recolección de datos un cuestionario con dos actividades que debían resolver, donde se indagó fundamentalmente la relación entre la matriz aumentada reducida de un sistema de ecuaciones, su conjunto solución y su interpretación geométrica. Resultados salientes de este trabajo indican que los alumnos no presentan, en general, dificultades en la reducción de matrices, en identificar la naturaleza del conjunto solución relacionándolo con la representación gráfica del sistema de ecuaciones.

Palabras Clave: Algebra lineal, Sistemas de ecuaciones, GeoGebra

1 Introducción

El proceso de aprendizaje de conceptos de álgebra lineal ha sido objeto de numerosas investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas. Estos trabajos coinciden que es una rama de la matemática dificultosa para los estudiantes por diversas razones, como ser lo que se denominó "Obstáculo del Formalismo" [1]. Otras dificultades detectadas provienen de los diferentes lenguajes utilizados en Algebra Lineal. Hillel [2] distinguió tres lenguajes básicos utilizados en álgebra lineal: el 'lenguaje abstracto' de la teoría abstracta general, el 'lenguaje algebraico' de la teoría Rn y el 'lenguaje geométrico' de los espacios de dos y tres dimensiones, que corresponden a tres modos de pensamiento: el analítico-estructural, el analítico-aritmético y el sintético-geométrico respectivamente [3]. Pavlopoulou citado por [4] analizó las dificultades en la comprensión de conceptos a partir de la coordinación de registros de representación semiótica de vectores: el registro gráfico, el registro tabular, y el registro simbólico asociado a la teoría axiomática de los espacios vectoriales. También identificó una serie de errores de los estudiantes que podrían ser interpretados como una confusión entre un objeto y su representación, como ser un vector y su representación geométrica o como una dificultad en la conversión de un registro a otro.

Específicamente para sistemas de ecuaciones lineales Oktac [5] afirma que los estudiantes en su mayoría provienen de un modo analítico-aritmético muy enfatizado, o sea que predominan métodos algorítmicos para la resolución de sistemas de ecuaciones. Agrega asimismo que existen dificultades para poder transitar al modo de pensamiento estructural, aún después de haber finalizado el curso de Algebra Lineal.

Sandoval y Possani [6] analizaron las dificultades que surgen en estudiantes cuando trabajan con vectores, planos y sus intersecciones en R3, concluyendo que los estudiantes exhibieron dificultades para coordinar las representaciones geométricas y algebraicas cuando se construye la ecuación paramétrica de una recta en R3, relacionando esa línea con la intersección de dos planos. Argumentaron que relacionar esta coordinación con matrices aumentadas y sus formas reducidas por fila es un área que necesita ser explorada. No siempre se explica a estudiantes que la matriz resultante después de una operación de fila no comparte la misma geometría con la matriz aumentada original, aunque ambas comparten la misma solución. En relación a la utilización de modelos en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales [7] trabajaron sobre un problema de flujo de tránsito que puede ser resuelto utilizando sistemas de ecuaciones. En este caso los estudiantes fueron capaces de utilizar esta tarea para ampliar su conocimiento de las variables, ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En las carreras de Ingeniería que se dictan en la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca, Argentina, los contenidos de Algebra Lineal se dictan en el primer año del Ciclo Básico, el concepto sistemas de ecuaciones lineales se presenta inmediatamente después de introducir el concepto de matrices, alrededor de la tercera semana de cursado, siendo importante recalcar que en este curso se trabaja fundamentalmente en sistemas de tres o más variables a diferencia del nivel de educación previo y del curso de nivelación de la misma Facultad donde se enfatizan los sistemas con dos variables. En este proceso se han observado también dificultades originadas por el pasaje del plano al espacio, especialmente en la interpretación geométrica de intersecciones de objetos lineales en esta dimensión.

En ese contexto se planteó como objetivo de la investigación analizar si los alumnos interpretan geométricamente sistemas de ecuaciones lineales de tres variables y su conjunto solución, relacionando sus respectivas matrices aumentadas con la representación gráfica del sistema y su conjunto solución utilizando software de geometría dinámica GeoGebra.

2 Marco teórico

La investigación está fundamentada en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas propuesta por Duval [8], quien sostiene que los objetos matemáticos sólo son accesibles mediante sus respectivos registros de representación, siendo fundamental en el proceso de aprendizaje, que los alumnos logren identificar un objeto matemático a partir de diferentes representaciones semióticas y de este modo puedan coordinar dichos registros a través de actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

"Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Una figura geométrica, un enunciado en lenguaje natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes" [8], p175.

Según [8] para que un sistema semiótico pueda constituir un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Esta formación debe respetar las reglas propias del registro semiótico en el cual se produce la representación, la función de estas reglas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como también la posibilidad de su utilización para los tratamientos.
- El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica o la reducción por filas de una matriz.
- La conversión de una representación, que es la transformación de esta representación en una dentro de otro registro, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la

representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa.

Para el concepto de sistemas de ecuaciones lineales hemos considerado para este estudio tres registros semióticos de representación:

a) Registro Algebraico: un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables se escribe en el registro algebraico de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases} \tag{1}$$

b) Registro matricial: el mismo sistema se puede expresar matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

A su vez la matriz aumentada o ampliada del sistema se escribe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

c) Registro Gráfico: el sistema presentado geométricamente representa tres planos cuya intersección es su conjunto solución (Fig 1):

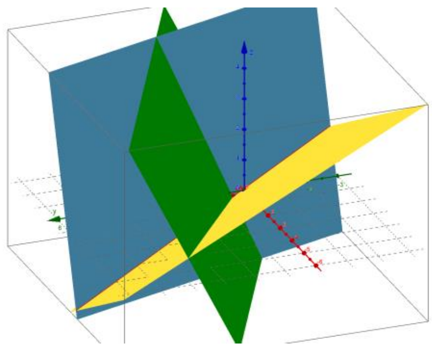


Fig 1. Registro Geométrico del sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables

3 Descripción de applets

Se trabajó con applets del software libre GeoGebra, correspondientes a sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas y tres ecuaciones con tres variables. Los aplicativos permiten visualizar simultáneamente diferentes registros de representación del sistema de ecuaciones, pudiendo modificar sus coeficientes y simultáneamente observar la matriz ampliada reducida del sistema como así también las posiciones relativas de los planos que representan cada ecuación. En Fig. 2 se observan las vistas del applet, a la izquierda la vista algebraica donde el alumno puede visualizar la matriz aumentada del sistema, su respectiva matriz escalonada reducida por filas y el conjunto solución, en este caso particular, la ecuación de la recta intersección de los planos. A la derecha se puede observar la vista geométrica del sistema. El ingreso de datos se hace a través de una planilla de cálculo que tiene incorporado GeoGebra. Es importante remarcar que la representación geométrica corresponde al sistema de ecuaciones original, y no al equivalente que surge de la reducción por filas de la matriz aumentada de acuerdo a lo citado en [6], es decir no producir confusión en el alumno, dado que los sistemas equivalentes luego de realizar las operaciones elementales de filas no comparten la misma geometría.

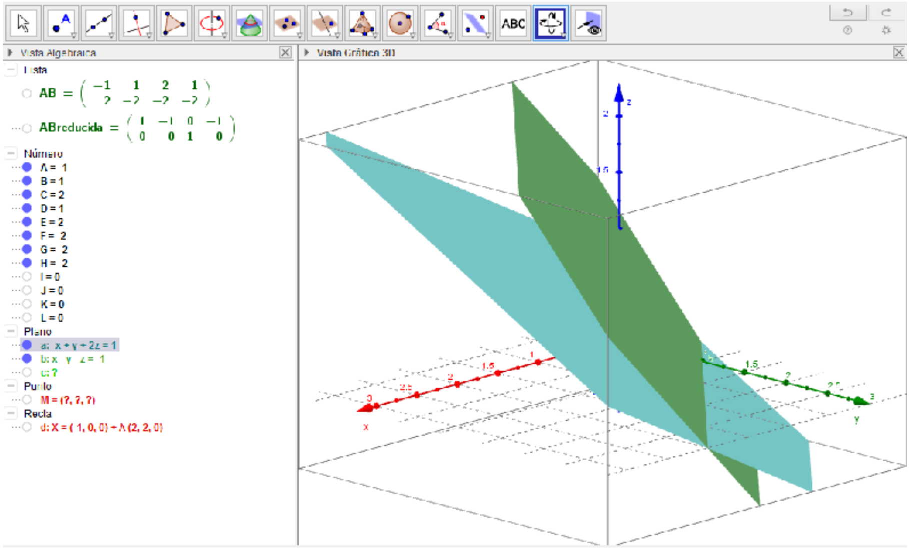


Fig. 2. Vista en pantalla de GeoGebra. Vistas algebraica y geométrica

Los valores de los coeficientes del Sistema y de su vector de términos independientes se pueden modificar utilizando deslizadores del programa o también una planilla de cálculo anexa al mismo. La variación de los coeficientes del sistema permite visualizar las diferentes formas de la matriz reducida como su representación gráfica y su conjunto solución. En este caso se presenta un sistema de dos ecuaciones y tres variables. En Fig. 2 los dos planos que corresponden a cada ecuación se interceptan en una línea recta, ya que los mismos no son paralelos ni coincidentes. Se trata de un Sistema consistente con infinitas soluciones.

Las actividades propuestas consistieron fundamentalmente en resolver sistemas de ecuaciones con uno o dos coeficientes parametrizados y analizar la forma de la matriz reducida, naturaleza del conjunto solución del sistema y su representación gráfica de acuerdo al siguiente ejemplo:

Sea el sistema lineal de dos ecuaciones con tres variables:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x - 2y + Gz = H \end{cases} \qquad (4)$$

a) Determinar para que valores de G y H el sistema es inconsistente.
b) Indique para que valores de G y H el sistema es consistente
c) ¿Puede ser el sistema consistente con solución única?
d) Verifique resultados con GeoGebra.
e) Interprete geométricamente el sistema y su conjunto solución en caso que el sistema sea consistente.

Este ejemplo forma parte de una serie de actividades desarrolladas por los alumnos empezando con representaciones algebraicas, matriciales y geométricas de sistemas de dos ecuaciones don dos variables, continuando con sistemas de ecuaciones de tres variables o incógnitas.

4 Metodología

Se trabajó con veintiún alumnos de primer año del ciclo básico de carreras de Ingeniería en Informática, considerando aquellos que hayan realizado el curso introductorio en el año 2020 y que han cumplimentado todas las actividades propuestas hasta el momento de la toma de datos. Esta actividad se realizó en el primer mes de curso de Algebra Lineal. En el año 2020 debido a las restricciones producidas por la pandemia COVID 19 el dictado de la asignatura se realizó totalmente en forma virtual con actividades sincrónicas y asincrónicas utilizando a tales efectos un aula virtual de la cátedra Algebra localizada en la plataforma Moodle de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca. Las actividades sincrónicas consistieron en clases teórico-prácticas que se realizaron por video conferencia, mientras que las asincrónicas incluyeron un trabajo práctico semanal consistente en la resolución de situaciones relacionadas son el tema en estudio. Otra actividad consistió en resolver situaciones utilizando software GeoGebra y cuestionarios denominados de Autoevaluación, consistente en tres preguntas o ejercicios correspondientes a cada tema, donde el alumno puede acceder inmediatamente a los resultados de los mismos con la consiguiente retroalimentación. La comunicación estudiante-docente se realizó en general por los foros del aula virtual.

De acuerdo al marco teórico se diseñaron actividades de tratamiento en el marco de un registro de representación y conversión de un registro a otro con el objetivo de analizar la coordinación entre diferentes registros de representación de sistemas de ecuaciones lineales.

El instrumento de recolección de datos utilizado consistió en un cuestionario, que se aplicó durante la quinta semana de cursado de la asignatura. Este cuestionario consistió en dos actividades que se describen a continuación:

La primera actividad consistió en la reducción a la forma escalonada de la matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones con tres variables. En esta matriz dos de los coeficientes se encuentran parametrizados, de manera que se debe analizar que valores deben tener los parámetros K y L para que el sistema sea consistente con solución única, con infinitas soluciones o inconsistente, coordinando dicha matriz aumentada con el registro gráfico del sistema:

Actividad 1: Sea la siguiente matriz aumentada [A:B] correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & K & L \end{bmatrix} \qquad (5)$$

a) Reducir la matriz [A:B] a su forma escalonada

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \qquad (6)$$

b) Indique para que valores de K y L el sistema es consistente con solución única.
c) Indique para que valores de K y L el sistema es consistente con infinitas soluciones.
d) Indique para que valores de K y L el sistema es inconsistente.
e) Indique cuál de los siguientes gráficos corresponde a cada una de las situaciones

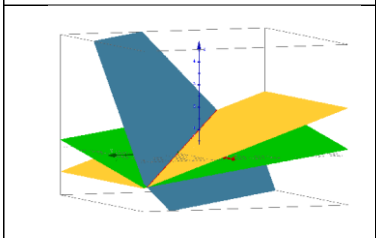
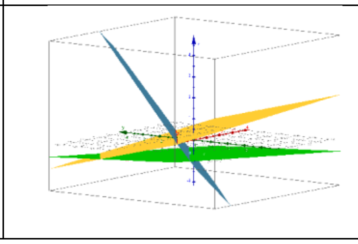
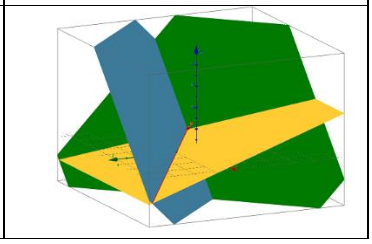
A	B	C
		

Fig. 3: registros gráficos correspondientes a la actividad 1 del instrumento de recolección de datos.

La segunda actividad era de similares características a la descripta anteriormente pero para sistemas de dos ecuaciones con tres variables

Actividad 2: sea el siguiente registro gráfico de sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas:

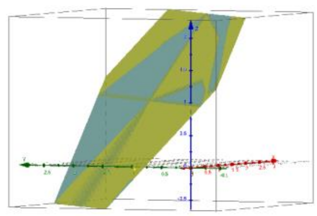
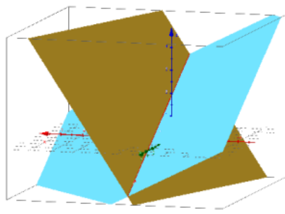
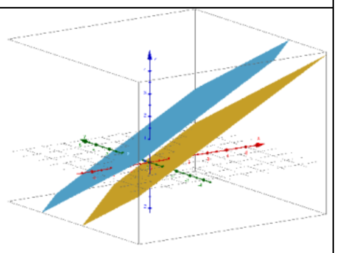
A	B	C
		

Fig. 4: registros gráficos correspondientes a la actividad 1 del instrumento de recolección de datos.

a) Indique si el sistema según el registro gráfico es consistente o inconsistente. En el caso de un sistema consistente, indique la naturaleza del conjunto de soluciones.
b) Indique esquemáticamente cuál de las siguientes matrices reducidas corresponde a cada gráfico. Justifica tu respuesta.

A	B	C
$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$	$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}; k \neq 0$	$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) Indique en el caso que el sistema sea consistente el número de parámetros del conjunto solución.
d) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea consistente. Identifique el número de parámetros del conjunto solución. ¿Podría ser el sistema consistente, con solución única?

5 Resultados

Resultados de este trabajo indican que, en general, los alumnos no presentan dificultades para trabajar en forma matricial un sistema de tres ecuaciones con tres variables ni para determinar la naturaleza del conjunto solución del sistema, ya que 18 alumnos sobre 21 de la muestra determinaron correctamente el valor de los parámetros K y L para que un sistema de tres ecuaciones con tres variables sea consistente con solución única, con infinitas soluciones o inconsistente, reduciendo correctamente la matriz hasta la forma escalonada.

Respecto a la actividad de coordinar las representaciones matricial y geométrica del sistema de ecuaciones dieciséis alumnos relacionan correctamente el registro matricial con el registro geométrico, aunque cinco alumnos no responden siendo tres de ellos los que tuvieron dificultades en la primera parte de esta actividad, es decir reducir la matriz aumentada del sistema e indicar la naturaleza del conjunto solución.

Respecto de la segunda actividad, enfocada en un sistema de dos ecuaciones y tres variables, diecinueve alumnos interpretaron correctamente la representación gráfica de un sistema de dos ecuaciones con tres variables, un alumno no responde y otro interpreta incorrectamente el gráfico ya que considera como determinado un sistema que es indeterminado que es la intersección de dos planos en una línea recta.

Respecto a la actividad de coordinación de los registros matriciales y gráficos dieciocho alumnos coordinan correctamente los registros matriciales y gráficos, uno no responde y dos lo hacen incorrectamente.

Respecto al número de parámetros del conjunto solución del sistema de ecuaciones se observan doce respuestas correctas, dos incorrectas y siete alumnos que no responden.

Cuando se les solicita que presenten un sistema de ecuaciones indeterminado doce alumnos lo hacen correctamente, siete no responden y dos lo hacen incorrectamente, en un caso presenta un sistema con dos planos coincidentes, en otro caso no justifica correctamente por que el sistema es indeterminado.

Complementando estos resultados de carácter cuantitativo al analizar las producciones de los alumnos se detecta en un grupo importante dificultades para interpretar la cantidad de variables libres del sistema de ecuaciones, que se relacionan con el número de parámetros de la solución general. Cinco de estos alumnos no relacionan correctamente el registro gráfico con el registro matricial.

6 Conclusiones

De acuerdo a la fundamentación teórica de este trabajo, se considera que, en general, los alumnos han logrado realizar actividades cognitivas de tratamiento en el registro matricial y conversión del registro matricial al geométrico para sistemas de dos y tres ecuaciones con tres variables o incógnitas

En el caso de sistemas de dos ecuaciones y tres variables en un grupo menor de alumnos observaron dificultades en la identificación de variables libres y por lo tanto parametrizar el conjunto solución y relacionar dicho conjunto con la ecuación de una recta o de un plano en forma paramétrica.

Como conclusión de este trabajo preliminar consideramos que las mayores dificultades se presentan en la actividad cognitiva de conversión de registros de representación en el caso particular de sistemas de dos ecuaciones y tres variables, especialmente cuando la intersección de los dos planos es una línea recta. Esta situación no ha sido aún indagada en nuestros alumnos, pero la forma escalonada de la matriz reducida por filas puede dar lugar a la elaboración de conclusiones erróneas por parte de los alumnos, especialmente en caso de sistemas de dos ecuaciones y tres variables cuya matriz reducida no tiene filas nulas.

Un punto que no se ha indagado en este trabajo es la identificación de objetos geométricos en R3 (Planos, Rectas) a partir de sus ecuaciones paramétricas, conceptos que se dictan paralelamente a sistemas de ecuaciones.

Estas dos situaciones pueden dar lugar a nuevas investigaciones en la cohorte en curso de las asignaturas Algebra y Geometría Analítica.

El uso de software GeoGebra ha sido de mucha utilidad, especialmente en la coordinación de los registros matriciales y geométricos de los sistemas de dos y tres ecuaciones con tres variables, permitiendo a los alumnos a la correcta interpretación geométrica del sistema y su conjunto solución a partir de la forma escalonada de la matriz aumentada.

Referencias

1. Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, R., y Rogalski, M. L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, 105-147 (1997)
2. Hillel, J. Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Springer, Dordrecht. (2000)
3. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_7
4. Sierpinska, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (2000)
5. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8
6. Dorier, J.-L. (ed.). *On the teaching of linear algebra*. Springer Science & Business Media (2000)
7. Oktac, Asuman. Conceptions about system of linear equations and solution. En *Challenges and strategies in teaching linear algebra*. Springer, Cham, p. 71-101 (2018)
8. Sandoval, I., & Possani, E. An analysis of different representations for vectors and planes in R^3. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 109-127 (2016)
9. Possani, E., et al. Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 432, no 8, p. 2125-2140. (2010)
10. Duval, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt F.(Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, 173–201. *México. Cinvestav* (1998)

Eje 6: Competencias Matemáticas

Una propuesta para evaluar la comprensión de gráficos estadísticos en alumnos de Ingeniería

Facundo Martínez, Noemí M. Ferreri

Proyecto de Investigación ING 635, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Pellegrini 250, Rosario
{facundom, nferreri}@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Los profesionales de la Ingeniería se enfrentan frecuentemente a problemas de naturaleza estadística. En el proceso de resolución de los mismos, los gráficos cumplen un papel fundamental tanto para el análisis de los datos como para la comunicación efectiva de las conclusiones obtenidas. La comprensión gráfica, entonces, constituye una competencia a desarrollar en estudiantes de carreras de Ingeniería. En este trabajo se proponen indicadores asociados a los diferentes niveles de comprensión y a las etapas del ciclo de resolución de problemas, para guiar a los docentes en el diseño de actividades relacionadas con gráficos estadísticos. Estos indicadores permiten además evaluar el nivel de comprensión gráfica en los estudiantes y ayudan a detectar las dificultades más frecuentes. A modo de ejemplo, se presenta además una actividad asociada al Diagrama de Pareto.

Palabras Clave: Gráficos estadísticos, Niveles de comprensión gráfica, Ciclo PPDAC, Indicadores.

1 Introducción

La resolución de problemas de naturaleza estadística es una de las competencias que se deben desarrollar en la formación de los futuros ingenieros. Esta constituye un proceso cuyas etapas pueden resumirse por ejemplo en el ciclo investigativo PPDAC (Planteo del problema, Planificación del estudio estadístico, Recolección de los datos, Análisis de los datos, Obtención de conclusiones), propuesto por Wild y Pfannkuch [1].

Los gráficos estadísticos cumplen un papel fundamental en este proceso, ya que permiten el análisis de los datos y la comunicación de los resultados obtenidos. La lectura y la comprensión de los gráficos también es importante para la vida cotidiana por cuanto estos constituyen una forma habitual de comunicar información, a través de diferentes medios.

En un curso de Estadística para futuros ingenieros con eje en la resolución de problemas es importante que los alumnos aprendan a construir gráficos estadísticos; pero fundamentalmente que puedan comprender la información contenida en gráficos construidos por ellos mismos o por otros. Por ese motivo, es deseable que a lo largo del curso se propongan actividades en las cuales los alumnos deban llevar a cabo estas tareas.

En este trabajo se propone el uso de indicadores tanto del ciclo PPDAC como de la comprensión gráfica propiamente dicha para el diseño de actividades y la evaluación del trabajo de los alumnos. La implementación de estas actividades y la posterior detección de errores, permitirá a los docentes rediseñar nuevas propuestas didácticas orientadas al desarrollo de la comprensión gráfica en los alumnos.

Se presenta, además, a modo de ejemplo, una actividad asociada al Diagrama de Pareto y los indicadores correspondientes.

2 Gráficos estadísticos

Los *gráficos estadísticos* constituyen herramientas para analizar datos y también para comunicar la información contenida en ellos. Según Friel, Curcio y Bright [2], estos utilizan ciertos códigos o formas como puntos, líneas, áreas o volúmenes que están asociados a escalas de medición, lo cual permite la fácil comprensión de la información en su conjunto. Según estos autores, los gráficos tienen en común cuatro componentes estructurales:

1. *el marco de referencia*, es decir, aquellos elementos que dan información sobre el tipo de variable que se está midiendo como, por ejemplo, los ejes, la escala, entre otros;
2. *los especificadores*, es decir, los aspectos morfológicos que caracterizan al gráfico para representar los datos, como, por ejemplo, en el histograma se utiliza un rectángulo;
3. *el título y las etiquetas*, es decir, los elementos que aportan información sobre el contenido contextual del gráfico y las variables representadas en él;
4. *el fondo*, es decir, todo lo referido a los aspectos visuales como el color y la cuadrícula, entre otros. [2]

Los gráficos pueden brindar información sobre el comportamiento de una única variable o sobre el comportamiento conjunto de dos o más. A su vez, estas variables pueden ser cualitativas o cuantitativas y estas últimas, discretas o continuas.

Cuando interesa representar información sobre variables cualitativas se pueden construir gráficos de barras o de sectores. Si se incluyen otras variables o criterios de clasificación, las barras pueden ser compuestas o subdivididas o pueden presentarse varios gráficos de sectores en forma comparativa. El diagrama de Pareto, utilizado frecuentemente en el área Calidad, es un caso especial de gráfico de barras. Existen otros gráficos para variables cualitativas, como el diagrama de puntos adaptado para ellas.

Cuando interesa representar información sobre el comportamiento de variables cuantitativas se pueden construir diagrama de bastones o histogramas, según estas sean discretas o continuas respectivamente. También diagramas de puntos, de caja y bigotes o de tallo y hoja. Si se incorporan algunos criterios de clasificación basados en variables cualitativas, cualquiera de estos gráficos puede presentarse de forma comparativa. El gráfico de series cronológicas se utiliza para mostrar el comportamiento de una o más variables a través del tiempo y otros gráficos como el diagrama de dispersión se utilizan para analizar la posible relación entre variables.

En el área Calidad, Ishikawa [3] propone siete herramientas indispensables, por cuanto resultan ser las más útiles en la resolución de la mayoría de los problemas. El autor sugiere que todas las personas involucradas en un proceso, desde los operarios hasta los cuadros gerenciales, debieran saber aplicarlas. Entre ellas se incluyen gráficos como el histograma (asociado a variables cuantitativas), el diagrama de Pareto (asociado a variables cualitativas) y el diagrama de dispersión (para el estudio de más de una variable). Estas herramientas no sólo son útiles en el área Calidad, sino que pueden aplicarse en otras ramas de la Ingeniería.

En la Sección 4.2 del presente trabajo se propone una actividad asociada al Diagrama de Pareto. Este diagrama es un tipo especial de gráfico de barras verticales donde las respuestas categorizadas se presentan en orden de frecuencia descendente y se combinan con un polígono acumulativo. El principio que subyace en este gráfico es el de separar los "pocos vitales" de los "muchos triviales", lo que permite dirigir la atención a aquellas respuestas o categorías que se dan más frecuentemente, para luego actuar en consecuencia. En su construcción el eje de ordenadas de la izquierda contiene las frecuencias absolutas o relativas y el eje de la derecha, las frecuencias relativas acumuladas. En el eje de abscisas están las distintas categorías, ordenadas de manera decreciente según su frecuencia, definida como la cantidad de unidades que presentan una misma categoría. Estas frecuencias pueden reemplazarse por cualquier otro criterio que dé cuenta de la importancia de cada categoría, como por ejemplo el costo o el tiempo.

3 Comprensión de gráficos estadísticos

La construcción y la comprensión de gráficos estadísticos constituyen dos competencias que cualquier estudiante de Ingeniería debe adquirir para su futuro ejercicio profesional.

La construcción implica en primer lugar la elección del gráfico apropiado, según la información que se desee representar (tipo y cantidad de variables, criterios de clasificación, etc.) y la determinación de los elementos que dicho gráfico debe tener. Esta tarea se lleva a cabo con la ayuda de programas informáticos, por lo que también implica conocer cómo utilizarlos.

La comprensión se refiere a las habilidades de lectura que los sujetos deben poner en juego para obtener significados de los gráficos construidos por ellos mismos o por otros [2]. En la misma línea de investigación, autores como Jolliffe [4] y Wood [5] señalan que la comprensión de información escrita o simbólica, por lo general, involucra tres tipos de comportamiento a la hora de realizar esta tarea: *la traducción* de la información, *la interpretación* y *la intra/extrapolación*. Por traducción se entiende a la habilidad de cambiar a la información de un registro a otro, por ejemplo, de una tabla a un gráfico particular. La interpretación comprende la reorganización de la información y la selección de los factores o partes relevantes para el análisis. Y, por último, la intra/extrapolación requiere de identificar consecuencias vinculadas al contexto de análisis que aportan a la comunicación de la información, y por lo tanto se puede pensar como una extensión de la interpretación. A partir de lo anterior, Curcio [6] proporciona tres niveles de compresión gráfica:

1. *Leer los datos*: es la lectura más superficial/literal que un sujeto debe realizar de un gráfico, es decir, no interpreta la información contenida en el mismo;
2. *Leer entre los datos*: es la lectura donde los sujetos pueden realizar interpretaciones y conexiones con la información;
3. *Leer más allá de los datos*: es la lectura que permite realizar predicciones e inferencias a se reflejan directamente en el gráfico.

A su vez, Friel, Curcio y Bright [2] amplían la clasificación definiendo un nuevo nivel:

4. *Leer detrás de los datos*: es la lectura que permite analizar críticamente si el modo que se obtuvieron es válido y fiable, así como también las conclusiones y su posible extensión.

Los dos últimos niveles pueden unificarse en uno solo ya que, para poder realizar predicciones o inferencias a partir de los gráficos, es importante haber analizado en primer lugar todo el proceso de obtención de información desde el planteo mismo del problema a resolver; es decir, se requiere seguir desde el inicio las etapas de ciclo PPDAC. La comprensión gráfica se asocia específicamente a las etapas de Análisis de los Datos y Conclusiones; pero no se pueden obtener conclusiones válidas si todo el ciclo no se desarrolla de manera correcta y coherente.

Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras [7] mencionan que los distintos niveles de lectura propuestos por Friel, Curcio y Brigth [2], permiten considerar si los estudiantes desarrollan las siguientes competencias vinculadas con el lenguaje gráfico:

1. Reconocer los elementos estructurales del gráfico (ejes, escalas, etiquetas, elementos específicos) y sus relaciones. Distinguir si cada elemento es o no apropiado en el gráfico particular.
2. Apreciar el impacto de cada uno de estos componentes sobre la presentación de la información.
3. Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos que se representan en el mismo y viceversa.
4. Reconocer cuando un gráfico es más útil que otro, en función del juicio requerido y de los datos representados, es decir, saber elegir el gráfico adecuado al tipo de variable y al tipo de problema.

4 Evaluación de la compresión de gráficos estadísticos. Indicadores

Para favorecer que los estudiantes tengan un nivel alto de comprensión gráfica, es importante que en los cursos de Estadística se les propongan actividades orientadas a tal fin. El análisis del desempeño de los estudiantes al resolver las actividades propuestas, permite luego determinar el nivel alcanzado, así como también identificar las dificultades que más frecuentemente presentan, guiando a los docentes en el rediseño de propuestas didácticas. Estas actividades básicamente deberían constar de tres componentes:

1. La descripción de una situación problemática en un determinado contexto.
2. Uno o más gráficos construidos con los datos recolectados en el marco de la resolución del problema planteado; o bien, un conjunto de datos para que los alumnos construyan en primer lugar los gráficos correspondientes.
3. Un conjunto de preguntas sobre la información que se puede obtener a partir de la lectura de dichos gráficos.

Para ayudar a los docentes en la elaboración de esas actividades, se considera un conjunto de indicadores, asociados a las diferentes etapas del ciclo PPDAC, propuestos por Carnevali,y Ferreri y otros [8], [9] y otros indicadores específicos de los niveles de comprensión gráfica basados en la propuesta de Curcio [2] con la modificación propuesta por los autores de este trabajo. Estos indicadores no sólo sirven para el diseño de los problemas a presentar sino también para evaluar el trabajo de los alumnos y determinar, entre otras cosas, su nivel de comprensión gráfica.

En la Sección 4.1 se presentan los indicadores y en la Sección 4.2 se utilizan algunos de ellos para proponer un problema sencillo asociado a un Diagrama de Pareto y posibles preguntas a responder.

4.1 Indicadores para la evaluación de la comprensión gráfica

En esta sección se presentan indicadores asociados a los niveles de comprensión gráfica (Tabla 1) e indicadores asociados a las diferentes etapas del Ciclo PPDAC (Tabla 2). Los primeros se presentan sólo para el Diagrama de Pareto, puesto que la actividad propuesta en este trabajo se refiere a dicho diagrama; pero pueden definirse para cualquier otro gráfico, respetando las características propias del mismo.

Los indicadores asociados al Nivel 3 y presentados en la Tabla 1 se refieren a tareas que se deben realizar en el marco de las diferentes etapas del ciclo PPDAC por lo cual están vinculados con los presentados en la Tabla 2. Muchas de estas tareas pueden llevarse a cabo efectivamente, como, por ejemplo, la definición del objetivo o de las variables del estudio. Para otras, sólo pueden formularse preguntas, como por ejemplo ¿Cómo habrán sido tomados los datos?, ¿las variables han sido medidas correctamente?, entre otras. Si bien para estas últimas preguntas, las respuestas no están al alcance de los alumnos su consideración favorece una lectura crítica de la información

Tabla 1. Indicadores asociados a los diferentes niveles de comprensión para un Diagrama de Pareto.

Nivel	Indicador asociado
1	En el diagrama de Pareto... - el eje de abscisas muestra las categorías de la variable de interés (*) - el eje de ordenadas de la izquierda muestra la cantidad de elementos que presentan cada categoría (o frecuencia absoluta de la categoría) - el eje de ordenadas de la derecha muestra la proporción (o porcentaje) de elementos que presentan cada categoría y todas las anteriores (frecuencia (**) relativa acumulada hasta cada categoría, considerando que están ordenadas en forma decreciente según sus frecuencias absolutas) - la altura de cada barra representa la frecuencia absoluta de la categoría correspondiente (se lee en el eje de la izquierda) - la ordenada de cada punto (leída en el eje de la derecha) representa la frecuencia relativa acumulada hasta la categoría correspondiente
2	En el diagrama de Pareto las categorías de la variable se ordenan en forma decreciente, según su frecuencia. Las frecuencias absolutas de cada categoría se representan con barras, cuya altura se lee en el eje de ordenadas de la izquierda. Para cada categoría, además, se obtiene la frecuencia relativa acumulada, la cual se representa por un punto, cuya ordenada se lee en el eje de la derecha (***). La información de una variable categórica se puede presentar en una tabla de distribución de frecuencias, en un gráfico de barras simples o en un gráfico de sectores. El diagrama de Pareto resulta más informativo. El total de elementos analizados resulta de la suma de las frecuencias absolutas de todas las categorías (la suma de sus alturas). El diagrama de Pareto permite detectar más rápidamente cuál/es son las categorías que con más frecuencia se presentan. El diagrama de Pareto permite detectar cuáles son las categorías hasta las que se acumulan ciertos valores de frecuencias relativas.
3	Un estudio estadístico por el cual se construye un diagrama de Pareto tiene como objetivo principal detectar o identificar algunas categorías que más frecuentemente provocan fallas o piezas defectuosas o cualquier otro problema, para guiar luego acciones correctivas. La población en estudio está compuesta por el total de elementos (piezas, partes del proceso, etc.) La variable en estudio es uno de los posibles factores asociados a las fallas, defectos, problemas en el proceso, etc. Se trata de una variable cualitativa, cuyas categorías se ordenan en forma decreciente por su frecuencia. Las medidas de resumen son generalmente las frecuencias relativas o proporciones (acumuladas o no) asociadas a las diferentes categorías. Del diagrama se pueden identificar la/las categorías que más impacto tienen, en función de su frecuencia. Si se trabajó con una muestra, estas conclusiones son preliminares ya que se requiere de herramientas de inferencia para estimar los valores de las proporciones de interés en la población. (****)

Fuente: elaboración propia.
Observaciones: (*) La variable de interés en el diagrama de Pareto se refiere a posibles factores de un problema
(**) La frecuencia es uno de los posibles criterios para ordenar a las categorías; pero puede haber otros como costos, tiempos, etc.
(***). La mencionada es la información mínima que un Diagrama de Pareto debe presentar. Algunos paquetes estadísticos pueden presentar información adicional para este diagrama.
(****) Los indicadores mencionados en este nivel son algunos de los posibles, ya que se podrían considerar todos los indicadores del Ciclo PPDAC (Tabla 2) asociados al proceso de resolución del problema planteado. Por ejemplo, se puede analizar y cuestionar la forma en que se obtuvieron los datos.

Los indicadores de la Tabla 1 se formulan como proposiciones afirmativas y en ocasión de diseñar la actividad, se toman como referencia para posibles preguntas. En el momento de evaluar el trabajo de los estudiantes, se observa si sus respuestas son correctas según coincidan con lo definido en los indicadores correspondientes. Por ejemplo, el primer indicador afirma: "En el diagrama de Pareto el eje de abscisas muestra las categorías de la variable de interés" y entonces, se puede formular la pregunta: "¿Qué información se muestra en el eje de abscisas?". La respuesta de un estudiante será correcta si coincide con lo afirmado en dicho indicador, siempre que esté enmarcada en el contexto del problema planteado.

Los indicadores de la Tabla 2 se refieren a tareas asociadas a todo el proceso de resolución de un problema de naturaleza estadística. En ocasión del diseño de la actividad, orientan al docente respecto de diferentes elementos a incluir en la descripción de la situación problemática. Para las tareas descriptas en el enunciado, las respuestas del estudiante serán correctas si las reconoce y eventualmente formula algún juicio crítico sobre ellas; para las que no están mencionadas explícitamente, las respuestas serán correctas si las define a su criterio o formula algún juicio crítico. Por ejemplo, si en la descripción de la situación planteada se enuncia el objetivo del estudio estadístico, la respuesta será correcta si el alumno lo reconoce.

Tabla 2. Indicadores asociados a las etapas del Ciclo PPDAC, referidos a las tareas que deben llevarse a cabo en la resolución de un problema de naturaleza estadística.

Etapa	Indicadores para evaluar el desempeño de los alumnos
Planteo del Problema	Reconoce, plantea o se formula alguna pregunta crítica sobre el objetivo general
	Reconoce, define o se formula alguna pregunta crítica sobre la población bajo estudio.
	Reconoce, define o se formula alguna pregunta crítica sobre las variables.
	Reconoce, define o se formula alguna pregunta crítica sobre los parámetros de interés.
	Traduce estadísticamente el problema y los objetivos
Planificación del Estudio Estadístico	Reconoce, define o se formula alguna pregunta crítica sobre el tipo de estudio.
	En el caso de muestras o experimentos, reconoce o define el tamaño de la muestra
	En el caso de muestras reconoce o define la precisión y/o el nivel de confianza pretendidos.
	En el caso de estudios por muestro o experimentos, reconoce el tipo de muestra o de diseño o deja que el alumno lo defina
	Reconoce cómo se van a medir las variables o define cómo hacerlo.
	Reconoce cómo se va a garantizar la trazabilidad de los datos o define cómo hacerlo.
	Reconoce o define el plan de análisis de los datos
Recolección de los Datos	Indica cómo se llevó a cabo el trabajo de campo, o bien lo hace e indica cómo.
	Indica cómo se llevó a cabo la depuración de los datos o bien lo hace e indica cómo.
Análisis de los Datos	Utiliza e interpreta los gráficos provistos o los construye e interpreta.
	Utiliza e interpreta las medidas de resumen provistas o las obtiene e interpreta.
	Utiliza salidas de software o las obtiene y utiliza.
	Identifica la información sobre el cumplimiento de los requerimientos de las técnicas de inferencia o lo realiza.
	Utiliza las herramientas inferenciales brindadas o las aplica.
Conclusiones	Reconoce o interpreta adecuadamente los resultados.
	Reconoce las conclusiones en contexto o utiliza la información de contexto para elaborar sus conclusiones.
	Reconoce las conclusiones en función de los objetivos o las obtiene y comunica en lenguaje no estadístico.

Fuente: Adaptado de Carnevali, G., Ferreri, N. y de las Heras, L. [9]

4.2 Aplicación de los indicadores para el diseño de un problema

A partir de los indicadores propuestos en las Tablas 1 y 2, se presenta un problema, asociado a un Diagrama de Pareto. Planteado el enunciado del mismo, se sugiere un conjunto de preguntas posibles, las que se presentan en la Tabla 3.

Es posible que para que la resolución de la actividad no resulte muy extensa, no se formulen todas las preguntas incluidas en Tabla 3; pero es importante que se seleccionen preguntas asociadas a diferentes niveles de comprensión para evaluar adecuadamente a los estudiantes.

El enunciado del problema propuesto es el siguiente: Una empresa metalúrgica fabrica piezas especiales para maquinaria agrícola. Cuenta para ello con 9 líneas de producción que simultáneamente producen el mismo tipo de pieza. Los volúmenes de producción de las líneas son similares.

En el último tiempo, los clientes comenzaron a quejarse más frecuentemente por la calidad de dichas piezas. De hecho, puede decirse que desde el mes de mayo el número de quejas recibidas presentó un aumento importante.

En la empresa decidieron investigar las piezas producidas desde ese mes y registraron para cada una de las piezas con fallas, la línea de la cual provenía. Con la información recabada se construyó el Diagrama de Pareto que se presenta en Fig.1.

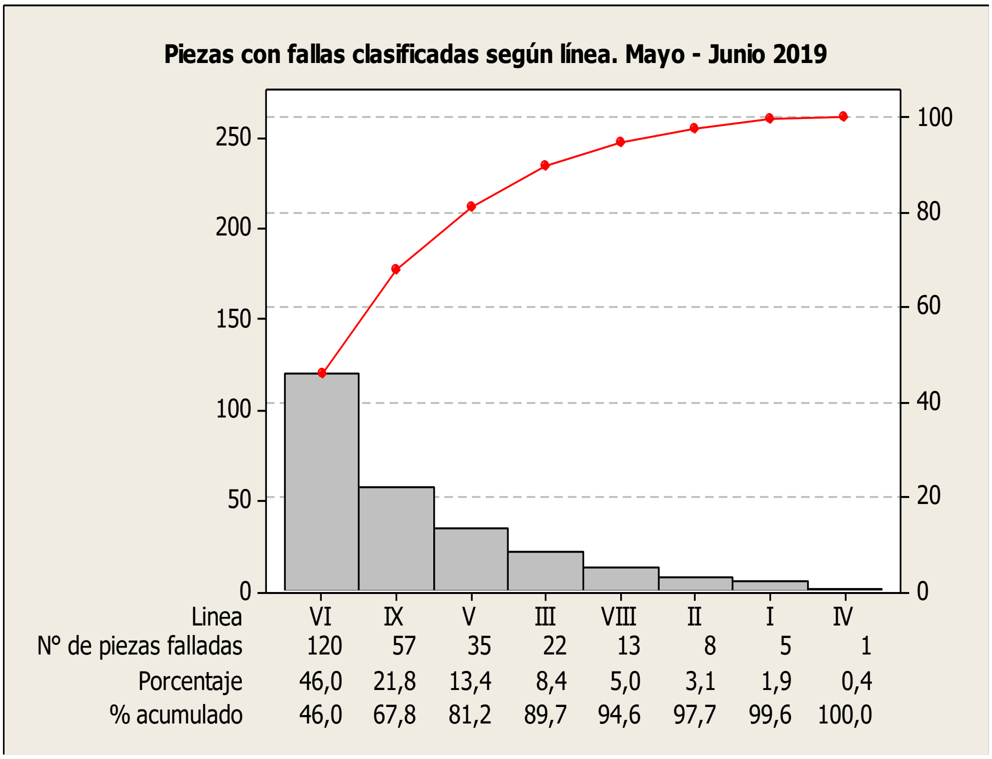


Fig. 1. Diagrama de Pareto que se acompaña al enunciado de la situación en la actividad propuesta.Fuente: elaboración propia

Tabla 3. Posibles preguntas para la actividad propuesta e indicadores asociados con cada nivel de compresión gráfica.

Nivel	Preguntas posibles	Indicador asociado (en contexto)
1	¿Qué información se presenta en el eje de abscisas?	En el diagrama de Pareto… - el eje de abscisas muestra las diferentes líneas de producción (categorías de la variable de interés).
	¿Qué información se presenta en el eje de ordenadas de la izquierda?	- el eje de ordenadas de la izquierda muestra la cantidad de piezas con fallas asociadas a cada línea (frecuencia absoluta de cada línea).
	¿Y en el de la derecha?	- el eje de ordenadas de la derecha muestra la proporción (o porcentaje) de piezas con fallas asociadas a cada línea de producción y a todas las anteriores, ordenadas en forma decreciente según sus frecuencias absolutas
	¿Qué representa la barra asociada a la línea I?	- la altura de cada barra representa la cantidad de piezas con fallas observada en cada línea (frecuencia absoluta de cada línea) (eje de la izquierda)
	¿Qué representa el punto asociado a la línea V?	- la ordenada de cada punto (eje de la derecha) representa la frecuencia relativa acumulada hasta cada línea de producción.
2	¿Considera que el gráfico está bien construido?	En el diagrama de Pareto las categorías de la variable se ordenan en forma decreciente, según su frecuencia. Las frecuencias absolutas de cada categoría se representan con barras, cuya altura se lee en el eje de ordenadas de la izquierda. Para cada categoría, además, se obtiene la frecuencia relativa acumulada, la cual se representa por un punto, cuya ordenada se lee en el eje de la derecha. (El gráfico presentado coincide con esta descripción y por lo tanto está bien construido, Incluso presenta elementos adicionales)
	¿De qué otra manera se podría presentar la ¿misma información? (tablas, otros gráficos) ¿Cuál de ellas le parece la más conveniente?	La información de una variable categórica se puede presentar en una tabla de distribución de frecuencias, en un gráfico de barras simples o en un gráfico de sectores. El diagrama de Pareto resulta más informativo.
	¿Qué cantidad de piezas con fallas se analizaron?	El total de elementos analizados resulta de la suma de las frecuencias absolutas de todas las categorías (la suma de sus alturas).
	¿Cuál es la línea que más piezas con fallas produce? ¿Qué porcentaje representa dicha línea en el total de piezas con fallas analizado?	El diagrama de Pareto permite detectar más rápidamente cuál/es son las categorías que más frecuencia presentan.
	Si tuviera que elegir tres líneas con las que trabajar en primer lugar, ¿a cuáles elegiría? ¿Qué líneas se asocian con más del 20 % del total de piezas con fallas, cada una?	El diagrama de Pareto permite detectar cuáles son las categorías que más frecuencia, en términos relativos, acumulan.

Tabla 3 (cont.). Posibles preguntas para la actividad propuesta e indicadores asociados con cada nivel de comprensión gráfica.

Nivel	Preguntas posibles	Indicador asociado (en contexto)
3	¿Cuál es el objetivo del estudio realizado?	Un estudio estadístico por el cual se construye un diagrama de Pareto tiene como objetivo principal detectar o identificar algunas categorías que provocan fallas o piezas defectuosas o cualquier otro problema, para guiar luego acciones correctivas.
	¿Cómo definiría a la población en estudio?	La población en estudio está compuesta por las piezas con fallas producidas a partir del mes de mayo.
	¿Cuál es la variable en estudio? ¿De qué tipo es?	La variable en estudio es uno de los posibles factores. Se trata de una variable categórica, cuyas categorías se ordenan en forma decreciente por su frecuencia.
	¿Qué medidas de resumen sería de interés definir?	Las medidas de resumen son frecuencias relativas o proporciones (acumuladas o no) asociadas a las diferentes categorías.
	¿Considera que se trabajó con una muestra? Si es así, ¿esta muestra le permitiría realizar inferencias válidas?	Si se trabajó con una muestra, estas conclusiones son preliminares, se requiere de herramientas de inferencia para estimar los valores de las proporciones en la población
	¿Qué puede concluir Ud. en relación al objetivo planteado? Esas conclusiones, ¿son preliminares o definitivas?	Del diagrama se pueden identificar la/las categorías que más impacto tienen, en función de su frecuencia. Estas conclusiones serán preliminares o definitivas según se considere al conjunto como una muestra o como la población.
	¿Consideraría válidas las conclusiones si las líneas tuvieran volúmenes de producción muy diferentes? ¿Qué análisis llevaría a cabo en este caso?	Si las producciones de cada línea difieren, no se pueden comparar las frecuencias absolutas. Es necesario relacionar la cantidad de piezas con fallas por línea con la cantidad de piezas producidas por dicha línea, en el período en estudio.
	¿Qué otra información, además de la línea, podría haberse registrado de cada pieza con fallas?	Sería razonable registrar para cada pieza con fallas, el tipo y la cantidad de fallas observadas. Podría realizarse un análisis más profundo.

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

Como se manifestó en este trabajo, la adecuada comprensión de los gráficos estadísticos es de suma importancia en todo el proceso de resolución de problemas de naturaleza estadística, especialmente en las etapas de Análisis de los Datos y de Conclusiones, así como en la comunicación de las mismas. Para que los estudiantes logren niveles altos de comprensión gráfica es indispensable que resuelvan frecuentemente actividades en las cuales deban analizar la información brindada en gráficos construidos por ellos o por otros.

Algunas de estas actividades pueden ser destinadas específicamente para evaluar la comprensión gráfica, especialmente al inicio del curso, cuando se abordan los temas de análisis descriptivo de datos. Otras pueden enmarcarse en la resolución de problemas o casos, en la cual la comprensión gráfica cumple un papel muy importante.

En este trabajo se presenta una propuesta para evaluar la comprensión, que se apoya en indicadores del ciclo de resolución de problemas (Ciclo PPDAC) y de otros indicadores asociados a los niveles de comprensión gráfica.

La aplicación de este tipo de propuestas favorece el desarrollo de la comprensión gráfica en los estudiantes y el análisis de los resultados obtenidos orienta a los docentes en la identificación de dificultades frecuentes que sirven de base para el planteo de nuevas propuestas que ayuden a superarlos.

Referencias

1. Wild, C.y Pfannkuch, M.: Statistical Thinking in Empirical Enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, Vol 67, Nº 3, pp. 223-265 (1999)
2. Friel, S. N.; Curcio, F. R. y Bright, G. W.: Making sense of graph: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 32, N°2, pp. 124 -158 (2001)
3. Ishikawa, K.: *¿Qué es el control total de la calidad? La modalidad japonesa*. Grupo Editorial Norma (1992)
4. Jolliffe, F. R.: Assessment of the understanding of statistical concepts. Vere-Jones, D. (Ed.): *ICOTS 3: Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statictics. School and general issues, Volumen 1.* International Statistical Institute. pp. 461-466 (1991)
5. Wood, R.: Objectives in the teaching of mathematics. *Educational Research*, Vol. 10, pp. 83-98 (1968)
6. Curcio, F. R.: *Developing Graph Comprehension. Elementary and Middle School Activities*. National Council of Teachers of Mathematics (1989)
7. Arteaga, P.; Batanero, C.; Contreras, J. M; y Cañadas, G: Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 19, N° 1, pp. 15-40 (2016)
8. Carnevali, G..: Ferreri, N. y Medina, M.: Resolución de problemas de naturaleza estadística: Aplicación de indicadores para su evaluación. *Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. XIX Encuentro Nacional, XI Internacional*, Vol. 1, N° 1, pp. 97 - 104 (2015)
9. Carnevali, G..: Ferreri, N. y de las Heras, L.: Uso de Indicadores para el trabajo con casos en el primer curso de Estadística para Ingeniería Industrial. *XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería,* Vol. 1, N°1, pp. 501 - 507 (2017)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Experiencia Aplicación de la Derivada, mediante el Aprendizaje Basado en Problemas

Paola Andrea Vilchez, Graciela del Valle Echevarría, María Agostina Cagnina

Departamento de Ciencias Básicas- Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias Universidad Nacional de San Luis
Campus Universitario -Ruta 148 Extremo Norte – Villa Mercedes, (San Luis)
{gecheva61, agostinacagnina, vilchezpaolaandrea}@gmail.com

Resumen. El presente trabajo consiste en la exposición de una experiencia áulica realizada en la materia Análisis Matemático 1, de las carreras de Ingeniería Electrónica, Electromecánica, Mecatrónica, Alimentos, Química, Industrial, en lo referido a la compresión de la aplicación de la derivada en un problema de ingeniería. Esta experiencia se realizó utilizando una propuesta de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) relacionada con la aplicación de la derivada a una situación problemática conocida de ingeniería, perteneciente a la bibliografía de la cátedra. Este trabajo se realiza con el fin de que los estudiantes comiencen a visualizar la relación de la matemática aplicada al contexto real, permitiendo a su vez ser protagonista de su propio aprendizaje y desarrollar competencias que le serán útiles en su carrera y futuro profesional.

Palabras Clave: Aplicación de la Derivada, Aprendizaje basado en problema, Competencias.

1 Introducción

El presente trabajo se llevó a cabo con estudiantes del primer año de las carreras de Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería Química que cursan Análisis Matemático 1, dictada en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis.

La iniciativa del presente trabajo surge como respuesta al contexto actual que atravesamos, en el que se demanda profesionales competentes en un mercado laboral cada vez más cambiante:

La Educación Superior es, probablemente, del último momento educativo a nivel formal que los alumnos experimentan antes de incorporarse a su vida profesional. Esta situación aporta una serie de responsabilidades en el profesorado de la Enseñanza Superior muy específicas cuyo objetivo fundamental es capacitar a sus alumnos, para que sean personas competentes en un mercado laboral cada vez más cambiante e incierto. Es fundamental hacerlo aportándoles los conocimientos necesarios, de alta calidad y lo más actualizados posibles sobre el contexto y la actividad profesional que van a desarrollar. Cumplir este objetivo cada día es más difícil en la nueva sociedad de la información y del conocimiento en la que estamos inmersos. La era digital no solo ha traído cacharros tecnológicos, sino un amplio cambio social que se fundamenta en nuevas actitudes, necesidades y competencias para el desarrollo profesional, lo cual repercute directamente en la formación del alumnado. Ahora ya no basta con transmitir conocimientos año tras año sobre una misma asignatura, sino que la realidad educativa se ha vuelto mucho más completa y exigente para el profesorado. [1]

Por otra parte “A nivel educativo se presenta un problema, ya que por un lado se demandan profesionales con nuevas competencias y habilidades, distintas a las que se aportan a los alumnos”. [1]

“El aprendizaje basado en problemas (ABP) es un proceso de aprendizaje centrado en el alumno, por lo anterior se espera de él una serie de conductas y participaciones distintas a las requeridas en el proceso de aprendizaje convencional”. [2]

El camino que toma el proceso de aprendizaje convencional se invierte al trabajar en el ABP. Mientras tradicionalmente primero se expone la información y posteriormente se busca su aplicación en la

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

resolución de un problema, en el caso del ABP primero se presenta el problema, se identifican las necesidades de aprendizaje, se busca la información necesaria y finalmente se regresa al problema. [2]

La educación tradicional desde los primeros años de estudios hasta el nivel de posgrado ha formado estudiantes que comúnmente se encuentran poco motivados y hasta aburridos con su forma de aprender, se les obliga a memorizar una gran cantidad de información, mucha de la cual se vuelve irrelevante en el mundo exterior a la escuela o bien en muy corto tiempo, se presenta en los alumnos el olvido de mucho de lo aprendido y gran parte de lo que logran recordar no puede ser aplicado a los problemas y tareas que se les presentan en el momento de afrontar la realidad. Como consecuencia de una educación pasiva y centrada en la memoria, muchos alumnos presentan incluso dificultad para razonar de manera eficaz y al egresar de la escuela, en muchos casos, presentan dificultades para asumir las responsabilidades correspondientes a la especialidad de sus estudios y al puesto que ocupan, de igual forma se puede observar en ellos la dificultad para realizar tareas trabajando de manera colaborativa. [2]

Por tanto, se hace necesario contar con procesos de enseñanza aprendizaje que motiven a los estudiantes, centrada en los mismos, que permita el trabajo colaborativo y el desarrollo de ciertas habilidades que le serán útiles en su vida y carrera.

Algunos aprendizajes que se fomentan en los alumnos al participar en el aprendizaje basado en problema son los siguientes:

- Habilidades cognitivas como el pensamiento crítico, análisis, síntesis y evaluación.
- Aprendizaje de conceptos y contenidos propios a la materia de estudio.
- Habilidad para identificar, analizar y solucionar problemas.
- Capacidad para detectar sus propias necesidades de aprendizaje.
- Trabajar de manera colaborativa, con una actitud cooperativa y dispuesta al intercambio. Se desarrolla el sentimiento de pertenencia grupal.
- Manejar de forma eficiente diferentes fuentes de información.
- Comprender los fenómenos que son parte de su entorno, tanto de su área de especialidad como contextual (político, social, económico, ideológico, etc.)
- Escuchar y comunicarse de manera efectiva.
- Argumentar y debatir ideas utilizando fundamentos sólidos.
- Una actitud positiva y dispuesta hacia el aprendizaje y los contenidos propios de la materia.
- Participar en procesos para tomar decisiones.
- Seguridad y la autonomía en sus acciones.
- Cuestionar la escala propia de valores (honestidad, responsabilidad, compromiso).
- Una cultura orientada al trabajo. [2]

Por otra parte, teniendo en cuenta las competencias en Ingeniería definidas por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (Confedi), el antiguo paradigma de formación de profesionales basado en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos que el alumno oportunamente sabrá abstraer, articular y aplicar eficazmente, ha ido perdiendo espacio en la realidad actual. La visión actual de la sociedad propone ver al egresado universitario como un ser competente (con un conjunto de competencias), capaz de ejercer su profesión en la realidad que lo rodea. [3]

Hay consenso en cuanto que el ingeniero no sólo debe saber, sino también saber hacer y que el saber hacer no surge de la mera adquisición de conocimientos, sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc. que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo. Trabajar por competencias, o integrar de manera intencional las competencias, supone un marco que facilita la selección y tratamiento más ajustados y eficaces de los contenidos impartidos. [3]

A partir del contexto en el que se desarrolla la actividad, se presentó a los estudiantes una situación problemática, utilizando como método de enseñanza aprendizaje el Aprendizaje Basado en Problemas. Los estudiantes en el cursado de la materia han adquirido conocimientos teóricos y prácticos e información que le permitirá luego el desarrollo del problema planteado.

El objetivo de este trabajo es mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje del tema aplicación de la derivada. En el recorrido que viven los estudiantes desde el planteamiento original del problema hasta su solución, trabajan de manera colaborativa en pequeños grupos, compartiendo en esa experiencia de aprendizaje la posibilidad de practicar y desarrollar habilidades, de observar y reflexionar sobre actitudes y valores que en el método convencional expositivo difícilmente podrían ponerse en acción.

En una primera instancia de la experiencia, sobre la cual se basa este trabajo, se trabajará con un problema conocido de ingeniería, para luego en un futuro, incorporar problemas de optimización de ingeniería situados en el contexto real.

2 Metodología de Trabajo

La aplicación del proceso de aprendizaje basado en problemas se realizó utilizando un problema de aplicación en ingeniería, de modo que los estudiantes pudieran visualizar el tema derivadas en una situación real.

Objetivos para el estudiante:

- Interpretación del problema.
- Comprensión del tema.
- Trabajo colaborativo.
- Autonomía en el aprendizaje.
- Habilidad para la búsqueda de información y su aplicación en la resolución del problema.
- Uso de herramientas gráficas.
- Desarrollo de comunicación escrita mediante la formalización de la actividad realizada.

En el desarrollo de la actividad no se le expresa de primera instancia al estudiante que se trata de un problema de aplicación de la derivada. Con esto se logra que el estudiante descubra por si mismo el camino para resolver el problema y que pueda elegir las herramientas que consideren necesarias, como así también efectuar las conclusiones que del desarrollo vayan surgiendo.

Enunciado:

Se dispone de una pieza rectangular de cartón que mide 40cm por 30cm. Con este material se fabrica una caja sin tapa. Para ello se cortarán 4 cuadrados, uno de cada esquina y se doblará la pieza resultante. ¿Cuánto deben medir los cuadrados que se recortaran para que el volumen de la caja resultante sea el máximo posible?
¿Cuáles serán las dimensiones de la caja?

Para ello, se utilizaron una serie de preguntas orientativas a fin de guiar a los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje:

1. ¿Cómo harías con la hoja que se te entregó para armar una caja? (haga un esquema)
2. ¿Cómo podes calcular el volumen de la caja?
3. ¿El volumen logrado es el mayor volumen posible? ¿Estás seguro? Discute con tus compañeros. Anoten las discusiones si hay o están todos de acuerdo.
4. ¿Cuál es la máxima longitud que puede tener cada uno de los cuadrados? (haga un esquema)
5. ¿Puede escribirlo en forma de desigualdad?
6. Escriba la expresión de como encontrarás el volumen máximo
7. Haga una tabla: ¿Cuál es la expresión que permite conocer el ancho para cada valor de altura?
8. ¿Cuál es la expresión que permite conocer el largo para cada valor de altura?

Altura (cm)	**Ancho(cm)**	**Largo(cm)**	**Volumen**
2			
3			

9. ¿Qué observas cuando aumenta el tamaño del cuadrado que recortas? ¿Puedes escribir una conclusión?
10. ¿Puedes escribir como varia el volumen en función de la longitud del cuadrado?
11. ¿Existe un camino alternativo para encontrar el volumen máximo?
12. ¿Puedes hacer una gráfica aproximada con los datos de la tabla?
13. Calcular de acuerdo a la gráfica cual es el valor máximo que debe tener el cuadrado para lograr el volumen máximo.
14. ¿Coincide con el valor máximo obtenido por tabla?
15. Si no coincide, ¿qué otra herramienta puedes aplicar?, discute con tus compañeros.

16. Resolver cómo hacer para obtener el máximo valor
17. Ver si el valor obtenido coincide con el de la gráfica
18. Extraiga conclusiones.

3 Análisis de Resultados

La actividad se dividió en etapas, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados.

- Primera etapa: Presentación del problema:

Los estudiantes reciben por parte del docente el enunciado en formato papel. Se hace lectura de la situación problemática, se conforman los grupos y se les otorga una plancha de cartón de las medidas del problema para poder representar lo que se le solicitaba.
Los grupos se conforman de 3 a 4 alumnos y se inicia el debate entre los participantes. El docente actúa como tutor en el proceso de discusión aprendizaje. Se estimula a los estudiantes en la búsqueda de información de otros cursos o unidades para encontrar la solución al problema.

- Segunda etapa:

Los estudiantes realizan búsqueda de herramientas e información para poder realizar el armado de la caja.

En esta etapa algunos estudiantes realizaron en una hoja de papel el corte de un cuadrado en cada una de las esquinas, otros en tanto realizan un esquema. Hay una primera aproximación de cálculo de volumen.

En este proceso, con la intervención del docente, se busca en los estudiantes el desarrollo de pensamiento crítico, habilidades para la solución del problema y para la colaboración, mientras se identifican problemas que vayan surgiendo, formulan hipótesis, conducen la búsqueda de información, realizan experimentos (cálculos) y determinan la mejor manera de llegar a la solución del problema planteado.(Dirección de Investigación y Desarrollo Educativo)

En la búsqueda de obtener el volumen máximo de la caja, los estudiantes se valieron de la fórmula para cálculo de volumen de un prisma.

Realizado el cálculo, la pregunta que se plantearon era como determinar si el volumen obtenido era el máximo, con lo que empezaron a realizar diferentes cuentas, variando la medida del cuadrado de la esquina, observando que, a mayor medida de corte, mayor volumen obtenido, hasta que detectaron que, para cierto valor, el volumen comenzaba a disminuir. Se realizaron tablas para el cálculo.

En esta etapa, se realizan los apartados 1,2,3,4,5 correspondientes a la guía orientativa.

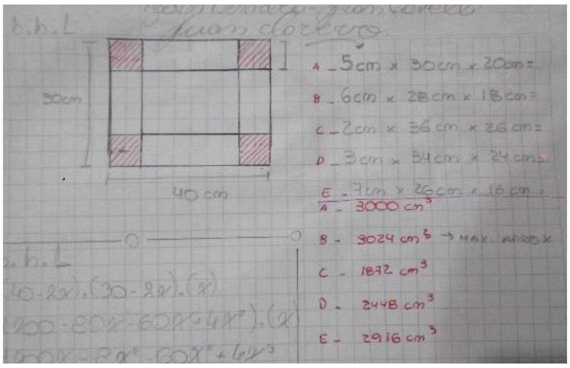
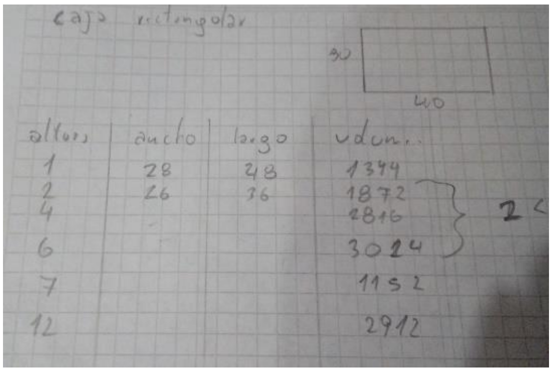



Fig. 1. Se observa esquema de la situación planteada y cálculos de volumen realizado por los estudiantes.

- Tercera etapa:

Continuando el debate, se plantea si el volumen obtenido mediante el cálculo realizado es el máximo posible. Surgen diferentes posturas, se realizan nuevos cálculos con decimales. Los estudiantes entienden que deben valerse de otra herramienta para asegurar la solución al problema.

En esta etapa surge la compresión de la situación planteada como problema de aplicación de la derivada. Los estudiantes obtienen la expresión a trabajar e identifican la variable que determina el valor del volumen.

Se realiza la aplicación de los pasos para resolver un problema de maximización.

En esta fase se realizan los apartados 6 a 11, correspondientes a la guía orientativa.

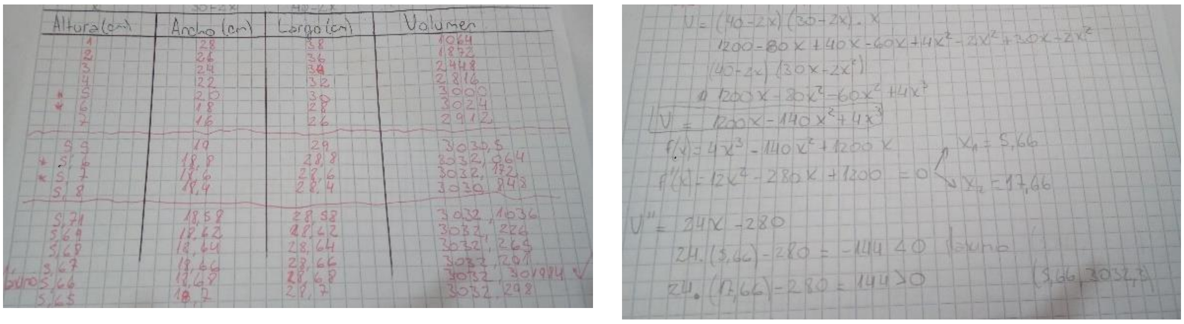


Fig. 2. Cálculo de volumen y expresión de la fórmula a trabajar.

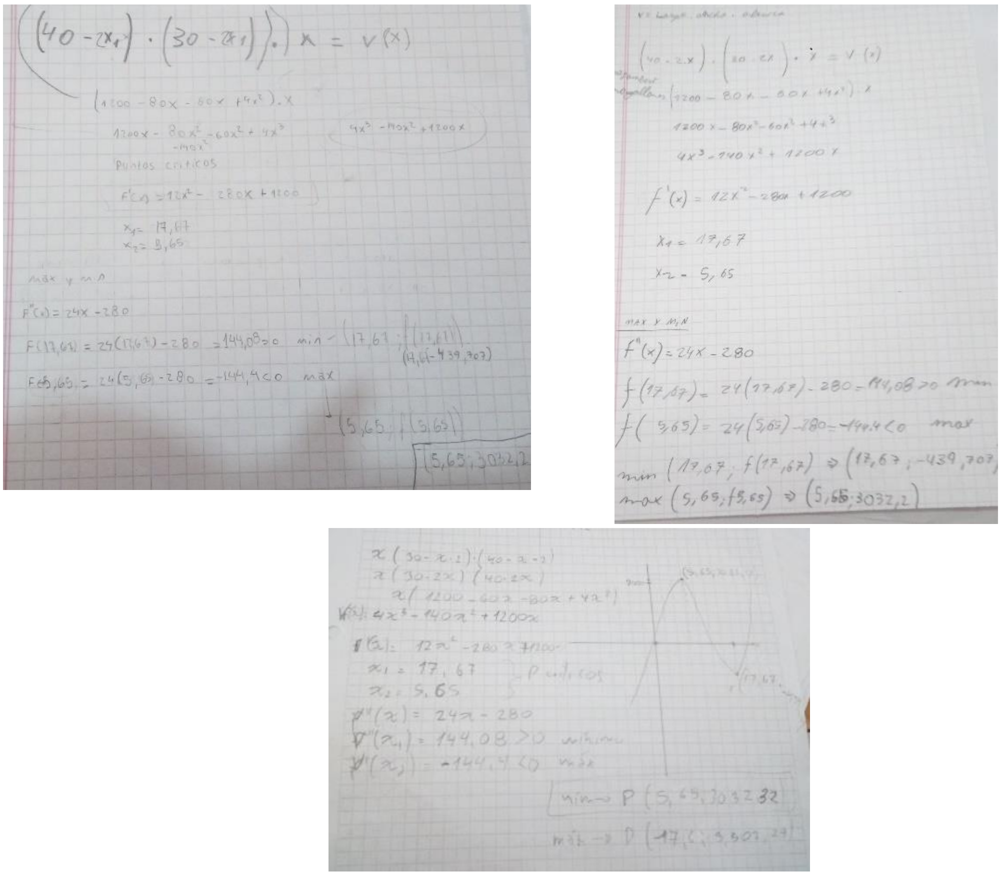


Fig.3. Obtención de volumen máximo utilizando aplicación de la derivada

- Cuarta etapa:

Comparación de los procesos realizados, por un lado, el proceso intuitivo, y por otra parte aplicando el tema visto. Realización de gráficas utilizando geogebra.

En esta etapa, se realizan los apartados 12 a 17, correspondientes a la guía orientativa.

- Quinta etapa:

Puesta en común de los resultados obtenidos. Debate en el aula de la actividad realizada y conclusiones de los estudiantes.

Presentación del trabajo realizado en formato Word.

4 Conclusiones

Los estudiantes realizaron mediante la propuesta, un desarrollo amplio que incluyó un primer análisis de la situación, buscando en principio comprender lo que se le solicitaba.
Mediante el problema, realizaron la búsqueda de información y herramientas que consideraron necesarias para dar solución al problema planteado.

En su mayoría, los estudiantes no descubrieron en principio que se trataba de un problema de aplicación de la derivada, en el cual debían encontrar el máximo valor posible de volumen. Esto les permitió realizar un primer acercamiento intuitivo, y luego mediante lo aprendido lograr la solución del problema, asegurando el valor solicitado,

En la tarea intervinieron dispositivos móviles para búsqueda de información, el uso de tablas y hoja de cálculo para determinar los valores de volumen, y finalmente la utilización de geogebra como herramienta gráfica.

En la puesta en común realizada en clase, los estudiantes manifestaron que el problema les permitió ver una aplicación de la derivada en un ejemplo sencillo, relacionado con una situación que podría darse en la vida cotidiana. Por otra parte, consideraron necesario e interesante contar con otros ejemplos que puedan desarrollarse en clase.

En la propuesta se logra que los estudiantes comprendan un tema de importancia de la materia y puedan en conjunto desarrollar otras habilidades y competencias, mediante un proceso de enseñanza aprendizaje diferente al convencional.

Si bien el trabajo propuesto es respecto de una situación problemática de conocimiento en cálculo, los estudiantes generalmente no alcanzan durante el cursado a realizar planteamientos de situaciones que pueden presentarse en el contexto o en la vida. Este tipo de problema, aplicado sobre metodologías diferentes a las tradicionales, permiten a los estudiantes, procesos de análisis diferentes y los prepara para el posterior desarrollo de problemas más complejos.

Referencias

1. Garcia, C. L. (2015). Enseñar con TIC Nuevas y renovadas metodologías para Enseñanza Superior. Várzea da Rainha Impressores, Lda. pp. 3,9.
2. Dirección de Investigación y Desarrollo Educativo, V. A. (s.f.). El Aprendizaje Basado en Problemas como técnica didáctica. pp. 2,3,18,23-24.
3. Confedi, C. F. (2014). Competencias en Ingeniería. eISBN 978-987-1312 -62-7-Pdf. pp. 8, 11.

Recursos de Reproducibilidad aplicados a la creación de materiales de enseñanza.

Irma Noemí No, Julián Eloy Tornillo, Guadalupe Pascal

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Lomas de Zamora
Ruta 4 (ex camino de cintura) Km 2, Lomas de Zamora, Buenos Aires, Argentina.
ino@ingenieria.unlz.edu.ar, jtornillo@ingenieria.unlz.edu.ar, gpascal@ingenieria.unlz.edu.ar

Resumen. La actualización de los objetos de aprendizaje tecnológicos requiere de un importante esfuerzo de reelaboración para impedir su obsolescencia. El objetivo de evitar la caducidad de estos recursos radica en *posibilitar la reproducibilidad de los significados asociados a los recorridos didácticos propuestos*, asegurando la *vigencia contextual de la formación por competencias en carreras de Ingeniería*. La reformulación y adecuación de los materiales de enseñanza del área matemática se facilita en gran medida mediante el uso de lenguajes de edición como "*Markdown*". En particular, el entorno de desarrollo "*RStudio*" y su recurso "*Rmarkdown*" posibilitan la generación de materiales educativos reproducibles basados en documentos integrados "*texto – código – resultados*", con control de cambios, salidas en diferentes formatos y publicación en diversos soportes de manera ágil y gratuita. El proceso de creación, publicación y reproducción de estos documentos integrados para la enseñanza de la matemática se sintetiza en este escrito.

Palabras Clave: Reproducibilidad, RStudio, STEM, publicación, trazabilidad.

1 Introducción

La currícula expresada en los planes de estudio de las carreras de ingeniería posee una marcada orientación a la formación por competencias, respaldando de esta manera los numerosos requisitos de ingreso al sistema del mercado laboral profesional. Para validar las competencias desarrolladas y fortalecidas durante la formación universitaria se deben incorporar estrategias de enseñanza dinámicas que acompañen los perfiles laborales solicitados y los posibles campos de desarrollo del profesional a futuro. La noción de una formación académica sostenible en el tiempo no alude a un corpus de contenidos y prácticas de enseñanza estático, sino a un conjunto de materiales educativos editables y reproducibles a través del buen uso de plataformas, lenguajes informáticos y documentación de respaldo.

La noción de reproducibilidad es parte de la definición de método científico que la propia academia aplica y divulga:"…Las principales características de un método científico válido son la falsabilidad, la reproducibilidad y la repetibilidad de los resultados, corroborada por revisión por pares…."[1]. La noción de reproducibilidad en este contexto alude a la posibilidad de obtener idénticos resultados a los divulgados por el investigador utilizando los recursos, las indicaciones y la documentación por él informados. La bibliografía sobre replicabilidad científica contiene los propios conceptos que impulsa, es decir, se basa en material replicable y disponible en formato abierto, tanto para el uso, como para la reformulación y avance de sus contenidos ([2] - pág. 91).

Específicamente la reproducibilidad en los contextos de enseñanza de la matemática se sitúa en el campo teórico de la didáctica, bajo líneas de estudio sobre temáticas de transposición y obsolescencia de las situaciones de enseñanza-aprendizaje. La mayoría de los autores coinciden en atribuir a Brousseau el planteo de interrogantes ligados al problema de reproducibilidad sosteniendo que "Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica" [3], y muchos de ellos consideraron dos subsistemas interrelacionados (el del docente y el del alumno) para analizar las características de la reproducibilidad en situaciones didácticas. De esta manera, autores

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

como Artigue [4], Arsac [5] y Lezama [6] investigan la noción de reproducibilidad en el campo didáctico (mediante el planteo de problemas abiertos, cambios de escenarios y en la propia formación docente) encontrándose un hilo histórico, común y conducente sobre el docente y su manejo del "envejecimiento" de sus materiales y propuestas de enseñanza.

Desde una mirada global es muy difícil poder asegurar la perfecta replicabilidad educativa por existir numerosas variables intervinientes ("externas" (ligadas a la estructura/ingeniería didáctica de la propuesta) e "internas"(ligadas a la significación de los aprendizajes para cada grupo de estudiantes) [6], [7]), todas ellas inmersas además en un contexto de formación por competencias en constante evolución. Esta variabilidad aporta a la veloz obsolescencia de los instrumentos didácticos, haciéndose necesario el conocimiento de diferentes recursos tecnológicos que sirvan de soporte a la tarea docente en su labor contra el "envejecimiento" de sus materiales educativos.

El objetivo de los puntos que siguen es acercarse al conocimiento de algunas herramientas de código abierto y gratuitas disponibles para la elaboración, publicación y mantenimiento de materiales de enseñanza en el área STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemática), dentro del contexto tecnológico actual.

2 Soportes para materiales de enseñanza reproducibles

Los docentes de ciencias básicas (y en especial los docentes del área matemática), siempre han tenido que vencer obstáculos comunicacionales relacionados a la elaboración de sus materiales didácticos. Crear un apunte de cátedra en el campo STEM, involucra (por lo menos) el uso de procesador de textos, un editor de ecuaciones y la incorporación de visualizaciones gráficas realizadas en algún utilitario o lenguaje informático (Excel, Graphmatica, Maple, Mathematica, Matlab, GeoGebra, R, Minitab, SPSS, Python, etc.). Posteriormente a su creación, la publicación de este material puede realizarse en diversos soportes (digitales o físicos).

Numerosos instrumentos tecnológicos, informáticos y de comunicación han sido incorporados para enriquecer la ingeniería didáctica que subyace a la elaboración de materiales educativos en el área matemática. Las plataformas multimediales (YouTube, Vimeo, y Twitch, entre otras) se han esforzado por incorporar herramientas de interactividad entre sus recursos, mejorando notablemente las experiencias de aprendizaje asociadas a estos sitios gratuitos. Los applets y widgets creados por docentes en diferentes programas y embebidos en sitios abiertos [8] [9] [10], facilitan el aprendizaje y aumentan la motivación de los estudiantes, la interacción del alumno con el objeto de aprendizaje se basa en acciones de reproducción ("run") bajo la elección de un conjunto de parámetros de ejecución. Las metodologías de enseñanza que incorporan estrategias de "Storytelling" visual y Gamificación contienen un componente adicional de emoción y han sido recientemente incorporadas a los objetos de aprendizaje con soporte tecnológico [11][12].

Las actividades de aprendizaje interactivo generalmente utilizan cinco tipos básicos de operatividad, concretamente: diálogo, control, manipulación, búsqueda y navegación; estas competencias tecnológicas fortalecidas mediante el uso mencionado de los recursos precedentes podrían ampliarse si se centran en la reproducibilidad del material mediante al agregado de la visibilidad del código que interviene en el objeto de aprendizaje [13].

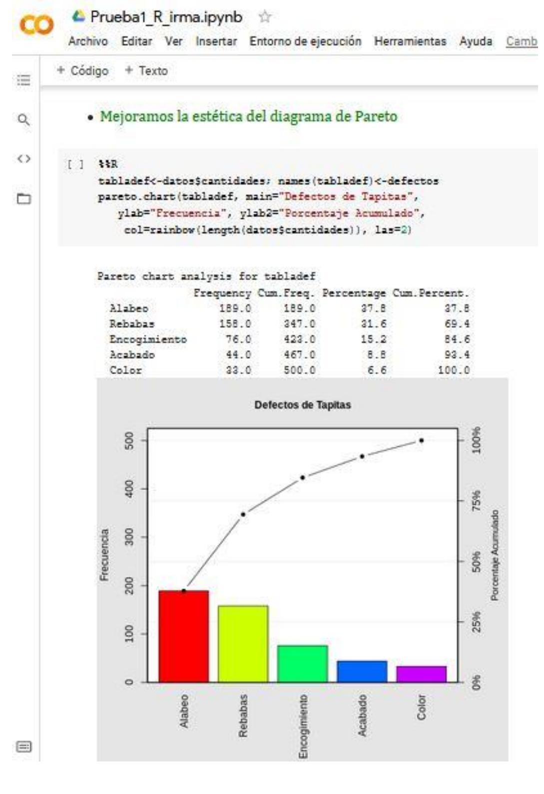
En general, la actualización de los materiales y los objetos de aprendizaje tecnológicos requieren de un importante esfuerzo de reelaboración y republicación para evitar su envejecimiento y posibilitar la reproducibilidad de los significados asociados a los recorridos didácticos propuestos, asegurando una dinámica vigente para la formación por competencias.

La reformulación y adecuación de los materiales se facilita en gran medida mediante el uso de lenguajes de edición como "Markdown" [14]. La sintaxis Markdown se encuentra disponible online en plataformas abiertas y gratuitas del tipo "Google Colaboratory" [15] y "Jupyter Notebooks" [16] (Ver Tabla1), y también forma parte de entornos de desarrollo integrados (IDEs) de descarga y uso gratuitos, instalables en el computador (como "RStudio" [17] y "JupyterLab" [16], entre otros) que posibilitan la creación de documentos integrados "*texto – código – resultados (tablas y gráficos)*" altamente reproducibles por alumnos y pares.

Los documentos creados en los entornos mencionados posibilitan incorporar celdas de texto, imágenes, links, tablas, expresiones LaTeX, y también código de programación (en lenguaje R o Python) que al ejecutarse incrusta en el propio documento la salida correspondiente (diferentes gráficas, soluciones de problemas, mapas, listas, elementos interactivos, etc.). El documento producido por lo tanto posee la ventaja de ser un "todo en uno", y al necesitar el docente renovarlo para incorporar un ajuste a nuevos contextos, puede lograrlo tan sólo cambiando alguna sentencia de programa.

Los documentos además pueden ser compartidos en línea (en versión .html) por lo cual los cambios que se produzcan tendrán efecto inmediato a la vista de los usuarios (alumnos, pares docentes y lectores en general).

Tabla 1. Documentos reproducibles realizados en las plataformas Google Colaboratory (1) y Jupyter Notebook (2).



(1)

(2)

3 Creación de Documentos reproducibles con RMarkdown en RStudio

Uno de los entornos de desarrollo integrado (IDE) más difundido y utilizado para el lenguaje de código abierto "R" es *RStudio* [17]. El IDE RStudio puede descargarse de forma gratuita y ser utilizado en cualquier sistema operativo (Windows, Linux o Mac). La nueva versión de RStudio (1.4) incorpora características de "visualización" otorgando vistas previas del resultado final del documento y posee opciones de edición disponibles en un menú superior (emulando los íconos de Word: elección de fuentes, alineación, inserción, citas, etc.).

Para crear un archivo reproducible en RStudio se debe elegir la opción R Markdown; se desplegará entonces un menú de opciones de diferentes formatos: Documento, Presentación, Shiny y Plantilla (Ver Figura 1), cada uno de ellos con diferentes alcances y finalidades, el menú también ofrece la posibilidad de elegir entre diferentes extensiones de salida (Html, Pdf, Word). En la sección "Cheatsheets" del "Help" existe una guía rápida de uso.

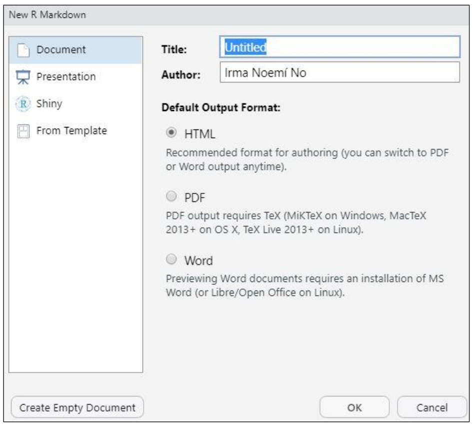


Fig. 1. – Creación de Documentos reproducibles en RStudio

Muy sintéticamente, explicaremos los diferentes tipos de documentos RMarkdown para uso del docente.

Los documentos *Shiny* crean objetos de aprendizaje interactivos que pueden ejecutarse en línea (requieren RStudio en el servidor alojamiento) o bien pueden correrse localmente (en computadores que posean RStudio instalado). Un ejemplo de aplicación Shiny elaborada para un ejercicio de test de hipótesis sobre la durabilidad de lámparas (que se encuentra alojado en el servidor oficial de RStudio y en un servidor privado propio) puede verse en la Figura 2.

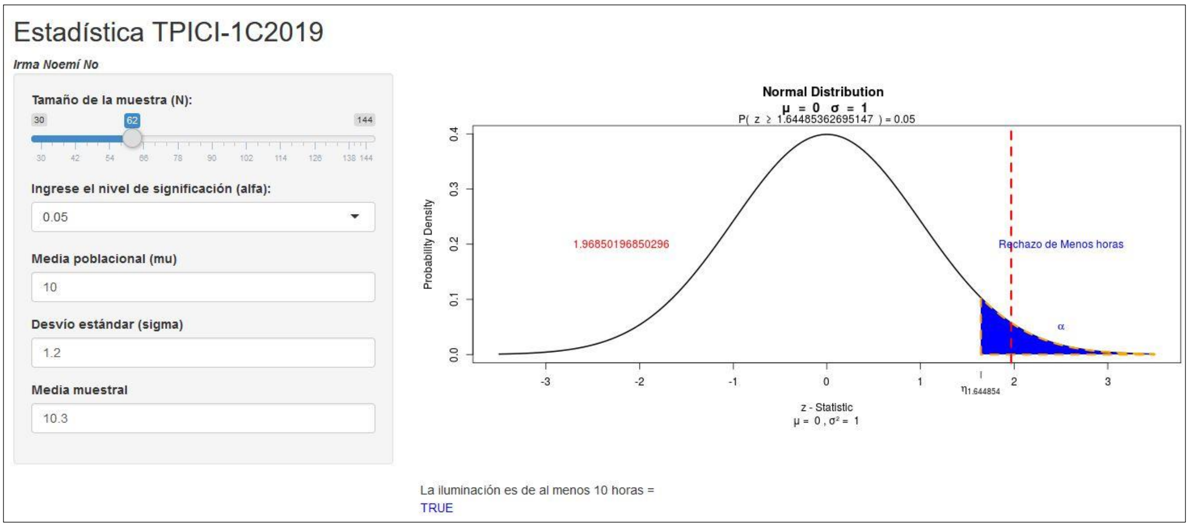


Fig. 1 – Aplicación Shiny como objeto de aprendizaje interactivo (Elaboración propia [18])

Los archivos Rmarkdown de tipo *Presentación* tienen por objetivo generar Slides (filminas) codificadas. Al correr estos archivos se generan automáticamente presentaciones con salidas de código embebidas (soluciones, tablas, gráficos, etc.), visualizables en la propia presentación (Ejemplos: [19] y Figura 3 izq.). De esta manera RStudio ofrece un soporte gratuito y mejorado para la creación de presentaciones de elevada funcionalidad (y con diversos formatos de salida logrados mediante la sentencia "Knit" (Fig. 3 der.)), que son de gran utilidad en las diferentes áreas de la matemática y sus aplicaciones. Es interesante observar que también se puede generar una salida de tipo PowerPoint, para docentes que prefieran difundir materiales en soporte tradicional.

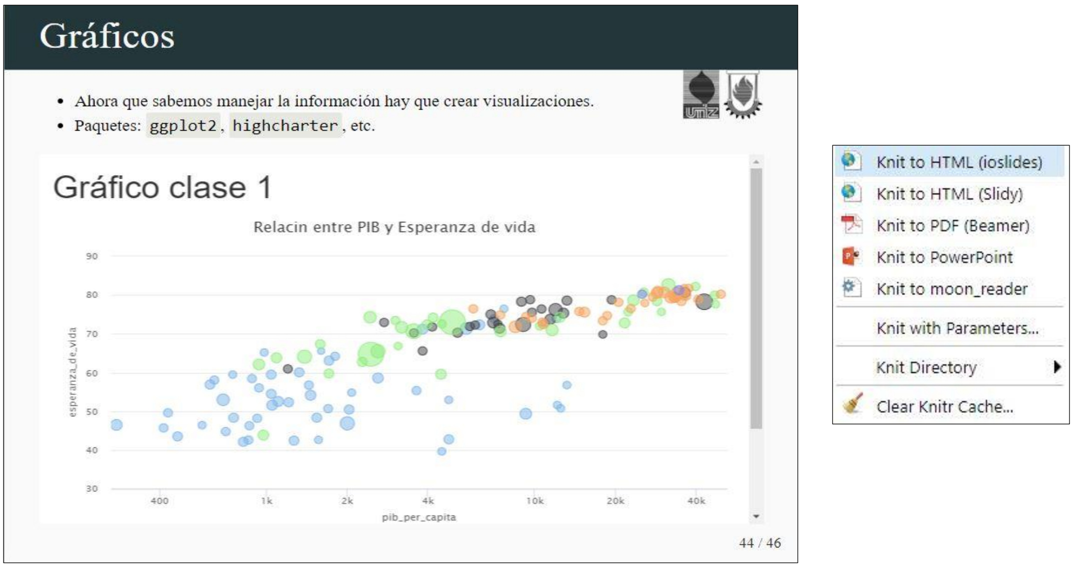


Fig. 2 – Slide de Presentación con gráfico interactivo embebido (izq) (Elaboración propia), Opciones de salida (der.)

La creación de archivos Rmarkdown a través de la opción *Template*, se basa en formatos preestablecidos que se hallan disponibles para descargar en paquetes/librerías instalables dentro de RStudio. Algunos de los Template más utilizados a la fecha, (entre muchos otros) son:

- "FlexDashboard" que posee la capacidad de crear desde widgets y aplicaciones Shiny hasta páginas web completas.
- "Learnr" Es una plantilla para la creación de tutoriales interactivos con celdas de código editable y ejecutable, con posibilidad de incorporar ayudas (hint) y salidas evaluables por el propio documento. El formato de salida html, posibilita su publicación online (ver ejemplo en Figura 4).
- "Prettydoc" y "Xaringan" otorgan presentaciones de base estética con funcionalidades extendidas y mejoradas.
- "Rticles" son plantillas correspondientes a los formatos de presentación de artículos en importantes congresos y revistas científicas.

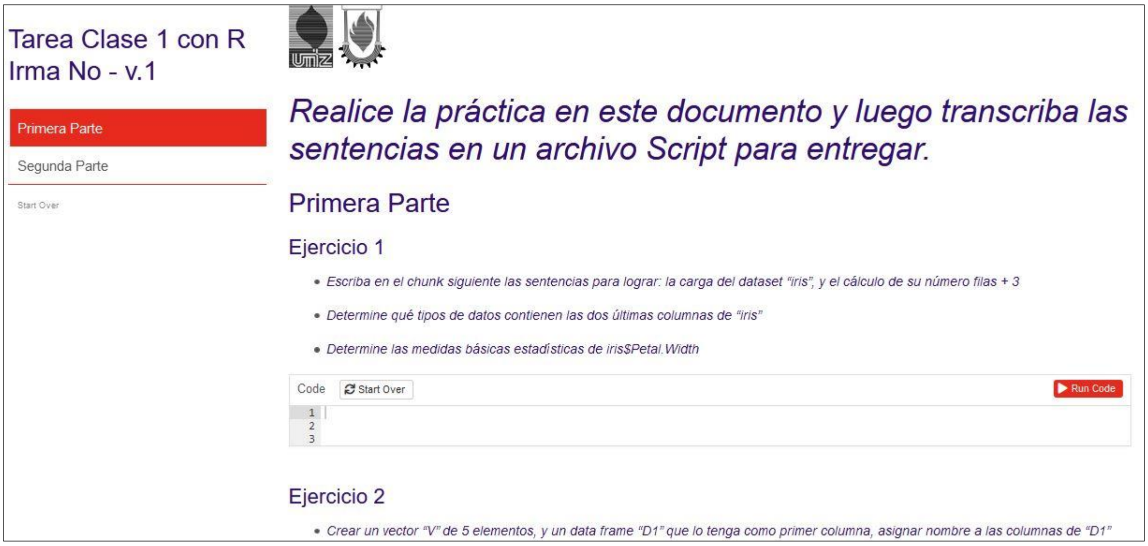
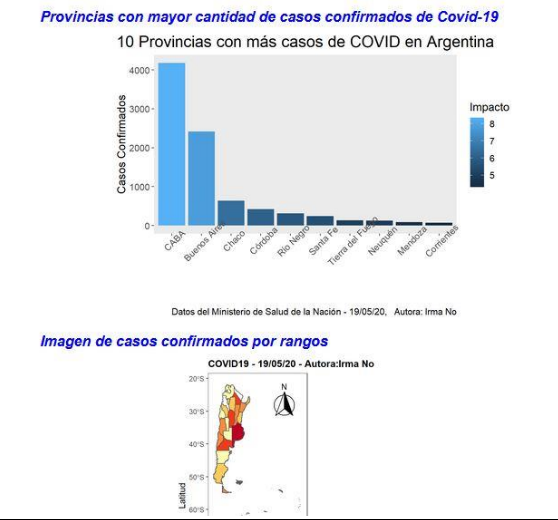
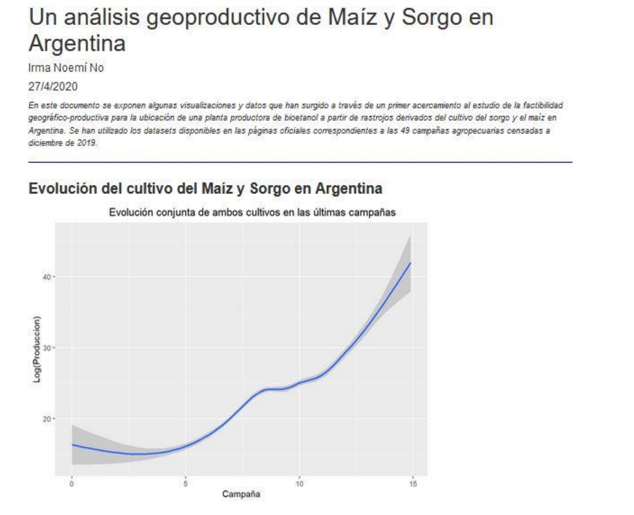


Fig. 3 – Ejercitación interactiva de codificación en R publicada en web (Elaboración propia [20])

Por último, si se desea crear un simple *Documento* Rmardown (ver Figura 1) estableciendo un tipo de salida desde el menú inicial, estos parámetros se podrán cambiar y reconfigurar a posteriori. Para ello se puede editar el encabezado (Yaml) del documento creado y/o seleccionar entre diferentes opciones de salida en la ejecución del comando "Knit" (salida Word, etc.). En la Tabla 2 se muestran trozos de documentos simples creados a través de Rmarkdown en los cuales se ha optado por una salida HTML, y que han sido finalmente publicados en web [21].

Tabla 2 – Vistas de Documentos HTML creados con Rmarkdown

<table>
<tr><th>Informe de Coronavirus en Argentina - Mayo/2020</th><th>Estudio para la Geolocalización de una planta de bioetanol</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Al comenzar la creación de un material educativo en RStudio siempre es conveniente generar una carpeta específica en la cual se guardarán de forma ordenada los datos, archivos, imágenes y otros elementos que formarán parte del documento final Rmarkdown. Como se muestra en la Figura 5 se podrán crear *proyectos* asociados a cada carpeta contenedora de un material de enseñanza u objeto de aprendizaje específico. También a futuro se podrán "controlar" diferentes versiones del material creado (generando una trazabilidad en los cambios).

Se mencionan a continuación dos paquetes/librerías de gran utilidad en la producción de materiales educativos, estos paquetes se hacen visibles en el menú de creación de proyectos de RStudio (Ver Figura 5):

- "Bookdown" [22] es una librería que permite crear libros fácilmente. Al crear un proyecto del tipo *"Book Project using Bookdown"* se visualiza una plantilla completa (de capítulos, figuras, estilos, etc.) lista para ser editada por el autor y redactar su material sobre el esquema precargado.
- "Blogdown" [23] es un paquete de soporte para la creación de páginas web, como alternativa a los tradicionales blogs estáticos.

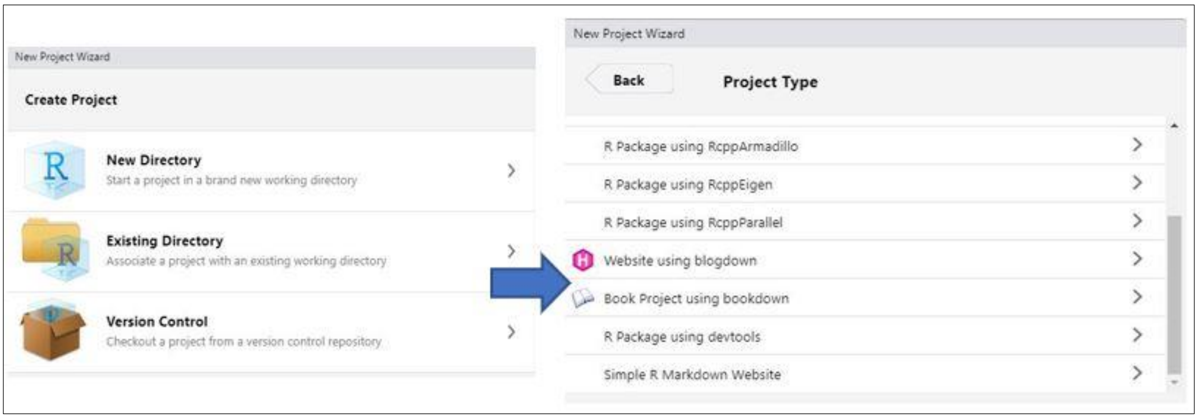


Fig. 4 – Proyectos de RStudio para la generación de materiales educativos

Una vez creado el material de enseñanza mediante los recursos de RStudio y Rmarkdown anteriormente mencionados, es necesario seleccionar la metodología de publicación y divulgación para compartirlo con los diferentes grupos de estudiantes y con la comunidad de pares docentes.

4 Publicar y compartir el material de enseñanza creado con RStudio

Para publicar y compartir los documentos producidos con Rmarkdown existen varias opciones, se mencionarán algunas de ellas a continuación.

4.1 Sitio “RPubs”

RPubs (Figura 6) es un sitio web abierto al registro gratuito de cualquier persona, mantenido por RStudio.com. El sitio contiene una galería de documentos desarrollados en el IDE “*RStudio*”; los documentos publicados han sido creados y compartidos por diferentes usuarios registrados. Este sitio es de gran utilidad para la comunidad de usuarios del lenguaje R actuando como repositorio para la consulta de diferentes casos de uso.

Los documentos cargados en RPubs son alojados en una dirección específica (link) comunicada al autor. De esta manera, los docentes que utilicen esta herramienta como alojamiento de sus materiales de enseñanza pueden compartir el link con sus alumnos y pares, sin costo alguno y a largo plazo.

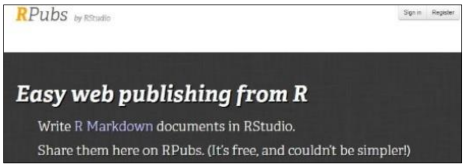


Fig. 5 – Sitio RPubs para compartir materiales de enseñanza creados en lenguaje R - https://rpubs.com/

4.2 Sitio “Shinyapp”

Los archivos interactivos creados bajo el formato Shiny de Rmarkdown podrán cargarse en el sitio Shinyapp.io (Figura 7) mantenido por RStudio.com. Tanto el registro como el uso de esta nube son gratuitos, y de manera similar a lo mencionado en el punto anterior, el material cargado correrá en una dirección específica, cuyo link podrá ser compartido por el autor con terceros (alumnos y pares) para su visualización y uso.

Para los docentes resultará muy enriquecedor visitar el sitio “*Galería de aplicativos Shiny*” (https://shiny.rstudio.com/gallery/) en el cual se pueden hallar numerosos ejemplos disponibles en forma abierta, gratuita y con código descargable.

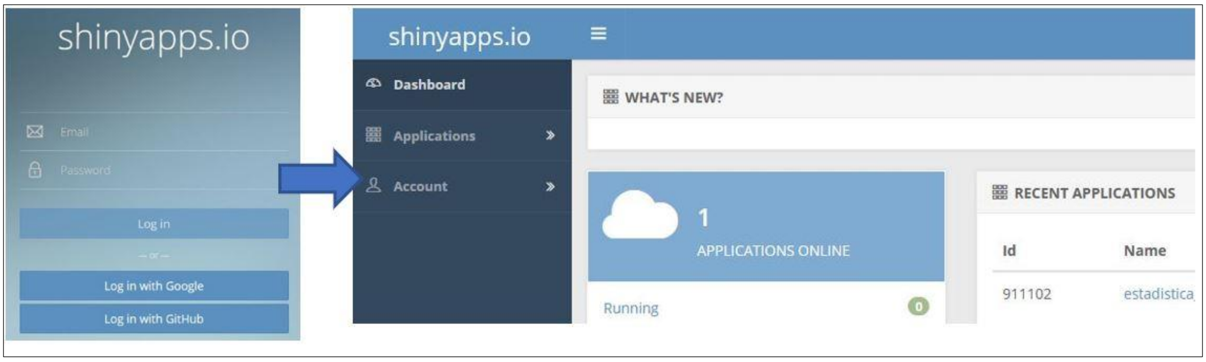


Fig. 6- Sitio gratuito para subir y compartir documentos interactivos tipo Shiny - https://www.shinyapps.io/

4.3 Sitio “RStudio Cloud”

El sitio RStudio Cloud (Figura 8) es un sitio gratuito mantenido por RStudio.com. En él, cualquier persona puede registrarse y gozar del uso de este entorno de desarrollo para crear sus propios proyectos y mantenerlos almacenados en la nube. Existe una restricción de cantidad de horas de uso al mes y una capacidad de hasta 15 proyectos.

Es una excelente herramienta para el dictado de talleres, pues se puede compartir el link del material de enseñanza creado y utilizarlo en tiempo real con el alumnado a través de esta plataforma. Cualquier usuario con el link, podrá guardar una copia del material, correrlo y editarlo en su propio entorno *RStudio Cloud*.

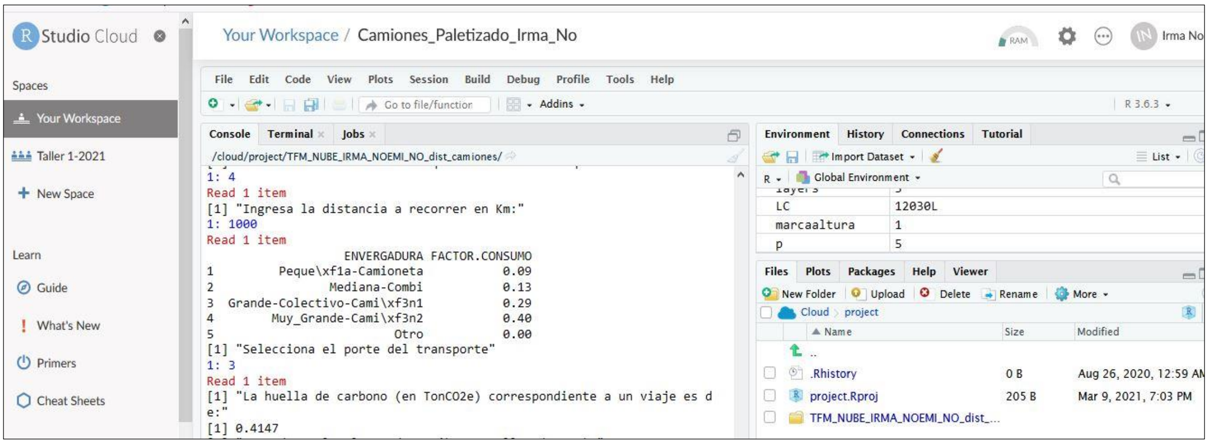


Fig. 7 – Sitio para compartir material disponible en tiempo real con alumnos RStudio Cloud - https://rstudio.cloud/

4.4 Repositorios abiertos

Trabajar confeccionando material educativo en el campo de la matemática y sus aplicaciones siempre ha requerido de un manejo de tecnologías informáticas que soporten los cálculos y las visualizaciones. En la actualidad este requerimiento se ha profundizado, y es imposible pensar en crear un material sin incorporar sentencias y código pertenecientes a algún lenguaje de programación.

Compartir un material de enseñanza que incluye código de programación impulsó a los docentes a hacer uso de plataformas que originariamente eran sólo utilizadas por programadores informáticos y profesionales de sistemas. Tal es el caso de sitios como "GitHub"(https://github.com/) entre otros. En GitHub cualquier persona puede registrarse de forma gratuita y crear repositorios (directorios) para almacenar sus trabajos. Para los materiales alojados se dispone de varios tipos de licencias, el autor elegirá cuál de ellas atribuir a su trabajo [24]; también puede resguardarse la autoría del material, utilizando plataformas de otorgamiento de *DOI* (identificador de objeto digital), como la muy popular "*Zenodo*" (https://zenodo.org/) que se halla interconectada con GitHub. Otro aliado de GitHub es la aplicación "*Netlify*" (https://app.netlify.com/) que permite construir/publicar sitios web a través de los recursos disponibles en los repositorios de GitHub.

Los materiales de enseñanza creados en RStudio pueden ser alojados, publicados y compartidos en repositorios de GitHub de manera muy eficiente, pues existe una fuerte interconexión entre RStudio (Figura 9) y las cuentas de usuario de GitHub [25].

En GitHub los repositorios dispondrán de un link único que el docente podrá brindar a sus alumnos y pares para que accedan al material posibilitando su lectura, descarga, clonación o bifurcación (en ese último caso: compartiendo el repositorio en un GitHub propio, pero resguardando el reconocimiento a la autoría externa). GitHub también permite la incorporación de colaboradores en los proyectos, es por ello que las características de reproducibilidad de los materiales compartidos constituyen un agregado de importancia para posibilitar el crecimiento global de los conocimientos y de los recursos educativos.

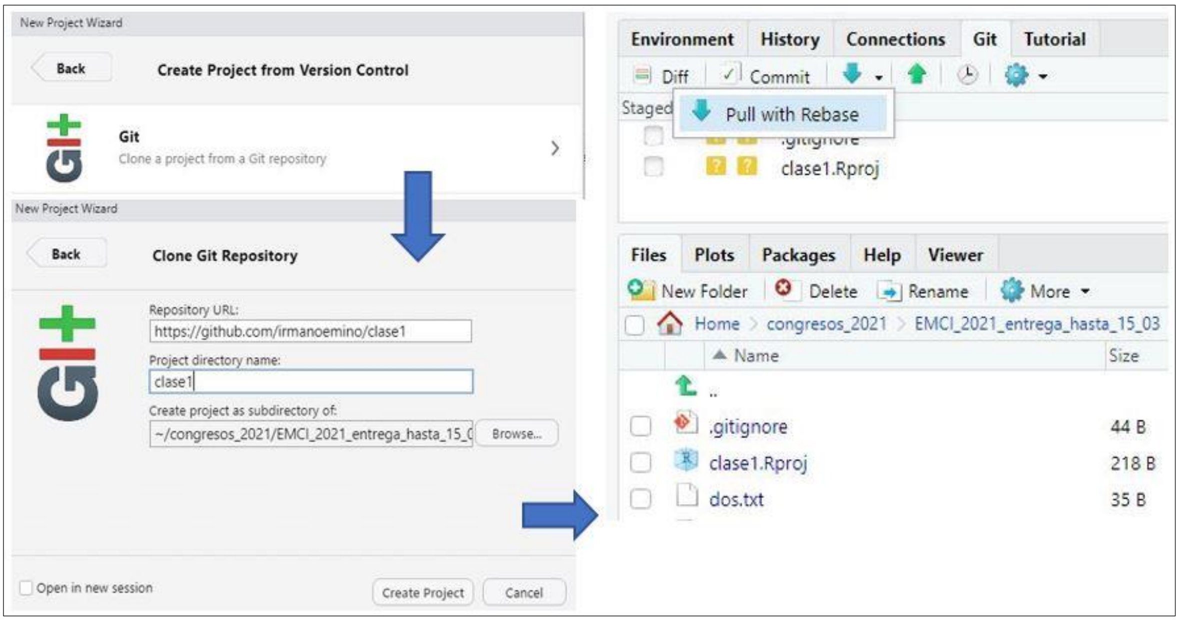


Fig. 8 – Interacción entre GitHub y RStudio para realizar un control de versiones y actualizar materiales compartidos

4.5 "Blogdown – Bookdown"

La comunidad de usuarios de R ha desarrollado maravillosos paquetes que empoderan a los autores de materiales educativos en el proceso de su publicación; ejemplos de ello son las librerías y recursos de Blogdown y Bookdown [26].

Los paquetes Blogdown y Bookdown se han mencionado en un párrafo del punto 3. Las herramientas de publicación que se han detallado hasta ahora sirven para los productos Rmarkdown en general, pero existen caminos más directos para las publicaciones de estos dos recursos en particular.

Los libros creados mediante plantillas Bookdown pueden publicarse automáticamente a través de RStudio (si se posee una cuenta "RS Connect"); también pueden publicarse gratuitamente mediante la creación de repositorios en GitHub, considerando algunas modificaciones en la plantilla bookdown original [27]. Por último, es posible publicarlos en cualquier sitio web al cual se tuviera acceso en carácter de "administrador de archivos", para ello se debe crear una salida .HTML con la función Knit y subir el libro junto con todas sus dependencias (enlaces internos) de imágenes, archivos de datos, etc.

En el caso de Blogdown desde su creación han surgido variantes de código que generan cierta desestabilización según las versiones utilizadas para crear y publicar el material [28]. Básicamente la recomendación para salvar estas dificultades y lograr publicar un sitio web construido a través de esta herramienta, aportando nuevas entradas (post) y controlando versiones es: utilizar los recursos de GitHub ("repo") y Netlify mencionados en el apartado anterior, manteniendo la estructura y estéticas provistas por el paquete Blogdown. (Figura 10).

Fig. 9 – Proceso para la creación y publicación de un sitio tipo "Blog" con RStudio (Elementos extraídos de [28])

4.6 Sitios de Pago

RStudio.com ofrece servidores para el uso online de los lenguajes lenguaje R / Python y para el alojamiento de materiales y documentos producidos en RStudio, a través de su producto "*RStudio Server*". Existe una versión gratuita de *RStudio Server*, que limita la cantidad de usuarios a 100 (cien) y es instalable en el sistema operativo Linux. El mantenimiento y soporte de esta versión gratuita *no* queda a cargo de la empresa RStudio.com.

Otra solución de pago es el alquiler de un servidor privado (para instalar RStudio en el sistema operativo que corresponda al servidor) y realizar allí materiales, alojamientos y publicaciones. En este último caso el docente debe poseer algunos conocimientos sobre el manejo de sitios web (Figura 11).

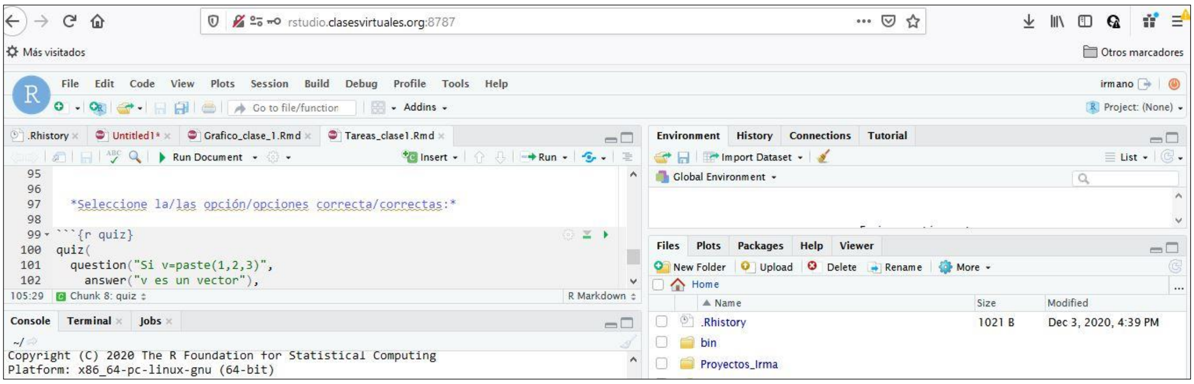


Fig. 10 – RStudio alojado en un servidor privado virtual (VPS) de pago.

5 Conclusiones

El recorrido desarrollado es una síntesis específica de los recursos gratuitos disponibles en RStudio y otras plataformas relacionadas para la elaboración de materiales educativos reproducibles de base tecnológica, que son además: funcionales, renovables y de elevada estética (Ejemplo [29]).

Las herramientas que nos ofrece el entorno de desarrollo RStudio para crear materiales reproducibles y gratuitos, con posibilidades de ser compartidos y publicados bajo diferentes licencias y resguardo de autoría, son de gran utilidad para los docentes del área STEM y muy especialmente para los educadores del área matemática. La gran versatilidad de RStudio para interactuar con diferentes bases de datos, lenguajes y programas lo señalan como un importante entorno para la enseñanza orientada a la formación de competencias profesionales abarcando posibles futuros desempeños del egresado en diferentes plataformas tecnológicas.

El ejercicio de la reproducibilidad, respaldado por control de versiones y las comunidades de práctica del lenguaje R, aseguran la posibilidad de mantener vigentes los formatos, modalidades y contenidos de los materiales de enseñanza-aprendizaje basados en documentos RMarkdown y en proyectos de RStudio.

Los trabajos futuros se enfocan a la planificación y realización de talleres de capacitación en el uso de estas herramientas para la reproducibilidad de materiales educativos e informes de investigación, dirigida a docentes e investigadores de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora.

Referencias

1. Ynoub, R. (2017) "El diseño de la investigación: entre la táctica y la estrategia" Cap. X en "Cuestión de método" Tomo II (inédito). Material UNLA – Maestría en Metodología de la Investigación Científica.
2. Rodriguez-Sanchez, F., Pérez-Luque, A. J., Bartomeus, I., & Varela, S. (2016). Ciencia reproducible: qué, por qué, cómo. *Revista Ecosistemas,* 25(2), 83-92. http://digital.csic.es/bitstream/10261/145975/1/1178-4265-1-PB.pdf
3. Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherche en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-112.
4. Artigue, M.(1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Eds.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59).México, Grupo Editorial Iberoamérica.
5. Arsac G., Balachef N., Mante M. (1992) Teacher's Role and reproducibility of didactical situations. Educational Studies in Mathematics, 23 (1), 5-29.
6. Lezama J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8, 339-362.
7. Montoya, María Soledad, & Lezama, Francisco. (2016). La reproducibilidad de situaciones de aprendizaje en un taller de reflexión docente. *Cuadernos de Investigación Educativa*, *7*(1), 41-54. Recuperado 03/03/21 de http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1688-93042016000100004&lng=es&tlng=es.
8. https://www.geogebra.org/materials
9. https://www.wolframalpha.com/
10. https://shiny.rstudio.com/gallery/. https://www.shinyapps.io/
11. ProActive. (2018). *Fomentando la creatividad: creación de escenarios de aprendizaje basados en juegos. Una guía para profesores.* http://www.ub.edu/euelearning/proactive/documents/handbook_creative_gbl_es.pdf
12. Tse, J. K. Y., Chan, S. W. Y., & Chu, S. K. W. (2021). Quality Assessment for Digital Stories by Young Authors, *Data and Information Management*, *5*(1), 174-183. doi: https://doi.org/10.2478/dim-2020-0039
13. https://mosaic.uoc.edu/2013/11/11/recursos-multimedia-para-aprendizaje-on-line/#related-articles
14. https://markdown.es/
15. https://colab.research.google.com/
16. https://jupyter.org/
17. https://rstudio.com/
18. No, I. N. (2019) Shiny app ejemplo. Disponible en: https://irmanoemino.shinyapps.io/estadistica_tpici_1c2019_irma_no/ y en http://rstudio.clasesvirtuales.org:3838/sample-apps/shinyestadistica1/
19. Corcoran Barrios D. (2020). *Modelos matriciales e interacción entre poblaciones*. Presentación en línea, disponible en: RPubs - Presentación modelos matriciales
20. No, I. N. (2020). Tarea Interactiva – Clase 1. Curso de Introducción a Ciencia de Datos (en elaboración), ensayos y preprints Disponible en: http://rstudio.clasesvirtuales.org:3838/sample-apps/Tareas_interact_clase1/#section-primera-parte
21. No, I. N. (2020). *Informes de investigación 2020*. Disponibles en: http://www.clasesvirtuales.org/investigaciones.html
22. https://bookdown.org/
23. *Yihui Xie, Amber T., Presmanes Hill, A.* (2020). Blogdown: Creating Websites with R Markdown. Disponible en: https://bookdown.org/yihui/blogdown/
24. GitHub Docs. "*Generar licencia para un repositorio*". Disponible en: https://docs.github.com/es/github/creating-cloning-and-archiving-repositories/licensing-a-repository
25. *Bryan, J., The STAT 545 TAs, Hester J. (2020) "Happy Git and GitHub for the useR". Disponible en:* https://happygitwithr.com/
26. *Hill, A.; De León, D. Sharing on Short Notice. (2020). How to get your teaching materials online with R Markdown. Conferencias RStudio.com. Disponible en:* Sharing on Short Notice (rstudio-education.github.io)
27. *Fernández Casal, R.; Cotos Yañez, T.R. (2018). "Escritura de libros con bookdown" Capítulo 4 "Publicación". Disponible en:* https://rubenfcasal.github.io/bookdown_intro/

28. *Hill, A. Up & running with blogdown in 2021. (2021) Disponible en:* https://alison.rbind.io/post/new-year-new-blogdown/
29. *Hill, A.; De León, D. (2020) Teacups, Giraffes, & Statistics. Disponible en:* Index (tinystats.github.io)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

Los Números Complejos en las Carreras de Ingeniería: Enfoque por Competencias y Nuevas Tecnologías en el diseño de Tareas Académicas

Andrea Arce, Nadia Beherens, Cristina Kanobel

Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050 Villa Domínico
ansarce@gmail.com, nadiabeherens@hotmail.com, mackanobel@gmail.com

Resumen. Este trabajo describe una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de los Números Complejos en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de primer año de las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda. Para ello, nos apoyamos en la Modalidad Flipped Learning, ya que nos permite el diseño de actividades virtuales y presenciales que posibilitan tareas académicas promisorias atendiendo la riqueza semiótica del tema desarrollado en los registros algebraico y geométrico, motivando a nuestros alumnos a través del trabajo colaborativo. El abordaje del tema se inserta en el enfoque ontosemiótico contemplando actividades de resolución de problemas, utilización del lenguaje simbólico específico en un juego de registros, validación y generalización a otros contextos, como así también tareas para iniciar el desarrollo de algunas competencias. Se utilizan instrumentos variados acordes al enfoque y la modalidad para evaluar el impacto en el aprendizaje de nuestros alumnos.

Palabras Clave: Números Complejos, Flipped Learning, Enfoque Ontosemiótico, Nuevas Tecnologías. Competencias.

1 Introducción

En el marco del Proyecto de investigación "Gestión y transferencia del Conocimiento en las ciencias básicas mediado por tecnología", diseñamos una secuencia didáctica con el fin de proponer a nuestros alumnos el estudio de la Unidad de Números Complejos con un mayor tiempo de asimilación e interrelación de los conceptos de Álgebra y Geometría Analítica en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Avellaneda, que además resulte motivadora y permita generar tareas académicas de alto alcance con aplicaciones ingenieriles en los Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA). Nuestra propuesta es realizar una experiencia en tres cursos de la materia durante el presente año promoviendo el trabajo colaborativo y autorregulado de nuestros estudiantes. A su vez, pensamos que atender con igual rigor al marco algebraico y al marco geométrico y los respectivos pasajes, del registro algebraico al geométrico como así también del geométrico al algebraico, permitirá a nuestros estudiantes una mayor comprensión del tema. Al igual que algunos autores [1], sostenemos que el pasaje del registro geométrico al algebraico, requiere del alumno un esfuerzo cognitivo superior, pues debe descubrir cuáles son los rasgos del gráfico que caracterizan la representación y traducir esto a una ecuación o inecuación. Por este motivo nuestra propuesta introduce la Unidad de Números Complejos después del Bloque temático Álgebra Vectorial, otorgando gran importancia a su representación gráfica, abordando sistemáticamente la tarea de conversión en miras a mejorar la coordinación entre diferentes registros y la conceptualización del conjunto numérico.

Para el estudio de la Unidad utilizaremos la Modalidad Flipped Learning ampliando las fronteras del aula como espacio de aprendizaje. Se dispone de un Blog común a todos los cursos para facilitar la interacción entre los estudiantes como así también entre los estudiantes y profesores a cargo de los cursos. En dicho espacio se puede acceder a diversos materiales para el estudio del tema, facilitando luego en la clase presencial las consultas sobre los documentos, videos y diversos links, realizando luego diversas tareas virtuales y presenciales de evaluación.

2 Preparación de la contribución

2.1 Marco Teórico

Números Complejos

El conjunto de los Números Complejos se presenta en Álgebra y Geometría Analítica como Unidad temática. En esta experiencia didáctica se introduce después de la Unidad de Álgebra Vectorial (unidad 1). Nos interesa resaltar el estudio de los Números complejos en el marco Geométrico, en línea con algunos investigadores que indican que la enseñanza tradicional de la matemática ha otorgado un gran predominio al registro algebraico mientras que al registro gráfico se le ha dado un estatus menor provocando un obstáculo en su aprendizaje.

En un principio, dado que los complejos son susceptibles de interpretación geométrica, la interrelación de conceptos se esboza a través de la representación gráfica de un complejo como conector entre la Unidad en cuestión y el Álgebra vectorial, y retomando luego en la Unidad Temática Secciones Cónicas definiéndolas como conjunto de puntos del plano que cumplen con determinadas condiciones entre números imaginarios, para luego aproximarnos a la idea de Isomorfismo, formalizando luego en la Unidad de Transformaciones Lineales. Esto nos permite una primera mirada sobre el Espacio Vectorial $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y su isomorfismo con $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Sostenemos que esta primera ligazón a partir de los vectores permitirá incorporar al conjunto a los conocimientos previos enriqueciendo los conceptos y facilitando su asimilación a la red conceptual de las subsiguientes unidades: Espacios vectoriales, Transformaciones lineales, Autovalores y Autovectores y su aplicación a las cónicas.

Enfoque Ontosemiótico

Este enfoque reflexiona sobre la matemática en tres aspectos: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. En esta teoría, cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos es una práctica matemática[2]. De aquí surge la noción de significado, definido como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas. En los casos en que el significado se atribuye a un individuo, se considera un significado personal, mientras que, si el significado es compartido por un grupo de individuos en una institución, se lo considera un significado institucional. En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación de los significados institucionales por parte del estudiante, mediante su participación en las comunidades de prácticas [3].Se establece una tipología de objetos formada por:

- Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios.
- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos, en diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- Conceptos- definiciones: introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función)
- Proposiciones: enunciados sobre conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos.

Entornos Virtuales de Aprendizaje

Un entorno de enseñanza y aprendizaje es el escenario físico donde un alumno o comunidad de alumnos desarrollan su trabajo, incluyendo todas las herramientas, documentos y otros artefactos que pueden ser encontrados en dichos escenarios, es decir, el escenario físico, pero también las características socio/culturales para tal trabajo. Así, un entorno de formación presencial, a distancia o de cualquiera de los modelos mixtos, basado en las tecnologías de la información y la comunicación, se apoya en decisiones relacionadas con el diseño de la enseñanza –desde el punto de vista de la institución, del docente y del propio alumno– y en decisiones que tienen que ver con la tecnología en sí misma y la selección del sistema o herramientas de comunicación más adecuadas [4].

Para Elena Barberá [5] "un aula virtual tiene un nivel de concreción e individualización que le dan vida y entidad propias; no es un contexto virtual de enseñanza y aprendizaje porque es sólo una parte de él y tampoco la más importante, pero está claro que puede ser un gran facilitador o inhibidor del aprendizaje". Una vez que se selecciona el entorno virtual de aprendizaje, los docentes deciden qué herramientas utilizarán en su propuesta de enseñanza, en qué orden las presentarán y a qué fines las pondrán en marcha. implica la elaboración de materiales educativos (virtuales o no) que guían y propician el aprendizaje de los alumnos y que se confeccionan para una propuesta particular. La comunicación entre profesor y alumno se presenta de manera sincrónica y asincrónica.

Educadores alrededor del mundo están tratando de cambiar el modelo tradicional –enfocado en el avance a partir de un plan de estudios– por uno guiado por las necesidades de aprendizaje de los alumnos. El modelo que ha despertado interés por su potencial es el Flipped Learning (o Aprendizaje Invertido), un modelo centrado en el estudiante que deliberadamente consiste en trasladar una parte o la mayoría de la Instrucción directa al exterior del aula, para aprovechar el tiempo en clase maximizando las interacciones uno a uno entre profesor y estudiante. En el método tradicional el contenido educativo se presenta en el aula y las actividades de práctica se asignan para realizarse en casa. El Aprendizaje Invertido da un giro a dicho método, mejorando la experiencia en el aula [6] al impartir la Instrucción directa fuera del tiempo de clase generalmente a través de videos. Esto libera tiempo para realizar actividades de aprendizaje más significativas tales como: discusiones, ejercicios, laboratorios, proyectos, entre otras, y también, para propiciar la colaboración entre los propios estudiantes. Dentro de las características fundamentales, podemos destacar:

- Ambiente flexible. Los estudiantes pueden elegir cuándo y dónde aprenden; esto da mayor flexibilidad a sus expectativas en el ritmo de aprendizaje. Los profesores permiten y aceptan el caos que se puede generar durante la clase. Se establecen evaluaciones apropiadas que midan el entendimiento de una manera significativa para los estudiantes y profesores.
- Cultura de aprendizaje Se evidencia un cambio deliberado en la aproximación al aprendizaje de una clase centrada en el profesor a una en el estudiante. El tiempo en el aula es para profundizar en temas, crear oportunidades más enriquecedoras de aprendizaje y maximizar las interacciones cara a cara para asegurar el entendimiento y síntesis del material.
- Contenido intencional Para desarrollar un diseño instruccional apropiado hay que hacerse la pregunta: ¿qué contenido se puede enseñar en el aula y qué materiales se pondrán a disposición de los estudiantes para que los exploren por sí mismos? Responder esta pregunta es importante para integrar estrategias o métodos de aprendizaje de acuerdo al grado y la materia, como basado en problemas, mastery learning, socrático, entre otras.
- Docente profesional En este modelo, los docentes cualificados son más importantes que nunca. Deben definir qué y cómo cambiar la instrucción, así como identificar cómo maximizar el tiempo cara a cara. Durante la clase, deben de observar y proveer retroalimentación en el momento, así como continuamente evaluar el trabajo de los estudiantes.

Trabajo Colaborativo

Järvelä y Niemivirta [7] definen al trabajo colaborativo como aquellas situaciones en las que los alumnos discuten, toman decisiones, e interactúan, poniendo en juego distintos puntos de vista y compartiendo conocimiento y estrategias de aprendizaje. Es un modelo de aprendizaje interactivo, que invita a los estudiantes a trabajar en conjunto. Maldonado [8] señala más que una técnica, el trabajo colaborativo es considerado una filosofía de interacción y una forma personal de trabajo, que implica el manejo de aspectos tales como el respeto a las contribuciones individuales de los miembros del grupo. Los elementos que siempre están presentes en este tipo de aprendizaje son:

- Cooperación. Los estudiantes se apoyan mutuamente para cumplir con un doble objetivo: lograr ser expertos en el conocimiento del contenido, además de desarrollar habilidades de trabajo en equipo. Los estudiantes comparten metas, recursos, logros y entendimiento del rol de cada uno. Un estudiante no puede tener éxito a menos que todos en el equipo tengan éxito.

- Responsabilidad. Los estudiantes son responsables de manera individual de la parte de tarea que les corresponde. Al mismo tiempo, todos en el equipo deben comprender todas las tareas que les corresponden a los compañeros.
- Comunicación. Los miembros del equipo intercambian información importante y materiales, se ayudan mutuamente de forma eficiente y efectiva, ofrecen retroalimentación para mejorar su desempeño en el futuro y analizan las conclusiones y reflexiones de cada uno para lograr pensamientos y resultados de mayor calidad.
- Trabajo en equipo Los estudiantes aprenden a resolver juntos los problemas, desarrollando las habilidades de liderazgo, comunicación, confianza, toma de decisiones y solución de conflictos.
- Autoevaluación. Los equipos deben evaluar cuáles acciones han sido útiles y cuáles no. Los miembros de los equipos establecen las metas, evalúan periódicamente sus actividades e identifican los cambios que deben realizarse para mejorar su trabajo en el futuro.

Competencias

La formación basada en competencias supone situaciones de aprendizaje que presenten actividades particulares donde se combinan conocimientos, habilidades, actitudes y valores a fin de adquirir una capacidad de orden superior resolviendo situaciones problemáticas en contextos puntuales [9].
El desarrollo de competencias en ingenierías en la República Argentina viene evolucionando desde hace más de una década. El Acuerdo de las 10 Competencias Genéricas terminales de CONFEDI fue un punto de consenso muy importante hacia 2006, que luego se trasladó hacia Iberoamérica cuando en Valparaíso ASIBEI en 2014 lo extendió a toda la región. En dicho documento se define que "competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales".
Allí, han quedado establecidas que las competencias genéricas de egreso de los estudiantes de ingeniería son:

Competencias tecnológicas

- Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
- Concebir, diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería.
- Gestionar, planificar, ejecutar y controlar proyectos de ingeniería.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería.
- Contribuir a la generación de desarrollos tecnológicos y/o innovaciones tecnológicas.

Competencias sociales, políticas y actitudinales

- Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
- Comunicarse con efectividad.
- Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global.
- Aprender en forma continua y autónoma.
- Actuar con espíritu emprendedor.

En el año 2018, luego de un importante trabajo de todas las terminales de las carreras de Ingeniería de la República Argentina, CONFEDI incorporó estas competencias genéricas a la Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de las carreras de Ingeniería (Libro Rojo), incluyendo las competencias específicas [10].

2.2 Desarrollo de la experiencia

Comenzamos la propuesta con una descripción de las tareas a realizar tanto en forma virtual como presencial como así también los instrumentos de evaluación. En la clase presencial les informamos a nuestros alumnos que la Unidad de Números Complejos será abordada en la modalidad Flipped Learning. Dicha Unidad incluye: Forma binómica. Operaciones y propiedades. Multiplicación y división. Módulo y argumento principal de un número complejo. Forma trigonométrica y Forma Exponencial.

Operaciones. Potenciación (Teorema de De Moivre) y Radicación (Teorema Fundamental del Álgebra). A esta altura de la cursada los estudiantes ya están familiarizados con la Plataforma Moodle ingresando cada uno de ellos al espacio virtual según el curso al cual pertenecen. También están familiarizados con los cuestionarios virtuales de autoevaluación ya que disponen de uno por unidad.

Utilizaremos un blog común a todos los cursos que participarán en la experiencia. El mismo contará con diversos recursos para el abordaje del tema. La experiencia se iniciará con videos de producción propia vinculados con situaciones-problemas que resulten aplicaciones extra-matemáticas, exponiendo las principales aplicaciones de los números complejos en el campo ingenieril, a modo de disparador. Seguidamente, los alumnos se encontrarán con un documento teórico que contiene elementos lingüísticos, en diversos registros, conceptos- definiciones, proposiciones y procedimientos desarrollando la definición de número complejo, unidad imaginaria, así como también la forma binómica, polar (o trigonométrica) y exponencial, para luego abordar las operaciones. Consideramos oportuno comenzar con las diferentes formas de expresión, ya que aquí subyace la riqueza semiótica del tema de estudio, para luego encarar las operaciones aprovechando las ventajas que tienen determinadas expresiones sobre otras. Por ejemplo, para explicar el producto en forma polar consideramos que la previa explicación en forma exponencial guiará a los alumnos de manera más efectiva a la deducción o interpretación de la suma de los argumentos. En este documento, los alumnos contarán también con ejemplos que muestren la forma de resolución de los ejercicios, algunos de ellos con el software matemático GeoGebra. A continuación, se encontrarán por un lado con la práctica de ejercicios propuestos por la cátedra; y por otro, con un link que los conducirá a un cuestionario virtual con actividades, el cual posee corrección automática y retroalimentaciòn. Este último apunta al pase del marco geométrico al algebraico dadas las grandes posibilidades en cuanto al diseño de las preguntas incorporando gráficos e imágenes (Fig. 1). En una segunda instancia, durante la clase presencial, se destinará un momento de la misma para evacuar dudas con respecto al material trabajado virtualmente, así como también las actividades realizadas. Seguidamente, los alumnos deberán realizar dos actividades, en donde deberán plantear, analizar y resolver problemas intra-matemáticos relacionando conceptos con la argumentación, justificación y validación correspondiente. De esta manera, se pretende optimizar el tiempo de clase para en un comienzo aclarar las dudas que surjan del material compartido, y luego dedicarnos por completo a la resolución de actividades, brindando la posibilidad de compartir estrategias y procedimientos de resolución entre pares con la supervisión de los docentes. Como cierre de las actividades de la propuesta realizaremos un cuestionario en el aula en tiempo real utilizando el software interactivo Mentimeter (Fig. 2). Esta herramienta digital sencilla, pero de gran potencial permite gamificar la clase realizando juegos de preguntas y respuestas en tiempo real y exponiendo al instante los resultados obtenidos en las respuestas con organizaciones gráficas muy variadas. El objetivo específico del uso de la herramienta es realizar una evaluación diferente y cooperativa donde los estudiantes en un ambiente más relajado puedan reflexionar sobre los contenidos y las formas de relacionarse con ellos. Finalmente, proponemos cuatro problemas ingenieriles que impliquen un escenario propicio para la investigación de su resolución utilizando los conceptos aprendidos en la Unidad Temática. Se conformarán grupos de a lo sumo cinco estudiantes que deberán elegir un problema entre los cuatro propuestos. Se prevé una futura exposición de la resolución a través de PowerPoint o el recurso que elijan, de manera presencial

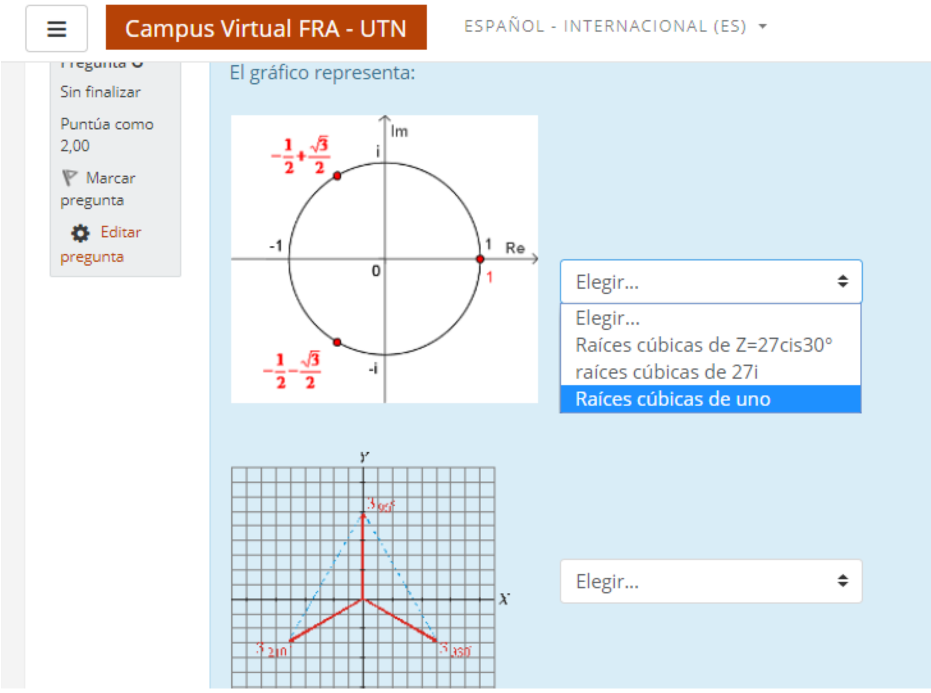


Fig. 1. Pregunta perteneciente al cuestionario virtual.

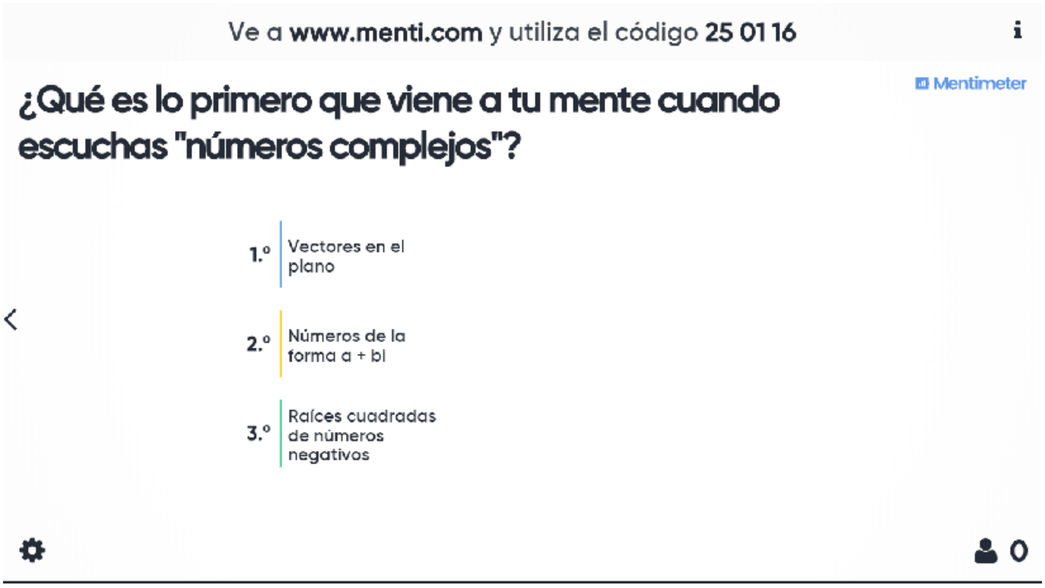


Fig. 2. Pregunta de Mentimeter que pretende reflejar el registro más utilizado, ya que todas las opciones son válidas.

2.3 Instrumentos de evaluación

El instrumento de evaluación debe acompañar la metodología del trabajo. Pretendemos que los estudiantes tomen partido en la conformación de sus evaluaciones siendo capaces de autoevaluarse de manera crítica y consciente, para situarlo también en esta instancia, en el centro de atención [11]. Por lo tanto, en la evaluación utilizaremos en una primera parte, al finalizar la participación en el blog, un cuestionario virtual de la Plataforma Moodle que involucre los contenidos trabajados hasta el momento. Los mismos incluirán operaciones (sencillas), pasaje entre el registro algebraico y geométrico, y viceversa.

La clase presencial concluye con la resolución en tiempo real de un cuestionario en Metimeter. Las actividades presenciales serán corregidas por los docentes a cargo del curso, realizando la devolución en el siguiente encuentro.

Para la evaluación del problema ingenieril se propondrá un espacio virtual de retroalimentación, donde el docente guíe, gestione y socialice las dudas que les puedan surgir a los alumnos en el desarrollo de esta actividad y se utilizará CoRubrics, (Tabla 1) un complemento para hojas de cálculo de Google que permite realizar un proceso completo de evaluación con rúbricas. La aplicación permite crear un formulario con los contenidos de la Rúbrica y un enlace para los alumnos de cada grupo. Así la tarea se facilita dado que el complemento procesa la información y comunica a los alumnos el resultado, permitiendo el envío de comentarios personalizados para cada estudiante.

Tabla 1. Rúbrica completa (formato CoRubrics) a utilizar para evaluar el trabajo de exposición.

	RÚBRICA: TRABAJO DE EXPOSICIÓN			
	4	**3**	**2**	**1**
Argumentación e interrelación de Conceptos	Muestra un total conocimiento de los conceptos estudiados logrando argumentar en todas las instancias de la resolución	Muestra un sustancial conocimiento de los conceptos estudiados logrando argumentar en todas las instancias de la resolución	Muestra parcialmente conocimiento de los conceptos estudiados logrando argumentar en algunas de las instancias de la resolución	No muestra conocimiento del tema, ni logra argumentar en la resolución
Organización	Existe orden y secuencia durante la exposición	Existe orden y secuencia en casi todos los tramos de la exposición	Existe orden y secuencia en algunos tramos de la exposición	No existe orden y secuencia en la exposición
Claridad	Todos los razonamientos son mostrados con claridad	La mayoría de los razonamientos son mostrados con claridad	Algunos razonamientos son mostrados con claridad	No se muestran razonamientos o son mostrados en forma confusa
Participación	Participan todos los miembros del grupo en un ambiente de cordialidad.	La mayoría de los estudiantes participan en coordinación	Existen desacuerdos y se nota alguna brecha de trabajo entre estudiantes	Los estudiantes no muestran interés al desarrollar la actividad planteada
Materiales de apoyo	Se apoya en material didáctico impecable.	Se apoya en material adicional aceptable para la propuesta	Se apoya en material adicional pero este no está genera interés	No se apoya en material adicional para su presentación.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Pardo Salcedo y Bernardo Gómez [12] en su estudio sobre la enseñanza- aprendizaje de los Números Complejos en el nivel Universitario sostienen que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas a las que tuvieron que hacer frente los matemáticos a lo largo de la historia, guardan relación a las que enfrentan los estudiantes al estudiar el tema, a saber: raíz cuadrada de números negativos, introducción de un eje imaginario y consideración de los números imaginarios como vectores del plano, formalización como par ordenado de números reales. Consideramos que los materiales diseñados para la experiencia didáctica contemplarán estas dificultades a través del trabajo de los objetos establecidos por el enfoque ontosemiótico, tales como: elementos lingüísticos (expresiones y notaciones en distintos registros), conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos y situaciones-problemas (tanto intra como extra-matemáticos).

Para llevar a cabo la experiencia, además, nos basaremos en los entornos virtuales de aprendizaje puntualmente a través del aprendizaje invertido. Los alumnos contarán con una Instrucción directa fuera del tiempo de clase, permitiendo así, aprovechar el tiempo en el aula para la resolución de actividades de aprendizaje más significativas, como es el caso de: discusiones, ejercicios, situaciones-problemas, y también, para propiciar la colaboración entre los propios estudiantes. Consideramos también, que la incorporación de nuevas tecnologías en el desarrollo de la experiencia proporciona una serie de beneficios que ayudan a mejorar la eficiencia y la productividad en el aula, así como a aumentar el interés de los alumnos en las actividades académicas [13] [14].

Finalmente, basados en que la experiencia se ubica en el primer año de carreras ingenieriles, consideramos pertinente nombrar las competencias que se pretenden poner en juego. De acuerdo con lo establecido por CONFEDI, dentro de las competencias tecnológicas, el presente trabajo apuntará a la formación de dos de ellas: 'Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería'; así como también 'Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería'. En cuanto a las competencias sociales, estamos convencidos que nuestra experiencia contribuirá a: 'Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo', 'Comunicarse con efectividad', y 'Aprender en forma continua y autónoma'. Si bien somos conscientes que la formación de competencias es un trabajo continuo durante toda la formación del futuro ingeniero, consideramos fundamental su trabajo desde los primeros años de la carrera. En conclusión, creemos que nuestra propuesta propiciará el desarrollo de un entramado de conocimientos, aptitudes y habilidades potenciando el saber hacer del futuro ingeniero.

Posteriormente a su implementación se prevé la construcción de instrumentos que posibiliten la medición del impacto tanto en la compresión e integración de los contenidos, como grado de satisfacción, sentimientos positivos y negativos ante las actividades propuestas.

Referencias

1. Aznar, M.A., M.L. Distéfano, S.M. Massa, S.M. Figueroa, y E. Moler: Transformación de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la teoría de registros semióticos. *Rev. Educ. matemática*. (2009).
2. Godino, J.D., C. Batanero, y V. Font: Steiner godino, batanero y font sintesis_eos_10marzo08. vol. 39, pp. 127–135, (2009).
3. Godino, J.D., C. Batanero, y V. Font: The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Int. J. Math. Educ*. vol. 39, no. 1–2, pp. 127–135, (2007).
4. Salinas, J.: Cambios metodológicos con las tic: estrategias didácticas y entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. *redined*. no. Enero 2004, (2014).
5. Barberá, E., A. Badía, y A.M.L.S. A: "Educar con aulas virtuales Orientaciones para la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje". , Madrid , 2004.
6. Fulton, K.: "Time for learning: Top 10 reasons why flipping the classroom can change education". , California , 2014.
7. Järvelä, S. y M. Niemivirta: Motivation in context: challenges and possibilities in studying the role of motivation in new pedagogical cultures. In: S. Volet & S. Järvelä (ed.) Advances in learning and instruction series. Motivation in learning contexts: Theoretical advances and methodological implications. pp. 105–1127. *Pergamon Press*, Elmsford, NY, US (2001).
8. Maldonado, P.M.: El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Laurus*. vol. 13, no. 23, pp. 263–278, (2007).
9. Gual, A.: Educación médica. In: Board, E. (ed.) ¿Por dónde innovar en la enseñanza de la medicina? pp. 39–52. *Fundación Privada Educación Médica y Viguera Editores SL*, Madrid (2010).
10. ACOFI - CONFEDI: "Aseguramiento De La Calidad Y Mejora De La Educación En Ingeniería". , 2018.
11. Concepción, F., J. Felix, y C. Fernandez Medina: Una mirada a la evaluación por rúbricas a través de las tic. *Mendive. Rev. Educ*. vol. 18, no. 1, pp. 92–104, (2020).
12. Pardo Salcedo, T. y A. Bernardo Gomez: Un estudio en el nivel universitario t omás p ardo s alcedo b ernardo g ómez a lfonso. *Noveno Simp. la Soc. Española Educ. Matemática SEIEM*. pp. 251–260, (2005).
13. Klopfer, E., S. Osterweil, J. Groff, y J. Haas: Using the technology of today , in the classroom today, (2009).
14. Livingstone, S.: Critical reflections on the benefits of ict in education critical reflections on the benefits of ict in education. *Oxford Rev. Educ*. no. February 2014, pp. 37–41, (2012).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería — UCU Universidad Católica del Uruguay

El Modelo de Formación por Competencias en las Diversas Instancias de Ingreso a la FACET-UNT

María I. Giannini[1], Fernando A. Miranda Bonomi[1], Nicolás Nieva[2]

[1] Área Ingreso, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
Avenida Independencia 1800 (4000) S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
{igianinni, fmirandabonomi}@herrera.unt.edu.ar

[2] LAFISO-INFINOA Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
Avenida Independencia 1800 (4000) S.M. de Tucumán, Tucumán (Argentina),
nnieva@herrera.unt.edu.ar

Resumen. La Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán ha emprendido un trabajo de formación en competencias genéricas a los aspirantes a ingresar a la misma. Ofrece tres modalidades de nivelación en matemáticas en distintos formatos y con los mismos objetivos. Los objetivos son: afianzar en los aspirantes los conocimientos básicos requeridos en el cursado de las asignaturas de primer año y facilitar el desarrollo de competencias sociales, políticas y actitudinales desde el inicio de su tránsito por la Facultad. En este trabajo mostraremos las modalidades de ingreso y la implementación de formación por competencias en las mismas.

Palabras Clave: Formación por competencias, Estrategias de enseñanza, Matemáticas.

1 Introducción

La Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán (FACET-UNT) es una de las trece facultades de la UNT y su oferta académica de grado es muy amplia. Incluye cuatro carreras de pregrado, quince de grado, seis doctorados, cinco maestrías y tres especializaciones que abarcan tanto la ingeniería como las ciencias básicas. Toda la oferta tiene, sin embargo, una base uniforme construida en torno a la física y la matemática. Para adquirir las capacidades en física y matemática es necesario que el alumno domine destrezas matemáticas fundamentales que sirven de base a la matemática superior y la construcción de los modelos físicos.

El sistema de ingreso de la FACET-UNT es provisto por su Área Ingreso usando los servicios de su Centro de Educación a Distancia y articulando acciones con las secretarías académica y de bienestar estudiantil; el área de comunicaciones; el sistema de tutorías y distintas cátedras y laboratorios. Tiene el propósito de incluir a los alumnos de diversa formación inicial fomentando la igualdad de oportunidades y proveyendo las herramientas básicas para su desenvolvimiento a lo largo de la formación universitaria. Esta inclusión depende de subsanar las deficiencias que se observan en la formación secundaria, sobre todo en áreas de matemáticas, comprensión de texto y habilidad social. Nuestra oferta se construye en torno a la nivelación en matemáticas tanto como un fin, como también un medio para introducir las habilidades básicas necesarias en el normal desenvolvimiento del alumno. Para ello es expuesto a clases teórico-prácticas, foros de discusión, trabajos prácticos, consultas y exámenes. Le presentamos además una visión general de sus oportunidades y responsabilidades, tanto durante su formación como en su futuro profesional.

La articulación con la escuela secundaria es uno de los principales desafíos para el alumno y el sistema educativo, tanto por la ruptura que supone el cambio en la modalidad educativa como por las deficiencias observadas en competencias claves para la educación superior. Se busca en el ingreso facilitar esta transición consolidando las habilidades sociales y complementando la formación en competencias técnicas fundamentales. La amplitud en la oferta académica y la extensión del área de influencia de la FACET, que abarca gran parte del NOA, implican un desafío a la hora de hacer accesibles sus servicios a la población procurando sean homogéneos e inclusivos. Atendiendo a esta necesidad, el sistema de ingreso ha incorporado en 2020 una oferta en modalidad semipresencial con el propósito de disminuir la brecha geográfica y facilitar el ingreso de alumnos en toda el área de influencia de nuestra institución [1](Resolución FACET, 2019)

Entre las competencias de egreso citadas en la propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI)[2](Libro rojo) podemos destacar algunas, cuyas bases deben ser afianzadas desde el proceso de ingreso. La competencia tecnológica de "utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería" se basa, entre otras cosas, en las capacidades de plantear problemas, resolver ecuaciones e interpretar resultados de cálculos matemáticos. Asimismo las diferentes actividades durante el cursado del ingreso deben apuntar a la adquisición, refuerzo y ejercitación de las competencias sociales, políticas y actitudinales de: "Comunicarse con efectividad"; "Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global"; "Aprender en forma continua y autónoma". En el presente trabajo expondremos nuestro enfoque para realizar estos objetivos, detallaremos las acciones emprendidas y presentaremos los resultados obtenidos durante el proceso de ingreso correspondiente al año 2020.

2 Metodología

2.1 Modalidades de ingreso

El aspirante contó con tres modalidades distintas de nivelación en matemáticas. Una modalidad presencial, una semipresencial y una prueba de suficiencia. La modalidad presencial incluye trece semanas de cursado con 6 hs de clases obligatorias semanales. La modalidad semipresencial incluye tres reuniones presenciales optativas, una etapa virtual de cuatro semanas y una etapa presencial con cinco días de clases y consultas, tres parciales y sus recuperaciones.

2.2 Desglose por competencias

El curso de nivelación comprende cinco unidades: Números Reales; Expresiones Algebraicas; Funciones y Ecuaciones; Geometría y Trigonometría. En cada unidad se busca que los alumnos desarrollen destrezas técnicas o capacidades en el alumno. En cada una de las unidades se busca reforzar las competencias adquiridas durante la formación de nivel secundario a fin de facilitar la asimilación de los conceptos empleados en las asignaturas del primer año. Se abarcan los siguientes contenidos :

1) Números Reales
   a) Suma y resta
   b) Multiplicación y división
   c) Simplificación de fracciones
   d) Comparación
   e) Potenciación y Radicación
   f) Uso de Notación Científica
   g) Exponenciación y Logaritmos
2) Expresiones Algebraicas
   a) Identificación de Expresiones Algebraicas
   b) Suma y resta de polinomios
   c) Multiplicación y división de polinomios
   d) Aplicación del criterio de divisibilidad
   e) Factorización de polinomios
   f) Construcción de polinomio a partir de sus raíces
   g) Simplificación de expresiones algebraicas racionales (EAR)
   h) Suma y resta de EAR
   i) Multiplicación y división de EAR

3) Funciones y Ecuaciones
   a) Identificación de funciones
   b) Representación mediante coordenadas cartesianas
   c) Identificación de propiedades y formas equivalentes de funciones lineales
   d) Identificación de propiedades y formas equivalentes de funciones cuadráticas
   e) Planteo de Ecuaciones
   f) Conversión entre formas equivalentes de ecuaciones
   g) Resolución de ecuaciones y conjunto solución
   h) Planteo en base a problemas y resolución de ecuaciones de primer grado
   i) Planteo en base a problemas y resolución de ecuaciones de segundo grado
   j) Resolución de ecuaciones racionales
   k) Resolución de ecuaciones irracionales
   l) Resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales
   m) Planteo en base a problemas y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales
4) Geometría
   a) Identificación y medición de ángulos
   b) Clasificación e identificación de relaciones entre ángulos
   c) Operaciones con ángulos
   d) Clasificación de triángulos
   e) Cálculo de medidas de triángulos
   f) Aplicación del teorema de Pitágoras
   g) Resolución de Triángulos Equivalentes
   h) Resolución de ángulos en cuadriláteros
   i) Cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares
5) Trigonometría
   a) Identificación de ángulos de elevación y depresión.
   b) Resolución de triángulos rectángulos mediante funciones trigonométricas de un ángulo agudo.
   c) Cálculo de funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
   d) Identificación de relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos opuestos, complementarios, suplementarios y que difieren en un giro.
   e) Demostración de identidades trigonométricas.
   f) Resolución de ecuaciones trigonométricas.
   g) Resolución de problemas de aplicación mediante funciones trigonométricas

2.3 Actividades

Para conseguir los objetivos de aprendizaje (el dominio de algunas de las competencias básicas) se presenta al alumno con una serie de recursos durante el cursado. Estos recursos toman forma de actividades curriculares y extracurriculares.

Actividades curriculares incluyen: lectura de material de estudio provisto; clases presenciales y videos instructivos (modalidad virtual) en cada tema; estudio independiente con enunciados de problemas propuestos y sus soluciones publicadas; clases prácticas con resolución guiada de problemas (dadas en conjunto a las teóricas); cuestionarios de autoevaluación en cada temática; foros de consulta moderados por docentes y clases de consulta cara a cara.

Las actividades extracurriculares incluyen: disponibilidad de material extra para estudio independiente profundizando los temas cubiertos en forma optativa; visitas a laboratorios y muestras relacionados a la actividad de la facultad; talleres con tutores pares (alumnos avanzados de las carreras de la FACET).

Las actividades curriculares propuestas en el curso tienen el objetivo fundamental de fortalecer en los alumnos las destrezas básicas en matemáticas, consideradas como precursoras para la adquisición posterior de las principales competencias tecnológicas exigidas al futuro profesional.

Las actividades de lectura de material de estudio, clases presenciales y videos instructivos (modalidad virtual) en cada tema proveen un marco teórico y procedimental necesario para desarrollar cada competencia.

El estudio independiente con enunciados de problemas propuestos y sus soluciones publicadas permiten al alumno adquirir las competencias mediante el ejercicio consciente del marco teórico y procedimental provisto.

Las clases prácticas con resolución guiada de problemas, cuestionarios de autoevaluación en cada temática y los foros de consulta moderados por docentes y clases de consulta cara a cara sirven de retroalimentación al alumno para que éste pueda verificar la adquisición de las competencias por contraste de sus propios procedimientos y conocimientos con las demostraciones y respuestas de los docentes. En particular el foro permite asimismo confrontar al alumno con las dudas de sus pares. Muchas veces estas dudas corresponderán a vacíos en la propia formación de los que el alumno no era consciente.

Las actividades mencionadas sirven también al propósito de desarrollar y fortalecer las competencias sociales, políticas y actitudinales del alumno [2]. Las actividades de lectura de material de estudio, videos instructivos y estudio independiente ejercitan las competencias actitudinales de proactividad, responsabilidad y capacidad de organización pues exigen al alumno involucrarse activamente en su formación y administrar su tiempo para lograr una meta específica. Las clases presenciales, clases prácticas, clases de consulta y foros ejercitan las competencias sociales de comprender los códigos de conducta aceptados, saber comunicarse, participar en actividades de manera constructiva y respetar las diferencias.

Las actividades extracurriculares de estudio independiente con material adicional permiten desarrollar en el alumno la competencia de pensamiento lateral (resolución creativa de problemas y aplicación transversal de conocimientos). Esta competencia es difícil de definir, ejercitar y evaluar en forma directa en esta instancia, pero se considera que su adquisición es beneficiosa para la formación integral del alumno. Es por ello que se aproxima desde la actividad extracurricular.

Con las visitas a laboratorios y muestras institucionales se establece contacto con docentes y alumnos de diferentes años. Dada la amplia oferta académica de la FACET, el alumno toma contacto con otras opciones posibles que pueden afirmar o redirigir su elección original. Esto permite la reflexión y el ejercicio de la responsabilidad en la toma de decisiones.

Finalmente, los talleres de tutoría presentan un ámbito propicio para la manifestación de emociones que encuentran resonancia en las ya vividas por los tutores pares que transitaron antes el mismo camino. Esta interacción crea un sentido de solidaridad y refuerza la competencia actitudinal de resiliencia emocional frente a las demandas de la vida académica.

2.4 Evaluación de los resultados de aprendizaje

En los cursos de nivelación, la evaluación de los resultados de aprendizaje se efectúa mediante exámenes de seguimiento realizados durante el cursado a fin de ajustar el proceso de aprendizaje a la evolución del alumnado, seguidos de exámenes parciales necesarios para certificar el nivel mínimo de manejo de las competencias tecnológicas básicas requeridas. Los parciales son corregidos en base a una rúbrica que considera el nivel de eficacia del alumno en la resolución de cada ejercicio propuesto. Los resultados se registran incluyendo toda la información de la rúbrica además de la calificación final. Esto permite un análisis de la adquisición de las competencias específicas además de la calificación general [3]. Para cada parcial se ofrece una instancia de recuperación si no se obtuvo el puntaje mínimo de aprobación. Las recuperaciones de los exámenes parciales son del tipo opción múltiple e incluyen tareas que ejercitan competencias bien definidas. Se registran luego los resultados de cada ejercicio en adición a la calificación final, sirviendo este registro el mismo propósito que el de la rúbrica de los parciales.

2.5 Mejora continua

El proceso de mejora continua del curso de ingreso se implementa actualmente en base al análisis de los resultados académicos y de encuestas de calidad educativa a los alumnos. Dichos resultados son resumidos en un informe que se socializa con el equipo docente y las autoridades de la Facultad. Luego se desarrollan reuniones de coordinación con las autoridades y el equipo docente para definir e implementar ajustes al proceso educativo en base a la reflexión basada en la evidencia obtenida. Durante el dictado se realizan reuniones de coordinación con el equipo docente para consensuar el cronograma de tareas y compartir las vivencias áulicas y los resultados de las evaluaciones de seguimiento. Los lineamientos que surgen de la reflexión en estas reuniones proveen un mecanismo de ajuste de corto plazo además de proveer realimentación al proceso de mejora.

Como parte de las acciones emprendidas durante el proceso de mejora en el ingreso 2020 cabe destacar la realización de un taller de reflexión sobre la actividad docente a cargo del gabinete psicopedagógico de la FACET y una jornada taller de didáctica de la matemática a cargo de dos profesoras en matemáticas que forman parte del equipo docente del ingreso. Estas actividades, implementadas en función de las conclusiones de la primera fase del proceso de mejora continua del ciclo de ingreso 2020, constituyen tanto un aporte a la formación continua del cuerpo docente como una oportunidad para la sintonía del proceso educativo. Otro aporte durante el proceso de sintonía consistió en la formación de los docentes para su desempeño como tutores en el aula virtual, realizado en función a los requerimientos de la modalidad semipresencial introducida en el curso.

3 Resultados y Discusión

La Tabla 1 presenta los resultados académicos globales del ingreso 2020 discriminados por instancia en cuanto a cantidad de aprobados, desaprobados y porcentaje de aprobación. Las tres instancias de curso de nivelación se denominan 2019-04-CUR, 2019-08-CUR, y 2019-12-CUR según su fecha de inicio y modalidad (curso de nivelación). La instancia 2019-12-CUR fue semipresencial y las otras dos presenciales. Se muestran además los resultados de las dos instancias de prueba de suficiencia, 2019-12-SUF y 2020-02-SUF ofrecidas como alternativa al curso para alumnos que así lo requieran. El porcentaje de aprobación de la instancia de abril 2019 del curso es menor al resto de las instancias. Esto puede deberse en parte a que los alumnos que la toman están en su mayoría en la mitad del cursado del último año de secundaria, y también a que en ese cursado se comenzaron a implementar las acciones bajo el paradigma de formación en competencias y, en consecuencia, todavía no tenía impacto pleno. A pesar de la diferencia de ocho puntos porcentuales entre las instancias de agosto y diciembre se entiende que el resultado fue positivo por ser diciembre la primera vez que se ofrece el curso en modalidad semipresencial y el hecho que su parte virtual se desarrolló durante el receso estival. Se nota también que muchos alumnos que no lograron aprobar los cursos de nivelación sí recibieron una formación suficiente para, con un trabajo adicional, superar la prueba de suficiencia de febrero, hecho visible al comparar los resultados de ambas pruebas.

Tabla 1. Resultados académicos globales de las distintas instancias del ingreso 2020 de la FACET-UNT.

Instancia	Aprobados	Desaprobados	%Aprobación
2019-04-CUR	**121**	108	53%
2019-08-CUR	**221**	96	70%
2019-12-CUR	**156**	94	62%
2019-12-SUF	**35**	95	27%
2020-02-SUF	**120**	115	51%
Total	**653**	**508**	**56%**

La Tabla 2 muestra los resultados resumidos de las encuestas de calidad educativa administradas durante las diferentes instancias del curso. Notamos un alto porcentaje de satisfacción general, siendo lo mejor valorado la clase presencial. Observamos una mejora en la satisfacción expresada por el alumno sobre el material de estudio entre las instancias de abril y agosto, siendo que ambas instancias contaron con el mismo cuerpo docente y material de estudio. Atribuimos esta mejoría a las acciones tomadas en el proceso de mejora continua y la adecuación del programa en base a la enseñanza por competencias. Notamos que, si bien la satisfacción del alumno sobre el aula extendida o virtual se mantiene entre 61% y 67% el componente al que se refiere sufrió cambios importantes en cada instancia. Se inició con un aula extendida básica en abril, se implementaron mejoras en cuanto a contenido y funcionalidad en agosto y se reemplazó por un aula virtual en diciembre.

Tabla 2. Resultados de las encuestas de calidad educativa. Porcentaje de respuestas correspondientes a calificaciones de tres (bueno) y cuatro (muy bueno) sobre un máximo de cuatro puntos.

Instancia	Aula extendida / virtual	Clases presenciales	Material de estudio	Total de respuestas
2019-04-CUR	61%	80%	59%	70
2019-08-CUR	67%	81%	73%	116
2019-12-CUR	65%	86%	75%	212

4 Conclusiones y trabajo futuro

Durante el proceso de ingreso 2020 se abordó la reformulación del programa de nivelación en matemática para su adecuación al enfoque por competencias y la implementación de un proceso de mejora continua. Estos cambios permitieron hacer un abordaje más estructurado a la formación del alumnado e instrumentar un proceso de sintonía con los requerimientos del primer año de cursado de las carreras de la FACET en cuanto a las capacidades de sus estudiantes. Los primeros resultados son alentadores. Podemos citar en primer lugar la mejora en el porcentaje de aprobación en las instancias de agosto y diciembre respecto a la instancia de abril y el buen resultado de diciembre siendo que una gran parte de la carga de formación fue trasladada de la instrucción presencial a la virtualidad. En las instancias de abril y agosto el mayor impacto académico corresponde a las clases presenciales mientras que en diciembre es mucho más pronunciada la contribución del aula virtual, ya que la etapa virtual constituyó el 80% del cursado.

La aplicación de un modelo de formación por competencias en la instancia de nivelación para el ingreso a la FACET significó también la formación de los recursos humanos que conforman el equipo docente. Este equipo está conformado por egresados de la UNT con diversa formación de grado, lo que constituye una fortaleza por el aporte de diferentes experiencias en el ámbito profesional, pero a su vez se necesita la guía de especialistas que contribuyan en la capacitación en aspectos pedagógicos.

En cuanto a perspectivas futuras, se perfeccionará el modelo de formación por competencias mediante la sintonía basada en los resultados observados durante los primeros años de cursado en la FACET. También se llevará una estadística de resultados históricos de los próximos ciclos de ingreso, teniendo como punto de inicio para la comparación lo realizado en el Ingreso 2020. En base a las competencias identificadas hemos creado un programa de estudio actualizado en base a las mismas. En el futuro este programa evolucionará en base a los procesos de sintonía y de mejora continua implementados.

Referencias

1. Consejo Directivo, FACET UNT: Resolución N° 1002/19. https://www.FACET.unt.edu.ar/resoluciones/
2. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina "Libro Rojo de CONFEDI",* Universidad FASTA Ediciones, 2018.
3. Rhodes, T.: *Assessing Outcomes and Improving Achievement: Tips and Tools for Using Rubrics*. Washington, DC: Association of American Colleges and Universities. 2010.
4. GONZÁLEZ, Mano, et al. La evaluación por competencias: propuesta de un sistema de medida para el grado en Información y Documentación. *BiD: textos universitaris de biblioteconomia i documentació*, 2009, vol. 23, no 2.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

La ayudantía como un espacio de desarrollo de competencias genéricas: Una experiencia en Álgebra mediada con TIC

Andrea C. Antunez[1,2], Marcela P. Villagra[2]

[1] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Austral
Mariano Acosta 1611, B1630, Pilar, Buenos Aires, Argentina
aantunez@austral.edu.ar,

[2] Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento
Juan María Gutiérrez 1250, B1613, Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina
aantunez@campus.ungs.edu.ar, mvillagr@campus.ungs.edu.ar

Resumen. Durante los últimos años, las universidades se enfrentan al reto de formar profesionales capaces de gestionar información transformándola en conocimiento útil, de resolver situaciones problemáticas nuevas y de aprender durante toda la vida. En particular, se espera que un graduado de ingeniería "sepa hacer y sepa ser, con competencias tecnológicas, sociales y actitudinales". Aquí presentamos una experiencia de ayudantía en la cátedra de Álgebra I, en la que se muestra una posible forma de generar un espacio que favorezca a los estudiantes la adquisición de algunas competencias genéricas en un ambiente de trabajo colaborativo. En el desarrollo de la ayudantía se utiliza el software libre LaTeX para la producción de documentos.

Palabras Clave: Ayudantía, Álgebra, Competencias, Trabajo colaborativo.

1 Introducción

Durante los últimos años, la visión sobre la enseñanza se encuentra atravesando un cambio, principalmente sobre la enseñanza de las materias correspondientes a las carreras de ingenierías. En Argentina, varios aspectos de este cambio se reflejan en las nuevas propuestas de enseñanza que presentan las universidades. En ellos se atiende a lo sugerido por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) respecto del perfil deseado para un ingeniero y las competencias que éstos deberían desarrollar. Atento a su propuesta, el CONFEDI propone para los estudiantes una enseñanza por competencias y define, entre otras cosas, las competencias genéricas que deben presentar los graduados en ingeniería. La Declaración de Valparaíso de ASIBEI [1] establece que las competencias genéricas presentadas en la propuesta del CONFEDI, conforman el "faro" que guía el perfil de los egresados de los países integrantes. En el Libro Rojo de CONFEDI [2] se señala: "Las Competencias Genéricas de un Ingeniero Argentino propuestas por el CONFEDI se constituyen entonces, en el faro que orienta a las escuelas de ingeniería y educadores de ingenieros en los procesos de desarrollos de competencias a nivel regional y continental, buscando un graduado que sepa hacer y sepa ser, con competencias tecnológicas, sociales y actitudinales".

Es, en este marco, en donde las materias de matemática de ingenierías han comenzado a desarrollarse. Por lo tanto, las mismas deberían promover el aprendizaje de conceptos y técnicas que favorezcan la toma de decisiones y la solución de problemas relacionados con la ingeniería, y en los cuales la autonomía, la creatividad, la innovación, la eficiencia y el emprendimiento sean elementos presentes en la resolución de los problemas, dentro de una perspectiva de procesamiento metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético [3]. Una forma de enseñanza que propicia un ambiente favorable para la adquisición de competencias es la de trabajo colaborativo. Actualmente, varios son los artículos que destacan el trabajo colaborativo, en particular la tutoría entre pares, como una forma de enseñanza que favorece el aprendizaje significativo, tanto en el alumno asistido como en el estudiante ayudante. “Este tipo de tutoría surge como una oportunidad de transmisión y adquisición horizontal del conocimiento, fomentando el trabajo autónomo de los estudiantes y ayudándoles a adquirir competencias que les serán útiles para afrontar diversos problemas a lo largo de sus vidas” [4].

Teniendo en cuenta lo enunciado, en la Universidad Austral se desarrolló e implementó una experiencia de ayudantía en la materia Álgebra I correspondiente a las carreras de Ingeniería Industrial, Ingeniería Biomédica e Ingeniería en Informática, con el objetivo principal de generar un espacio propicio para favorecer en los estudiantes la adquisición de algunas competencias genéricas propuestas por el CONFEDI mediadas por el uso de TIC. En esta propuesta, se invitó a los estudiantes becarios a realizar una ayudantía (bajo supervisión de docentes) cuyas tareas consistieron en:

- Atender circunstancialmente algunas de las consultas de los estudiantes durante las clases prácticas de la materia Álgebra I.
- Elaborar material digital de algunos ejercicios resueltos de las prácticas de la materia usando el software libre LaTex.

En el presente trabajo mostramos tal experiencia.

2 Fundamentación

En el año 1996, en Argentina, el CONFEDI realiza una propuesta de enseñanza para las materias de ingenierías, reformulando y unificando la forma de enseñanza que se desarrollaba hasta entonces en las distintas universidades del país. La propuesta es presentada en un documento al que denomina “Libro Azul”. Posteriormente, en una siguiente propuesta basada en documentos anteriores, en la que, entre otras cosas, se sugiere un modelo de aprendizaje para las materias de ingenierías, el CONFEDI presenta el “Libro Rojo”. En él, concluye que “Hay consenso en cuanto que el ingeniero no sólo debe saber, sino también saber hacer. El saber hacer no surge de la mera adquisición de conocimientos, sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc. que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo” [2]. Plantea, además, las competencias que deben desarrollar los graduados en ingeniería, sugiriendo, de esta forma, la enseñanza por competencias como una alternativa para lograr el perfil deseado de un graduado en ingeniería.

El término competencias adquiere diversos significados según el punto de vista que se considere. En el campo de la educación, varios son los elementos que convergen y que le otorgan un sentido, es por ello que conceptualizarlo no es una tarea fácil. Tobón [5] define las competencias como procesos complejos que las personas ponen en acción-actuación-creación para resolver problemas y realizar actividades en un determinado contexto con idoneidad y responsabilidad, para lo cual integran el saber ser, el saber conocer y el saber hacer. Por su parte, el CONFEDI [1], tomando como base a Perrenoud y LeBoterf, considera que la competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición distintos saberes), en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales.

Salvando las posibles diferencias que se pudieran encontrar entre las definiciones, se logra reconocer en ellas la combinación de tres elementos: a) una información, b) el desarrollo de una habilidad y c) puestos en acción en una situación inédita [6]. Esto es, la competencia se puede generar en una situación real o en contexto, que requiera el dominio de una información específica que involucre el desarrollo de una o varias habilidades derivadas de los procesos de información.

Entre las competencias genéricas detalladas en el Libro Rojo de CONFEDI [2], en esta experiencia presentada se priorizó la adquisición y el desarrollo de las siguientes:

- Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
- Comunicarse con efectividad.
- Aprender en forma continua y autónoma.

En línea con lo antes descripto, entendemos que el aprendizaje basado en la resolución de problemas favorece el desarrollo de las competencias buscadas. En esta teoría, el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido “conceptual” sino en el interés en que el estudiante adquiera y construya herramientas para resolver problemas y que reconozca su accionar cognitivo. La resolución de problemas constituye un medio que facilita la ejercitación y aplicación de procesos cognitivos y metagonitivos, favorecedores del aprendizaje en la medida en que permiten que el aprendiz autosupervice, autoregule y autoevalúe su accionar cognitivo propio, tome conciencia de sus fortalezas y debilidades [7]. Si bien esta teoría plantea una modalidad de trabajo principalmente individual, entendemos que tales procesos también se desarrollan con actividades grupales y que éstas pueden potenciarlos. En este enfoque, la actuación del docente es sustancial. El docente actúa como guía, orientador y facilitador del estudiante en la búsqueda de la solución del problema. Al respecto, Abate y Orellano [8] señalan que el rol del docente es fundamental para el desarrollo de las competencias, el docente favorece el desarrollo de competencias cuando despliega una serie de dispositivos que involucran al alumno activamente o crea situaciones en las cuales aprende haciendo, apelando al conocimiento y a la reflexión.

Actualmente, entre los recursos que el docente posee para propiciar el desarrollo de las competencias, se encuentran las nuevas tecnologías. Mediante una selección adecuada de ellas, es posible generar un espacio de aprendizaje autónomo por parte del estudiante en el cual se facilite el desarrollo de competencias. Surge, de esta manera, como una opción posible de modalidad de organización del aprendizaje, el blended learning. El blended learning, es una forma de aprender que combina o mezcla enseñanza presencial con virtual [9], en donde la presencialidad y virtualidad confluyen como una totalidad [10]. Es un modelo de aprendizaje, en el que los estudiantes tienen que desarrollar habilidades tan importantes para su vida futura en esta sociedad como, entre otras:

- Buscar y encontrar información relevante en la red.
- Desarrollar criterios para valorar esa información, poseer indicadores de calidad.
- Aplicar información a la elaboración de nueva información y a situaciones reales.
- Trabajar en equipo compartiendo y elaborando información.
- Tomar decisiones en base a informaciones contrastadas.
- Tomar decisiones en grupo [11].

Varios son los autores que mencionan al trabajo colaborativo entre estudiantes como un recurso didáctico para adquirir competencias a través de las interacciones entre los estudiantes. Según Guitert y Siménez, citado por [12], “el trabajo colaborativo es el proceso en el que cada individuo aprende más de lo que aprendería sólo, fruto de la interacción de los integrantes del equipo [...] se da cuando existe una reciprocidad entre un conjunto de individuos que saben diferenciar y contrastar sus puntos de vista de tal manera que llegan a generar un proceso de construcción de conocimiento.” Para que este proceso se ponga en marcha es esencial que cada individuo asuma su responsabilidad, tanto individual como grupal (por los resultados del grupo), en la obtención y consenso de la meta a alcanzar. Entre las diferentes modalidades que puede presentar el trabajo colaborativo, se encuentra el de tutoría entre pares. En ella, un estudiante de un curso superior actúa como tutor, asesorando y ayudando a otros estudiantes de un curso inferior. En este tipo de trabajo, la necesidad del estudiante tutor de articular y explicar a otros las ideas propias lleva a que éstas sean más precisas y correctas y a tener que organizar e integrar mejor el conocimiento, además de conseguir un mejor desarrollo de las habilidades interpersonales debido a la ausencia de formalismos y jerarquías [4].

3 Desarrollo de las actividades

En julio de 2019, un grupo numeroso de estudiantes de primer año expresó su interés en colaborar en la materia Álgebra I. Del desempeño durante el primer cuatrimestre, se infería que estos estudiantes postulantes conocían los conceptos mínimos de la materia, tenían cierto manejo de algunos software básicos utilizados en otras materias y habían participado anteriormente en trabajos de equipo. Además, habían desarrollado algunas habilidades cognitivas durante el primer cuatrimestre como son las de sintetizar, deducir y analizar conceptos. Las propuestas de ayudantías de años anteriores realizadas en la materia se plantearon para un grupo de dos o tres estudiantes, de segundo año o más avanzados, cuya única tarea consistió en atender consultas bajo la supervisión de docentes. Por lo cual, estos estudiantes no tenían hasta el momento una propuesta tal que potenciara sus intereses y habilidades.

La propuesta de actividades de la ayudantía se planificó y se sostuvo considerando ese contexto inicial. La convocatoria para la participación en la ayudantía se dirigió a estudiantes que aprobaron la materia con nota sobresaliente en el examen y tenían una disponibilidad de dedicación de dos a tres horas semanales, distribuidas en horas de consultas en la práctica y horas de elaboración de materiales online. Las horas de trabajo sobre materiales digitales podían desarrollarse sin necesidad de presencia en la clase práctica. Esta convocatoria se hizo pública por mail desde la plataforma del campus de la materia una vez finalizado el primer cuatrimestre.

El desarrollo del trabajo se realizó en equipo, con encuentros grupales o individuales y se mantuvo una comunicación online permanente: mail, carpetas compartidas y mensajes de WhatsApp entre ayudantes. Se acordaron reuniones de trabajo para los días viernes, cada 15 días como máximo, con el objetivo de revisar las tareas realizadas y definir las siguientes, según las sugerencias que se establecían a partir del diálogo del equipo. La dinámica de trabajo se estructuró en tareas semanales con contenidos conocidos por los estudiantes, aquellos vinculados a la materia en sí, y con contenidos desconocidos, los asociados con el manejo del software; con el fin de que los estudiantes puedan adquirir y desarrollar progresivamente las competencias surgidas del trabajo en equipo como así también las relacionadas con el aprendizaje continuo y autónomo.

Los recursos disponibles para los ayudantes y necesarios para las actividades fueron:

- Un conjunto de indicaciones iniciales sobre la dinámica de trabajo e información muy limitada del software libre LaTex, junto con dos videos de YouTube orientadores para la instalación y uso del programa, que invita a la investigación sobre tales temas.
- Una carpeta compartida en Dropbox con las prácticas de la materia y los resúmenes teóricos, en formato tex y pdf, de la cual se podían descargar los archivos para compilarlos en las computadoras o revisar, deducir y/o copiar comandos que podrían ser útiles.
- En tal carpeta, los ayudantes podían subir tutoriales que consideraban útiles para compartir.
- Una carpeta en Drive con planillas de tareas para cada estudiante, definidas en común acuerdo en las reuniones (a modo de seguimiento del proceso de la ayudantía) junto con espacio para compartir documentos o recursos.

La dinámica de trabajo se diseñó en torno a tareas que seguían un hilo conductor. La distribución de las mismas fue flexible y se modificó según las decisiones tomadas en el equipo de modo online (WhatsApp y e-mail) o en las reuniones durante el transcurso de la ayudantía, con una metodología que motivó el trabajo en grupo para compartir, por ejemplo, comandos útiles o mejoras que se podrían implementar en los materiales.

La participación de los docentes se caracterizó por un rol activo, generando espacios de intercambio de ideas además de, asesorar y orientar sobre nuevas estrategias o la generación de las mismas, tanto en las consultas durante las prácticas de la materia, como así también en la elaboración de los materiales digitales. Asimismo, previo a la difusión del material elaborado por los ayudantes, los docentes intervinieron corroborando la resolución correcta de los ejercicios y problemas.

Las actividades se organizaron de manera tal que el desarrollo de competencias relacionadas con el saber actuar dentro del contexto sea necesario, en este caso, en el rol de ayudantes y diseñadores de materiales para sus compañeros. Como los estudiantes de la clase que recibieron esta ayuda conocían el origen de los materiales digitales, es decir, que fueron confeccionados por pares, se generó un clima de compañerismo, en el cual las sugerencias y los comentarios sobre los mismos se dieron de manera natural.

Al finalizar el cuatrimestre, se realizaron dos encuestas, una a los estudiantes de la cursada y otra a los ayudantes, a fin de recopilar información sobre el desarrollo de la ayudantía. La primera fue una encuesta anónima y opcional donde los estudiantes de la cursada expresaron sus opiniones respecto de la ayudantía y los materiales de estudio recibidos. La segunda encuesta fue completada por los ayudantes en modalidad online con una grilla en la cual se indagó sobre las expectativas iniciales respecto del aprendizaje en el proceso de la ayudantía y el cumplimiento de las mismas al final ciclo. Además, se realizó una reunión final de autoevaluación de la ayudantía con todos los participantes, con el objetivo de recabar información sobre las fortalezas y debilidades de la propuesta. Este último espacio de cierre fue central para la reflexión grupal de todo el proceso.

3.1 Organización de actividades con LaTeX y vínculos con los contenidos de la materia Álgebra I

Nuestra experiencia nos indica que la enseñanza por competencias generalmente se da en propuestas en las cuales se busca lograr aprendizajes con actividades donde los conceptos a ser estudiados se presentan involucrados en problemas similares a la realidad que tendrá el futuro graduado de ingeniería. En matemática, varias de estas actividades usualmente se diseñan para ser implementadas en el contexto áulico. Sin embargo, en esta propuesta se pretendió lograr el aprendizaje mediante actividades que se desarrollaron principalmente fuera del contexto áulico. El objetivo inicial definido para los estudiantes se sostuvo a partir de una necesidad real: colaborar en el aprendizaje de sus compañeros. Por lo tanto, la actividad general propuesta como eje central fue:

Diseñar y desarrollar materiales con ejercicios resueltos utilizando el software LaTeX de tal manera que la resolución permita comprender a un estudiante de la cursada lo necesario para resolver problemas similares.

La actividad, como mencionamos anteriormente, se planteó como un trabajo para realizar en grupo, siguiendo una secuencia de tareas que fue acordada en las distintas reuniones. Tales actividades evolucionaron según la siguiente secuencia de saberes vinculados con los conceptos trabajados en las prácticas de la materia, e incluso, según la demanda explícita de los estudiantes de la cursada.

- Proposiciones lógicas y demostraciones abstractas.
- Conjuntos numéricos y demostraciones. Inducción completa.
- Números complejos.
- Polinomios.
- Sistemas de ecuaciones y matrices.
- Vectores y geometría en el plano y el espacio.

El abordaje de cada una de las guías prácticas no sólo implicó en los ayudantes reveer los aprendizajes de la materia sino también adquirir saberes nuevos sobre la redacción de textos en LaTex. La secuencia de temas relacionados con el uso del programa LaTex fue:

- Edición de textos y estructura general de documentos en LaTex. Incorporación paquetes o nuevos comandos en la introducción: \usepackage, \newcomand, entre otros.
- Usos de entornos de enumeración y alineaciones de textos: \begin \end, entornos enumerate, itemize, align, entre otros.
- Generación de fórmulas matemáticas y alineaciones en el entorno matemático: entornos $$ y \[\], \left-\right, equation, eqnarray, etc.
- Uso de símbolos específicos matemáticos y estructuras matemáticas: \sum \prod, flechas y comandos lógicos, comando de generación de matrices y tablas como entornos tabular, matrix, arrays o cases.
- Inserción de gráficos y diseños elaborados en Geogebra: entorno insert, paquete graphicx, entre otros.

Aclaramos que la resolución de los ejercicios de cada práctica de la materia invitó al ayudante a aprender un nuevo nivel de complejidad de escritura en LaTex. Por ejemplo, en las primeras cuatro prácticas, los estudiantes abordaron la escritura de textos con fórmulas matemáticas relativamente sencillas, mientras que, en la práctica siguiente, en la que se trabajó con contenidos relacionados con sistemas de ecuaciones y matrices, se los motivó a diseñar matrices y tablas utilizando nuevos entornos y sentencias, tarea que aún no exploraron en las redacciones previas y cuya complejidad es superior a las realizadas anteriormente.

En síntesis, con cada nuevo abordaje se generaron situaciones en las cuales se debía analizar la temática de la materia, concebir una estrategia posible de resolución de ejercicios vinculados a dicha temática, además de identificar las nuevas herramientas necesarias para su escritura en LaTex. Y todo esto se realizó desde la metodología del trabajo colaborativo.

4 Resultados

La propuesta tuvo la participación de 9 ayudantes estudiantes de ingeniería industrial y 3 profesores. La misma se realizó durante los meses de agosto a diciembre de 2019, en un curso de Álgebra I con 45 estudiantes.

La evaluación de los resultados obtenidos en la experiencia se realizó mediante el análisis de la información recopilada a través del material producido, las descripciones de los docentes involucrados, las encuestas individuales a los ayudantes, una entrevista grupal entre ayudantes y docentes, y las encuestas anónimas de opinión a los estudiantes de la cursada en donde se desarrolló la ayudantía.

El material de ejercicios resueltos obtenido cubrió al menos un 10% de cada práctica con explicaciones variadas que reflejaron distintas visiones de los ayudantes sobre lo que consideran apropiado para una explicación. Se observó un progreso en las explicaciones individuales de los ayudantes en cada ejercicio y un avance en el diseño general de los mismos en el transcurso de una guía práctica a la siguiente.

Tabla 1. Extracto de las producciones realizadas por los ayudantes.

Ejercicio extraído de la primera práctica	Ejercicio extraído de la segunda práctica
Ejercicio 7.b) La suma de un número entero y su consecutivo es siempre impar. $\forall k \in \mathbb{Z} : k+(k+1) \neq 2 \cdot q$ (siendo $2 \cdot q$ cualquier número par) Negación: $\exists k \in \mathbb{Z} : k+(k+1) = 2 \cdot q$ (siendo $2 \cdot q$ algún número par) Podemos ver que pasa con la negación: ¿Existe k perteneciente a los enteros tal que $k+(k+1)$ sea par? $k+(k+1) = 2 \cdot q$ $2 \cdot k+1 = 2 \cdot q$ siendo tanto k como q enteros no existe valores para que se cumpla la ecuación porque sería pedir que un número no divisible por 2 sea par. Podemos decir que la negación es falsa (F). Por ende la proposición es verdadera (V).	4) *Expresar en la forma trigonométrica los siguientes números complejos.* f) $z = \frac{(1+i)^6(\sqrt{3}+i)}{2-2i}$ Cómo bien dice el enunciado, tenemos que expresar de forma trigonométrica el número complejo dado. Pero... ¿Por dónde empezamos? Sabemos para expresar números complejos en forma trigonométrica es la siguiente: $z = \|z\|(\cos(\alpha)+i\,\mathrm{sen}(\alpha))$ Por lo tanto, para llegar a esta fórmula, necesitamos dos cosas que no tenemos pero que podemos conseguir: el módulo del número complejo y su argumento. *Buscamos el módulo de z:* Sabemos que $\|z\|$ representa el módulo del numero complejo y también sabemos qué podemos obtener él mismo haciendo $\sqrt{a^2+b^2}$ en donde a representa la parte real y b la parte imaginaria de éste. **Recomendación**: *sirve mucho entender la interpretación geométrica y, a su vez, qué es lo que realmente representa el módulo de un numero complejo. La formula para obtenerlo puede deducirse y generalizarse a partir del teorema de Pitágoras).* Sabiendo esto, podemos obtener $\|z\|$ más fácilmente: $\|z\| = \frac{\|w\|\,\|u\|}{\|v\|} = \frac{(8)2}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ $\boxed{\|z\| = 4\sqrt{2}}$

Las resoluciones de ejercicios correspondientes a las primeras prácticas manifestaron un grado importante de desarrollo de cuentas con explicaciones escuetas, sin embargo, a medida que se avanzó con la resolución de los ejercicios de las siguientes guías, las explicaciones aumentaron en relación al detalle, a los procedimientos utilizados y a la organización de la resolución. En cuanto al uso del software, también se observó un avance en el manejo del mismo. Al inicio de la ayudantía, el diseño, en relación a la escritura de los ejercicios, resultó sencillo y relativamente elemental, características propias de un diseño realizado por una persona incursora en el programa, mientras que, hacia el final de la ayudantía, el manejo de nuevos comandos y el conocimiento de nuevos entornos matemáticos, condujo a un cambio significativo en el diseño, con resultados claros y positivos en las producciones. Este progreso y avance, tanto en los aspectos matemáticos como en los vinculados con el manejo del programa, se potenció con las interacciones surgidas de las reuniones y de los espacios virtuales. En la Tabla 1 ejemplificamos estas observaciones con un extracto de dos ejercicios: uno realizado durante la primera semana y otro realizado dos semanas después.

Durante el transcurso del cuatrimestre, los docentes evidenciaron un gran avance del aprendizaje continuo y autónomo de los ayudantes, como así también una aceptación y comodidad por parte de los mismos con la modalidad de trabajo en equipos. El aprendizaje continuo y autónomo, se notó, entre otros indicadores, en la cantidad y profundidad de las intervenciones docentes, éstas fueron cada vez más escasas, especialmente en relación con las tareas de escritura utilizando el software. Un mail introductorio con dos videos, una página de internet de apoyo para la instalación del programa y el primer encuentro presencial de capacitación de menos de una hora, fueron suficientes para motivar a los ayudantes en la búsqueda de recursos útiles y estrategias de resolución. Asimismo, los docentes comentaron que las reuniones se centraron, principalmente, en realizar acuerdos de distribución de tareas y aclarar algunas dudas surgidas sobre el manejo del programa. Sostuvieron que la mayoría de las dudas fueron resueltas entre pares mediante sugerencias aportadas en un grupo de WhatsApp administrado por los ayudantes o mediante la búsqueda de información en Internet. Además, los docentes destacaron la organización y responsabilidad que mostraron los ayudantes. Fueron éstos quienes acordaron un tiempo máximo para la resolución de los ejercicios de cada guía y su posterior difusión en la clase. Los ejercicios fueron entregados a los estudiantes de la cursada periódicamente durante el cuatrimestre, pasadas, a lo sumo, tres semanas de trabajar la temática en las clases, lo que les implicó a los ayudantes una organización en conjunto del tiempo y una responsabilidad para cumplir con los plazos establecidos por ellos mismos. Estas observaciones permiten concluir que se evidenciaron características propias del trabajo colaborativo y que los ayudantes incorporaron esta dinámica de trabajo sin inconvenientes. Además, la planificación de actividades basada en el aprendizaje por Blended Learning también resultó una elección correcta que potenció el aprendizaje.

En las encuestas realizadas a los ayudantes, también fue posible encontrar indicios sobre los resultados esperados. Los ayudantes mencionaron varios aspectos que les resultaron beneficiosos por la participación en la ayudantía. Aspectos vinculados al conocimiento y manejo de los contenidos matemáticos, a la comunicación de los conceptos con claridad, al aprendizaje de un nuevo programa, al trabajar en equipo y colaborativamente, a la modalidad aprendizaje, entre otros, fueron los que surgieron en el análisis de las entrevistas. Algunos de los indicios se evidenciaron en las respuestas obtenidas en la pregunta: *"¿Qué beneficios generales te aporta ser ayudante de cátedra?"*

- Respuestas relacionadas con conocimientos de la materia: *"Mantener conocimientos frescos. Reforzar conceptos básicos que no quedaron tan claros durante la cursada"; "Repasar contenidos anteriores que sirvieron para entender mejor la materia álgebra II"*
- Respuestas relacionadas con conocimientos de programación: *"LaTex: saber usar este programa va a ser muy útil en mi carrera (entrega de informes, reportes, tesis, etc.)."; "Aprendí a usar LaTex, desde crear documentos, implementar fórmulas, gráficos y medianamente, a moldear el formato de los archivos."*
- Respuestas relacionadas con conocimientos generales: *"... pude vivir la experiencia de estar en una clase del otro lado"; "me hizo ser más tolerante y paciente"; "Aprendizaje en materia de trabajo en conjunto y en enseñanza."*

El conocimiento y manejo de los contenidos matemáticos, y la comunicación de las resoluciones, como aspectos positivos, también se refleja en las respuestas a la pregunta: *¿Qué aprendiste mientras escribías los ejercicios?* Estas respuestas se presentan en el diagrama de barras de la Figura 1.

Observando el diagrama, se puede apreciar que los estudiantes, en relación a la resolución de los ejercicios, manifiestan que sabían cómo hacerlo, al menos conocían una resolución posible, o en su defecto, lograron realizar una resolución. Este resultado resulta claro, debido a que, una de las condiciones para participar de la ayudantía, fue la de tener aprobada la materia. Y los estudiantes participantes habían aprobado Álgebra I el cuatrimestre anterior.

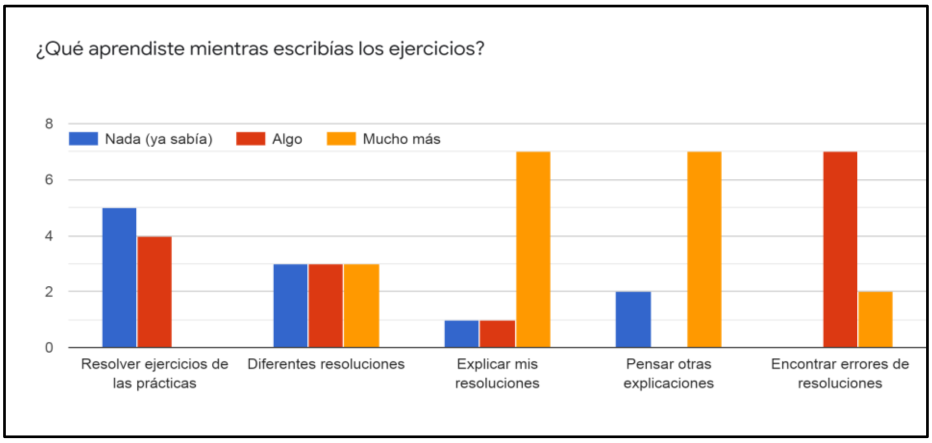


Fig. 1. Respuestas de los ayudantes respecto a los conocimientos vinculados con la materia Álgebra I.

Sin embargo, es notorio como la mayoría de los ayudantes reconoce haber aprendido bastante en cuanto a explicar sus resoluciones y pensar otras explicaciones. También, señalan que, en cierta medida, aprendieron a encontrar errores en otras resoluciones.

En cuanto al aprendizaje sobre la escritura en LaTex, los estudiantes mencionaron:

- *"Me gustó mucho la herramienta. Me hizo interesarme más por los demás lenguajes de programación.";*
- *"Me ayudó a mejorar mis habilidades codificando";*
- *"Te da una manera prolija y accesible de armar documentos con fórmulas y desarrollo matemático"* pero tiene como aspecto negativo el *"grado de dificultad en su implementación"*.

De estas respuestas, se puede inferir que la experiencia de aprender un programa nuevo de composición de textos, a los ayudantes les resultó favorable. Mencionaron además, que utilizaron varios recursos para lograr escribir con este programa, principalmente, Internet: "En cuanto a recursos, usé mucho dos páginas de Internet, una con funciones y otra con códigos"; "Leí los códigos de las prácticas para aprender a usar comandos y lo que no podía sacar de las prácticas lo busqué en Internet. Hice mucha prueba y error."; "Cualquier pregunta que tenía, se la hacía a Google. Si no encontraba una respuesta en la web le preguntaba a la profesora". En estas respuestas se aprecia que la búsqueda de información en Internet fue sustancial. En la Figura 2 se muestra el nivel de aprendizaje obtenido según los ayudantes, respecto a los distintos comandos o tareas de escritura en LaTex. Se evidencia variedad de respuestas en la mayoría de los ítems presentados. Esto, en gran medida, se debe a los trabajos que cada estudiante tuvo asignado según la división de tareas y la complejidad de los mismos. Sin embargo, la mayoría de los ayudantes reconoce haber aprendido mucho de inserción de fórmulas y muy poco de edición de formato de documento, y entre otros aprendizajes, mencionan haber aprendido sobre el programa en general (instalación, manejo de comandos, etc).

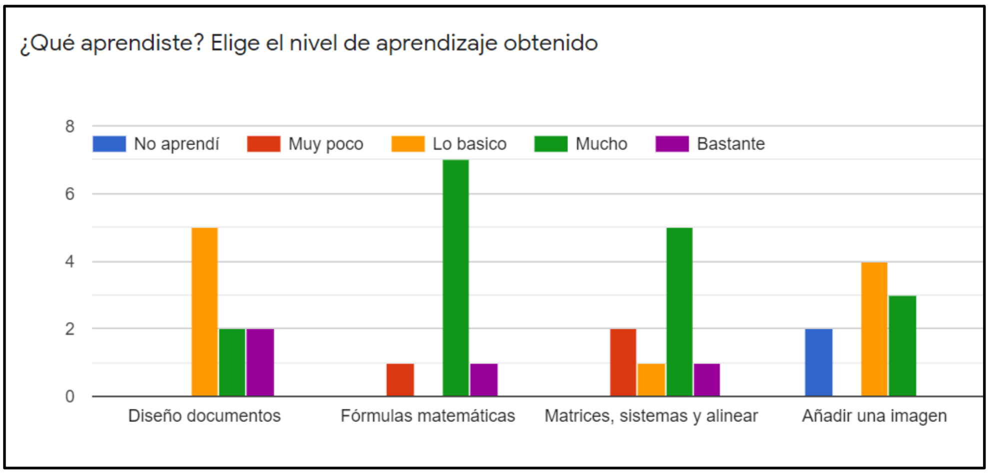


Fig. 2. Gráfica sobre nivel de aprendizaje obtenido respecto a algunas tareas de escritura en documentos en LaTeX.

Finalmente, respecto a la dinámica de trabajo, los ayudantes valoraron positivamente la experiencia mencionando que les resultó muy enriquecedora desde el punto de vista personal y aplicable en el futuro entorno profesional. En particular, mencionaron la gran comodidad del aprendizaje mediante Blending Learning y el trabajo online, que evitó el posible perjuicio que una dedicación con tiempo fijo les podía generar. Por ejemplo, en la encuesta un estudiante menciona *"Yo sentí que la dinámica estuvo bien. Me gustó la libertad que me dieron para hacer el trabajo cuando quiera en la semana. No sentí que fuera demasiado complicado ni muy exigente. Hay que dedicarle tiempo, pero siempre termina saliendo".* Destacamos que todos los ayudantes se postularon para participar en una ayudantía a realizarse en el siguiente cuatrimestre, proponiendo evitar cambios la dinámica de trabajo.

5 Conclusiones

En un ambiente de trabajo colaborativo entre pares, la ayudantía surge como una alternativa que permite a los estudiantes adquirir competencias y desarrollar autonomía, cualidades que les serán útiles para su futura vida profesional como ingenieros.

En este trabajo presentamos una experiencia de ayudantía enmarcada en un trabajo colaborativo entre pares y con una modalidad de aprendizaje semipresencial. Con el trabajo colaborativo y en equipo se generó un ambiente propicio para que los ayudantes desarrollaran las competencias de desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo y comunicarse con efectividad. Esto último también se motivó con la tarea de redactar los ejercicios de las guías prácticas, ya que entendemos que la comunicación no sólo se da de manera oral, sino que también es posible desarrollarse de forma escrita. Asimismo, la comunicación con efectividad se fomentó con la tarea propia de la ayudantía, es decir, con la atención de consultas en las clases prácticas.

Tanto la redacción de los ejercicios como la atención de consultas, además de facilitar el desarrollo de las competencias antes enunciadas, también favorecieron el desarrollo de competencias matemáticas.

La generación de materiales impulsó en los ayudantes una reflexión y revisión no sólo de los temas estudiados en la cátedra sino también sobre lo que se debería resolver o explicar para facilitar la comprensión del contenido a enseñar. De esta forma, la escritura y explicación de una resolución de un ejercicio o problema invita al ayudante a pensar diversas cuestiones, tales como: ¿Los estudiantes entenderán la idea si se resuelve un ejercicio sólo poniendo resultados?, ¿Qué explicación debemos incorporar para que el estudiante distinga la resolución?, ¿Hay una única resolución?, ¿Necesitamos incorporar la misma explicación a todos los ejercicios resueltos?, entre otras.

La modalidad de aprendizaje semipresencial mediante el uso de tecnologías, promovió en el ayudante un aprendizaje continuo y autónomo. El uso de mail, carpetas compartidas y grupos de intercambio por WhatsApps generó un medio de conversación en tiempo real y de asesoramiento entre pares que propició una construcción colaborativa del material de escritura. Los estudiantes que participaron del proceso, realizando las actividades propuestas, buscaron otras fuentes de información y comprobación de resultados en Internet. Con esta forma de enseñanza se pone en juego varias habilidades que serán utilizadas en tanto en la actualidad del estudiante como en su futuro como profesional.

En este trabajo se presentó una propuesta de ayudantía en la que se muestran evidencias del desarrollo de algunas competencias genéricas que debería poseer un graduado en ingeniería. Entendemos que es posible mejorar la propuesta. Por ello, durante el presente año se desarrollará e implementará una segunda etapa atendiendo a las sugerencias que los estudiantes nos manifestaron así como a las recomendaciones brindadas por los docentes. En esta nueva etapa se preveé incorporar tareas de revisión de los materiales respecto del diseño del marco general de los documentos y la incorporación de nuevas herramientas de comunicación (foros, blogs de ayudantes, etc).

Referencias

1. Anónimo, Documentos del CONFEDI. Declaración de Valparaíso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina. Universidad FASTA Ediciones (20l4).
2. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI): Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina “Libro Rojo de CONFEDI”, Universidad FASTA Ediciones (2018).
3. Cerato, A. I.; Gallino, M.: Competencias genéricas en carreras de ingeniería. Ciencia y tecnología, Vol. 13, pp. 83-94 https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4843853.pdf (2013). Accedido el 10 de agosto 2019.
4. García García, M. J.; Gaya López, M. C.; Velasco Quintana, P. J.: Mentoría entre iguales: alumnos que comparten experiencias y aprendizaje. Actas de las "XVI Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática" (JENUI 2010), pp. 119-126 (2010).
5. Tobón, S.: Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica. Ecoe Editores (2005).
6. Díaz Barriga, A.: El enfoque por competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? Claves, Perfiles educativos, Vol. 28, No. 111, pp. 7-36 (2006).
7. E. González, F.: Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. Zetetike, Vol. 6 (9), pp. 59-87 (1998).
8. Abate, S. M. y Orellano, V.: Notas sobre el curriculum universitario, prácticas profesionales y saberes en uso. Trayectorias Universitarias, Vo1. 1 (2015).
9. García Aretio, L.: Blended learning ¿Enseñanza y aprendizaje integrados? Boletín Electrónico de Noticias de Educación a Distancia (BENED), (2004).
10. Turpo Gebera, O.: Perspectiva de la convergencia pedagógica y tecnológica en la modalidad blended learning. Revista De Educación a Distancia, Vol. 39. https://revistas.um.es/red/article/view/234261 (2015). Accedido el 10 de agosto 2019.
11. Bartolomé, A.: Blending Learning. Conceptos básicos. Pixel-Bit. Revista de medios y educación, Vol. 23, pp. 7-2 (2014).
12. Maldonado Pérez, M.: El trabajo colaborativo en el aula universitaria. Laurus. Vol. 13, No. 23, pp. 263-278. http://www.redalyc.org/pdf/761/Resumenes/Resumen_7610231 (2007). Accedido el 20 de abril 2020.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UCU Universidad Católica del Uruguay

La evaluación en Álgebra y Geometría Analítica desde la Formación por Competencias en Carreras de Ingeniería

Ana María Kozak, Leonardo Javier D'Andrea, Mariela Walzer

UDB Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Avenida Ramón Franco 5050, Villa Dominico (1870), Buenos Aires, Argentina
ana_kozak@hotmail.com, dandrealj@yahoo.com, walzermariela@yahoo.com.ar

Resumen. El trabajo desarrolla cómo se diseña un instrumento de evaluación tradicional de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica inserto en un proceso de evaluación formativa. Su construcción se sustenta en definiciones del campo educativo y disciplinar como resultado del trabajo desarrollado por un grupo de docentes que revisan su práctica en el marco de una práctica reflexiva crítica. El punto de partida fue la selección de las competencias matemáticas que favorecen la construcción de la competencia de egreso "resolución de problemas abiertos de ingeniería" establecida en la Argentina, en 2018, por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería. En la primera y segunda parte del artículo se ofrece una descripción del contexto institucional, una síntesis del marco teórico y ejemplos de actividades que diferencian las dimensiones del saber y del saber hacer. Luego, a modo de conclusión, se enuncian algunas observaciones que surgen al evaluar la aplicación de la experiencia.

Palabras Clave: Formación por competencias, Evaluación formativa, Evaluación tradicional, Resolución de problemas, Álgebra, Geometría Analítica.

1 Introducción

En la Facultad Regional Avellaneda (FRA) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) de Argentina, Álgebra y Geometría Analítica (AyGA) es una asignatura homogénea de primer año del Ciclo de Ciencias Básicas perteneciente al área de Matemática del Departamento de Materias Básicas; cuya currícula contiene un conjunto de conocimientos científicos básicos y comunes a las carreras de Ingeniería que en la citada institución se desarrollan.

Las actividades en el aula se plantean como un encuentro entre los docentes y los estudiantes en el cual las acciones que se desarrollan buscan facilitar -como señalan [1] y [2]- el proceso de afiliación universitaria de cada estudiante y a la par propiciar que los alumnos como actores principales adquieran desde el área disciplinar un conjunto de competencias matemáticas que sientan las bases para la concreción de las competencias de egreso genéricas de la formación de ingenieros que se postulan en el Libro Rojo del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) [3].

Desde esta posición, el objetivo general de su enseñanza intenta propiciar que los estudiantes -a través de la utilización de los conceptos básicos del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica- sean capaces de modelizar, resolver e interpretar situaciones problemáticas de contextos intra y extra matemáticos, poniendo en evidencia las características singulares de cada contenido de la asignatura como también la potencia de ellos al ser considerados de manera integral.

Para tal fin, los contenidos han sido ordenados según una secuencia de tres núcleos o bloques temáticos que se refieren al Álgebra Vectorial y Matricial (Bloque 1), Geometría Analítica (Bloque 2) y Álgebra Lineal (Bloque 3) que permiten desarrollar la planificación de la enseñanza favoreciendo un aprendizaje espiralado donde lo nuevo siempre se enlaza con contenidos previamente estudiados.

Asimismo, el proceso de enseñanza no está escindido de un proceso de evaluación que se define tanto reconociendo su función formativa como certificativa. En particular, siguiéndose a [4], su diseño se basa en los resultados de aprendizaje esperados para cada bloque temático e incluye una instancia de evaluación tradicional que -en cada caso- se aplica a través de un instrumento de evaluación fundado en criterios y objetivos de acreditación que diferencian la Aprobación Directa (AD) de la Aprobación no Directa (AND) según establece la normativa institucional.

En este sentido, a partir del ciclo lectivo 2017 se puso en vigencia el nuevo Reglamento de Estudios que incorpora la implementación de la Aprobación Directa (AD) sin examen final en la UTN. A partir del mismo, en la UTN-FRA, la Resolución Nº 1326/18 del Consejo Directivo se establece que los estudiantes que obtengan una calificación de 6 a 10 puntos accederán a la AD y de obtener una calificación de 4 o 5 puntos en las instancias de evaluación que cada cátedra diseñe resultarán aprobados en condición de rendir el examen final correspondiente (AND). Además, en dicha resolución se establece que los objetivos y condiciones de acreditación (tanto para la AD como para la AND) deben estar explícitamente diferenciados en las planificaciones anuales de cada cátedra y puestos en conocimiento de los estudiantes.

En este contexto, en los apartados siguientes, se relata -desde los aportes de [5], [6], [7], [8] y [9]- que interpretación se efectúa de la formación por competencias y de la evaluación de los aprendizajes en el marco de la asignatura. A su vez, se describe y ejemplifica como el marco teórico señalado permite la construcción de un instrumento de evaluación (examen presencial escrito) que en su constitución diferencia conceptualmente qué es un ejercicio y qué es un problema intra y extra matemático -según exponen [10] y [11]- como vía para reunir evidencias que posibiliten distinguir en las producciones de los estudiantes el saber y el saber hacer.

2 Acerca de la formación por competencias en Carreras de Ingeniería

Desde diversas fuentes bibliográficas (por ejemplo, [5] y [7]) se observa una variedad de definiciones del término *competencias* en el marco de su aplicación en la formación de profesionales. De ellas, para el diseño de la enseñanza de las Cátedras en la UTN-FRA se acuerda considerar que

> Una competencia implica un saber hacer (habilidad), con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado. [12]

Desde esta posición teórica, se acuerda que la enseñanza de AyGA debe proponer actividades que favorezcan aprendizajes que permitan la formación de competencias matemáticas requeridas en la formación de un ingeniero. Para ello, se considera el aporte efectuado por Mogen Niss director del Proyecto KOM extraído del documento producido en el 2013 por la Sociedad Europea para la Formación de Ingenieros. El autor señala que los estudiantes de Ingeniería deben desarrollar la capacidad de: pensar matemáticamente, razonar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, modelar matemáticamente, representar objetos matemáticos, manejar símbolos y formalismo matemático, comunicarse en, con y sobre las matemáticas y, utilizar recursos de nuevas tecnologías de la comunicación y de la información. En síntesis, expone que "la competencia matemática (…) refiere a la habilidad de entender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad intra y extra contextos matemáticos y situaciones en que las matemáticas juegan o podrían jugar un rol" [13].

En este contexto, resulta posible equiparar las competencias matemáticas previamente mencionadas con las genéricas (particularmente, resolución de problemas abiertos de ingeniería) que, en la Argentina, fueron definidas por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) en 2018. Es decir, se considera, en atención a la naturaleza de la asignatura, que su enseñanza debe intencionar la formación de las siguientes competencias: identificar, formular y resolver problemas intra y extra matemáticos que requieran de los contenidos de AyGA, utilizar de manera adecuada las técnicas, procedimientos y herramientas que ofrece el AyGA y las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, desempeñarse de manera efectiva en trabajos prácticos grupales de AyGA, comunicarse con claridad y seguridad en, con y sobre el AyGA y, actuar con ética y responsabilidad.

Empero, como la formación de un ingeniero está compuesta por diferentes materias que integran distintos ciclos (ciencias básicas, tecnologías básicas y tecnologías aplicadas), es adecuado y necesario -como refiere [14]- establecer una graduación del trabajo que se desarrolla en las asignaturas porque -

cada una de ellas- aporta desde sus objetivos, contenidos, enseñanza y evaluación a las diversas competencias que son requeridas en los/as graduados/as.

Por ello, en el ámbito institucional se establece que las asignaturas del primer año de la carrera deben aspirar un nivel inicial de logro. Entendiéndose que las actividades propuestas para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación tengan como finalidad orientar a los estudiantes para que sean capaces de manejar información, resolver ejercicios y problemas, y desarrollar nociones básicas sobre el ámbito de actuación de la competencia.

3 Acerca de la evaluación de los aprendizajes

La literatura especializada señala que el punto de partida para la planificación del proceso de evaluación requiere indagar y reflexionar acerca de qué relación se desea establecer entre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación. Acción que se sugiere que puede llevarse a cabo al ir contestando los siguientes interrogantes: ¿para qué evaluar?, ¿para quién evaluar?, ¿sobre qué evaluar?, ¿cuándo evaluar?, ¿cómo recoger la información?, ¿cómo interpretarla? y ¿cómo utilizarla?

La Didáctica, ofrece diversos paradigmas (de la intuición pragmática, el docimológico, el sociológico, de la evaluación centrada en los objetivos, de la evaluación formativa en una enseñanza diferenciada, de la evaluación al servicio de la decisión, de la evaluación centrada en el consumidor, de la evaluación de retorno, de la evaluación como proceso de regulación) que -como refiere [15]- constituyen marcos teóricos para pensar el acto de evaluar y, por lo tanto, responder los interrogantes anteriores. Pero, también, vinculan distintas finalidades y concepciones de la evaluación ya sea respecto de los aprendizajes, de las instituciones educativas o de los sistemas educativos. No obstante, en cualquiera de ellas, la acción de evaluar siempre se asienta sobre tres bases:

> Primeramente, alguna información que se ha recogido en relación con un atributo, rasgo, un conocimiento, un aprendizaje; en segundo lugar, alguna forma de medir que consideramos apropiada para interpretar mejor esa información; y, por último, algún juicio de valor que construimos acerca de la información que hemos recogido. [8]

Asimismo, se considera que el proceso de evaluación debe ser diseñado como un puente que vincule la enseñanza y el aprendizaje ([6], [16]) por ser un elemento que guía el proceso y la reflexión tanto de los estudiantes como de los docentes. Al asumirse esta posición, la evaluación es formativa (término introducido por Scriven en 1967 [17] para diferenciarla de la evaluación sumativa) y, como señala Mottier-Lopéz, es una práctica que se co-constituye con los alumnos en el ambiente del aula [9].

En consecuencia, se entiende que la evaluación formativa posibilita reunir evidencias que permiten revisar, orientar y modificar tanto la enseñanza como el aprendizaje en función de las necesidades de los estudiantes y las expectativas de logro que cada asignatura posee en el contexto de la carrera.

A su vez, en el ámbito universitario, el proceso de evaluación de los aprendizajes se enmarca bajo un propósito de certificación establecido a través de las normas que regulan el funcionamiento institucional, garantizando y legitimando un mínimo de aprendizajes curricularmente previstos en programas de estudio; ya que las Universidades a través de sus títulos certifican las competencias de los graduados habilitándolos para el ejercicio profesional en el mundo del trabajo. [18]

Desde estos contextos acerca del acto de evaluar, en AyGA, la postura que se adopta es el diseño de un proceso de evaluación formativa, como un medio que permita la regulación y auto-regulación tanto para los estudiantes como para los profesores, pero que, además, incluya la normativa institucional relativa a la certificación.

El proceso que se lleva adelante implica la realización de diversas actividades como, por ejemplo, la propuesta de actividades que posibilitan la metacognición [19] y la realización en el aula de trabajos prácticos grupales cuya evaluación considera que los docentes no son los únicos agentes de evaluación y, por lo tanto, se habilitan instancias de autoevaluación y coevaluación [20]. Pero, también, se llevan a cabo tres instancias de examen parcial presencial escrito e individual a través de instrumentos cuya construcción se sustenta en la línea de pensamiento que sostiene a toda otra actividad desarrollada con el fin de que cada estudiante alcance los resultados de aprendizaje esperados.

En este marco, los parciales de AyGA tienen como rol ser una instancia a través de la cual se emiten juicios de valor que se traducen en calificaciones que se condicen con la normativa institucional, pero su construcción tiene como foco el alumno que aprende.

A través de ellos, se espera recabar información que permita diferenciar niveles de calidad de los aprendizajes, identificar errores y sus posibles causas para revertirla sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje y, por lo tanto, mejorarlos a través de estrategias de retroalimentación que consideren las características generales como particulares de los estudiantes [8]. En definitiva, se entiende que, tanto una instancia de examen parcial como otras actividades que se apliquen a lo largo de un proceso de evaluación formativa, propician la posibilidad de cambio tanto en los estudiantes como en los docentes. El objetivo principal de la evaluación no está ubicado solo en la certificación sino también el mejoramiento y la potenciación de los procesos de cambio [21].

4 El diseño de un instrumento de evaluación en el marco de la evaluación formativa

La elaboración de los instrumentos de evaluación tiene como punto de partida que cada docente de AyGA crea los exámenes que utilizará para evaluar de manera tradicional al término de cada uno de los tres bloques temáticos (Álgebra Vectorial y Matricial, Geometría Analítica y Álgebra Lineal) según una guía dispensada por la dirección de la Cátedra; donde se orienta al docente en la realización de la tarea, se establecen los resultados de aprendizaje que se esperan observar en las producciones de los estudiantes y los criterios que se aplicarán para decidir si lo producido se corresponde con la categoría de AD o con la AND.

Asimismo, estructuralmente, los exámenes se construyen con tres ejercicios (compuestos por dos ítems cada uno de ellos) y dos problemas (sin ítems). Actividades cuyo diseño surge a través de un acuerdo conceptual acerca de qué significados son otorgados a los términos *ejercicio* y *problema*.
En este sentido, un ejercicio es una situación cerrada que requiere el uso de destrezas o técnicas sobreaprendidas [10]; es decir, en términos de [11], un ejercicio es una situación similar a otras ya conocidas y resueltas, en la que el alumno aplica un conocimiento sin necesidad de reestructurar ni relacionar sus saberes. En cambio, en términos didácticos:

> una situación sólo puede ser concebida como un problema en la medida en que no dispongamos de procedimientos de tipo automático que nos permitan solucionarla de forma más o menos inmediata, sino que requieren de algún modo un proceso de reflexión o toma de decisiones sobre la secuencia de pasos a seguir. [10]

O bien, los problemas son situaciones que presentan mayor complejidad que un ejercicio [11], ya que exigen que los estudiantes realicen una serie de procesos de razonamiento y atraviesen fases no necesariamente fijas para alcanzar un fin, donde -además- la solución puede obtenerse por caminos diferentes.

En otras palabras, se considera que un problema se caracterizará como una consigna con un "rico" potencial matemático para el desarrollo de competencias matemáticas; entendiéndose que él alude a las posibilidades de exploración que la consigna habilita o no, y a las posibilidades de argumentar sobre la validez de la resolución o de la respuesta [22]. En cambio, en un ejercicio, donde la resolución involucra solo procedimientos algorítmicos y mecánicos, el potencial matemático resultaría "débil", porque no brinda posibilidades de exploración, no suele permitir diferentes caminos de resolución y, mayormente, induce pasos a seguir; es decir, en general está pautado lo que el estudiante debe ir resolviendo, de qué manera y en qué momento.

Establecer esta diferenciación, a modo de estrategia didáctica, permite explicitar sin ambigüedades qué evidencias deben observarse en un examen para alcanzar la AND y cuáles para lograr la AD; ya que la figura de AND tiene como criterio que sean resueltos correctamente un ítem de cada uno de los tres ejercicios y, la AD solicita haber alcanzado la figura de AND y resolver correctamente uno de los dos problemas propuestos.

Esta decisión didáctica es considerada como una vía que posibilita diferenciar en las producciones de los estudiantes entre las categorías del saber y del saber hacer; asegurándose -en consecuencia- que aquellos que promocionan demuestran haber alcanzado el nivel inicial de las competencias establecidas a la luz de los objetivos de formación específicos de la asignatura.

Cabe aclarar, en particular, que la instancia de examen final que deberán aprobar los estudiantes que no promocionan forma parte del proceso formativo que se desarrolló a lo largo de la cursada. En ella se espera observar evidencias acerca del saber hacer en el contexto de AyGA; puesto que el instrumento de evaluación sólo se compone con problemas -en términos de la definición dada anteriormente- cuya resolución requiere un aprendizaje que integra y articula los contenidos de los tres bloques temáticos de la asignatura.

5 Análisis del potencial matemático de algunos ejercicios y problemas

Como se adelantó, el proceso de evaluación formativa que incluye instancias de evaluación formal (exámenes parciales y finales) tiene como intención evaluar aquello que los estudiantes son capaces de hacer con los contenidos que ponemos a su disposición. En su desarrollo, como señala [11], se comprende que el aprendizaje es un proceso que ocurre en el interior del sujeto y remite a procesos u operaciones cognitivas. En este sentido, la construcción de las actividades que se discriminan como ejercicios o problemas articulan las operaciones cognoscitivas de reproducción o repetición, conceptualización, aplicación, exploración, movilización, resolución de problemas y comunicación (incluida ésta última en todas las anteriores) expresadas por la taxonomía de Louis d'Hainaut [11] donde se distingue el tipo de interacción que la actividad planteada establece entre el sujeto y la situación de aprendizaje que ha de resolver.

Desde esta perspectiva, se considera que se involucra a los estudiantes en un proceso gradual que tiene como fin ir fomentando el proceso de reflexión y toma de decisiones en un camino que es recorrido entre resolver ejercicios y resolver problemas.

Como caso, en los ejemplos 1 y 2 (ejercicio y problema, respectivamente) correspondientes al bloque temático álgebra vectorial y matricial, si bien en ambos se emplean los mismos conceptos (producto escalar y producto vectorial), en el primero el alumno sólo debe aplicar los conceptos de ángulo entre vectores y área. En cambio, en el segundo, el planteo de la situación requiere del análisis de varias condiciones en simultáneo y la utilización de otros conceptos transversales al álgebra matricial como lo es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Además, en este segundo caso, se interpela el saber hacer solicitándose dos respuestas antagónicas que, el estudiante, debe poder diferenciar en el análisis realizado.

- Ejemplo 1

  Analizar si los puntos A(1;2;2), B(0;3;2) y C(2;1;3) son los vértices de un triángulo rectángulo. Calcular el área de dicho triángulo.

- Ejemplo 2

  Sean los vectores:

$$\vec{u} = (2,4;2) \quad \vec{v} = (1,1;1) \quad \vec{w} = (2,3;-11) \qquad \textbf{(2)}$$

¿Cuáles son todos los valores reales de k para que existan vectores $\vec{a}$ no nulos que verifican la condición enunciada en (3)?, ¿Y para qué no existan? ¿Por qué?

$$\vec{u}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{w}\cdot\vec{a} = \mathrm{k} \qquad \textbf{(3)}$$

Otro situación de diferenciación entre ejercicios y problemas se presentan en los ejemplos 3 y 4 que se refieren a contenidos del segundo bloque (en particular, rectas en el plano). En ambas propuestas se utilizan los conceptos de ecuación de la recta, ecuación de la circunferencia y ángulo entre rectas. Sin embargo, en el ejemplo 3, el alumno puede resolver sin dificultades habiendo resuelto ejercicios similares previamente en los que el objetivo es obtener ecuaciones de rectas y/o cónicas con distintos datos ofrecidos.

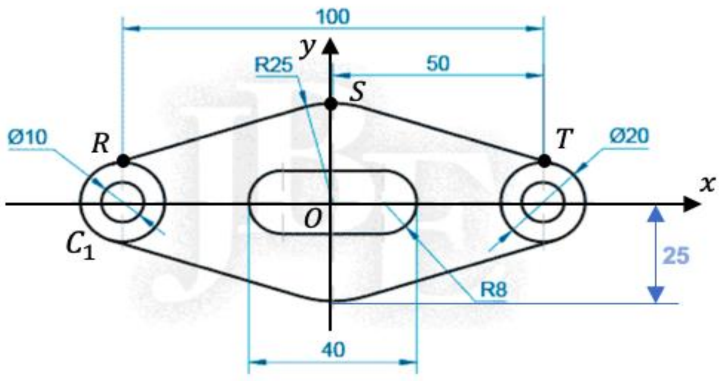


Fig. 1. Pieza mecánica. Fuente creación propia

En cambio, en el ejemplo 4, el primer desafío es la lectura de la figura para poder analizar (en función de lo pedido) cuales son los datos necesarios para su planteo y posterior resolución. Para las consignas enunciadas muchos de los datos de la figura no son necesarios y que el alumno pueda seleccionar aquellos que son necesarios para elaborar una respuesta, muestra un gran nivel de análisis por su parte.

- Ejemplo 3

Hallar la medida del ángulo entre la recta r y la recta s, sabiendo que R(-4;2) pertenece a r, T(4;2) pertenece a s y (0;4) es un punto de ambas rectas. Además, hallar una ecuación de la circunferencia cuyo centro es un punto del eje de abscisas alineado verticalmente con el punto R siendo él un punto de la circunferencia.

- Ejemplo 4

En un sistema de referencia del plano se considera el diseño de una pieza mecánica (véase Fig. 1) de forma tal que los ejes coordenados son ejes de simetría de la pieza; donde, por ejemplo, Ø10 significa diámetro de circunferencia igual a 10 milímetros y R8 significa que el radio de la circunferencia mide 8 milímetros.
Eligiendo la información necesaria y suficiente del gráfico: (i)analizar si la medida del ángulo RST satisface el requisito técnico de medir menos de 160º. (ii) ¿Qué ecuación modeliza a la circunferencia concéntrica con C_1 si respecto de la versión original, el radio de ella se reduce en un 20%? (Justificar sus respuestas)

Los ejemplos 5 y 6 también corresponden al segundo bloque temático sobre Geometría Analítica, pero en este caso se refieren al espacio tridimensional.
El ejemplo 5 es un ejercicio clásico sobre superficies para evaluar que el estudiante sabe diferenciar las ecuaciones de las distintas superficies y sus correspondientes representaciones gráficas.
Asimismo, en el ejemplo 6, el alumno también debe conocer y diferenciar las ecuaciones de las superficies que forman la figura; sin embargo, para poder obtener las mismas es necesario establecer un sistema de referencia tridimensional para volcar los datos numéricos que se brindan en el enunciado. Adquirir una visión tridimensional no es algo simple ni inmediato y es, en este punto, donde se encuentra el mayor desafío para el planteo de ese problema.

- Ejemplo 5

Estudiar, si existen, el valor real que pueden adoptar los parámetros a, b, c y d de forma tal que la superficie de ecuación (4) sea: (i) un elipsoide de revolución, (ii) un cilindro circular recto, (iii) una superficie cónica circular recta. (iv) En los casos en que sea posible elegir un ejemplo y ofrecer un gráfico aproximado de la superficie.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \mathrm{d} \qquad \textbf{(4)}$$

- Ejemplo 6

En la Fig. 2 se observa una tolva industrial formada por un semielipsoide de revolución, un cilindro circular y un cono circular recto, junto al detalle donde se inserta uno de sus cuatro soportes. Este objeto utilizado en la industria es un dispositivo similar a un embudo de gran tamaño destinado al depósito y canalización de materiales granulares o pulverizados, entre otros.
Conociendo (5) y estableciendo un sistema de referencia tridimensional, (i) construir las ecuaciones de cada una de las tres superficies que modelizan la tolva. (ii) ¿Cuáles son las ecuaciones vectoriales que modelizan los cuatro soportes de la tolva? (*Justificar sus respuestas*)

$$\overline{QR} = \overline{RS} = x \text{ m} \quad \overline{PQ} = \tfrac{1}{4}\overline{QR} \quad \overline{RT} = 6{,}5 \text{ cm} \quad \overline{SU} = 7{,}8 \text{ m} \qquad \textbf{(5)}$$

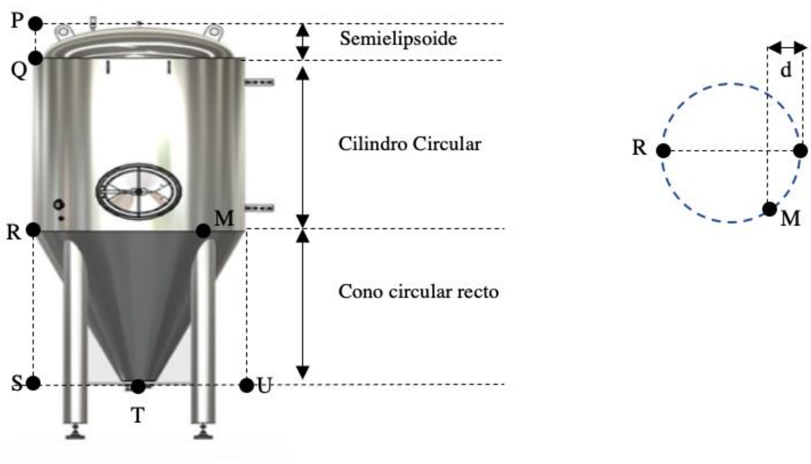


Fig. 2. Tolva industrial. Fuente creación propia.

Por último, los ejemplos 7 y 8 están relacionados con contenidos del Álgebra Lineal del Bloque Temático 3. En ambos casos se abordan los conceptos de definición de subespacio vectorial, base y dimensión.

Al igual que en los ejemplos anteriores, si bien solicitan utilizar los mismos conceptos, los pasos a seguir para contestar los interrogantes son bien distintos.

En el ejemplo 7 sólo se deben analizar las condiciones de la definición para el caso que se plantea mientras que en el ejemplo 8 para poder hacer eso mismo se deben plantear previamente diversas condiciones y analizar las mismas a través del desarrollo de un sistema de ecuaciones lineales.

- Ejemplo 7

Comprobar que el conjunto S formado para matrices simétricas de orden 3x3 es un subespacio vectorial del espacio vectorial real de matrices de orden 3x3, determinar una base y su dimensión.

- Ejemplo 8

Una matriz de orden 3x3 con coeficientes reales se dice que es un cuadrado mágico si la suma de todos los elementos de cada una de las filas, de cada una de las columnas y de las dos diagonales es un mismo número s.
Considerando que la suma s es cero, investigue si la definición de cuadrado mágico define un subespacio vectorial del espacio vectorial real de matrices de orden 3x3. En caso afirmativo, ¿qué dimensión tendría el subespacio vectorial? ¿Qué forma genérica tienen las matrices que pertenecen al subespacio vectorial?

6 Conclusiones

Como señalamos inicialmente, considerar un enfoque de formación por competencias implica modificar, adecuar y/o revisar las propuestas de enseñanza y de evaluación para que se traduzcan como procesos cuya finalidad es el aprendizaje de los estudiantes y, por lo tanto, estos procesos (enseñanza, evaluación y aprendizaje) no deben ser pensados ni planteados como instancias disjuntas.

Con foco en la evaluación formativa se relató -sintéticamente- cómo se constituye una propuesta integral que se entrelaza con la enseñanza y el aprendizaje y, en particular, se expusó bajo que perspectiva teórica construir un instrumento de evaluación tradicional que permita observar en las producciones de los alumnos de manera diferenciada las categorías del saber y saber hacer; vía definida cómo estrategia didáctica a través del cual reunir evidencias de la conformación de las competencias seleccionadas para la asignatura en su nivel inicial.

La experiencia relatada en el marco de la evaluación formativa no sólo mejora las propuestas de evaluación tradicional, sino que fortalece y enriquece la formación de los estudiantes porque resulta explícito hacia donde deben ellos deben dirigir sus esfuerzos.

Asimismo, podemos señalar que en las producciones de los estudiantes las respuestas que ofrecen a los problemas y a los ejercicios permiten observar con mayor profundidad si articulan e integran los conocimientos alejándose de respuestas que responden a estrategias de reproducción y de aplicación taxativa de fórmulas y/o algoritmos. Por lo tanto, para los docentes, las evidencias que se reúnen posibilitan el diseño de una retroalimentación que respeta la heterogeneidad del aula.

En especial, se destaca que pivotear entre ejercicios y problemas sienta las bases para la formación de la competencia genérica *resolver problemas abiertos de ingeniería* [3]; ya que en la etapa inaugural de la carrera y de manera gradual, proponer a los estudiantes resolver problemas estructurados les brindará recursos y estrategias para que a futuro puedan abordar el proceso de resolución de problemas abiertos. Pero, también, se considera que trabajar distinguiendo entre ejercicios y problemas, desde la enseñanza y la evaluación, favorece en los estudiantes procesos de metacognición que sientan las bases de la competencia *aprender a aprender*.

Referencias

1. Coulon, A.: El Oficio del Estudiante. La entrada a la vida universitaria, Antrophos (2005)
2. Ezcurra, A.: Diagnóstico preliminar de las dificultades de los alumnos de primer ingreso a la educación superior, Perfiles Educativos, Vol. XXVI, No 107, pp. 118-123 (2005)
3. CONFEDI: Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la república argentina - Libro rojo. CONFEDI (2018)
4. Jerez, O.; Hasbún, B. y Rittershaussen, S.: El diseño de Syllabus en la educación superior. Una propuesta metodológica, Edición Universidad de Chile (2015)
5. Díaz Barriga, Á.; El enfoque de competencias en la educación: ¿Una alternativa o un disfraz de cambio?. Perfiles educativos, Vol. 28, No. 111, pp. 7-36 (1993)
6. Perrenoud, Ph.: La evaluación de los alumnos. De la excelencia a la regulación de los aprendizajes, Colihue (2008)
7. Tobon, S.: La formación basada en competencias en la Educación Superior: El enfoque complejo. Universidad Autónoma de Guadalajara, Curso Iglu (2008)
8. Camilloni, A.: "Sobre la evaluación formativa de los aprendizajes", en Quehacer Educativo. Año XIV, No. 68, pp. 6-12 (2004)
9. Anijovich, R. (Comp): La evaluación significativa, Paidos (2016)
10. Pozo, J.: La solución de problemas, Santillana (1997)
11. Elola, N., Zanelli, N., Oliva, A. y Toranzos, L.: La evaluación educativa. Fundamentos teóricos y orientaciones prácticas, Aique (2011)
12. Anijovich R. y Capelletti, G.: La evaluación como oportunidad, Paidos (2017)
13. European Society for Engineering Education – SEFI. A framework for Mathematics Curricula in Engineering Education. (2013)
14. Díaz Barriga, F.: Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida, Mc Graw Hill (2006)
15. De Ketele, J.: L'évaluation conjugée en paradigmes. Revue Françoise de Pédagogie, No. 103, pp. 59-80 (1993)
16. Anijovich, R. y González, C.: Evaluar para aprender: conceptos e instrumentos, Aique (2013)
17. Stobart, G.: Tiempo de pruebas. Los usos y abusos de la evaluación, Morata (2008)

18. Panaia, M. “El mundo incierto de la profesión docente universitaria” en Marta Panaia (coord.), Universidades en cambio: ¿generalistas o profesionalizantes?, Miño y Dávila. pp. 215-231 (2015)
19. Mollo, M., Giménez, C. y Kozak, A.: La resolución de problemas del Álgebra Lineal en la formación por competencias. Actas del II Jornadas de Enseñanza e Innovación en carreras de Ingeniería (2019)
20. Cabona, F., Kozak, A., Mollo, M. y Giménez, C.: Las actividades en el aula como oportunidad de evaluación formativa en Álgebra y Geometría Analítica. Actas del II Jornadas de Enseñanza e Innovación en carreras de Ingeniería (2019)
21. Gvirtz, S. y Palamidessi, M.: El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza, Aique (2014)
22. Rodríguez, M.: Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática, Ediciones UNGS. (2017)

Trabajos prácticos en el aula como oportunidad de evaluación formativa en Álgebra y Geometría Analítica

Ana María Kozak, Fabiana Cabona, Marcela Mollo, Leonardo Javier D'Andrea

UDB Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Avenida Ramón Franco 5050, Villa Domínico (1870), Buenos Aires, Argentina
anamakozak@gmail.com, fcabona@gmail.com, mmollo@hotmail.com.ar, dandrealj@yahoo.com.ar

Resumen. El trabajo desarrolla cómo la realización de un Trabajo Práctico de Álgebra Vectorial puede convertirse en una instancia de evaluación formativa. Se presentan las consignas de trabajo y los momentos de realización de la actividad, que incluyeron la autoevaluación y la coevaluación, así como la elaboración conjunta de los criterios de evaluación y su formalización en una lista de cotejo. Se relata la forma que asumió la devolución de los trabajos de manera que permitiera determinar el lugar en el cual los estudiantes se encontraban en su proceso de aprendizaje, así como analizar qué faltaba aprender. Y se expone cómo la realización del Trabajo Práctico permitió a los docentes obtener evidencias para la retroalimentación del proceso de aprendizaje y para realizar ajustes en el proceso de enseñanza. En la realización y corrección del Trabajo Práctico de Álgebra Vectorial confluyen todos los elementos necesarios para que la evaluación sea formativa.

Palabras Clave: Competencias, Evaluación formativa, Agentes de evaluación, Lista de cotejo, Álgebra.

1 Introducción

A partir de 2016 un grupo de docentes de la UTN-FRA iniciamos un espacio de trabajo colectivo constituido a partir del enfoque de la práctica reflexiva ([1], [2], [3]) que revisa las formas de actuar, las creencias, los supuestos, las teorías en uso implícitas en nuestras prácticas cotidianas, a la luz de lecturas, saberes teóricos que las interpretan, las problematizan y también, las modifican.

En este marco, tomando como antecedentes los documentos del Consejo Federal de Decanos de Ingenieria (CONFEDI) ([4], [5], [6]), analizamos y diseñamos propuestas de clase a través de marcos teóricos acordes a la definición de las competencias genéricas y específicas de egreso para las carreras de Ingeniería.

Las competencias son "procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir), para realizar actividades y/o resolver problemas" [7] y se apoyan en conocimientos y su manifestación se revela también en "habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado" [8].

En consecuencia, alcanzar esos procesos complejos requiere movilizar durante la formación recursos y estrategias para resolver problemas, y actuar como lo haría un profesional. En este sentido, la actividad del estudiante es fundamental y el enfoque de competencias exige pensar nuevos modos de enseñar y, por consiguiente, nuevos modos de evaluar.

Asumimos que la evaluación es un tema complejo y forma parte de las preocupaciones de los docentes. Demás está decir, que en la Universidad se habilita para el ejercicio de una profesión y que, por lo tanto, la evaluación cumple una función certificativa. Pero, las inquietudes que nos movilizan son cómo hacer para que la evaluación se integre, se entrelace con la enseñanza y el aprendizaje, cómo hacer para que la evaluación nos permita organizar de manera más eficaz las actividades de enseñanza, nos permita obtener evidencia de cómo están aprendiendo nuestros estudiantes para ayudarlos a comprender mejor.

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

Por ello, en este trabajo nos proponemos presentar cómo un Trabajo Práctico (TP) de Álgebra Vectorial dentro de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica (AyGA) realizado en dos cursos de primer año del turno mañana, puede ser parte de un proceso de evaluación y constituirse en una instancia de enseñanza y de aprendizaje.
De enseñanza, porque es una oportunidad para los docentes de utilizar las producciones de los alumnos como evidencias de lo aprendido y con el fin de reconocer en ellas lo logrado, pero también para sugerirles nuevas propuestas y oportunidades para aprender lo que falta. Y de aprendizaje puesto que tiene como intención promover instancias de metacognición; es decir, constituirse en una instancia para que el estudiante se torne consciente y pueda reconocer lo aprendido como contenido, y -también- pueda identificar las estrategias cognitivas que ha puesto en juego en el proceso de aprender y cuáles de esas operaciones han favorecido u obstaculizado sus aprendizajes [8]. Pero, además, pretendemos analizar cómo ese proceso puede ser potenciado a través de la autoevaluación y la coevaluación o evaluación entre pares

2 Aproximaciones acerca de la evaluación

La literatura especializada observa que, en general, en las prácticas docentes las dimensiones y las tensiones que predominan son las relativas al currículum y a la enseñanza, quedando relegada aquella referida a la evaluación; porque "es común que se la ubique como un acto final desprendido de las acciones de la enseñanza y del aprendizaje" [9]. No obstante, en el marco de las buenas prácticas de evaluación [8], la planificación de una secuencia de clases, una unidad temática o un curso completo, requiere considerar y dar espacio a este proceso estableciéndose en qué momentos se recogerá la información, definir qué aprendizajes deben lograr los estudiantes considerando cómo se vinculan con los propósitos que los docentes se han propuesto; la selección y elaboración de instrumentos de evaluación, además de anticipar modos de realizar devoluciones a los estudiantes que contribuyan al logro de los aprendizajes. Es decir, las buenas prácticas de evaluación son

> Prácticas sin sorpresas; enmarcadas en la enseñanza; que se desprenden del clima, ritmo y tipo de actividad de la clase; en la que los desafíos cognitivos no son temas de las evaluaciones sino de la vida cotidiana del aula, atractivas para los estudiantes y con consecuencias positivas respecto de los aprendizajes. [10]

No obstante, existen diversos paradigmas que se entraman con los contextos de producción del conocimiento pedagógico de cada época que ofrecen marcos teóricos para pensar el concepto de evaluar con distintos grados de amplitud y distintas concepciones de la evaluación en su articulación con la enseñanza, los aprendizajes, o en el contexto de las instituciones educativas o de los sistemas educativos. Como síntesis de la gama de marcos teóricos que posibilitan la definición de un proceso de evaluación, pueden identificarse dos lógicas diferenciadas o posiciones polares. [11]
Al respecto, una de estas posturas implica pensar una enseñanza en la que se espera que los estudiantes cumplan el rol de sujetos de aprendizaje, significando que son capaces de reproducir secuencias de información ya organizadas. Este tipo de construcción de los aprendizajes responde a un conocimiento declarativo, que suele pensarse como un proceso de incorporación rápida y sencilla de la información, porque se trata sólo de reproducción. En este caso, la evaluación -identificada como *sumativa* o *normativa*- es concebida como una práctica homogénea, retrospectiva, intermitente, socialmente determinada y, basada en la medida ya que sus resultados están al servicio de la acreditación y la promoción. [12], [13]

El otro polo, promueve una enseñanza que reconoce a los estudiantes como sujetos de conocimiento que no implica únicamente adquisición de conocimientos, sino que requiere la articulación de funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades y destrezas consolidadas en el proceso de aprendizaje e intencionadas por una propuesta pedagógica que incluya las actividades que permitan su desarrollo [12]. En esta situación, la evaluación no esta escindida de la enseñanza ni del aprendizaje, sino que es un elemento esencial y continuo que guía el proceso y la reflexión tanto de los estudiantes como de los docentes. En este caso, es una evaluación denominada *formativa* y "es una práctica que se co-constituye con los alumnos en el contexto social de cada comunidad de aprendizaje" [14]; ya que es un proceso en el cual se recaba información con el propósito de revisar y modificar la enseñanza y el aprendizaje en función de las necesidades de los estudiantes y las expectativas de logro para alcanzar.

Estas dos perspectivas respecto de la posición del sujeto/estudiante en relación con el conocimiento que son, también, posibilidades de evaluación ponen en evidencia que este concepto describe un campo teórico complejo y controvertido porque su alcance es tanto para acreditar y emitir juicios de valor como para diagnosticar, retroalimentar, reflexionar, regular y mejorar los aprendizajes y la enseñanza. Corresponde a los docentes la decisión respecto de una u otra, en un contexto institucional que establece las normas que enmarcan la tarea pedagógica, según aquello que verdaderamente importa.
Como docentes nos posicionamos en la perspectiva según la cual la evaluación está al servicio del aprendizaje y sirve tanto a los estudiantes como a los docentes. En este sentido, el lugar del docente es central en el diseño de situaciones que permitan a los estudiantes revisar las estrategias puestas en juego al resolver una tarea, así como en el diseño de situaciones que permitan valorar la producción a la luz de lo esperado. No obstante, es posible diferenciar el aporte de distintos actores en tanto *agentes de evaluación* formativa: el docente, los propios estudiantes, los pares. Y, por lo tanto, enriquecer al proceso de evaluación articulando instancias de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.
Recordemos que, la *autoevaluación* consiste en la "implementación sistemática de instancias que permitan a los alumnos evaluar sus producciones y el modo en el que las han encarado y resuelto (o no)" [12]. La evaluación entre pares o *coevaluación* incorpora la mirada de un par sobre la producción y/o reflexión realizada por otro estudiante. Y la *heteroevaluación* es la evaluación realizada por el docente u otra persona que ocupa un rol distinto a ser estudiante, que, estando inmerso en la situación de enseñanza, aporta una mirada sobre las estrategias y la producción de los estudiantes desde un lugar diferente.

3 La evaluación formativa a partir de un trabajo práctico en pequeños grupos sobre Álgebra Vectorial

En nuestra Universidad la aprobación de los Trabajos Prácticos (TP) constituye -en general- uno de los requisitos para obtener la regularidad en las asignaturas. Quienes llevamos adelante la experiencia y sostenemos que es necesario generar instancias para que los estudiantes den cuenta de qué y cómo están aprendiendo, consideramos que una de ellas para lograr evidencia sistemática es la realización de TP presenciales o domiciliarios, individuales o en pequeños grupos; porque ellos pertenecen al conjunto de actividades que se pueden diseñar al planificar la enseñanza constituyéndose -según [15]- como instrumentos que facilitan crear situaciones y abordar contenidos que permiten a los estudiantes vivir experiencias necesarias para su propia transformación.
En este sentido, planificamos un TP para que los estudiantes puedan reconocer lo logrado, pero además qué falta por aprender. Y a los docentes ajustar lo que fuera necesario en el proceso de enseñanza como, también, retroalimentar el proceso de aprendizaje de cada uno de los estudiantes. Además, se eligió realizarlo de forma presencial y grupal como instancia de práctica porque:

> La práctica en una clase es formativa en la medida en que la evidencia acerca de los logros de los estudiantes es obtenida, interpretada y usada por docentes, aprendices o sus pares para tomar decisiones acerca de sus próximos pasos en la instrucción que tengan probabilidades de ser mejores, o mejor fundadas, que las decisiones que ellos hubieran tomado en la ausencia de la evidencia que fue obtenida. [16]

Estas ideas fundaron el momento reflexivo y de acción del TP de Álgebra Vectorial que describimos a continuación.

3.1. Momento de la reflexión del TP de Álgebra Vectorial

Dos clases previas a la fecha establecida para la realización del TP, los estudiantes conformaron los grupos de tres integrantes. Se explicó que el TP estaría compuesto por dos ejercicios, y que la realización de la actividad tendría tres momentos. En el primero, cada grupo resolvería dos juegos del TP. Luego, en uno de ellos, autoevaluarían su producción. Y, por último, evaluarían el trabajo producido por otro grupo de compañeros.

Para los procesos de corrección se eligió aplicar, como *asistente de evaluación*, una *lista de cotejo*; entendiéndose que:

> Una lista de control o cotejo consiste en una serie de aspectos, características, cualidades, acciones, observables sobre un proceso o un procedimiento que suele registrarse en un cuadro de doble entrada. El proceso o procedimiento que ha de observarse está descompuesto en partes. Al lado de cada componente del proceso, se colocan columnas en las que se marca su presencia o ausencia. También, se pueden incluir algunas características deseables tanto del proceso como del producto, así como errores o fallas más comunes. [12]

Además, se dedicó tiempo para consensuar con los estudiantes los *descriptores* de la lista de cotejo y la correspondiente valoración a asignar; porque compartir con ellos los *propósitos* y los *criterios* posibilita establecer un contrato didáctico donde los docentes y alumnos se responsabilizan por la enseñanza y el aprendizaje; pero, además, promueven la autonomía y un mayor compromiso porque es transparente el por qué y el para qué de la actividad.
En este sentido, también, se acordó la valoración de cada uno de los descriptores y cómo se efectuaría la corrección. Es decir, se analizó con los estudiantes qué tipo de errores podían considerarse leves y cuáles graves; y -en conjunto- decidieron cuántos puntos descontarían para cada tipo de error. A su vez, se estableció que la corrección no sólo implicaría asignar un puntaje, sino que cada grupo debería consignar qué les gustó del trabajo de los compañeros, qué mejorarían y cómo lo harían. Acuerdos que también empleamos los docentes para la corrección.
Este paso de la realización conjunta del momento de la acción se plasmó en un documento que se sociabilizó a través del Foro de Novedades del aula virtual y que se transcribe en la Tabla 1

Tabla 1. TP Álgebra Vectorial: Lista de cotejo acordada con los estudiantes de 1º 102º y 1º 106º de AyGA en UTN-FRA**.** Fuente creación propia.

INDICADOR (A)	Valor (A)	Puntaje Grupo (B)	Puntaje Compañeros (C)	Puntaje Docentes (D)
Análisis de los datos del ejercicio/problema (señala contexto, identifican datos e incógnitas o variables y métodos a utilizar)	5			
Planteamiento del problema (interpreta con diagramas o dibujos, traduce el ejercicio/problema en un modelo, selecciona fórmulas)	5			
Desarrollo/Procedimiento (expone argumentos y justificaciones)	15			
Análisis de resultados (razonamiento matemático, interpretación matemática)	10			
Conclusión (Enunciación de respuesta, interpretación de los resultados y/o validación de ellos en el contexto del ejercicio/problema)	10			
Total	45 puntos			
Condición APROBÓ: (F)				
Comentarios acerca del trabajo y la asignación del puntaje: (G)				

(A) Los *indicadores* se corresponden con las etapas del proceso de análisis, resolución y enunciado de respuesta presentes en una tarea solicitada.
(B) *Valor*, es el puntaje máximo que se otorga a cada etapa. La variación del puntaje de cada indicador se corresponde con la complejidad del proceso que se evalúa.
(C) *Puntaje Grupo*. Significa que cada grupo, una vez resuelta la tarea, deberá evaluar su desempeño según la lista de cotejo. Esto se llama autoevaluación.

(D) *Puntaje Compañeros*. Cada grupo presentará dos juegos de la resolución de las actividades pedidas. Un grupo de compañeros evaluará la tarea que presenta otro grupo. Esto se llama coevaluación o evaluación entre pares.
(E) *Puntaje Docentes*. Los profesores evaluaremos la tarea de cada grupo. Esto se llama heteroevaluación.
(F) *Condición Aprobó*. Se acordará entre todos -en el aula- una vez realizados los procesos de evaluación que se indican en los ítems (C), (D) y (E). (*Podemos ir pensando qué debería tener un trabajo para alcanzar la nota 5 (cinco) correspondiente a la condición de Aprobó según la reglamentación vigente para aprobar la cursada*)
(G) Cada actor que evalúa deberá decir en *comentarios acerca del trabajo y la asignación de puntaje*: qué es lo que más les gustó del trabajo, qué mejorarían y qué sugerencias le harían al grupo para mejorar su desempeño. También, justificar los puntos que descuentan si es que no se otorga el puntaje máximo.

3.2. Momento de la acción del TP de Álgebra Vectorial

El día de realización del TP cada grupo produjo dos juegos de respuestas a los ejercicios/problemas que se muestran en la Figura 1. En uno de ellos se autoevaluaron y esa producción fue la corregida por el equipo docente. El otro juego sólo identificado por un número fue entregado para su corrección a un grupo de pares; que para la clase siguiente tuvieron que traerlo corregido.

1) Sean los vectores v = (3;1;0), w = (4;2;-1) y u = (2;1;-2). Hallar todos los vectores a del espacio tridimensional tales que la norma del vector proyección de a sobre u sea 2 y, a la vez, a sea ortogonal tanto a v como a w.
2) Encontrar, justificando el procedimiento, todos los vectores a = (1;b;c) que son combinación lineal de los vectores del conjunto A={(1;1;0),(2;1;1),(-1;0;-1)}. Ofrecer, justificando, un ejemplo de un vector que cumpla con la condición pedida y otro que no.

Fig. 1: Ejercicios/problemas del TP Álgebra Vectorial. Fuente elaboración propia

Para la selección de las actividades del TP se tuvo en cuenta que un ejercicio es una “situación cerrada que requiere el uso de “destrezas o técnicas sobreaprendidas (es decir convertidas en rutinas automatizadas como consecuencia de una práctica continuada [17]) y que un problema es

> una situación sólo puede ser concebida como un problema en la medida en que no dispongamos de procedimientos de tipo automático que nos permitan solucionarla de forma más o menos inmediata, sino que requieren de algún modo un proceso de reflexión o toma de decisiones sobre la secuencia de pasos a seguir. [17]

3.3. Momento de la evaluación del TP de Álgebra Vectorial

Siguiendo [16] y [18], hay ciertos procesos que son centrales en la evaluación formativa: que los estudiantes entiendan adónde deberían llegar, generar evidencias de qué y cómo están aprendiendo y ofrecer devoluciones y orientaciones que les permita ajustar su desempeño y continuar aprendiendo.
En este sentido, se pusieron en juego una cantidad de elementos que confluyen en la evaluación formativa:

- Un asistente de evaluación, la lista de cotejo que permitió transparentar aquellos aspectos, cualidades, acciones necesarias para la resolución de la tarea a realizar.
- Un valor para cada uno de esos *indicadores* que permitiría reconocer lo logrado a través de una valoración conocida, como la asignación de puntaje. Ese valor ideal debía contrastarse con el puntaje asignado por el mismo grupo, por los compañeros y los docentes, pero debía complementarse con comentarios de valoración positiva acerca del trabajo y la asignación de puntaje constituyendo la denominada devolución o retroalimentación.

En este punto, es importante diferenciar la valoración de la devolución y la orientación. La valoración o juicio a través de las calificaciones no dan información específica sobre qué y cómo mejorar el desempeño. En cambio, la devolución es información sobre cómo una persona se desempeñó a la luz de lo que intentó hacer -intento contra efecto, desempeño real contra desempeño ideal- [18]. Asimismo, la mejor devolución es altamente específica, directamente reveladora o altamente descriptiva de lo que realmente resultó, clara para el/la ejecutante y disponible y ofrecida en términos de objetivos y estándares específicos. Por ende, una devolución adecuada tiene como características centrales que:

> (…) brinda al estudiante evidencias concretas sobre su trabajo, que le permiten confirmar o no la pertinencia del mismo. El alumno puede comparar lo que hizo con lo que se esperaba (…) incluye la posibilidad de que los estudiantes realicen autoevaluaciones y autoajustes [18]

Por otra parte, la orientación contribuye a comprender por qué una parte de su trabajo es inadecuada. De esta manera -al ser la intención convertir la actividad en una instancia de evaluación entrelazada con la enseñanza y el aprendizaje- la valoración y la asignación de puntaje tiene valor en tanto se complementa con los comentarios de devolución por parte de los pares y de los docentes facilitando iniciar un proceso de diálogo con los estudiantes que contribuya en la mejora de sus aprendizajes.
El análisis de las producciones por parte de los compañeros se constituyó en una instancia con un importante valor formativo. Los comentarios si bien incluyeron valoración apuntaron a brindar una devolución descriptiva y específica. Por ejemplo, los estudiantes señalaron

> "Buen planteamiento, pero cuenta con varios errores en el mecanismo y algunos errores teóricos" (06/2018, Grupo 3, AyGA 106)

> "El segundo punto del trabajo no se encuentra resuelto, sino que únicamente se lo plantea para dar comienzo con la resolución del mismo. En el primer punto existe un grave error conceptual al confundir el concepto de norma y valor absoluto que afecta al resultado" (06/2018, Grupo 10, AyGA 102)

A su vez, finalizada la etapa de evaluación y entregadas a cada grupo las dos producciones evaluadas, se efectuó una puesta en común tanto para conversar acerca de la resolución de las actividades como para evaluar globalmente el dispositivo de formación, obteniéndose opiniones tanto respecto de la resolución de los ejercicios/problemas del TP como referidos al rol de evaluadores; como casos representativos los estudiantes expresaron que:

"La proyección nos costó resolverla, creo que ese tema no lo teníamos claro" (06/2018, Santiago, AyGA 106)

"Hicimos lío con el contexto, como ustedes dicen, pasó que un vector se hizo número" (06/2018, Paula, AyGA 102)

"Me di cuenta de que para corregir tenía que saber teoría" (06/2018, Diana, AyGA 106)

> "Entendí porque es importante justificar cómo se resuelve, porque si eso no está, la corrección puede ser equivocada, porque quizás lo que entiendo no es lo que quiso poner quien lo resolvió" (06/2018, Carla, AyGA 102)

"¡Qué difícil es corregir si el trabajo está desprolijo!" (06/2018, Mariano, AyGA 102)

Cabe aclarar que, en ninguno de los cursos se logró establecer el puntaje de aprobación; porque, mayormente, los estudiantes expresaron que no era necesaria una nota final; que el proceso de triple corrección dejaba en claro, qué estuvo bien, qué no, qué debilidades existían. Ante este posicionamiento, los docentes, resolvimos no forzar la situación de calificar numéricamente, porque se consideró que la información relevada luego de esta experiencia donde se pusieron en juego distintas instancias de análisis, de devolución y de metacognición era suficiente para reconocer singularidades y generalidades de la población estudiantil en cada uno de los cursos.

4 Conclusiones

Como señalamos inicialmente, abordar un enfoque de formación por competencias implica cambios en las propuestas de enseñanza y de evaluación; en particular, en este marco, la evaluación formativa se constituye en una propuesta integral que se entrelaza con la enseñanza y el aprendizaje.
La experiencia relatada en el marco de la evaluación formativa no sólo mejora las propuestas de clase, sino que fortalece y enriquece la formación de los estudiantes con el fin de que:

> "(...) sean cada vez más capaces de juzgar la calidad de su propio trabajo y la de los ejecutados por los demás y comprender lo que implica un aprendizaje eficaz. El fundamento de ello es que, con el fin de evaluar su propio trabajo, los aprendices tienen que ser conscientes de lo que supone una actuación satisfactoria ("adonde tienen que llegar") y en qué fase están de su propio aprendizaje. Estas competencias sientan las bases de la autorregulación ("metacognición"), que se considera como una poderosa fuente de aprendizaje eficaz (...)" [19]

En especial, destacamos que está asociada a sentar bases para la formación de la competencia genérica *aprender a aprender* porque revisa los procesos que se ponen en juego a la hora de abordar una tarea, y a *resolver problemas de Ingeniería* de manera gradual, empezando por problemas estructurados en la etapa inaugural de la carrera con la finalidad de brindarles a los estudiantes recursos y estrategias para que a futuro puedan abordar el proceso de resolución de problemas abiertos.
Asimismo, podemos señalar que los estudiantes -mayormente- demostraron compromiso con la realización de la actividad. Realizaron correcciones con buen criterio, pertinentes y correctas desde el campo disciplinar, detalladas; y, observando, la gramática de las devoluciones y orientaciones fueron respetuosos de los trabajos de los compañeros. Existieron casos donde adjuntaron la resolución correcta de los ejercicios, otros donde completaron la respuesta parcial; también, ofrecieron ayuda a sus pares para estudiar. Superaron nuestras expectativas, se condujeron como sujetos de conocimiento.
Por último, creemos que es importante seleccionar problemas y contenidos que favorezcan prácticas como las relatadas ya que, sin duda, otorgan a los estudiantes un rol activo y tienen un alto valor formativo.

Referencias

1. Shön, D.: *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*, Paidós (1992)
2. Anijovich, R.: *Transitar la formación pedagógica: dispositivos y estrategias*, Paidós (2009)
3. Perrenoud, Ph.: *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Profesionalización y razón pedagógica*, GRAÓ (2011).
4. CONFEDI: *Competencias en ingeniería*, Universidad FASTA (2014)
5. CONFEDI: *Competencias y perfil del Ingeniero Iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación*, ASIBEI (2016)
6. CONFEDI: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la república argentina - Libro rojo*, CONFEDI (2018)
7. Tobon, S.: *La formación basada en competencias en la Educación Superior: El enfoque complejo*. Universidad Autónoma de Guadalajara, Curso Iglú (2008)
8. Anijovich R.; Capelletti, G.: *La evaluación como* oportunidad, Paidós (2017)
9. Celman, S.: ¿Es posible mejorar la evaluación y transformarla en herramienta de conocimiento? En Camilloni, A.; Celman, S.; Maté, C.; Litwin, E.: *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Paidós (1998)
10. Litwin, E: *El oficio de enseñar: condiciones y contextos*, Paidós (2008)
11. Perrenoud, Ph. (2008), *La evaluación de los alumnos. De la excelencia a la regulación de los aprendizajes*, Colihue (2008)
12. Anijovich, R., González, C.: *Evaluar para aprender. Conceptos e instrumentos,* Aique (2013)
13. Gvirtz, S.; Palamidessi, M.: *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*, Aique (2014)
14. Anijovich, R. (Comp).: *La evaluación significativa,* Paidós (2016)
15. Anijovich, R.; Mora S.: *Estrategias de enseñanza. Otra mirada al quehacer en el aula,* Aique (2014)
16. William, D.: Una síntesis integradora de la investigación e implicancias para una nueva teoría de la evaluación formativa. http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.4080/pr.4080.pdf (2009). Accedido el 6 de Julio de 2019
17. Pozo, J.: *La solución de problemas*, Santillana (1997)
18. Ravela, P.; Picaroni, B.; Loureiro, G.: *¿Cómo mejorar la evaluación en el aula? Reflexiones y propuestas de trabajo para docentes*, Grupo Magro Editores (2017)
19. Stobart, G.: *Tiempo de pruebas. Los usos y abusos de la evaluación*, Morata (2008)

Índice de Autores

Libro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Versión actualizada diciembre 2021, EMCI 2021.
e-ISBN: 978-9915-9435-0-3
DOI: 10.22235/emci2021.2
19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Y

Z